Matematika A3

Valószínűségszámítás, 4. gyakorlat

2013/14. tavaszi félév

1. Folytonos eloszlások

Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és az intervallum minden pontjának nulla a valószínűsége, akkor azt mondjuk, hogy folytonos valószínűségi változóval van dolgunk.

FELADATOK:

1. Mondjon minél több példát a való életből
   - diszkrét
   - folytonos

   valószínűségi változóra!

2. Egyenletes eloszlás

1. Egyenletes eloszlás intervallumon
Tekintsünk egy véges, pozitív hosszúságú $[A; B]$ intervallumot. Tegyük fel, hogy valaki az intervallumban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az $[A; B]$ intervallum pontjai, azaz az eseménytér az $[A; B]$ intervallum. Ha az $[A; B]$ intervallum bármely részintervalluma esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részintervallumba esik

$$P\left(\text{részintervallum}\right) = \frac{\text{részintervallum hossza}}{\text{eseménytér hossza}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az $[A; B]$ intervallumon. Ilyenkor egy részintervallum valószínűsége csak a részintervallum hosszától függ, de attól, hogy maga a részintervallum, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részintervallomot eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részintervallum valószínűsége nem változik meg.

2. Egyenletes eloszlás síkbeli halmazon
Tekintsünk egy véges, pozitív területű A halmazt a síkon. Tegyük fel, hogy valaki a halmazban választ egy véletlen pontot, vagyis a lehetséges pontok az A halmaz pontjai, azaz az eseménytér az A halmaz. Ha az A halmaz bármely részhalmaza esetén annak a valószínűsége, hogy a véletlen pont a részhalmazba esik

$$\text{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\text{részhalmaz területe}}{\text{eseménytér területe}}$$

akkor azt mondjuk, hogy a véletlen pont egyenletes eloszlású az A halmazon. Ilyenkor egy részhalmaz valószínűsége csak a részhalmaz területétől függ, de attól, hogy maga a részhalmaz, hol helyezkedik el az eseménytéren belül, attól nem függ. Ha egy részhalmazt eltolunk az eseménytéren belül, akkor ettől a részhalmaz valószínűsége nem változik meg.

3. Egyenletes eloszlás térbeli halmazon

Anélkül, hogy részleteznénk, megemlítjük, hogy véges, pozitív térfogatú térrészen vett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{részhalmaz valószínűsége} = \frac{\text{részhalmaz térfogata}}{\text{eseménytér térfogata}}$$

FELADATOK:

2. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a pont a kör belsejébe esik?

3. Kerítésünk 3 cm átmérőjű függőleges vasrudakból áll 20 centiméter periódiussal. Egy 5 cm átmérőjű tenisz labdát háttal állva a kerítésnek véletlenszerűen dobunk merőlegesen a kerítés felé. Mi a valószínűsége annak, hogy a labda a rudakat nem érintve átrepül a kerítésen?

4. *(Az előző feladat folytatása)* A szomszéd kerítése ugyanolyan függőleges vasrudakból áll, mint a miénk, de ő vízszintesen is tett rudakat 40 centiméter periódiussal. Mi a valószínűsége annak, hogy a tenisz labda a rudakat nem érintve átrepül a szomszéd kerítésén?

5. Egy városban a metró szabályosan 5 percenként jár. Az én érkezési pillanatom a metróállomásra véletlenszerű. Attól függ, hogy hogyan ébredek, mennyi ideig vacakolok, hogyan tudok átmenni a zebrákon, stb. Mi a valószínűsége annak, hogy
   (a) kevesebb, mint 3 percet kell várnom a metróra?
   (b) több, mint 3 percet kell várnom a metróra?
   (c) matematikai pontossággal pontosan 3 percet kell várnom a metróra?
   (d) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $0 < x < 5$?
   (e) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $x < 0$?
   (f) kevesebb, mint x percet kell várnom a metróra, ha $5 < x$?
   (g) matematikai pontossággal pontosan x percet kell várnom a metróra?

6. Mi a valószínűsége, hogy a $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül
   (a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?
   (b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátánál?

7. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy
   (a) a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél?
   (b) a területe kisebb $1/4$ területegységnél?
   (c) a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $1/4$ területegységnél?

8. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk meg, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy
   (a) a téglalap kerülete kisebb z hosszegységnél, ahol $0 < z < 4$?
   (b) a területe kisebb z területegységnél, ahol $0 < z < 1$?

9. Jancsi és Juliska randevúzik. Dél és 1 óra között egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint érkeznek egy megbeszélt utcasarokra. Megegyezés szerint, ha nem ér oda addig a másik, akkor 20 perc várakozás után már nem várnak tovább az utcasarkon egymásra, hanem betérnek a sarkon lévő büffébe melegedni, és ott várnak tovább a másikra. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) a az utcasarkon találkoznak?

   (b) a büfében találkoznak úgy, hogy Jancsi előbb megy be, mint Juliska?

10. Mi a valószínűsége, hogy 3 független $(0,1)$-en választott pont közül pontosan $1-1$ essen a $(0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, és $(\frac{2}{3},1)$ intervallumba?

11. 0 és 10 között két számot választunk egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint.

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a két szám különbségének abszolút értéke kisebb, mint a kisebbik szám?

   (b) A két szám három darabra vágja a $[0,10]$ intervallumot. Mi valószínűsége annak, hogy a három részintervallumból háromszöget lehet szerkeszteni?

3. További feladatok

12. Egy piros, egy fehér és egy zöld pontot teszünk a $[0,1]$ intervallumra egymástól függetlenül, külön-külön egyenletes eloszlás szerint. Mi a valószínűsége annak, hogy a piros és a zöld pont közötti távolság legfeljebb $\frac{1}{3}$, és a fehér pont a piros és a zöld közé kerül?

13. Jancsi és Juliska randevúzik: dél és 1 óra között egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint érkeznek a megbeszélt helyre. Megegyezés szerint, ha a másik nincs még ott, akkor

   (a) 20 perc várakozás után egyikük sem vár tovább a másikra, hanem - duzzogva - elmegy;

   (b) Jancsi 20 percet vár Juliskára, de Juliska csak 10 percet vár Jancsira.

   Kérdés mindkét esetben: mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

14. Villamossal jövök az egyetemre, és azzal megyek haza. A várakozási időm reggel és este függetlenek egymástól, és egyenletes eloszlást követnek 0 és 3 perc között.

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az összes várakozási időm (reggeli plusz délutáni) kevesebb, mint 4 perc?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a délutáni várakozási idő több, mint a reggeli várakozási idő kétszerese?

15. Egy kalapácsvető bekötött szemmel hajítja el a kalapácsot, pár forgás után, véletlenszerűen. A sportolót $0°$ és $300°$ szög között védőháló veszi körül, amin azonban tátong egy 2 foknyi rés $100°$ és $102°$ között.

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a háló megfogja a kalapácsot?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a kalapács a 2 fokos résen keresztül kirepül a védőhálón kívülre?

   (c) Feltéve, hogy a kalapács kiröpült a védőhálón kívülre, mi a valószínűsége, hogy a 2 fokos résen repült ki?

16. A reggeli buszom egyenletes eloszlású időpontban érkezik $7:30$ és $7:40$ között.

   (a) Hányra menjek oda a megállóba, ha legalább 80%-os esélyt szeretnék arra, hogy elérjem?

   (b) Már késésben vagyok, mikor elindulok otthonról, és látom, hogy csak $7:37$-re fogok kiérni a megállóba. Gyorsan kötök egy fogadást a lakótársammal, 100 Ft-ot teszek arra, hogy lekésem a buszt, de azért mindketten tudjuk, hogy rohanni fogok és odaérek $7:37$-re. Mennyit tegyen ellenemben a lakótársam, hogy igazságos legyen a fogadás?

17. *Buffon-féle tűprobléma avagy hogyan közelítsük meg a π-t tű és papír segítségével - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egy nagy papírlapra 10 cm-enként párhuzamos egyeneseket húzunk, majd egy 5 cm hosszú tűt magasról a papírra ejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy

    (a) a tű metszi valamelyik egyenest?

    (b) metszi valamelyik egyenest és és 45 foknál kisebb szöget zár be az egyenessel?

18. *Bertrand-paradoxon - híres probléma, érdemes utánanézni*: Egyezzünk meg abban, hogy a kör egy húrját "hosszúnak" nevezzük, ha a húrhoz tartozó középponti szög 120 foknál nagyobb, vagyis a húr hosszabb, mint a körbe rajzolható egyenlőoldalú háromszög oldalának a hossza. Egységsugarú kör esetén ez annyit jelent, hogy a húr hosszabb, mint $\sqrt{3}$ egység. Mi a valószínűsége annak, hogy a kör húrjai közül véletlenszerűen választva hosszú húr adódik, ha a véletlenszerű választás az alábbi módszerek egyikét jelenti?

    (a) A kör egyik átmérőjét véletlenszerűen kiválasztjuk úgy, hogy az átmérő irányát kijelölő szög egyenletes eloszlású legyen 0 és 2π között, majd pedig a kiválasztott átmérőn egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Azt a húrt tekintjük, mely átmegy ezen a ponton, és merőleges az átmérőre.

    (b) A kör kerületén egymástól függetlenül két pontot választunk egyenletes eloszlás szerint, és tekintjük a két pont által meghatározott húrt.

    (c) A körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot, és tekintjük azt a húrt, aminek ez a pont a felezőpontja.