

# ESCOAMENTO POTENCIAL

□ Escoamento de fluido não viscoso,  $\mu \approx 0 \Rightarrow$

Equação de Euler: 
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \mathbf{grad} P$$

□ Escoamento de fluido incompressível  $\rho \approx \text{cte} \Rightarrow$

Equação da continuidade: 
$$\mathbf{div} \vec{V} = 0$$

□ Escoamento Irrotacional  $\Rightarrow$

$$\vec{\xi} = \mathbf{rot} \vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0$$

Se o escoamento for irrotacional, uma grande simplificação pode ser obtida na obtenção do campo de escoamento: o campo de velocidades pode ser obtido sem a solução da equação de Euler.

Para situações bi-dimensionais, pode-se utilizar o conceito de função de corrente

## Escoamento bi-dimensional, incompressível, não viscoso, irrotacional

função de corrente: 
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\psi$  satisfaz a equação da continuidade

Se obrigarmos o escoamento a ser irrotacional, temos  $\nabla \times \vec{V} = 0$  para situações 2-D, e escoamento plano,

$$\xi_z = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

$\psi$  satisfaz a equação de Laplace, para escoamento plano, não viscoso, irrotacional, incompressível

## Procedimento de solução:

1. Resolve-se  $\nabla^2 \psi = 0$  com as condições de contorno apropriadas
2. Obtém-se os componentes da velocidade  $u$  e  $v$  pela definição de função de corrente  $\psi$
3. Obtém-se a pressão  $p$  pela equação de Euler

## Condições de contorno:

- velocidade ao longe conhecida:  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  conhecidos
- superfície sólida:  $\psi_{\text{corpo}} = \text{constante}$

**Coordenadas polares:** função de corrente  $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  ,  $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

$$\xi_z = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

## Condições de contorno:

- velocidade ao longe conhecida:  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  ,  $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  conhecidos
- superfície sólida:  $\psi_{\text{corpo}} = \text{constante}$

# Escoamento Tri-dimensional, Incompressível, Não Viscoso, Irrotacional

- Para situações 3-D, não podemos utilizar o conceito de função de corrente, já que a mesma só é definida para situações 2-D.
- Introduziremos um novo conceito:

## FUNÇÃO POTENCIAL DE VELOCIDADE

- função potencial de velocidade é definida de forma a satisfazer a condição de escoamento irrotacional:  $\nabla \times \vec{V} = 0$
- Sabemos que esta equação será sempre verdadeira se definirmos

$$\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi$$

onde  $\phi$  é um potencial, já que o rotacional do gradiente de qualquer função potencial é sempre zero,  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  .

coordenadas cartesianas:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

coordenadas cilíndricas:

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad , \quad u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad , \quad u_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad 4$$

Se obrigarmos o escoamento irrotacional a satisfazer a equação de conservação de massa para fluidos incompressíveis,  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

$\phi$  satisfaz a equação de Laplace, para escoamento não viscoso, irrotacional, incompressível, 2-D ou 3-D.

### Condições de contorno:

- velocidade ao longe conhecida:  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  conhecidos
- superfície sólida, velocidade normal nula:  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

NÃO HÁ CONDIÇÃO IMPOSTA PARA O COMPONENTE

TANGENCIAL  $\frac{\partial \phi}{\partial s}$  já que o escoamento é sem viscosidade

## Procedimento de solução:

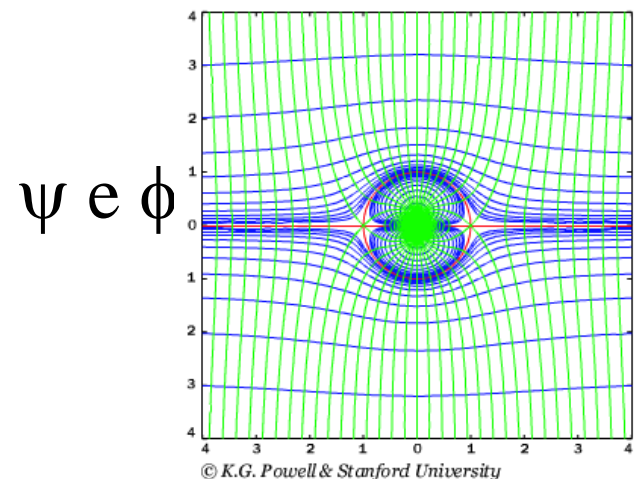
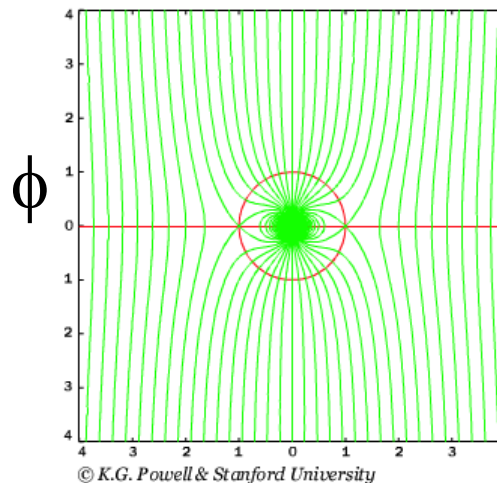
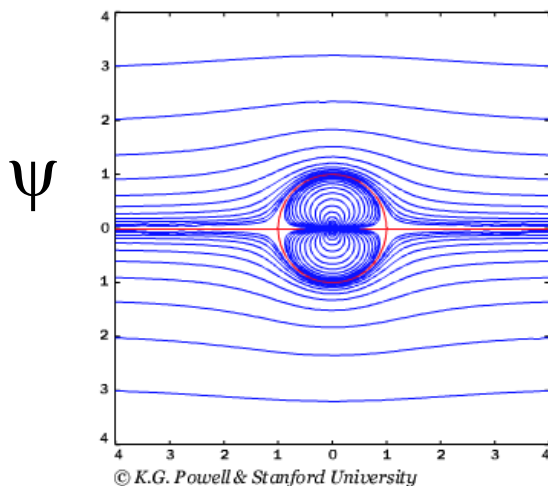
1. Resolve-se  $\nabla^2 \phi = 0$  com as condições de contorno apropriadas
2. Obtém-se os componentes da velocidade  $u$  e  $v$  pela definição de função potencial  $\phi$
3. Obtém-se a pressão  $p$  pela equação de Euler

**Obs:** Podemos resolver  $\psi$  e  $\phi$

a) linhas de corrente  $\psi = \text{constante}$  são sempre tangente ao campo de velocidade

b)  $\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi \rightarrow \vec{V}$  é perpendicular as linhas de  $\phi$  constante (equipotenciais)

## LINHAS DE CORRENTE E EQUIPOTENCIAIS SÃO ORTOGONAIS



## Pergunta:

Existe alguma vantagem em resolver a equação de Laplace, ao invés da equação de Euler?

**SIM!!!**

A análise da equação de Laplace está bastante desenvolvida. Existem diversas técnicas disponíveis

- ❑ superposição de soluções elementares
- ❑ análise numérica
- ❑ mapeamento conforme
- ❑ analogia elétrica
- ❑ etc.

# SOLUÇÕES ELEMENTARES PARA ESCOAMENTOS PLANOS

Vários problemas interessantes de escoamento potencial podem ser construídos a partir de três tipos de soluções elementares:

- escoamento uniforme
- fonte ou sorvedouro
- vórtice

As soluções destes problemas podem ser combinadas produzindo resultados úteis. Para isso, usamos o fato que a equação de Laplace é linear e o princípio de superposição

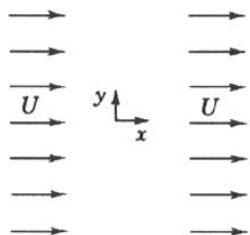
Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são soluções da equação de Laplace, a soma de  $\phi_1 + \phi_2$  também é solução.

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = 0$$



## Quadro 6.1 Escoamentos Planos Elementares

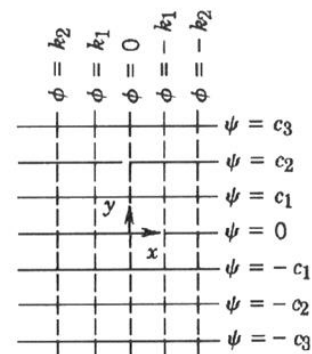
### Escoamento Uniforme (sentido positivo dos x)



$$u = U \quad \psi = Uy$$

$$v = 0 \quad \phi = -Ux$$

$\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada

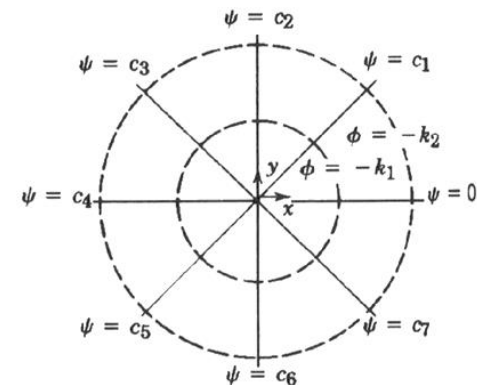


### Escoamento Tipo Fonte (da origem)

$$V_r = \frac{q}{2\pi r} \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$V_\theta = 0 \quad \phi = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é um ponto singular  
 $q$  é a vazão em volume por unidade de profundidade  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada

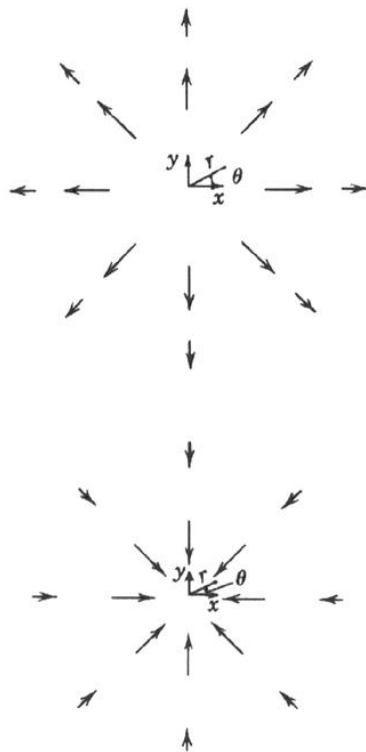
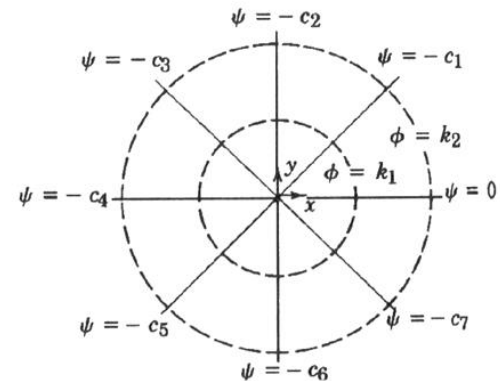


### Escoamento Tipo Sorvedouro (para a origem)

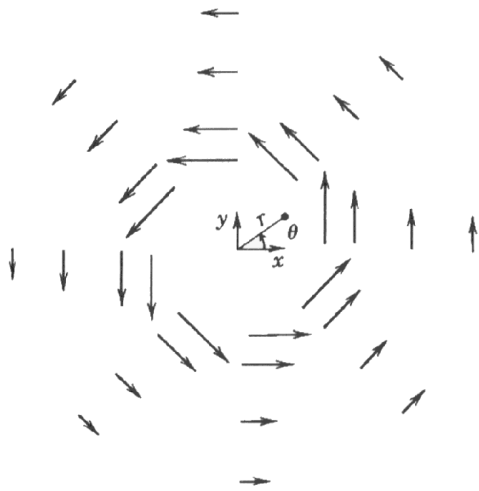
$$V_r = -\frac{q}{2\pi r} \quad \psi = -\frac{q}{2\pi} \theta$$

$$V_\theta = 0 \quad \phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

A origem é um ponto singular  
 $q$  é a vazão em volume por unidade de profundidade  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada



**Quadro 6.1** Escoamentos Planos Elementares (cont.)

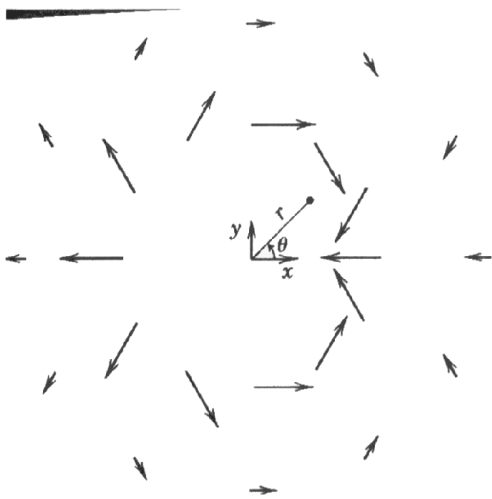
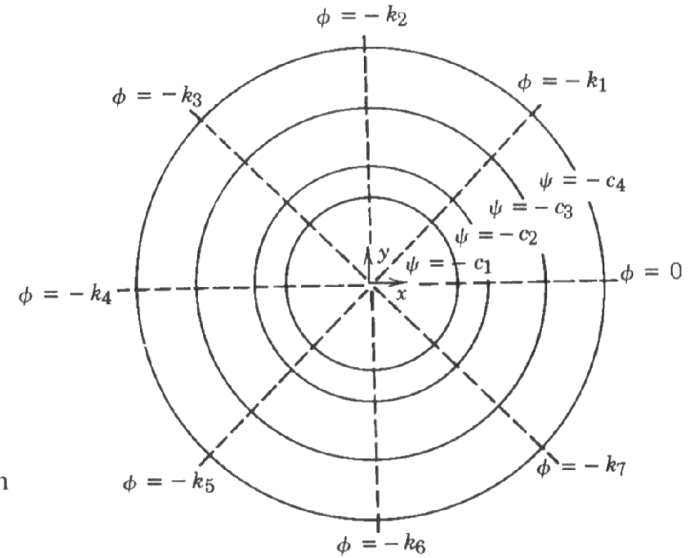


**Vórtice Irrotacional (anti-horário, centrado na origem)**

$$V_r = 0 \quad \psi = -\frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$V_\theta = \frac{K}{2\pi r} \quad \phi = -\frac{K}{2\pi} \theta$$

A origem é um ponto singular  
 $K$  é a intensidade do vórtice  
 $\Gamma = K$  em torno de qualquer curva fechada, incluindo a origem  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada, não incluindo a origem

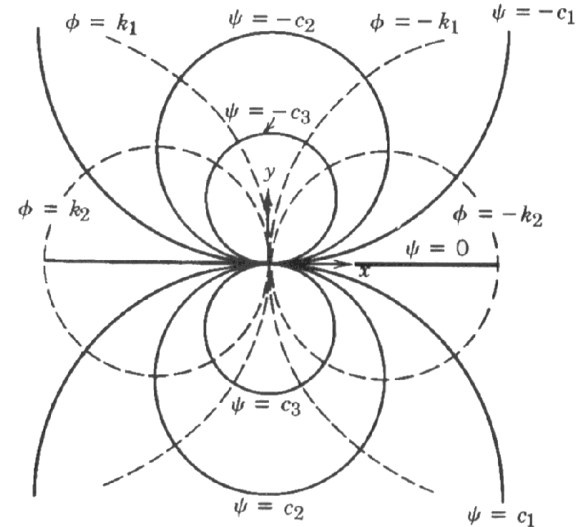


**Dipolo (centro na origem)**

$$V_r = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta \quad \psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$$

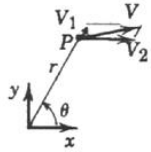
$$V_\theta = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos \theta}{r}$$

A origem é um ponto singular  
 $\Lambda$  é a intensidade do dipolo  
 $\Gamma = 0$  em torno de qualquer curva fechada



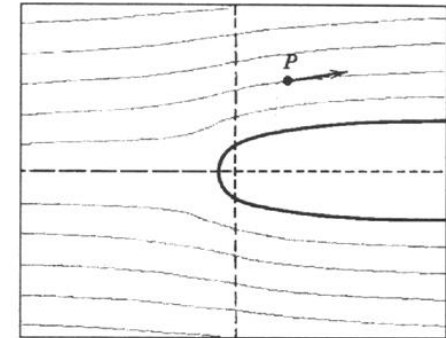
## Quadro 6.2 Superposição de Escoamentos Planos Elementares

Fonte e Escoamento Uniforme (escoamento ao longo de um meio-corpo)

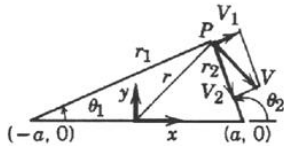


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta + Uy = \frac{q}{2\pi}\theta + Ur \sin \theta$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ux = -\frac{q}{2\pi} \ln r - Ur \cos \theta$$

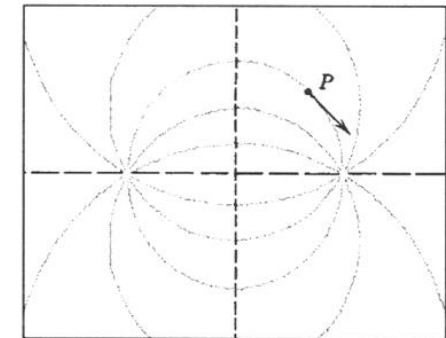


Fonte e Sorvedouro (iguais intensidades, distância de separação no eixo x = 2a)

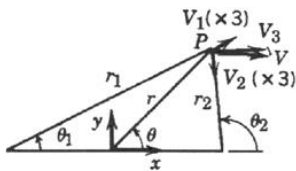


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



Fonte, Sorvedouro e Escoamento Uniforme (escoamento ao longo de um corpo de Rankine)

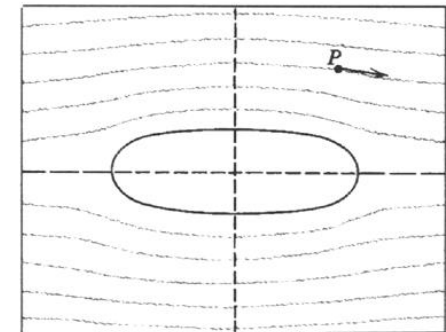


$$\psi = \psi_{so} + \psi_{si} + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{q}{2\pi}\theta_1 - \frac{q}{2\pi}\theta_2 + Uy$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) + Ur \sin \theta$$

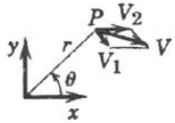
$$\phi = \phi_{so} + \phi_{si} + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{q}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi} \ln r_2 - Ux$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - Ur \cos \theta$$



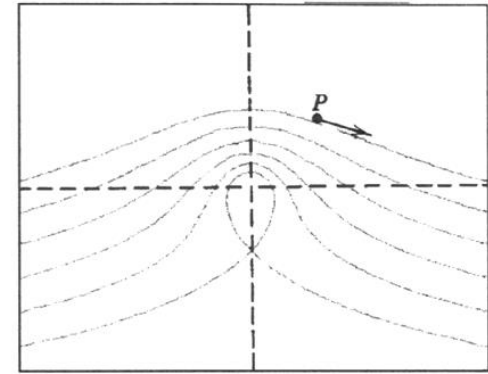
Quadro 6.2 Superposição de Escoamentos Planos Elementares (cont.)

Vórtice (horário) e Escoamento Uniforme

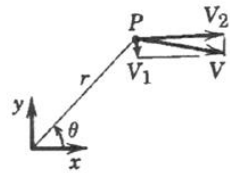


$$\psi = \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy = \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin\theta$$

$$\phi = \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{2\pi} \theta - Ux = \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos\theta$$



Dipolo e Escoamento Uniforme (escoamento passando por um cilindro)

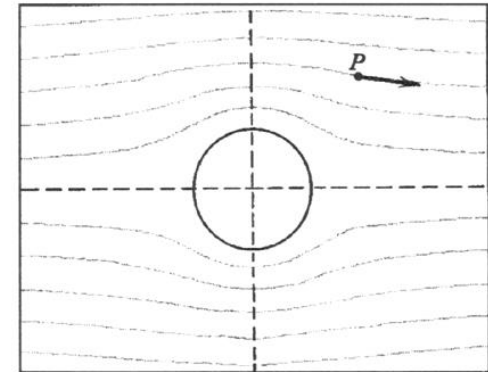


$$\psi = \psi_d + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Lambda \sin\theta}{r} + Uy = -\frac{\Lambda \sin\theta}{r} + Ur \sin\theta$$

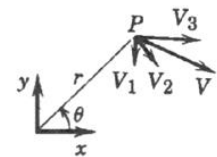
$$\psi = U \left( r - \frac{\Lambda}{Ur} \right) \sin\theta = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta \quad a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} - Ux = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} - Ur \cos\theta$$

$$\phi = U \left( r + \frac{\Lambda}{Ur} \right) \cos\theta = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta$$



Dipolo e Escoamento Uniforme (escoamento passando por um cilindro)

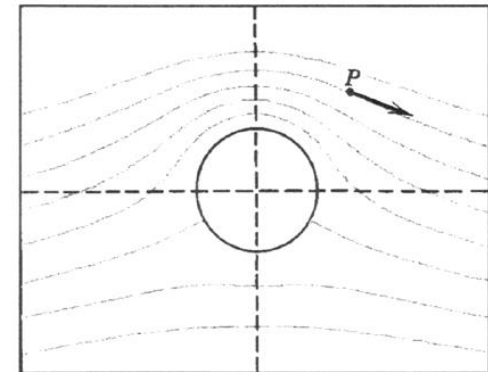


$$\psi = \psi_d + \psi_v + \psi_{uf} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = -\frac{\Lambda \sin\theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Uy$$

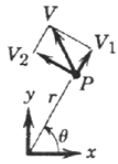
$$\psi = -\frac{\Lambda \sin\theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \ln r + Ur \sin\theta = Ur \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta + \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_d + \phi_v + \phi_{uf} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ux$$

$$a = \sqrt{\frac{\Lambda}{U}}; K < 4\pi aU \quad \phi = -\frac{\Lambda \cos\theta}{r} + \frac{K}{2\pi} \theta - Ur \cos\theta = -Ur \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta + \frac{K}{2\pi} \theta$$

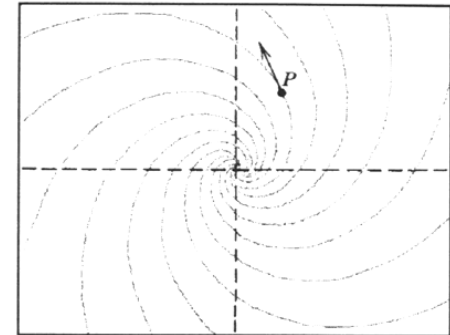


Fonte e Vórtice (vórtice espiral)

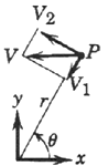


$$\psi = \psi_{so} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{so} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$

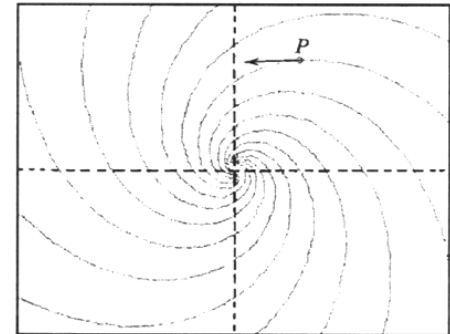


Sorvedouro e Vórtice

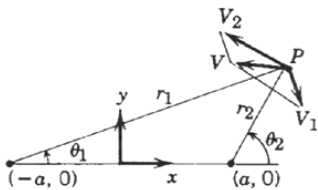


$$\psi = \psi_{si} + \psi_v = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{q}{2\pi}\theta - \frac{K}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = \phi_{si} + \phi_v = \phi_1 + \phi_2 = \frac{q}{2\pi} \ln r - \frac{K}{2\pi} \theta$$

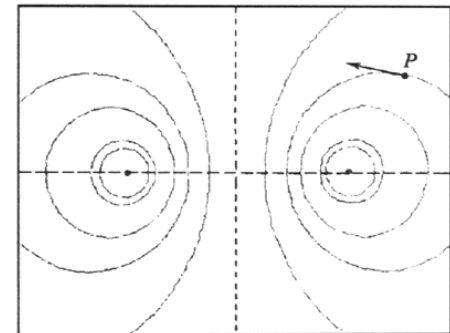


Par de Vórtices (iguais intensidades, rotações opostas, distância de separação no eixo dos x = 2a)



$$\psi = \psi_{v1} + \psi_{v2} = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{K}{2\pi} \ln r_1 + \frac{K}{2\pi} \ln r_2 = \frac{K}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{K}{2\pi} \theta_1 + \frac{K}{2\pi} \theta_2 = \frac{K}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$



### **Exemplo 6.11:** Escoamento sobre um Cilindro:

*Superposição de Dipolo e Escoamento Uniforme.*

Determine: (i) função corrente (ii) função potencial (iii) campo de velocidade  
(iv) localize pontos de estagnação (v) campo de pressão  
(vi) força resultante sobre o cilindro: arraste e sustentação

### **Solução:**

- escoamento uniforme:  $\psi = U y$  ;  $\phi = - U x$

- dipolo:  $\psi = -\frac{\Lambda}{r} \text{sen } \theta$  ;  $\phi = -\frac{\Lambda}{r} \text{cos } \theta$

(i) Função corrente:  $\psi = -\frac{\Lambda}{r} \text{sen } \theta + U r \text{sen } \theta$

(ii) Função potencial:  $\phi = -\frac{\Lambda}{r} \text{cos } \theta - U r \text{cos } \theta$

(iii) Campo de velocidade:  $\vec{V} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta$

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{ou} \quad u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\phi = -\frac{\Lambda}{r} \cos \theta - U r \cos \theta$$
$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\Lambda}{r^2} \cos \theta + U \cos \theta = U \cos \theta \left[ 1 - \frac{\Lambda/U}{r^2} \right]$$
$$u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\Lambda}{r^2} \sin \theta - U \sin \theta = -U \sin \theta \left[ 1 + \frac{\Lambda/U}{r^2} \right]$$

(iv) pontos de estagnação: ponto onde  $|\vec{V}| = 0$  logo  $u_r = 0$  e  $u_\theta = 0$

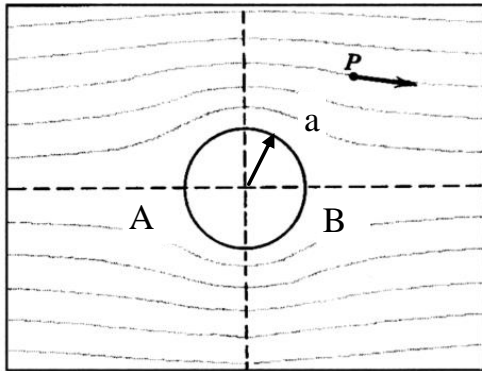
Note que  $u_r = 0$  para qualquer  $\theta$  se  $r = \sqrt{\Lambda/U_\infty}$  ( $r = \text{cte} \Rightarrow$  círculo) logo o raio do cilindro é  $a = \sqrt{\Lambda/U}$

Para ambos os componentes serem nulos, é preciso verificar se o componente angular pode ser nulo sobre a superfície do cilindro.

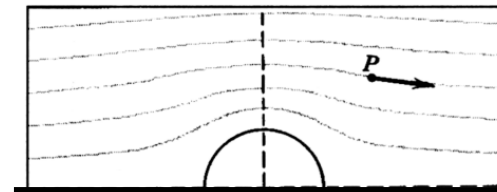
Para  $r = a \Rightarrow u_\theta = -2U \sin \theta$ . Então  $u_\theta = 0$  para  $\theta = 0$  e  $\pi$ .

Os pontos de estagnação são  $(r, \theta) = (a, 0)$  e  $(a, \pi)$

A função de corrente pode representar um escoamento sobre um cilindro ou um semi-hemisfério

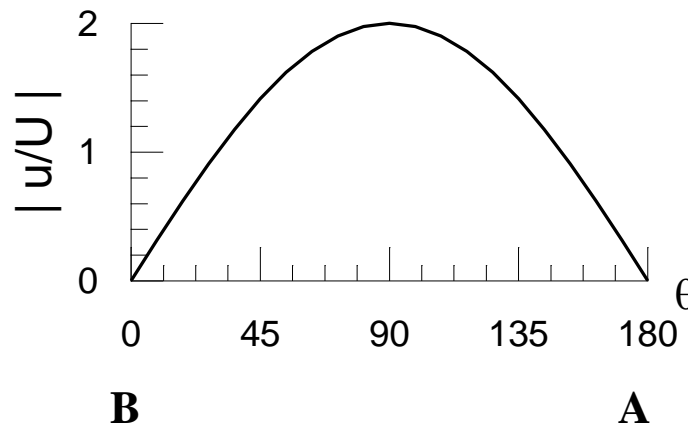


$$\psi = U r \sin\theta \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right]$$



O perfil de velocidade sobre a superfície do cilindro é  $u = u_\theta = -2U \sin\theta$  ;

$$\vec{V} = u_\theta \vec{e}_\theta \quad ; \quad V = |\vec{V}| = 2U \sin\theta$$



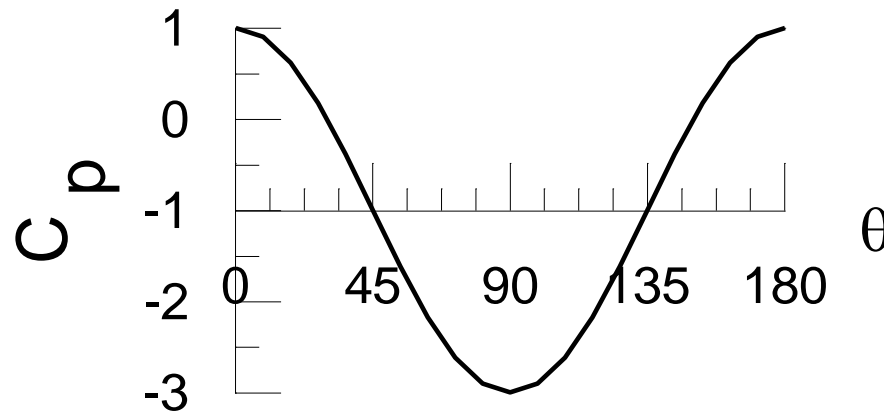


(v) campo de pressão:

Para escoamento irrotacional podemos utilizar a EQUAÇÃO DE Bernoulli entre quaisquer dois pontos: ponto no infinito e ponto sobre a superfície do cilindro

$$p_{\infty} + \rho \frac{U^2}{2} = p + \rho \frac{V^2}{2} \Rightarrow p = p_{\infty} + \rho \left[ \frac{U^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right] = p_{\infty} + \rho \frac{U^2}{2} \left[ 1 - 4(\sin \theta)^2 \right]$$

Coeficiente de pressão:  $C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\rho U^2 / 2} = \left[ 1 - 4(\sin \theta)^2 \right]$



**Força resultante sobre o cilindro:**  $\vec{R} = F_A \vec{i} + F_S \vec{j} = \int_{\text{cilindro}} -p \, dA = \int_0^{2\pi} -p \vec{n} a L \, d\theta$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta$$

$$\vec{R} = \int_0^{2\pi} -p [\vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta] a L \, d\theta \Rightarrow F_A = \int_0^{2\pi} -p \cos\theta a L \, d\theta \quad \text{e} \quad F_S = \int_0^{2\pi} -p \sin\theta a L \, d\theta$$

**Força de arraste:**  $F_A = \int_0^{2\pi} - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 4 \sin^2 \theta \right] \cos\theta a L \, d\theta$

$$F_A = - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \right] a L \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + 2 \rho U^2 a L \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos\theta \, d\theta \quad \frac{F_A}{a L} = - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \right] \sin\theta \Big|_0^{2\pi} + 2 \rho U^2 \frac{\sin^3 \theta}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\boxed{F_A = 0}$$

**Força de sustentação:**  $F_S = \int_0^{2\pi} - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho U^2 4 \sin^2 \theta \right] \sin\theta a L \, d\theta$

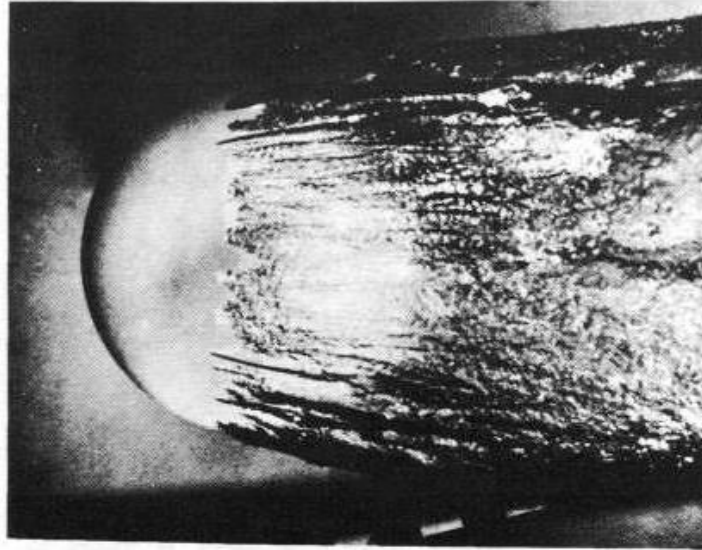
$$F_S = - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \right] a L \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta + 2 \rho U^2 a L \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin\theta \, d\theta$$

$$\frac{F_S}{a L} = \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \right] \cos\theta \Big|_0^{2\pi} - 2 \rho U^2 \frac{\cos\theta}{3} (2 + \sin^2 \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\boxed{F_S = 0}$$

## Obs:

1. Na realidade existe arraste, veremos que o escoamento separa, ocorre a formação de



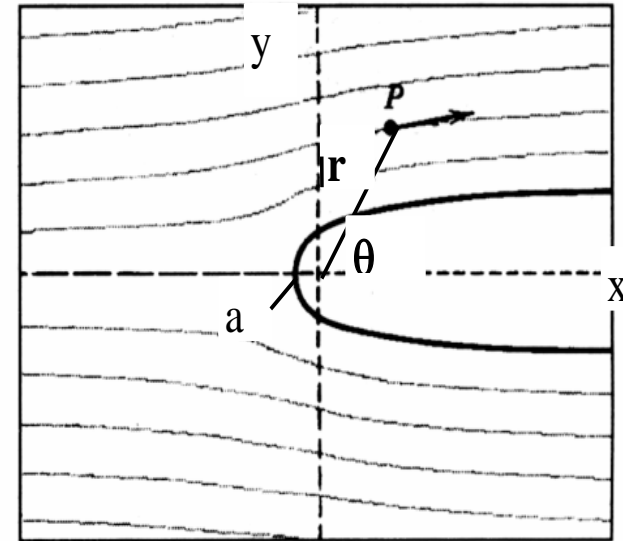
esteira.

2. Todo escoamento com simetria em relação a horizontal, apresenta sustentação nula.

## Exercício: Meia Superfície de Rankine

Conhecendo o seguinte campo potencial  $\phi = -m \ln r - U r \cos \theta$ , determine:

- i) o campo de velocidades
- ii) pontos de estagnação
- iii) as linhas de corrente
- iv) forma do corpo



Sabe-se que  $x = r \cos \theta$   $y = r \sin \theta$ , logo

$$\phi = -m \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - U x = -\frac{m}{2} \ln(x^2 + y^2) - U x$$

i)

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{m x}{x^2 + y^2} = U + \frac{m r \cos \theta}{r^2} = U + \frac{m}{r} \cos \theta$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{m y}{x^2 + y^2} = \frac{m r \sin \theta}{r^2} = \frac{m}{r} \sin \theta$$

ii) **Ponto de estagnação:**  $|\vec{V}| = 0$ ,

i) velocidade vertical:  $v = 0$  para  $\theta = 0$  e  $\pi$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{m y}{x^2 + y^2} = \frac{m r \sin \theta}{r^2} = \frac{m}{r} \sin \theta$$

ii) velocidade horizontal :

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = U + \frac{m x}{x^2 + y^2} = U + \frac{m r \cos \theta}{r^2} = U + \frac{m}{r} \cos \theta$$

- em  $\theta = 0$ ,  $u = U + m/r = 0 \Rightarrow r < 0$  impossível
- em  $\theta = \pi$ ,  $u = U - m/r = 0 \Rightarrow r = m/U = a \Rightarrow x = -a$

$$\text{iii) } u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \psi = \int \left[ U + \frac{m x}{x^2 + y^2} \right] dy + f(x) = U y + m \tan^{-1} \frac{y}{x} + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \psi = \int -\frac{m y}{x^2 + y^2} dx + g(y) = m \tan^{-1} \frac{y}{x} + g(y)$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(y) = U y \Rightarrow \psi = U y + m \tan^{-1} \frac{y}{x} \Rightarrow \psi = U r \sin \theta + m \theta$$

iv) o ponto de estagnação deve estar localizado sobre o corpo, logo o valor de  $\psi$  no ponto de estagnação é  $\Rightarrow \psi = m \pi$  ou  $\psi = -m \pi$

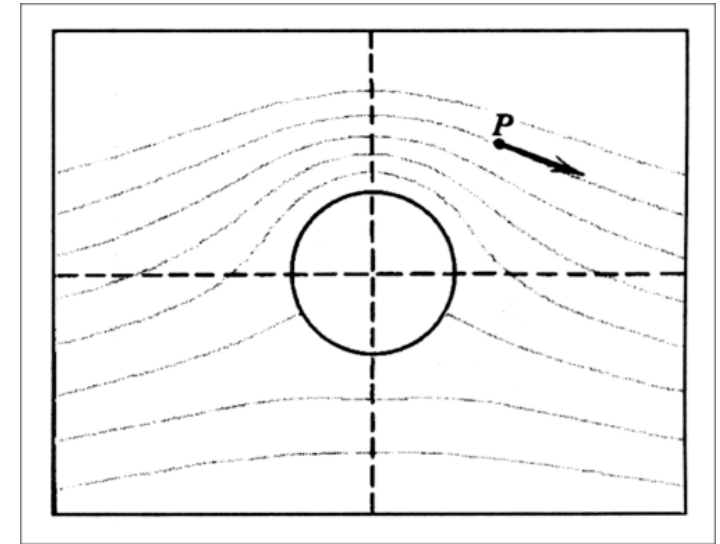
O lugar geométrico da linha de corrente  $\psi = m \pi$ , a qual separa o escoamento da fonte do

$$\text{escoamento uniforme é } \Rightarrow m \pi = U r \sin \theta + m \theta \Rightarrow r = \frac{m (\pi - \theta)}{U \sin \theta}$$

**Exercício:** Escoamento ao redor de um cilindro com rotação  
 Obtido com a combinação de escoamento:

- uniforme  $\Rightarrow \psi = U_\infty r \sin\theta$
- dipolo  $\Rightarrow \psi = -\frac{\lambda}{r} \sin\theta$
- vórtice  $\Rightarrow \psi = -K \ln \frac{r}{a}$

Definindo:  $a^2 = \lambda / U_\infty$  , a referência



$r = a$  é uma linha de corrente ( $\psi = 0$ )

$$\Rightarrow \psi = U_\infty r \sin\theta \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] - K \ln \frac{r}{a}$$

**Velocidade:**

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right]$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \sin \theta \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} \right] + \frac{K}{r}$$

**Pontos de estagnação sobre o corpo:**

$$(r = a) \Rightarrow u_r = 0 \text{ e}$$

$$u_\theta = -2U_\infty \sin \theta + \frac{K}{a}$$

A coordenada do ponto de estagnação  $(x_s, y_s)$  é:

$$x_s = \pm \sqrt{a^2 - y_s^2} \text{ e}$$

$$y_s = a \sin \theta$$

No ponto de estagnação  $(u_r = 0 \text{ e } u_\theta = 0)$  logo

$$a \sin \theta = \frac{K}{2U_\infty} \Rightarrow$$

$$y_s = \frac{K}{2U_\infty}$$

Considerando  $K < 0$ , rotação no sentido horário, as seguintes situações podem ocorrer:

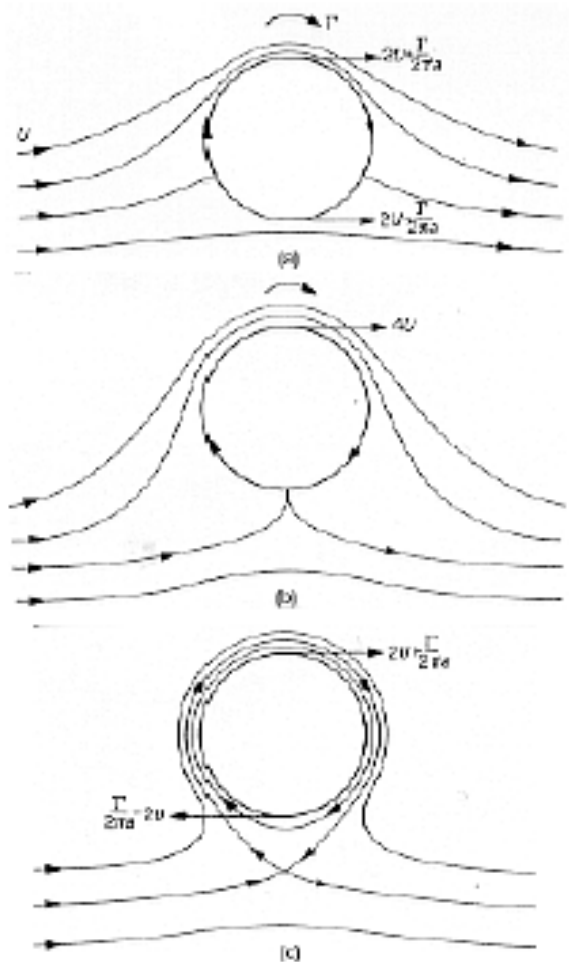


Fig 2.9

$$\frac{|K|}{2U_\infty} < a$$

Existem dois pontos de estagnação, para  $x_s > 0$  e  $x_s < 0$

$$\frac{|K|}{2U_\infty} = a$$

Um único ponto de estagnação em  $\theta = -90^\circ$   $x_s = 0$

$$\frac{|K|}{2U_\infty} > a$$

Não existe ponto de estagnação sobre a superfície do cilindro ( $\sin \theta > 1$  impossível)

**Pontos de estagnação sobre o corpo:**

$$(r = a) \Rightarrow u_r = 0 \text{ e}$$

$$u_\theta = -2U_\infty \sin \theta + \frac{K}{a}$$

A coordenada do ponto de estagnação  $(x_s, y_s)$  é:

$$x_s = \pm \sqrt{a^2 - y_s^2} \text{ e}$$

$$y_s = a \sin \theta$$

No ponto de estagnação  $(u_r = 0 \text{ e } u_\theta = 0)$  logo

$$a \sin \theta = \frac{K}{2U_\infty} \Rightarrow$$

$$y_s = \frac{K}{2U_\infty}$$

Considerando  $K < 0$ , rotação no sentido horário, as seguintes situações podem ocorrer:

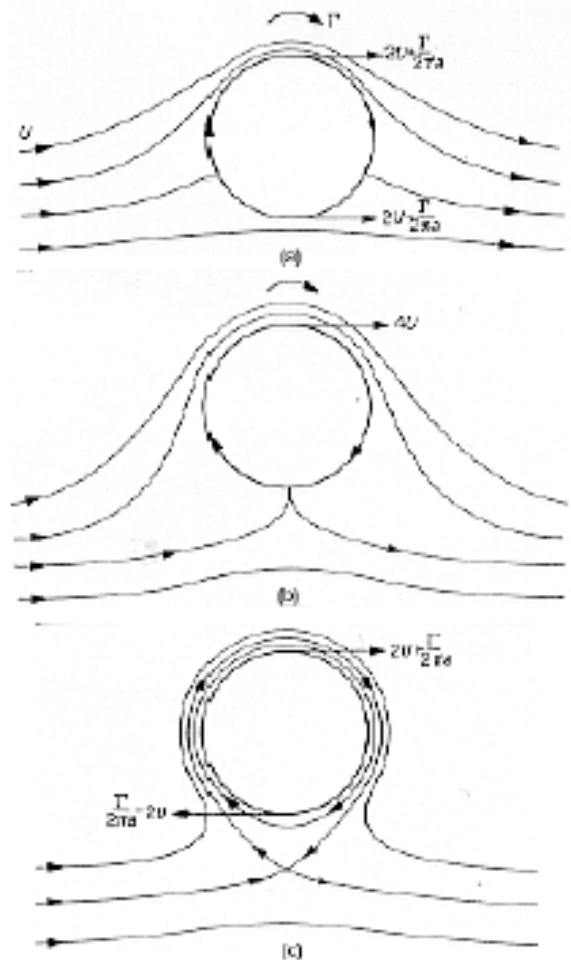


Fig 2.9

$$\frac{|K|}{2U_\infty} < a$$

Existem dois pontos de estagnação, para  $x_s > 0$  e  $x_s < 0$

$$\frac{|K|}{2U_\infty} = a$$

Um único ponto de estagnação em  $\theta = -90^\circ$   $x_s = 0$

$$\frac{|K|}{2U_\infty} > a$$

Não existe ponto de estagnação sobre a superfície do cilindro ( $\sin \theta > 1$  impossível)



## Distribuição de pressão:

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \Rightarrow V^2 = u_\theta^2 = \left[ -2 U_\infty \sin\theta + \frac{K}{a} \right]^2$$

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho \left[ 4 U_\infty^2 \sin^2\theta + \frac{K^2}{a^2} - \frac{4 U_\infty K}{a} \sin\theta \right]$$

**Força resultante sobre o cilindro:**  $\vec{R} = F_A \vec{i} + F_S \vec{j} = \int_{\text{cilindro}} -p \, dA = \int_0^{2\pi} -p \vec{n} a L \, d\theta$

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta$$

$$\vec{R} = \int_0^{2\pi} -p \left[ \vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta \right] a L \, d\theta \Rightarrow F_A = \int_0^{2\pi} -p \cos\theta \, a L \, d\theta \quad \text{e} \quad F_S = \int_0^{2\pi} -p \sin\theta \, a L \, d\theta$$

$$\text{Força de arraste: } F_A = - \left[ p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \right] a L \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta +$$

$$+ \frac{\rho}{2} a L \left[ \int_0^{2\pi} 4 U_\infty^2 \sin^2\theta \cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{K^2}{a^2} \cos\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{4 U_\infty K}{a} \sin\theta \cos\theta d\theta \right] =$$

$$\frac{F_A}{a L} = - \left[ p_\infty + \frac{\rho}{2} \left( U_\infty^2 - \frac{K^2}{a^2} \right) \right] \sin\theta \Big|_0^{2\pi} + 2 \rho U_\infty^2 \frac{\sin^3\theta}{3} \Big|_0^{2\pi} - \frac{2 \rho U_\infty K}{a} \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{F_A = 0}$$

### Força de sustentação

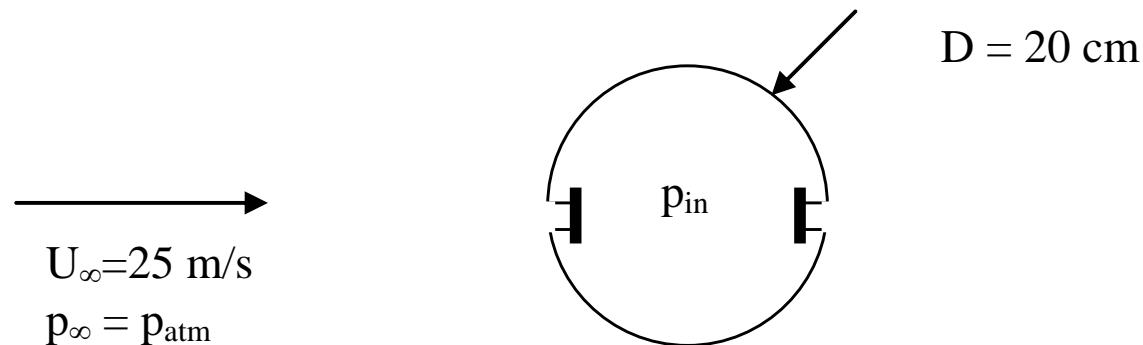
$$F_S = - \left[ p_\infty + \frac{\rho}{2} \left( U_\infty^2 - \frac{K^2}{a^2} \right) \right] a L \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + \frac{\rho}{2} a L \left[ \int_0^{2\pi} 4 U_\infty^2 \sin^3\theta d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{4 U_\infty K}{a} \sin^2\theta d\theta \right]$$

$$F_S = a L \left[ p_\infty + \frac{\rho}{2} \left( U_\infty^2 - \frac{K^2}{a^2} \right) \right] \cos\theta \Big|_0^{2\pi} - 2 \rho U_\infty^2 a L \frac{\cos\theta}{3} (2 + \sin^2\theta) \Big|_0^{2\pi} -$$

$$- \frac{2 \rho U_\infty K}{a} a L \left[ \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right] \Big|_0^{2\pi} = 0 + 0 - \frac{2 \rho U_\infty K}{a} a L \pi \Rightarrow$$

$$\boxed{F_S = - 2 \pi K L \rho U_\infty}$$

**1ª Questão:** Um cilindro é formado ao aparafusar duas calhas semi-cilíndricas pelo lado interno, como mostra a figura. Existem 10 parafusos por comprimento de largura em cada lado, e a pressão interna é 50 Pa (manométrica). Determine a força em cada parafuso, se o fluido externo é ar a CNTP ( $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ). Utilize a teoria de escoamento potencial, logo, o escoamento ao redor do cilindro pode ser aproximado pela soma de um dipolo ( $\psi = -\frac{\Lambda \sin \theta}{r}$ ) com um escoamento uniforme ( $\psi = U_\infty y$ ).



$$u_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos \theta - \frac{\Lambda \cos \theta}{r^2} = U \cos \theta \left[ 1 - \frac{\Lambda / U}{r^2} \right]$$

em  $r = (\Lambda / U)^{0.5}$ ,  $u_r = 0$ ,  
 $u_\theta = -2 U \sin \theta$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta - \frac{\sin \theta \Lambda}{r^2} = -U \sin \theta \left[ 1 + \frac{\Lambda / U}{r^2} \right]$$

Entao  $R = D/2 = (\Lambda / U)^{0.5}$

$$\int \frac{\partial V_s}{\partial t} ds + \frac{V_s^2}{2} + g z + \int \frac{dp}{\rho} = \text{constante}$$

Para  $\rho = \text{cte}$ , regime permanente =>

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{u_\theta^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad p = p_\infty + \rho \frac{U^2}{2} [1 - 4 \sin^2 \theta]$$

$$2F = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (p_{in} - p) \sin \theta R d\theta L = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left( p_{in} - p_\infty - \rho \frac{U^2}{2} [1 - 4 \sin^2 \theta] \right) \sin \theta R d\theta L =$$

$$2F = \left( p_{in} - p_\infty - \rho \frac{U^2}{2} \right) R L \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin \theta d\theta}_{-\cos \theta \Big|_0^\pi = 2} + \rho \frac{U^2}{2} R L 4 \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta d\theta}_{-\frac{\cos \theta}{3} (2 + \sin^2 \theta) \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}}$$

$$\frac{F}{LN} = \left\{ 2(p_{in} - p_\infty) + \frac{16}{3} \rho \frac{U^2}{2} \right\} \frac{R}{2LN}$$

$$\frac{F}{LN} = 67,5 N/m$$

**2ª Questão:** Uma usina nuclear despeja  $Q = 8,5 \text{ m}^3/\text{s}$  de água quente, utilizada no processo de refrigeração no fundo do mar. O jato de água sai verticalmente do fundo do mar, que está a uma profundidade de  $b = 7,6 \text{ m}$ . A corrente marinha é igual a  $U = 0,4 \text{ m/s}$ . Por razões ecológicas é necessário saber, a que distância da saída da tubulação a corrente marinha é afetada pela água quente. De acordo com a figura, deseja-se saber  $a$  e  $L$ . Note que este escoamento pode ser representado por uma combinação de uma fonte e um escoamento uniforme.

Sabe-se:

- Escoamento uniforme:

$$\psi = U y$$

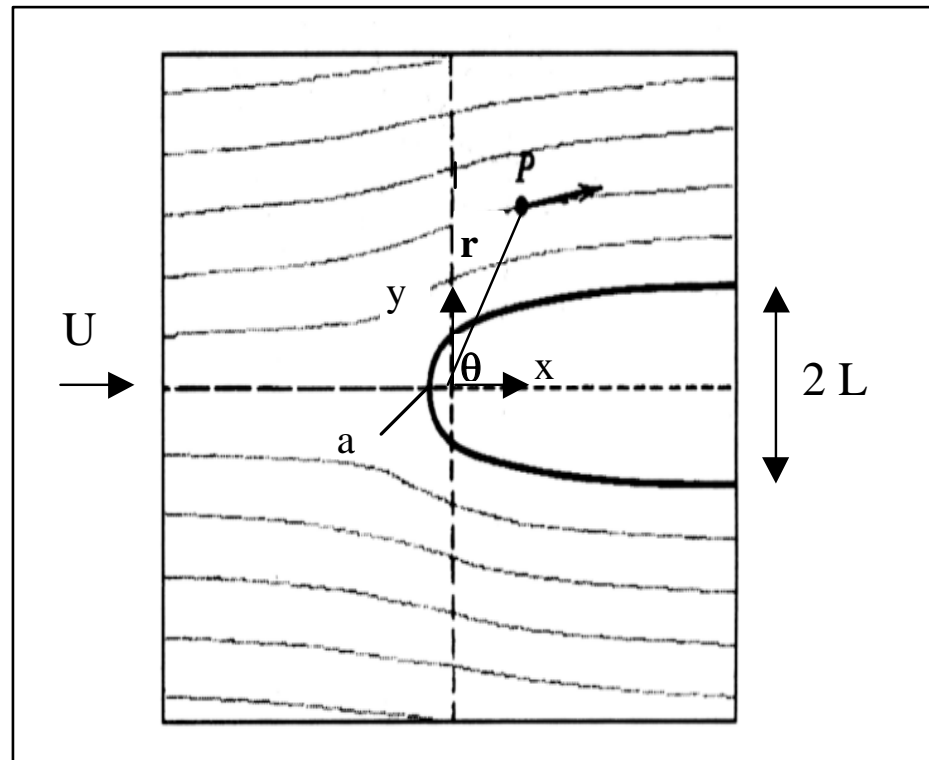
- Fonte:  $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$

- $x = r \cos \theta$  ;

- $y = r \sin \theta$  ;

- $r^2 = x^2 + y^2$  ;

$$\theta = \tan^{-1}(y / x)$$



$$\psi = U y + \frac{Q/b}{2\pi} \theta = U r \sin \theta + \frac{Q/b}{2\pi} \theta$$

$$\psi = U y + \frac{Q/b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$u_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = U \cos \theta + \frac{Q/b}{2\pi r}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta$$

Ponto de estagnação:  $u_\theta=0$  ,  $u_r=0$

$u_\theta=0$  em  $\theta=0$  e  $\pi$

$u_r=0$  em  $\theta=0$  impossível

em  $\theta=\pi$  se  $a = (Q/b)/(2\pi U)$

Ponto de estagnação:  $r=a$ ,  $\theta=\pi$

$$a = (Q/b)/(2\pi U) = 0,44m$$

Linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação:  $\psi(a, \pi) = \frac{Q/b}{2}$

Lugar geométrico desta linha de corrente:  $U y + \frac{Q/b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{Q/b}{2}$

$$y + \frac{Q/b}{2U\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{Q/b}{2U} \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow L \quad L + \underbrace{\frac{Q/b}{2U\pi} \tan^{-1} 0}_{\text{zero}} = \frac{Q/b}{2U}$$

$$L = \frac{Q/b}{2U} = 1,4m$$

Exercício: Um tornado pode ser representado por um vórtice ( $\psi = -K \ln r$ ). A pressão foi medida a 0,5 m do centro do vórtice como sendo igual a 90 KPa. Qual a velocidade nesta posição? Qual a intensidade  $K$  do vórtice?

$$u_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0 \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r}$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad V^2 = |\vec{V}|^2 = u_\theta^2 = \frac{K^2}{r^2}$$

$$p(r \rightarrow \infty) = p_{atm}$$

$$V^2(r \rightarrow \infty) = 0$$

$$p_1 + \frac{V^2}{2} = p_{atm}$$

$$V_1 = \sqrt{2 \left( \frac{p_{atm} - p_1}{\rho} \right)} = 135 \text{ m/s}$$

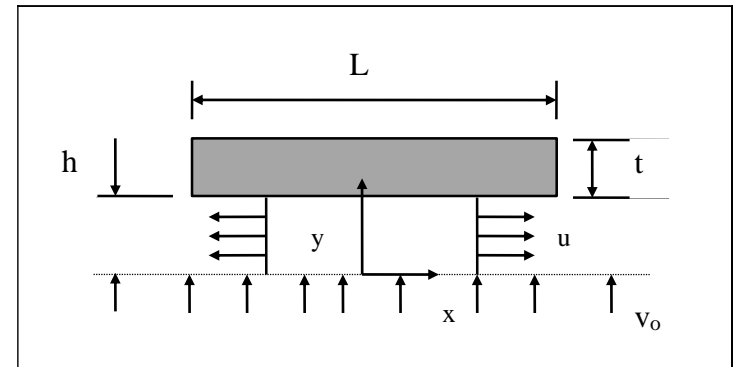
$$K = V_1 r_1 = 67,7 \text{ m}^2/\text{s}$$

**Questão:** Um “chip” retangular de microcircuito flutua numa camada de ar ( $\rho=1,2 \text{ kg/m}^3$ ), com espessura  $h=0,5 \text{ mm}$ , acima de uma superfície porosa. A largura do “chip” é  $L=20 \text{ mm}$ , e a espessura é  $t=2 \text{ mm}$ , conforme mostrado. O seu comprimento  $b$ , na direção perpendicular ao plano da figura, é igual  $100 \text{ mm}$ . Não há escoamento na direção  $z$ . Admita que o perfil de velocidade na direção  $x$ , na fresta sob o “chip”, é uniforme em  $y$ , isto é, não varia com  $y$ . O fluido é incompressível e os efeitos de atrito podem ser desprezados. Estime a massa do “chip”, sabendo que  $v_o=3 \text{ m/s}$ .

Balço de forças no chip  $\Rightarrow \sum F = 0$

$$m g + p_{atm} b L + 2 \int_0^{L/2} -p b dx = 0$$

$$m = \frac{2}{g} \int_0^{L/2} p' b dx \quad p' = p - p_{atm}$$



Para avaliar a pressão, desprezando efeitos de atrito, aplicamos a equação de Bernoulli

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = p_{atm} + \rho \frac{V_{L/2}^2}{2}$$

precisamos estimar a velocidade utilizando a equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \, dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = 0$$

temos de  $v_o \times b = u \, b \, h \Rightarrow u = v_o \, x / h \quad V_{L/2} = u(x = L/2) = v_o \frac{L/2}{h}$

$$p' = p - p_{atm} = \rho \frac{V_{L/2}^2}{2} - \rho \frac{u^2}{2} = \rho \frac{v_o^2 (L/2)^2}{2 h^2} - \rho \frac{v_o^2 x^2}{2 h^2} = \rho \frac{v_o^2 L^2}{8 h^2} \left[ 1 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right]$$

$$m = \frac{2}{g} \int_0^{L/2} p' \, b \, dx \quad m = \frac{2}{g} \rho \frac{v_o^2 L^2}{8 h^2} \int_0^{L/2} \left[ 1 - 4 \frac{x^2}{L^2} \right] b \, dx$$

$$m = \frac{2}{g} \rho \frac{v_o^2 L^2}{8 h^2} \left( \frac{L}{2} - \frac{4}{3} \frac{(L/2)^3}{L^2} \right) b \quad m = \frac{2}{g} \rho \frac{v_o^2 L^3}{8 h^2} \frac{1}{3} b = \frac{1}{g} \rho \frac{v_o^2 L^3}{12 h^2} b$$

$$\Rightarrow m = 0,293 \, \text{kg}$$