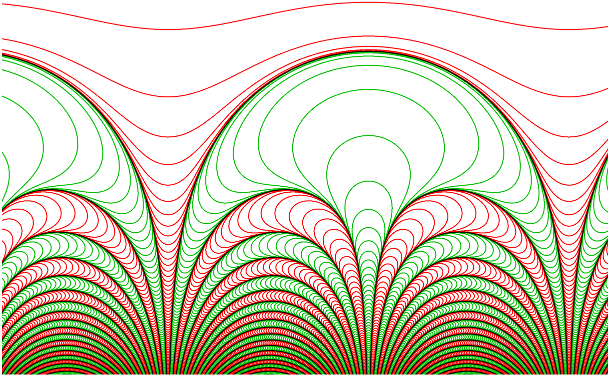
CM-C4 : Propriétés globales des courbes

Vincent Borrelli

Université de Lyon



L'inégalité isopérimétrique

Théorème (Inégalité isopérimétrique).– *Soient* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{E}^2$ *un lacet simple continu et de classe* C^1 *par morceaux et* C_{int} *la composante bornée de* $\mathbb{E}^2 \setminus \Gamma$ *où* $\Gamma = \gamma(I)$, *alors :*

$$Long^2(\gamma) \geq 4\pi Aire(C_{int})$$

avec égalité ssi Γ *est un cercle.*

• Un résultat connu des Grecs mais qui n'a été prouvé rigoureusement que vers la fin du XIXème siècle sous les efforts conjugués de plusieurs mathématiciens dont Jakob Steiner et Hermann Schwarz.

L'inégalité isopérimétrique

• La démonstration de ce théorème fait intervenir un résultat d'analyse :

Inégalité de Wirtinger.– *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue C^1 par morceaux et 2π-périodique. On suppose que*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0.$$

Alors

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt$$

et l'égalité a lieu ssi f est de la forme $f(t) = a\cos t + b\sin t$.

L'inégalité isopérimétrique

Démonstration de l'inégalité de Wirtinger.– On développe f en série de Fourier

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

- Puisque

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$$

on a $a_0 = 0$ et l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

L'inégalité isopérimétrique

• La dérivée f' est continue par morceau, on a donc, au sens L^2, l'égalité

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nt - na_n \sin nt)$$

et donc

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2).$$

• D'où l'inégalité de Wirtinger, l'égalité ayant lieu ssi $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. $\square$

L'inégalité isopérimétrique

Démonstration de l'inégalité isopérimétrique.– Quitte à composer par une homothétie on peut toujours supposer que $L = Long(\gamma) = 2\pi$. En effet que l'inégalité isopérimétrique est homogène : si $\lambda > 0$ est le rapport de l'homothétie et si $L' = \lambda L$ et $A' = \lambda^2 A$ (avec des notations évidentes) alors

$$L^2 \geq 4\pi A \quad \Longleftrightarrow \quad L'^2 \geq 4\pi A'.$$

• Quitte à effectuer une translation on peut supposer que

$$\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = \int_0^{2\pi} y(t)\,dt = 0.$$

• Les nombres L et A sont indépendants de la paramétrisation, on peut donc supposer que γ est paramétrée par la longueur d'arc.

L'inégalité isopérimétrique

- La formule de Green-Riemann permet d'écrire :

$$A = -\int_0^L y(t)x'(t)\,dt = -\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt.$$

- Puisque $L = 2\pi$ il suffit de montrer que $\pi \geq A$ or :

$$\begin{aligned} 2\pi - 2A &= \int_0^{2\pi} (1 + 2yx')\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (x'^2 + y'^2 + 2yx')\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) + (y^2 + x'^2 + 2yx')\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\,dt + \int_0^{2\pi} (y + x')^2\,dt \end{aligned}$$

L'inégalité isopérimétrique

• D'après l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dt \geq 0$$

donc $\pi \geq A$.

• L'égalité a lieu ssi

$$\left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)\, dt = 0 & \text{i. e. } \; y(t) = a\cos t + b\sin t \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} (y + x')^2\, dt = 0 & \text{i. e. } \; x'(t) = -y(t) \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & -a\sin t + b\cos t \\ y(t) & = & a\cos t + b\sin t \end{array} \right.$$

qui est l'équation paramétrique d'un cercle. $\square$

Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

• Mathématicien autricien connu pour ses travaux en analyse complexe, en géometrie, en théorie des invariants, en théorie des nombres et en physique mathématique (depuis la statique, la théorie des ondes de surface et de l'arc-en-ciel jusqu'à la relativité générale) !

• Reçoit la troisième médaille Sylvester en 1931, après Poincaré et Cantor !

• Plusieurs étudiants illustres, parmi lesquel Kurt Gödel, Johann Radon, Wilhelm Blaschke et Leopold Vietoris.

• Une anecdote : en villégiature au lac Achensee (Tirol) Wirtinger est intrigué par le mouvement des vaguelettes... ses vacances s'arrêteront là ! Il se met à réfléchir au phénomène et l'expliquera tout en améliorant la théorie « des vagues capillaires ».

Wilhelm Wirtinger (1865-1945)

Le lac Achensee

La reine Didon

Enée décrit à Didon la chute de Troie par Pierre-Narcisse Guérin,1815.

La reine Didon

• La légende raconte que Didon fille du roi de Tyr et devenue reine à la mort de ce dernier, fut chassée par son frère Pygmalion et dut s'enfuir précipitamment avec une partie de l'artistocratie tyrienne.

• Après de nombreuses aventures ils finirent par accoster sur les côtes africaines et demandèrent au roi Hiarbas de leur accorder une terre pour s'intaller. Perfidement, celui-ci leur promit « autant de terre que peut contenir la peau d'un bœuf ».

• La reine Didon respecta scrupuleusement ces paroles, elle découpa une peau en lanières si fines qu'elle put encercler, en les mettant bout-à-bout, un vaste territoire : Carthage était née.

La reine Didon

Didon construisant Carthage par Joseph Turner, 1815.

Indice d'un lacet

Définition.– Soient $\Omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [a,b] & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}^2 \setminus \{\Omega\} \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

un lacet dont le support ne contient pas le point Ω. L' INDICE $Ind(\gamma, \Omega)$ DE γ PAR RAPPORT À Ω est l'entier relatif

$$\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{(x-x_0)y' - (y-y_0)x'}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dt \in \mathbb{Z}.$$

• Si on définit α par

$$\alpha_{(x,y)} := -\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx + \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dy$$

l'indice n'est autre que

$$Ind(\gamma, \Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \alpha.$$

Indice d'un lacet

• Tel qu'il est défini, il n'est pas évident que l'indice soit un entier relatif. Montrons-le.

• Ecrivons γ dans des coordonnées polaires centrées en (x_0, y_0) :

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) & = & x_0 + r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) & = & y_0 + r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

• On a

$$\int_a^b \frac{(x-x_0)y' - (y-y_0)x'}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} dt = \int_a^b \theta'(t)\, dt = \theta(b) - \theta(a).$$

• Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\theta(b) - \theta(a) = 2\pi n.$$

Le théorème des résidus

Définition (rappel).– Une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe si pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$ la limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On la note alors $f'(z_0)$.

• Si on écrit $z = x + iy$ et $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

alors f est holomorphe ssi les ÉQUATIONS DE CAUCHY-RIEMANN sont satisfaites :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le théorème des résidus

• Ces conditions sont équivalentes à demander

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

Définition.– Une forme différentielle de degré 1 à valeurs complexes sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ est une application

$$\omega : \mathcal{U} \to (\mathbb{C})^* = \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}).$$

• On définit deux 1-formes constantes dz et $d\bar{z}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ en posant

$$dz := dx + idy \quad \text{et} \quad d\bar{z} := dx - idy.$$

Très concrètement, si $Z = X + iY$ est un vecteur de $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ alors

$$dz(Z) = X + iY \quad \text{et} \quad d\bar{z}(Z) = X - iY.$$

Le théorème des résidus

• Si $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ alors df est une forme différentielle de degré 1 à valeurs complexes. Précisément

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} dz \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} d\bar{z} \end{aligned}$$

• En particulier, f est holomorphe ssi df n'a pas de composante en $d\bar{z}$. D'après les équations de Cauchy-Riemann, dans ce cas df prend la forme suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dz = -i\frac{\partial f}{\partial y} dz.$$

Le théorème des résidus

• Soit $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$ une 1-forme différentielle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit sa différentielle extérieure $d\omega$ par

$$d\omega := d\Re(\omega) + id\Im(\omega)$$

et on dit que ω est fermée si $d\omega = 0$.

Proposition.– *Si f est une fonction holomorphe alors la forme $\omega_z = f(z)dz$ est fermée.*

Démonstration.– Pour toute fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} d\omega_z &= df_z \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy\right) \wedge (dx + idy) \\ &= \left(i\frac{\partial f}{\partial x}(z) - \frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Le théorème des résidus

• Si de plus la fonction f est supposée holomorphe alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0$$

et donc $d\omega_z = 0$. $\square$

Théorème intégral de Cauchy.– *Soit γ un lacet simple bordant un domaine $D \subset \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration.– Il suffit d'appliquer le théorème de Green-Riemann à $\omega = f(z)dz$. $\square$

Le théorème des résidus

• Les hypothèses du théorème intégral de Cauchy peuvent être allégées. En réalité il suffit que γ se contracte un point dans $\mathcal{U}$ pour qu'il soit valide.

• Que se passe-t-il si f n'est plus holomorphe sur tout $\mathcal{U}$ mais possède un pôle en un point $z_0 \in \mathcal{U}$, par exemple si $f(z) = (z - z_0)^{-n}$?

Lemme.– *Si $n > 1$ alors*

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0.$$

Démonstration.– C'est immédiat car

$$\frac{dz}{(z - z_0)^n} = \frac{1}{-n+1} d(z - z_0)^{-n+1}$$

$\square$

Le théorème des résidus

• Le cas $n = 1$ est le seul pour lequel quelque chose se passe :

Propriété.– *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ un lacet (au moins C^1 par morceaux) alors*

$$Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Démonstration.– Par définition

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{x'(t) + iy'(t)}{(x(t) - x_0) + i(y(t) - y_0)} dt.$$

En prenant la quantité conjuguée on obtient précisément l'intégrale qui définit $Ind(\gamma, z_0)$. $\square$

Le théorème des résidus

Existence d'un développement en série de Laurent (admis).– La formule intégrale de Cauchy permet de montrer que pour toute fonction holomorphe sur une couronne C centrée en z_0, il existe une unique suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

et où la série de fonctions converge normalement sur tout compact de la couronne C. Un tel développement s'appelle une SÉRIE DE LAURENT.

Définition.– Le coefficient a_{-1} de ce développement en série de Laurent s'appelle le RÉSIDU DE f EN z_0. Il est noté $Res(f,z_0)$.

Le théorème des résidus

Théorème des résidus.– *Soient $z_1, \ldots, z_n$ des points de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ un lacet simple (au moins C^1 par morceaux) bordant un domaine D alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{m} Ind(\gamma, z_j) Res(f, z_j).$$

Démonstration.– L'idée est de tronquer toutes les parties "négatives" des développement en série de Laurent de f de toute façon à obtenir une brave fonction holomorphe.

Le théorème des résidus

• Précisément pour chaque z_j, on écrit le développement en série de Laurent de f :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,j}(z - z_j)^n$$

et on definit

$$h_j(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j}(z - z_j)^n.$$

• Puis on considère

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{m} h_j(z)$$

qui est une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$.

Le théorème des résidus

• Le théorème intégral de Cauchy implique que

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_{j=1}^{m} \int_\gamma h_j(z)dz$$

• Or

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_j(z)dz &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j} \int_\gamma (z-z_0)^n dz \\ &= a_{-1,j}\, 2i\pi\, Ind(\gamma, z_j). \end{aligned}$$

• Par définition $a_{-1,j} = Res(f, z_j)$, ce qui conclut. $\square$

• La encore, les hypothèses du théorème des résidus peuvent être allégées. En réalité, il suffit que γ se contracte un point dans $\mathcal{U}$ pour qu'il soit valide.

Nombre de rotation

Définition.– Soit $\gamma : [a, b] \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ un lacet régulier, on appelle INDICATRICE de γ la courbe

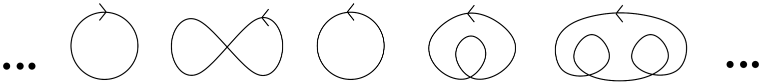
$$\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}.$$

L'indice du lacet γ' par rapport à l'origine O s'appelle le NOMBRE DE ROTATION de γ et il se note

$$Rot(\gamma) := Ind(\gamma', O).$$

Nombre de rotation

Exemples.–



$Rot(\gamma) = -1$ $Rot(\gamma) = 0$ $Rot(\gamma) = 1$ $Rot(\gamma) = 2$ $Rot(\gamma) = 3$

Théorème.– *Soit* $\gamma : [a,b] \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}^2$ *un lacet régulier alors*

$$Rot(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b k_{alg}(t)\|\gamma'(t)\|dt.$$

En particulier, si γ *est paramétrée par la l.a. alors :*

$$Rot(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b k_{alg}(s)ds.$$

Nombre de rotation

Démonstration.– En effet, on a

$$\begin{aligned} Rot(\gamma) &= Ind(\gamma', O) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_a^b k_{alg}(t)\|\gamma'(t)\|dt. \end{aligned}$$

$\square$

- Dans ce théorème, on ne peut pas remplacer k_{alg} par k.

Théorème des tangentes tournantes (admis).– *Le nombre de rotation d'un lacet régulier simple est ± 1, le signe dépendant de l'orientation de la courbe.*

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Augustin Louis Cauchy vers 50 ans

• Un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps : 800 articles et 7 ouvrages qui couvrent tous les domaines des mathématiques de l'époque.

• Il fonde la théorie des fonctions holomorphes dont la formule intégrale de Cauchy est un outil central.

• En analyse, il définit rigoureusement la notion de convergence et énonce le critère de Cauchy pour la convergence des suites,

• En algèbre, le théorème de Cauchy énonce que dans tout groupe fini d'ordre n, et pour tout p premier divisant n, il existe un élément de G d'ordre p.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

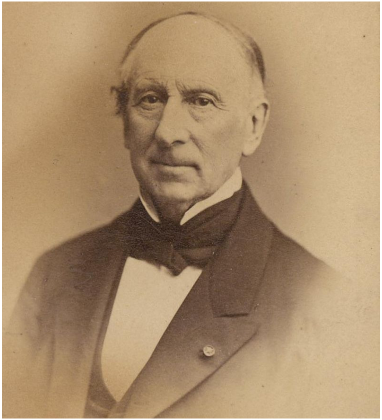
• Catholique fervent et royaliste légitimiste, ses positions politiques et religieuses lui valurent nombre d'oppositions.

• À la restauration (1816), il intègre l'Académie des sciences sous nomination royale, parallèlement au renvoi d'importants mathématiciens connus pour leurs positions républicaines.

• En juillet 1830, il refuse de prêter serment au nouveau roi Louis-Philippe et s'exile à Fribourg en Suisse. Le roi Charles X (en exil) lui accorde le titre de baron. Il revient à Paris en 1838.

• Il faut preuve de négligence en ne restituant pas à l'Académie les deux manuscrits rédigés par Galois et en délaissant celui d'Abel. Ces travaux devaient marquer profondément les mathématiques du XXe siècle.

Une citation d'Abel



Une photo d'Augustin Louis Cauchy

« Cauchy est fou et on ne peut rien faire contre lui, même si, pour l'instant, il est le seul à savoir comment les mathématiques devraient être faites. »

Niels Abel, 1826