Kifejtési tétel, vektoriális szorzat, műveletek mátrixokkal

Bevezetés a számításelméletbe 1.
6. gyakorlat

2015. október 13.

Előjeles aldetermináns

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel

Ha A $n \times n$-es mátrix és $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rögzített, akkor

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(i-edik sor szerinti kifejtés); ha $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ rögzített, akkor

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

(j-edik oszlop szerinti kifejtés).

Vektoriális szorzat

Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ térvektorok vektoriális szorzata

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

ahol $\underline{i} = (1, 0, 0)$, $\underline{j} = (0, 1, 0)$, $\underline{k} = (0, 0, 1)$.

Áll.

Ha A $m \times n$-es, B $n \times k$-as mátrix, akkor $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Determinánsok szorzástétele

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával!

   (a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek
   (a) egyetlen eleme sem 0 és minden előjeles aldeterminánsa 0?
   (b) egyetlen eleme sem 0 és pontosan egy olyan előjeles aldeterminánsa van, mely nem 0?

3. Írjuk fel az $A(1;2;12)$, $B(3;1;3)$ és $C(2;-1;-5)$ pontokon átmenő sík egyenletét.

4. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^\top$, $AB + 2C$ mátrixokat!

5. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra.
   (a) $(AB)^2 = A^2B^2$
   (b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
   (c) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
   (d) $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E$
   (e) $A^3 + E = (A+E)(A^2 - A + E)$
   (f) $A^3 - E = (A-E)(A^2 + A + E)$

6. A 100×100-as A mátrix első 50 oszlopának minden eleme 3, az utolsó 50 oszlop minden eleme 2. A 100×100-as B mátrix minden oszlopára teljesül, hogy abban az első 50 elem összege 2, az utolsó 50 elem összege 3. Határozzuk meg az AB szorzatot.

7. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

8. Az $n \times n$-es A mátrixra teljesül, hogy ha az A mátrix főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adunk (de a többi elemét nem változtatjuk), akkor nulla determinánsú mátrixot kapunk. Mutassuk meg, hogy ekkor az A^3 főátlójában álló mindegyik elemhez 1-et adva is nulla determinánsú mátrixot kapunk.