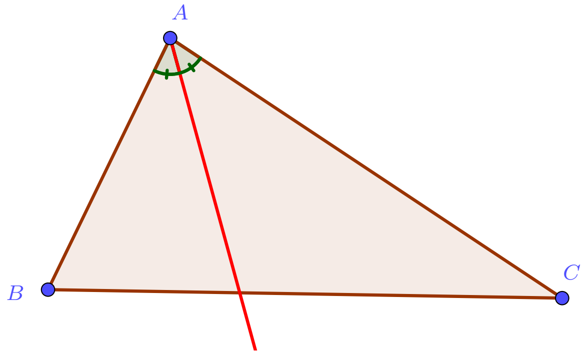
Notions de bases en géométrie plane

Rappels de collège et compléments pour le lycée

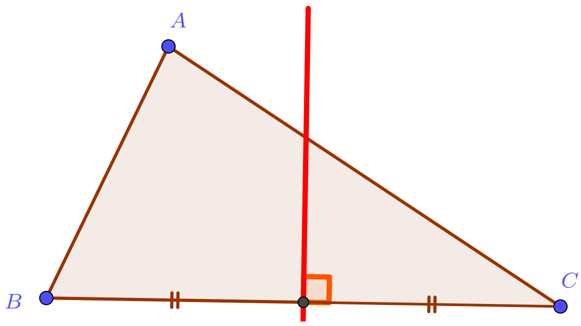
Le cours en vidéo

I Droites remarquables dans le triangle

1 Définitions :

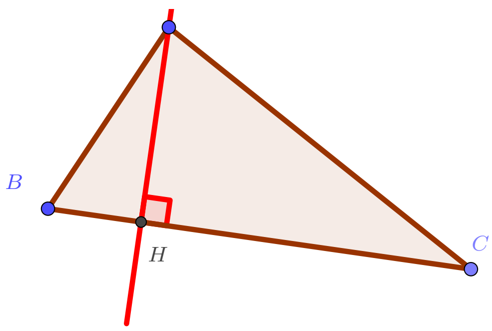


Bissectrice d'un angle :
On appelle **bissectrice d'un angle**, la demi-droite qui sépare cet angle en deux angles de même mesure.

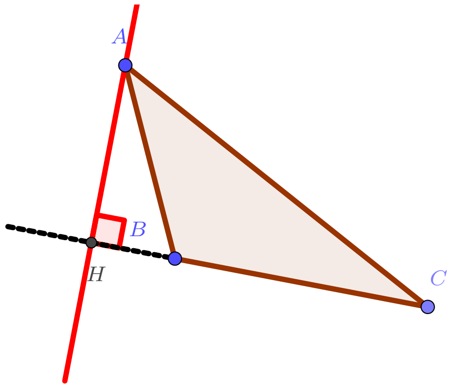


Médiatrice d'un segment :
La médiatrice d'un segment est la droite qui le coupe perpendiculairement en son milieu.

Hauteur issue d'un sommet dans un triangle :
Dans un triangle, on appelle hauteur une droite qui passe par un sommet perpendiculairement au côté opposé.

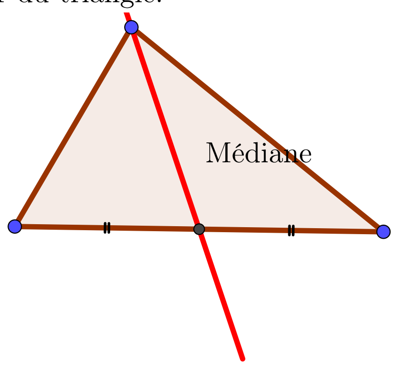


cas où H, le pied de la hauteur, est à l'intérieur du triangle.



cas où H, le pied de la hauteur, est à l'extérieur du triangle.

Médiane issue d'un sommet dans un triangle :
Dans un triangle, on appelle médiane une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.



2 Bilan des droites remarquables :

	Passe par un Sommet	Passe par le milieu d'un côté	Est perpendiculaire à un côté
médiane	•	•	
hauteur	•		•
médiatrice		•	•

Retenir

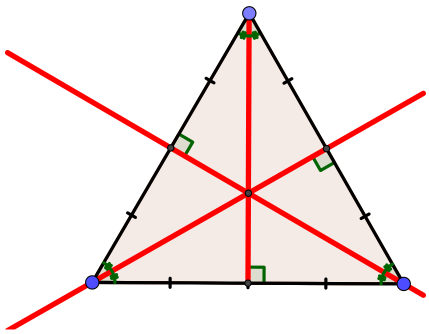
On retient que chacune des droites possède deux qualités sur trois.

3 Triangles particuliers :

Le cours en vidéo

Cas Particulier du triangle équilatéral :

Dans un triangle équilatéral, les droites remarquables relatives à chaque sommet sont confondues.



Cas Particulier du triangle isocèle :

Dans un triangle isocèle, les droites remarquables relatives au sommet principal sont confondues.

4 Propriété de concourance

Propriété générale :

Les droites remarquables d'un triangle sont chacune concourante en un point particulier.

Centre de gravité d'un triangle :

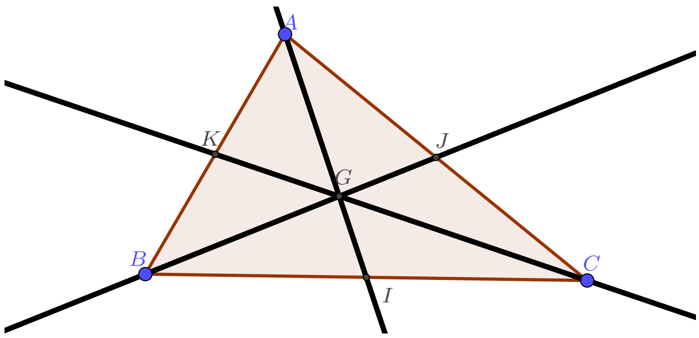
Définition :

On appelle G, le centre de gravité d'un triangle, le point de concourance de ses trois médianes.

Propriété du centre de gravité

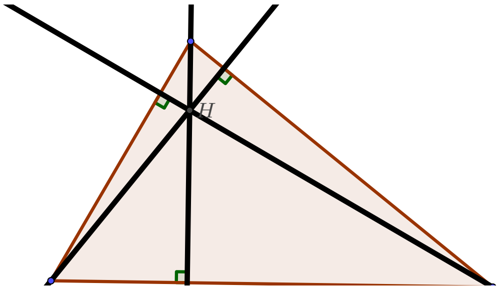
Le centre de gravité d'un triangle est placé aux deux-tiers de chaque médiane :

$$AG = \frac{2}{3}AI \qquad BG = \frac{2}{3}BJ \qquad CG = \frac{2}{3}CK$$



Orthocentre d'un triangle :

Définition :
On H l'appelle orthocentre d'un triangle, le point de coucourance de ses 3 hauteurs.

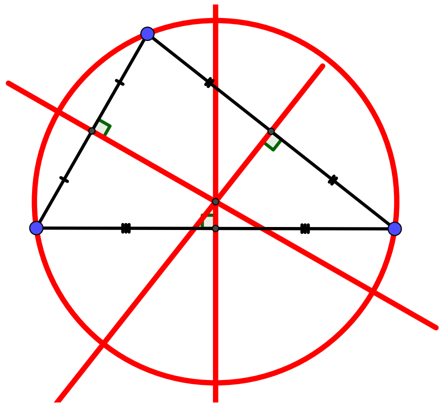


Centre du cercle circonscrit :

Propriété :
Un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement s'il est équidistant des extrémités de ce segment.

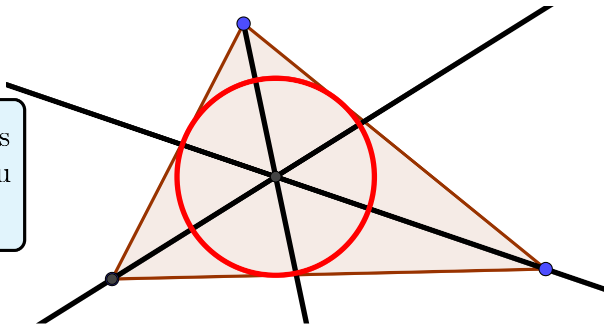
Conséquence :
Le point de coucourance des 3 médiatrices d'un triangle est équidistant des 3 sommets. Cette distance est le rayon du cercle circonscrit.

Centre du cercle circonscrit :
Les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Centre du cercle inscrit à un triangle :

Centre du cercle inscrit :
Les 3 bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit au triangle.



S'évaluer- S'entraîner

QCM

Exercice mathaléa

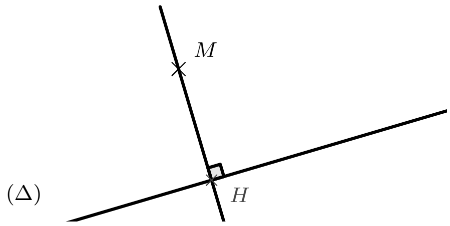
II Projeté orthogonal

Le cours en vidéo

1 Définition :

Définition

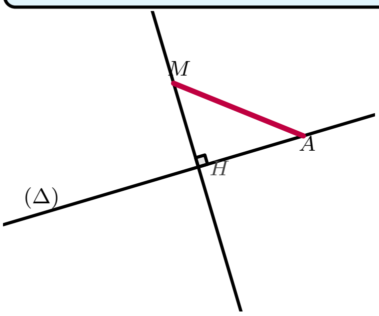
Soit une droite Δ et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ est le point d'intersection H de la droite Δ avec la perpendiculaire à Δ passant par M.



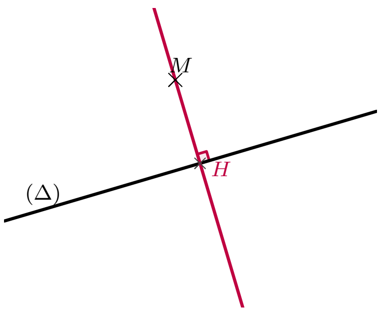
2 Propriété fondamentale

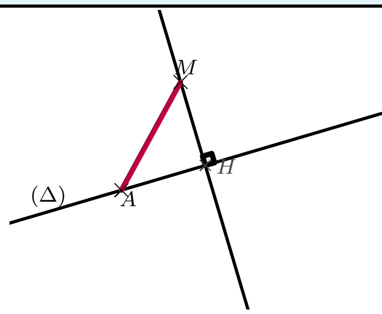
Propriété

Le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.



On a clairement ici $AM > MH$





On a clairement ici $AM > MH$

Propriété

Soit H le projeté orthogonal d'un point M sur une droite Δ. On dit alors que la distance entre le point M et la droite Δ est égale à MH.

S'évaluer- S'entraîner

QCM

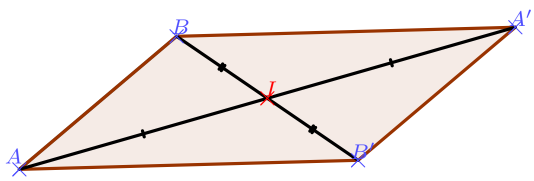
III Les parallélogrammes :

Le cours en vidéo

1 Parallélogramme quelconque :

Définition

On appelle parallélogramme un quadrilatère qui possède un centre de symétrie



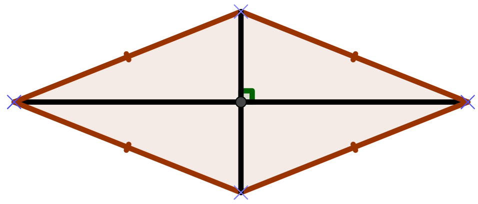
Propriété des côtés :
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Propriété des côtés :
Si un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il a ses côtés opposés de même longueur.

Propriété des diagonales :
Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu

2 Les losanges

Le Losange :
Un losange est un quadrilatère qui possède 4 côtés de même mesure.



Propriété des diagonales :
Un quadrilatère est un losange si et seulement si ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.

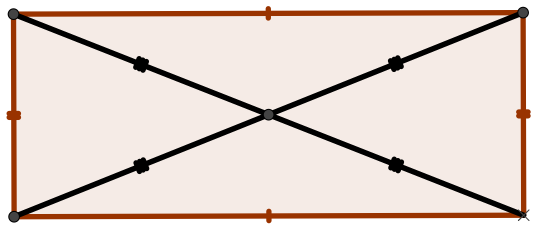
Propriété des côtés :
Un quadrilatère est un losange si et seulement si côtés consécutifs sont de même longueur.

Méthode : Comment démontrer qu'un parallélogramme est un losange ?
On procède souvent par étapes.
On commence par montrer que le quadrilatère est un parallélogramme, puis on utilise ;

- Si un parallélogramme a 2 côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

3 Le rectangle :

Définition :
Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit.



Propriété des diagonales :
Un parallélogramme est un rectangle si et seulement ses diagonales de même longueur.

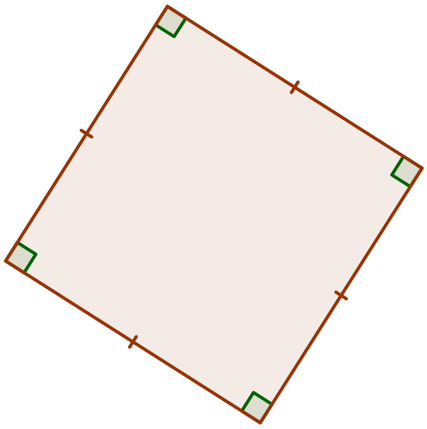
Propriété des côtés :
Un parallélogramme est un rectangle si et seulement ses côtés consécutifs sont perpendiculaires.

Méthode :Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?

- Si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle.
- Sinon, on procède par étape, en démontrant d'abord que c'est un parallélogramme.
  Puis :
  → Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.
  → Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

4 Le carré :

Définition :
Un carré est un losange rectangle



Propriété des côtés :
Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses côtés sont tous de même longueur et perpendiculaires entre-eux s'ils sont consécutifs.

Propriété des diagonales :
Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses diagonales sont de même longueur et se coupent perpendiculairement en leur milieu .

Comment démontrer qu'un parallélogramme est un carré ?
On procède par étapes, en démontrant que le quadrilatère est un parallélogramme, puis :

- Si un parallélogramme a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur alors c'est un carré.

S'évaluer- S'entraîner

QCM

IV Trigonométrie dans le triangle rectangle :

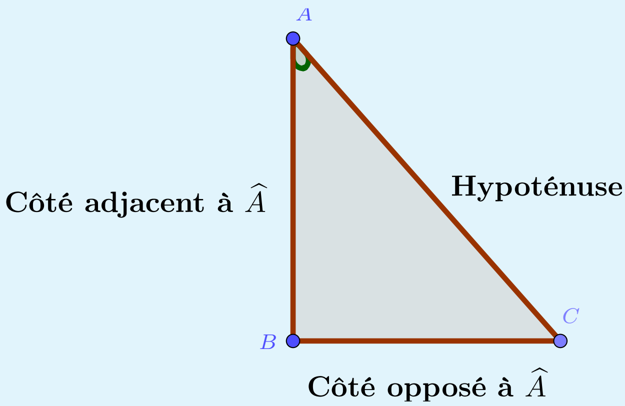
Définition

Si le triangle ABC est rectangle en C, l'hypoténuse est $[AB]$ et alors on a :

$$\cos\widehat{A} = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{Côté adjacent à } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin\widehat{A} = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{CB}{AC} = \frac{\text{Côté opposé à } \widehat{A}}{\text{Côté adjacent à } \widehat{A}}$$



Relation fondamentale :

Pour tout $\alpha \in]0;90[$, on a l'égalité :

$$cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$$

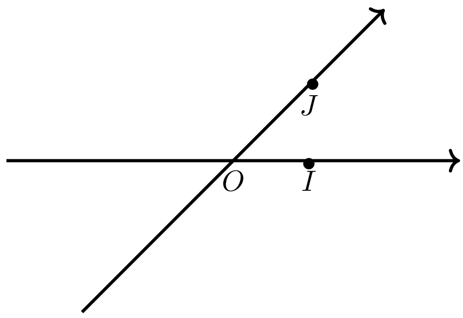
Vidéo de la démonstration fondamentale

V Géométrie dans un repère orthonormé

1 Repères du plan :

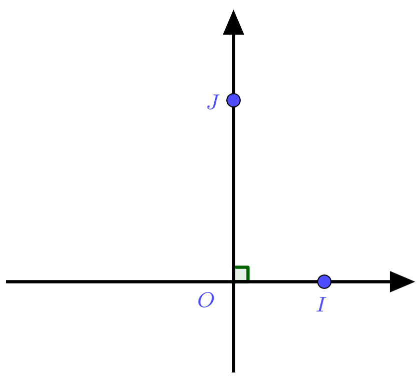
Repère quelconque :

Un repère quelconque (O,I,J) est constitué de deux axes sécants en O avec des unités sur chaque axe, correspondant respectivement aux longueurs OI et OJ, qui ne sont pas nécessairement identiques.



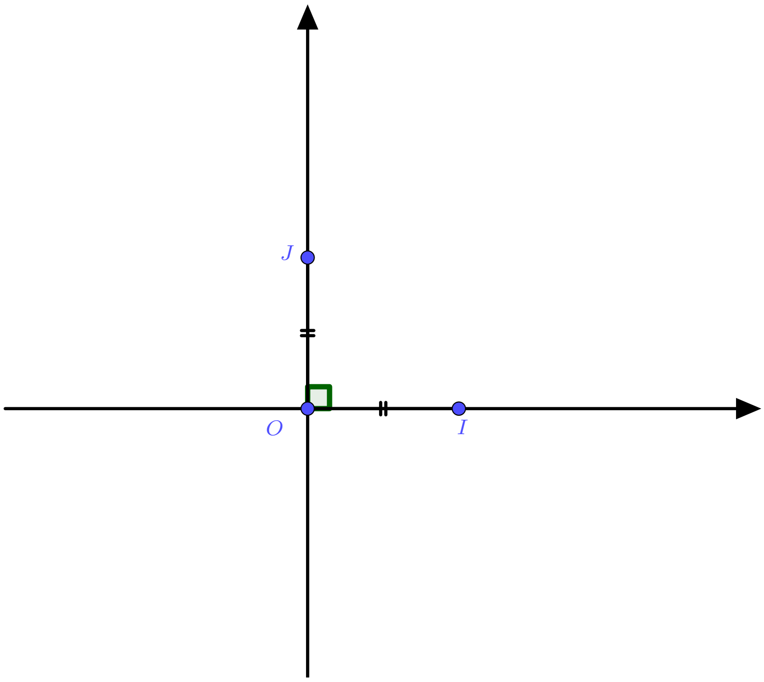
Repère orthogonal :

Un repère orthogonal (O,I,J) est constitué de deux axes perpendiculaires avec des unités sur chaque axe égales respectivement aux longueurs OI et OJ, qui ne sont pas nécessairement identiques.



> **Bon à savoir !**
>
> Le préfixe **ortho** en maths veut dire perpendiculaire. Rappelez vous, l'orthocentre pour les hauteurs....

> **Repère orthonormé :**
>
> Un repère orthonormé est constitué de deux axes perpendiculaires avec des unités identiques sur chaque axe. On dit parfois aussi un repère orthonormal.

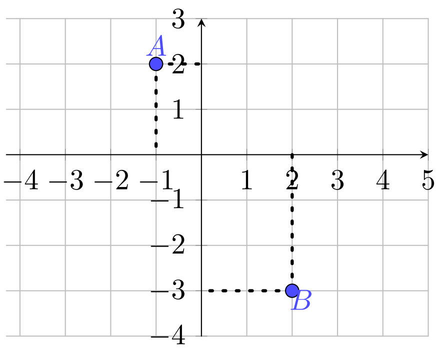


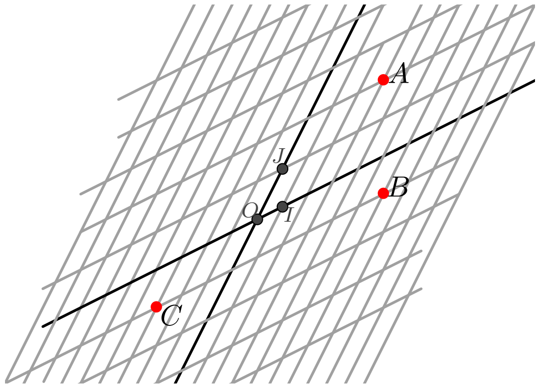
> **Bon à savoir !**
>
> Le suffixe **normé** en maths veut dire longueur.
> Cela sera abordé dans le chapitre sur les vecteurs....

2 Coordonnées d'un point :

Exercice 1

Dans chacun des deux repères, lire les coordonnées des 3 points A, B et C puis placer les points D, E et F de coordonnées : $E(4\,;0)$; $F(-3;-3)$; $G(2;3)$

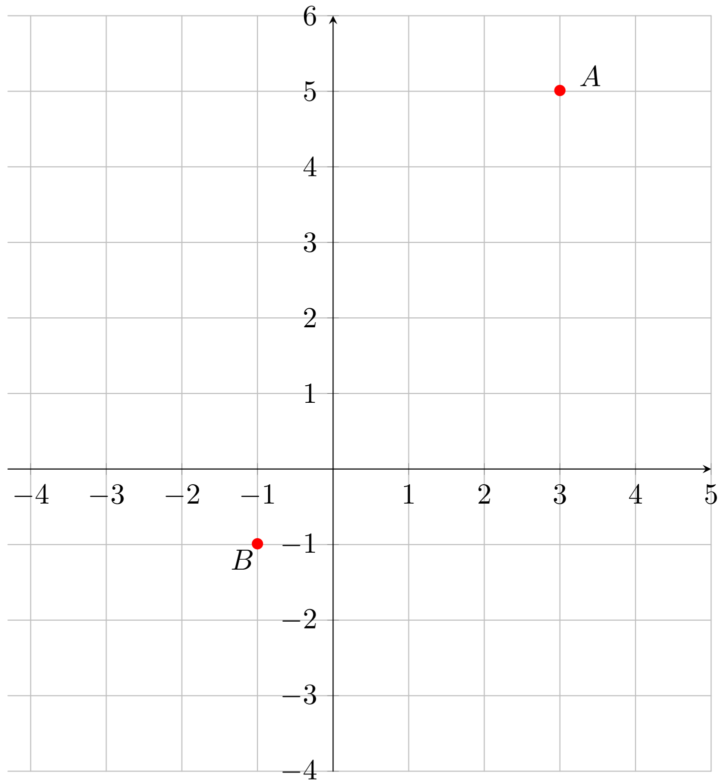




3 Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Exercice 2

Placer dans le repère suivant deux point A et B tel que : A(3 ; 5) et B(-1 ; 1). Essayez de placer le point M, milieu de [AB]. Quelles sont ses coordonnées ?



Observation !

Sur le repère suivant, on observe que l'abscisse de M est au milieu de l'abscisse de A et de l'abscisse de B.
On peut faire la même remarque pour les ordonnées.
Les coordonnées du point M sont donc la **moyenne** des coordonnées des points A et B.

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère (O,I,J), si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A : y_A)$ et $(x_B : y_B)$, alors le milieu M du segment a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Application : Les coordonnées du milieu M du segment précédent sont :

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

d'où M à pour coordonnées $(1; 2)$

VI Calculer la longueur d'un segment dans un repère :

Activité :

On donne dans un repère orthonormé les points suivants $A(3; 3)$ et $B(7; 1)$.

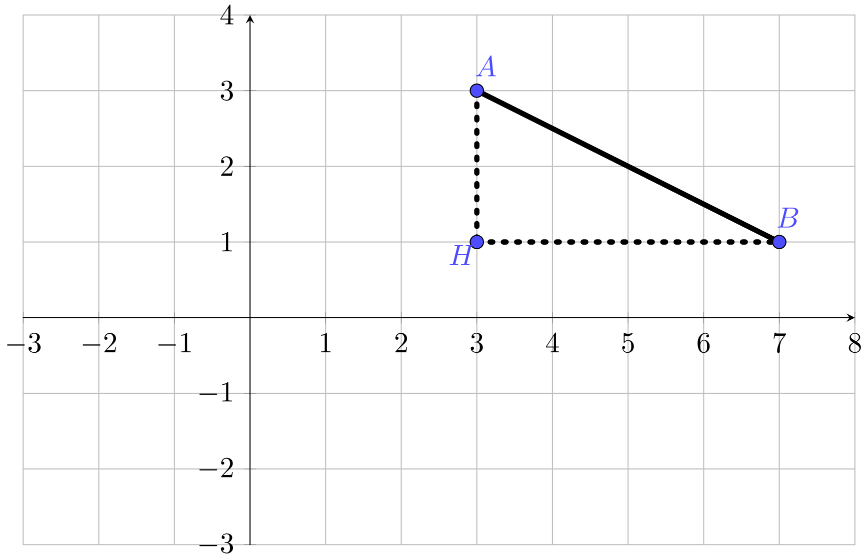
L'objectif est de calculer la longueur AB.

L'idée est de placer un point H pour que AHB soit un triangle rectangle en H, comme sur la figure.
D'après le théorème de Pythagore on a alors : $AB^2 = AH^2 + HB^2$

Or $AH = \ldots - \ldots\ldots.$ et $HB = \ldots - \ldots = \ldots..$

d'où $AB^2 = \ldots.^2 + \ldots\ldots.^2 = \ldots\ldots\ldots$

et $AB = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$



Propriété :

Dans le plan muni d'un repère (O,I,J), si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A : y_A)$ et $(x_B : y_B)$, alors d'après le théorème de Pythagore :
on a :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

ou encore

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Illustration :