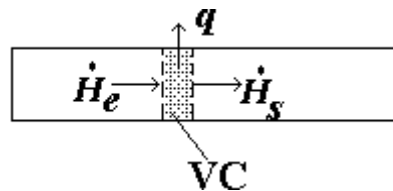


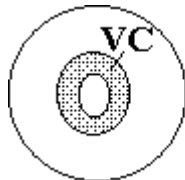
## Balanco de energia na abordagem microscópica

**Exemplos de problemas de transporte de energia que requerem modelagem via abordagem microscópica:**

- Escoamento unidirecional em dutos com geração de calor em regime permanente ou dinâmico (e.g. modelagem de reatores químicos tubulares), transferência bi- ou tridimensional em regime permanente ou dinâmico (e.g. modelagem rigorosa de trocadores de calor ou reatores tubulares, cálculo da distribuição de temperatura em peças – usinagem/fundição, etc.).

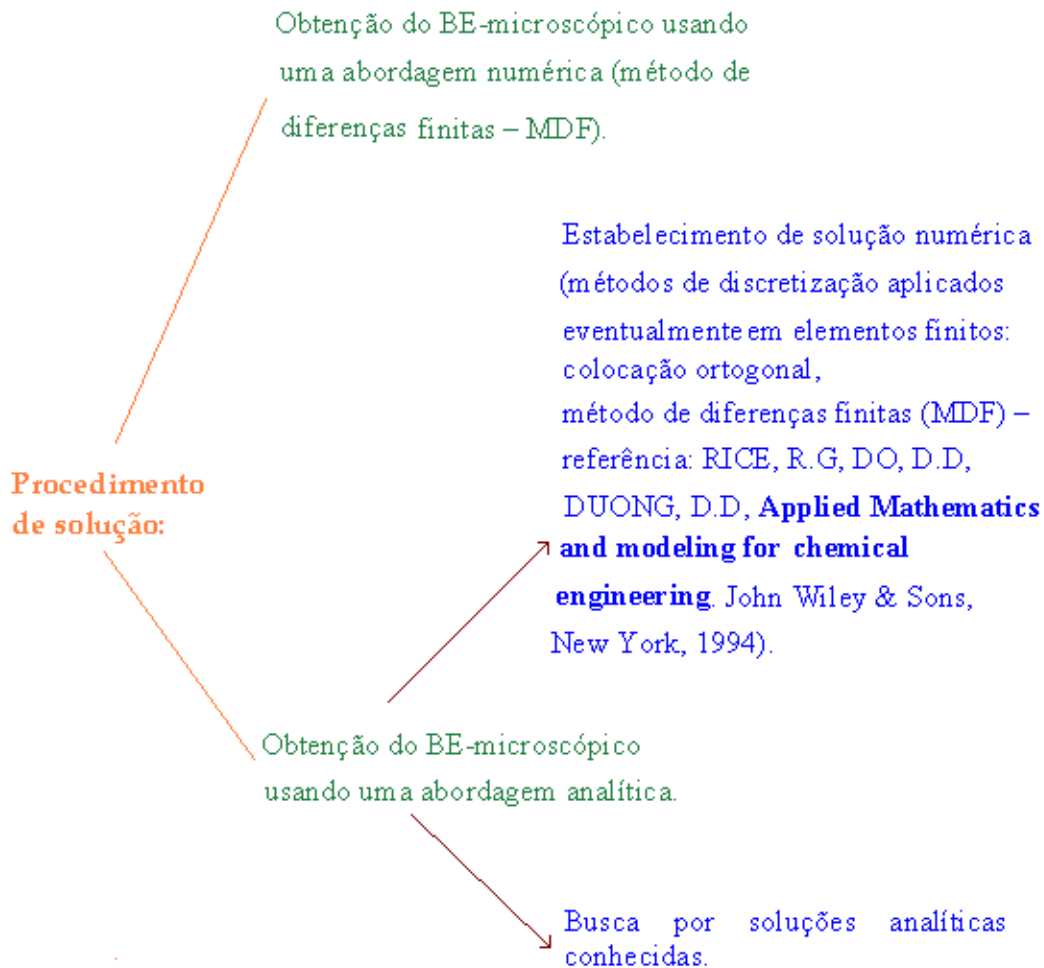


- Condução com geração de calor em regime permanente ou dinâmico.



- Condução em regime transitório (resfriamento de materiais em que  $Bi > 0.1$ ).

## ALTERNATIVAS PARA A MODELAGEM DOS PROCESSOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA ABORDAGEM MICROSCÓPICA



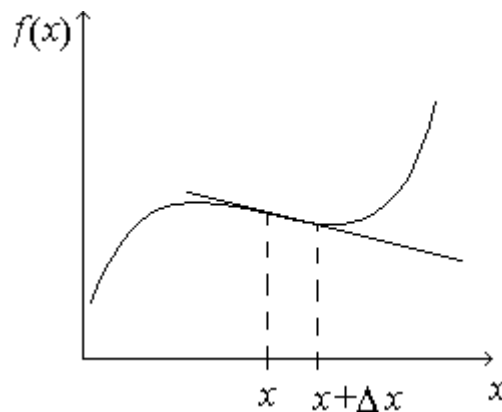
## Recordação de cálculo ...

**Problema:** dada uma função, cujo valor se conhece em um ponto  $x$  e também se conhece o valor das derivadas desta função em  $x$ . Quer-se obter uma aproximação para o valor da função calculado em um ponto distante de  $x$  de  $\Delta x$  a partir dos valores conhecidos.

**Para uma função monovariável – a expansão em série de Taylor:**

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3}(x)\Delta x^3 + \dots$$

**Interpretação gráfica da expansão em série de Taylor de 1ª ordem:**



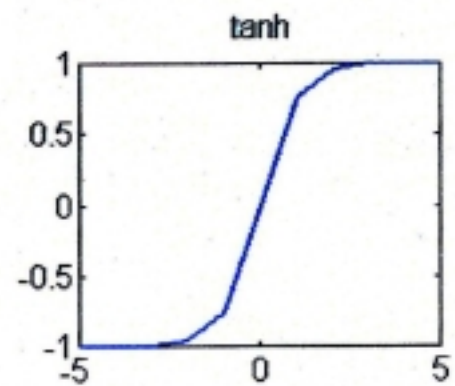
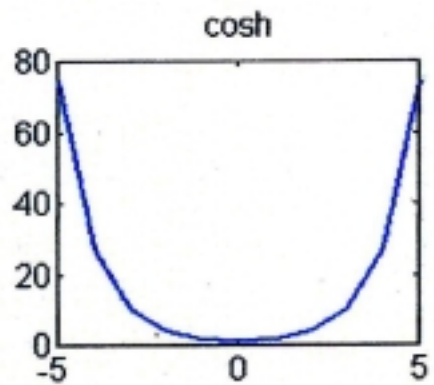
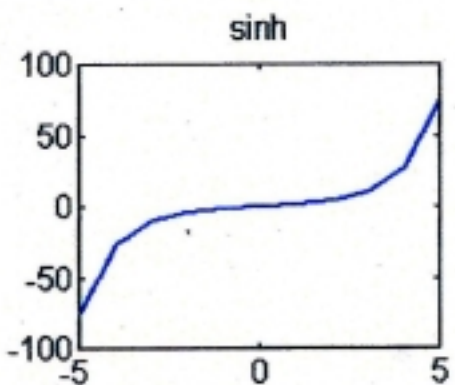
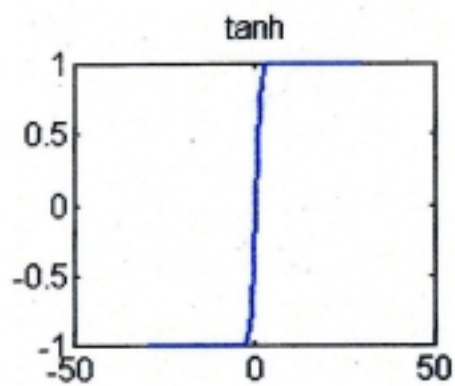
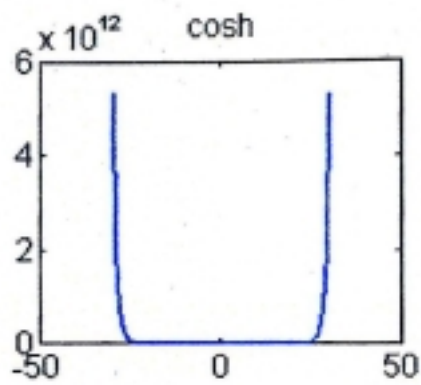
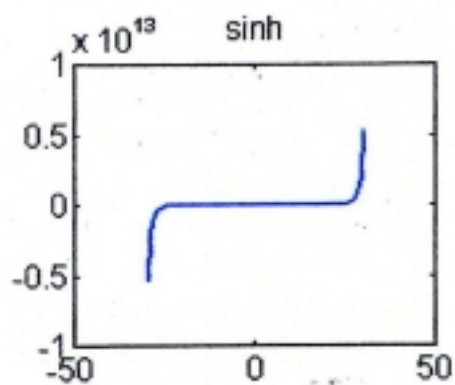
**Observação:** a expansão em série de Taylor é uma importante ferramenta para a solução de problemas da engenharia. Você se deparará com o seu uso para resolver problemas concretos neste semestre e em semestres vindouros, particularmente para a dedução de equações.

## Comportamento de funções hiperbólicas.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)}$$



## Procedimento de resolução de uma equação diferencial ordinária homogênea de 2ª ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (\text{EDO} - \text{homogênea de } 2^{\text{a}} \text{ ordem})$$

**1º passo:** obter as soluções ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) da equação característica  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ .

**2º passo:** identificar a solução geral da EDO:

possibilidade 1:  $\lambda_1 \neq \lambda_2; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$   
$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

possibilidade 2:  $\lambda_1 = \lambda_2$   
$$x = e^{\lambda t} [C_1 + C_2 t]$$

possibilidade 3:  $\lambda = \alpha \pm \beta i$   
$$x = e^{\alpha t} [C_1 \cos \beta t + C_2 \text{sen} \beta t]$$

**3º passo:** obter as constantes  $C_1$  e  $C_2$  a partir das condições de contorno.

## Procedimento de dedução de equações de BE-microscópico a partir de VC homogêneos

1. **Selecione um VC infinitesimal adequado** para o problema a ser resolvido (“o maior possível”) e um **sistema conveniente de coordenadas** (cartesianas ou cilíndricas ou esféricas). **Indique no VC todas as correntes materiais** que entram e que saem, bem como **todas as taxas de energia** que entram e que saem.
2. Aplique a equação do **BE-macroscópico** para o **VC escolhido**. Para todas **as taxas de entrada** (materiais e energéticas), escreva equações constitutivas que tenham validade pontual. Nas direções em que se deseja avaliar a variação pontual na grandeza conservada: **cada taxa de saída deve ser relacionada com a taxa de entrada pela expansão em série de Taylor de 1ª ordem**. Os termos de geração devem ser expressos em função do volume, bem como o termo de acúmulo.
3. Procede-se então à simplificação dos termos e à aplicação do limite  $\Delta V \rightarrow 0$ .

### Observações:

- A escolha do VC infinitesimal está relacionada com o tipo de descrição que se deseja obter do problema.
- Existem outros procedimentos de obtenção das equações de balanço microscópico.

**PROCESSOS DE TRANSPORTE DE ENERGIA  
BIDIMENSIONAIS COM ABORDAGEM DE CONDUÇÃO  
UNIDIMENSIONAL - SUPERFÍCIES ESTENDIDAS &  
ALETAS**

Motivação para o estudo de aletas: como é possível aumentar a troca térmica por convecção entre uma superfície e o meio externo?

$$q = hA(T - T_{\infty})$$

Indique no espaço a seguir as suas reflexões:

Aumento da taxa de convecção é possibilitado através:

- do aumento de  $h$ : troca de fluido (limitações no tipo de fluido e custos), aumento de velocidade (limitações de bombas, sopradores, etc. e custos); limite teórico.
- da diminuição/aumento da temperatura do fluido refrigerante/de aquecimento: nem sempre possível ou custo proibitivo.
- do aumento da área de troca térmica: obtida pelo uso de aletas ou superfícies estendidas.



esquemas de aletas (figuras extraídas das Notas de Aula do Prof. Oliveira e de Holman, 1983)



**superfícies estendidas:** sólidos onde há transferência de energia por condução no interior de suas fronteiras e transferência de energia por convecção (e/ou radiação) entre suas fronteiras e a vizinhança.

**exemplo:** suportes de sustentação, aletas.

**Aleta:** superfície estendida adicionada a uma superfície com a finalidade de aumentar a taxa de troca térmica (usualmente para se dissipar mais calor).

**questões para reflexão:**

1. Quais os mecanismos de troca térmica envolvidos?
2. A transferência de calor é unidimensional ou bidimensional?
3. A taxa de transferência de calor é constante ao longo da aleta?
4. Quando que a transferência de calor por condução pode ser considerada unidimensional?

**Observação:** recomenda-se trabalhar com valores de condutividade térmica da aleta elevada para que a troca térmica seja mais eficaz. No limite, quando a condutividade térmica tender para o infinito a temperatura da aleta tenderá à temperatura da superfície à qual ela foi colocada, chamada de base. Ou seja, o calor será dissipado da superfície aletada através do mecanismo de convecção nessa superfície e por condução pela aleta. Este último será dissipado pelo mecanismo de convecção ao longo da superfície da aleta.

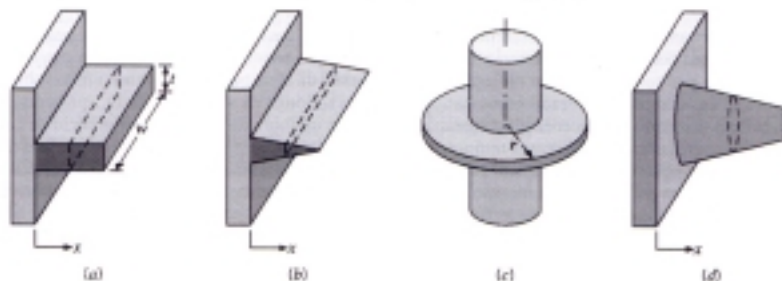
**aplicações típicas:** uso em radiadores, ar condicionado, cilindros de motores de motocicleta ou cortadores de grama, equipamentos eletrônicos (CPU de computadores, capacitores, etc.), uso em tubulações industriais, uso em trocadores de calor (como nas figuras a seguir – em que CO<sub>2</sub> líquido é aquecido pelo ar ambiente de modo a adquirir uma temperatura compatível com a sua utilização – note

a formação de gelo sobre a superfície do trocador de calor em contato com o ar ambiente!), etc.



### classificação de aletas:

- aleta **plana**: possui seção de **área transversal retangular**, que **pode variar** ao longo do comprimento
- aleta **anular**: é **fixada circunferencialmente** a um cilindro e sua **área** de seção **transversal não é constante**
- aleta **piniforme**: possui **seção transversal de área circular**, **constante ou não**.



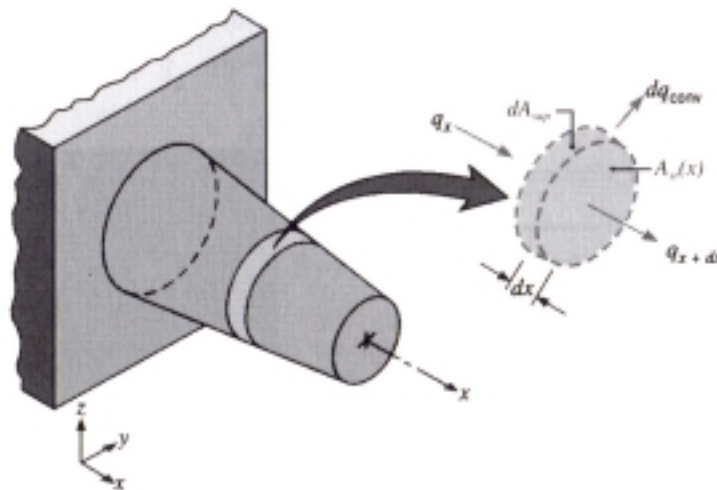
Configurações de aletas. (a) Aleta plana com área de seção reta uniforme. (b) Aleta plana com área de seção reta não-uniforme. (c) Aleta anular. (d) Aleta ou piniforme (pino).

figura – tipos de aletas (Incropera & De Witt, p. 60)

## Modelagem – dedução do BE microscópico

hipóteses:

- estado estacionário
- condução unidimensional
- sem geração de calor
- trocas térmicas por radiação desprezadas
- condutividade térmica constante
- coeficiente de transferência de calor por convecção constante (quais as implicações?)
- contato perfeito entre a aleta e a base



Balanco de energia para uma superficie estendida.

figura – volume de controle para a dedução do BE (Incropera & De Witt, p. 60)

escreva o BE-macro para o VC da figura:

das hipóteses adotadas:  $\sum q = 0$

logo:

$$\sum q = q_x - q_{x+dx} - q_{cv} = 0 \quad (1)$$

sendo,  $q_x$  e  $q_{x+dx}$  as taxas de calor por condução entrando e saindo do VC e  $q_{cv}$  a taxa de calor saindo do VC por convecção, dadas como:

termo de convecção:  $q_{cv} = h(T - T_{\infty})A_{\text{sup}}$  (2)

termos de condução:

saída (lembrando do Cálculo Integral e Diferencial – expansão em série de Taylor):  $q_{x+dx} = q_x + \left. \frac{dq_x}{dx} \right|_x \Delta x$  (3)

entrada:  $q_x = -kA_{ST} \left. \frac{dT}{dx} \right|_x$  (4)

Substituindo as expressões (2) e (3) em (1), temos que:

$$q_x - \left( q_x + \frac{dq_x}{dx} \Delta x \right) - h(T - T_{\infty})A_{\text{sup}} = 0$$

$$-\frac{dq_x}{dx} \Delta x - h(T - T_{\infty})A_{\text{sup}} = 0 \quad (5)$$

Mas, de (4) e da hipótese de condutividade térmica constante, temos que:

$$\frac{dq_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( -kA_{ST} \frac{dT}{dx} \right) = -k \frac{d}{dx} \left( A_{ST} \frac{dT}{dx} \right) \Delta x \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) temos que:

$$-\left( -k \frac{d}{dx} \left( A_{ST} \frac{dT}{dx} \right) \Delta x \right) - h(T - T_{\infty})A_{\text{sup}} = 0$$

$$k \frac{d}{dx} \left( A_{ST} \frac{dT}{dx} \right) \Delta x - h(T - T_{\infty})A_{\text{sup}} = 0$$

Ou,

$$kA_{ST} \frac{d^2T}{dx^2} + k \frac{dT}{dx} \frac{dA_{ST}}{dx} - h(T - T_{\infty}) \frac{A_{\text{sup}}}{\Delta x} = 0$$

**Para aletas de seção transversal constante:**

$$\frac{dA_{ST}}{dx} = 0$$

e

$$A_{\text{sup}} = P\Delta x$$

sendo,  $P$  o perímetro da aleta.

Assim, o BE resulta em:

$$kA_{ST} \frac{d^2T}{dx^2} - hP(T - T_{\infty}) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_{ST}}(T - T_{\infty}) = 0 \quad (\text{BE-1})$$

Cálculo do perímetro de aletas de seção transversal constante:

- aleta de **seção retangular** de espessura  $t$  e largura  $w$ :  $P=2w+2t$
- aleta de **seção circular** de diâmetro  $D$ :  $P = \pi D$

**exercício 01:** como se escreve  $P$  para uma aleta retangular vazada?

## Procedimento de cálculo da taxa de transferência de calor

- **Energia dissipada para o ambiente:**

$$q_a = \int_{A_a} h(T - T_{\infty}) dA$$

sendo,  $A_a$  a área de troca térmica com o ambiente.

Para uma aleta plana de seção retangular de lados  $w$  e  $t$  e comprimento  $L$ :

$$A_a = 2(wL + tL) + wt$$

Para uma aleta piniforme de seção circular de diâmetro  $D$  e comprimento  $L$ :

$$A_a = \pi DL + \frac{\pi D^2}{4}$$

- **Energia retirada da base:**

$$q_a = -kA_{ST,b} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

sendo,  $A_{ST,b}$  a área da seção transversal da aleta em contato com a base.

**Observação:** para o cálculo do calor dissipado é necessário conhecer a dependência da temperatura com a posição.

**Exercício 01:** Na modelagem do BE de uma aleta, em que situações reais a hipótese de condução unidimensional é razoável?

**Exercício 02:** Na modelagem do BE de uma aleta, como é possível incorporar trocas térmicas por radiação?

**Exercício 03:** Na modelagem do BE de uma aleta, a hipótese de condutividade térmica constante é restritiva? Como pode ser corrigida?

**Exercício 04:** Deduza a expressão do BE microscópico para um reator tubular em que ao longo de cada seção transversal as propriedades do fluido possam ser consideradas homogêneas, i.e., em que haja variação nas propriedades do fluido ao longo da direção axial, as quais são decorrentes de variações na temperatura ocasionadas por reações endotérmicas ou exotérmicas. Considere que o reator não seja adiabático. **Observação:** na p. 126 consta um esquema do reator a ser modelado.

*Portfolio de:*

---

**(espaço para resolução do exercício 4)**

**Exercício 05:** Deduza a expressão do BE microscópico para a condução transitória unidimensional na ausência de geração de calor ao longo de uma placa para a qual  $Bi > 0.1$ .

**Exercício 06:** Deduza a expressão do BE microscópico para a condução estacionária unidimensional na direção radial na presença de geração de calor em uma esfera para a qual  $Bi > 0.1$ .



## Estabelecendo soluções analíticas

É possível obter uma **solução analítica** para o (BE-1). Para tanto, recomenda-se realizar as seguintes substituições de variáveis:

$$\theta = T - T_{\infty}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA_{ST}}}$$

De modo que a equação diferencial a ser resolvida é dada como:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (\text{BE-1}^*)$$

A equação característica desta equação diferencial é dada por <sup>(recorra ao procedimento de resolução de equações diferenciais ordinárias homogêneas apresentado na p. 130).</sup>

$$\lambda^2 - m^2 = 0$$

Esta equação tem por soluções:

$$\lambda_1 = m; \lambda_2 = -m$$

Donde, a equação (BE-1\*) tem a seguinte solução geral:

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

Em seguida, deve-se calcular as constantes  $C_1$  e  $C_2$  a partir do estabelecimento de **condições de contorno** apropriadas, como segue.

1ª condição de contorno:  $x = 0 : T = T_b \Rightarrow \theta(0) = T_b - T_{\infty} = \theta_b$

2ª condição de contorno: diversas possibilidades existem para a escolha da segunda condição de contorno tomada em  $x=L$ , sendo  $L$  o comprimento da aleta. Iremos apresentar quatro possibilidades, denominadas de casos A a D.

**exercício 01:** Quando o contato da aleta com a base não for perfeito, a 1ª condição de contorno continuará válida?

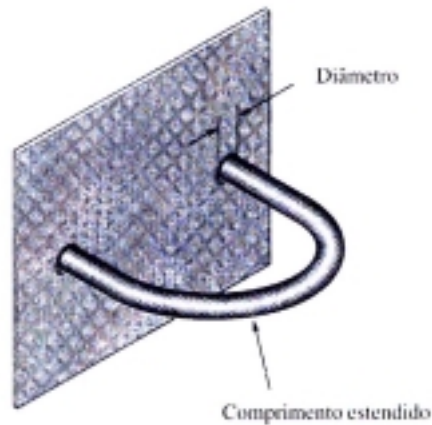
**Caso A:** extremidade da aleta exposta a um fluido (ou seja, a taxa de condução na extremidade se iguala à taxa de convecção)

$$x = L : -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T_L - T_\infty) \Rightarrow -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_L = h\theta_L$$

Para esta condição de contorno pode-se deduzir a seguinte solução para (BE-1\*):

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk} \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk} \sinh mL}$$

**Caso B:** extremidade da aleta isolada ou aleta que apresenta corte simétrico<sup>(um exemplo deste último caso é mostrado na figura a seguir)</sup>



$$x = L : -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_L = 0$$

**Exercício 01:** para a aleta da figura acima, a condição de contorno é conhecida como condição de simetria. Interprete o que significa  $L$  para a aleta do desenho e porque a condição de simetria é válida.

Vejam para o caso B, como fica a solução de (BE-1\*).

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

com:

$$x = 0: \theta(0) = \theta_b \Rightarrow C_1 + C_2 = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b - C_2 \quad (i)$$

$$x = L: \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_L = 0 \Rightarrow -mC_1 e^{-mL} + C_2 m e^{mL} = 0 \Rightarrow -C_1 e^{-mL} + C_2 e^{mL} = 0 \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii):

$$-(\theta_b - C_2) e^{-mL} + C_2 e^{mL} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}}$$

Substituindo  $C_2$  em (i):

$$C_1 = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}}$$

Substituindo  $C_1$  e  $C_2$  na solução geral de (BE-1\*) temos que:

$$\theta = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} e^{-mx} + \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{-mL} + e^{mL}} e^{mx}$$

Ou seja,

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}}{e^{-mL} + e^{mL}}$$

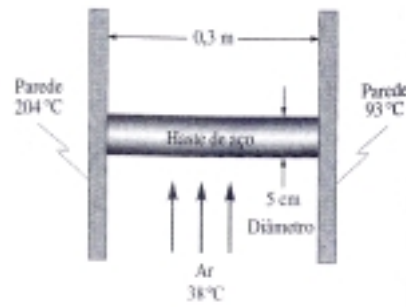
Mas, como  $\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh(y)$ , temos finalmente que a solução de (BE-1\*)

é dada como:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh mL}$$

A solução acima é bastante usada na solução de problemas de troca térmica envolvendo aletas. As aletas modeladas como a situação do caso B são denominadas de **aletas adiabáticas**, na verdade este nome se refere à extremidade da aleta, já que as aletas não são adiabáticas.

**Caso C:** Temperatura da extremidade da aleta conhecida (veja a figura a seguir para um exemplo de aletas desse tipo)



$$x = L : T(L) = T_L \Rightarrow \theta = T_L - T_\infty = \theta_L$$

Vejamos para o caso C, como fica a solução de (BE-1\*).

**Solução geral:**  $\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$

com:

$$x = 0 : \theta(0) = \theta_b \Rightarrow C_1 + C_2 = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b - C_2 \quad (i)$$

$$x = L : \theta(L) = \theta_L \Rightarrow \theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii):

$$\theta_L = (\theta_b - C_2) e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

Donde:

$$C_2 = \frac{\theta_L - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \quad (iii)$$

Substituindo (iii) em (i), obtém-se:

$$C_1 = \frac{-\theta_L + \theta_b e^{-mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} \quad (iv)$$

Substituindo (iii) e (iv) na solução geral:

$$\theta = \frac{-\theta_L + \theta_b e^{-mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} e^{mx} + \frac{\theta_L - \theta_b e^{mL}}{e^{-mL} - e^{mL}} e^{-mx}$$

Donde tem-se:

$$\theta = \frac{-\theta_L (-e^{-mx} + e^{mx}) - \theta_b (-e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)})}{-(-e^{-mL} + e^{mL})}$$

A expressão anterior pode ser escrita em termos da definição da função  $\sinh(y)$  como:

$$\theta = \frac{\theta_L \operatorname{senh} mx + \theta_b \operatorname{senh} m(L-x)}{\operatorname{senh} mL}$$

Ou ainda, dividindo-se ambos os termos da equação por  $\theta_b$ , temos finalmente:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{\theta_L}{\theta_b} \operatorname{senh} mx + \operatorname{senh} m(L-x)}{\operatorname{senh} mL}$$

sendo,  $\theta_L = T(x=L) - T_\infty$

### Cálculo do gradiente da temperatura:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{m}{\operatorname{senh} mL} [\theta_L \cosh mx - \theta_b \cosh m(L-x)]$$

**Cálculo da posição em que a temperatura pode atingir o valor mínimo (e.g. pode ser o caso quando  $T_\infty < T_b$  e  $T_\infty < T_L$ ) ou máximo (e.g. pode ser o caso quando  $T_\infty > T_b$  e  $T_\infty > T_L$ ) ou ponto de inflexão:**

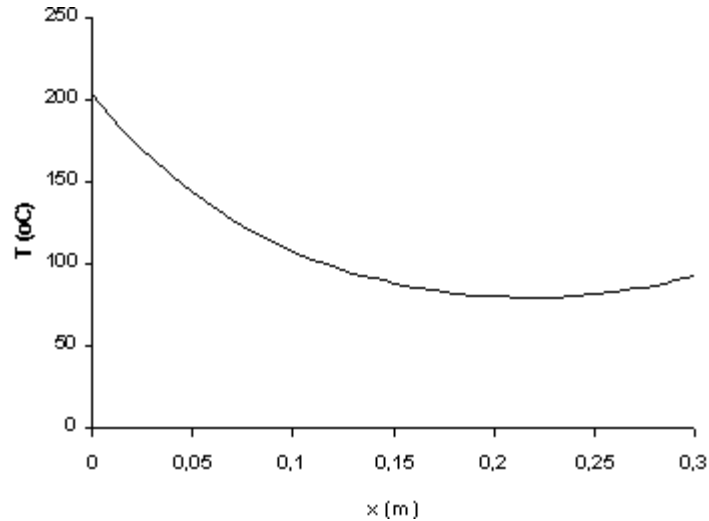
$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \Leftrightarrow \theta_L \cosh mx - \theta_b \cosh m(L-x) = 0 \quad (*)$$

A equação acima é transcendental e assim não apresenta solução analítica, mas percebe-se que existe a possibilidade dependendo dos valores de  $T_b$ ,  $T_L$ ,  $T_\infty$ ,  $L$  e  $m$  da ocorrência de ponto de mínimo ou máximo ou mesmo ponto de inflexão. A determinação de que tipo de ponto estacionário se trata requer o cálculo da segunda derivada. Pontos de inflexão terão a segunda derivada nula, pontos de mínimo terão a segunda derivada positiva e pontos de máximo, terão a segunda derivada negativa. A possibilidade de ocorrência de pontos estacionários complica o cálculo da transferência de calor para o meio externo, uma vez que o equacionamento desta depende da ocorrência ou não de mínimos e máximos locais.

Para ilustrarmos a possibilidade de ocorrência de mínimo local, considere o exemplo de uma aleta de seção transversal constante circular para a qual são dados:

Diâmetro = 5cm  
 Comprimento = 30cm  
 Temperatura da base = 204°C  
 Temperatura da extremidade = 93°C  
 Condutividade térmica = 15 (SI)  
 Coeficiente de película = 17 (SI)

A distribuição de temperatura desta aleta pode ser vista na figura a seguir. Percebe-se a ocorrência de mínimo entre as posições 0.2 e 0.25m. Na tabela que segue, a função  $f_{\min} = \theta_L \cosh mx - \theta_b \cosh m(L-x)$  é calculada para valores de  $x$  entre 0.2 e 0.25 para a localização do ponto de mínimo, o qual ocorre próximo à posição  $x=21.699896\text{cm}$ .



$x$	$f_{min}$	$x$	$f_{min}$
0,2	-58,34928348	0,22	10,25767549
0,21	-23,93720665	0,23	44,54563083
0,21699896	-7,62641E-06	0,24	79,23777181
0,216999	0,000129077	0,25	114,6488782

**para reflexão:** se ambas as temperaturas da aleta esquematizada acima forem iguais a 204°C, como a aleta pode ser modelada?

**Caso D:** Aletas **muito** compridas (de comprimento infinito) terão a temperatura de sua extremidade tendendo à temperatura da vizinhança, ou seja:

$$x \rightarrow \infty : T \rightarrow T_{\infty} \Rightarrow \theta \rightarrow 0$$

Vejam os para este caso como fica a solução de (BE-1\*).

$$\theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$

com:

$$x = 0 : \theta = \theta_b \Rightarrow C_1 = \theta_b - C_2$$

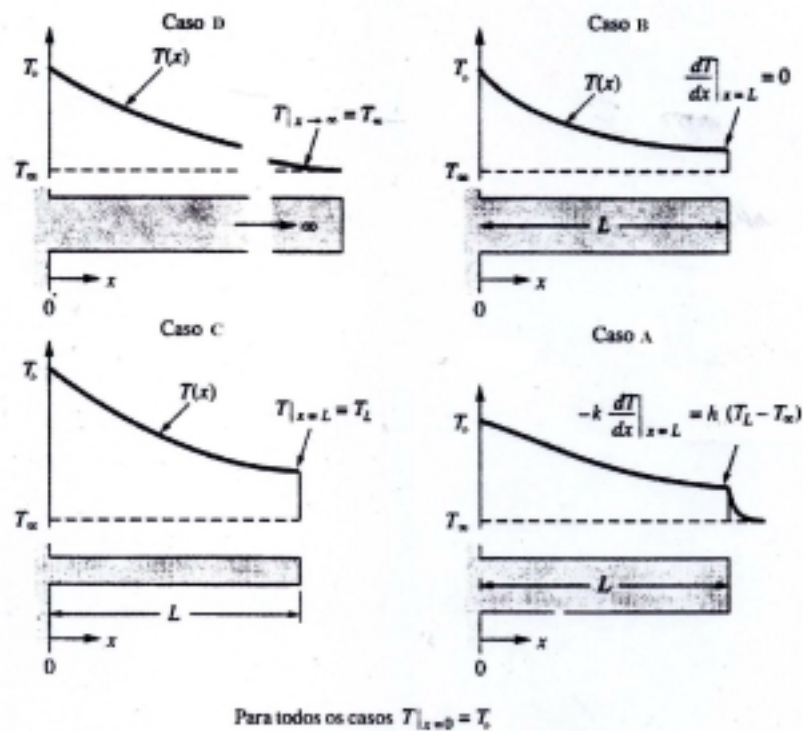
$$x \rightarrow \infty : \theta \rightarrow 0 \Rightarrow C_2 \rightarrow 0$$

Ou seja:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$$

**Exercício 01:** deduzir a solução da equação (BE-1\*) para os casos A e C.

A figura a seguir, extraída de Kreith (2003 p.82) apresenta os gráficos das distribuições de temperatura para os casos A a D.



**Exercício 02:** interprete os gráficos dos perfis de temperatura das aletas dos casos A a D.

## Cálculo do calor dissipado pela aleta

Vimos às páginas 138 e 139 que o calor dissipado pode ser calculado a partir do conhecimento da distribuição da temperatura por meio de uma das seguintes equações:

$$q_a = \int_{A_a} h(T - T_\infty) dA = \int_{A_a} h\theta dA \quad (\text{Q-1}) \quad (\text{calor total dissipado para o ambiente})$$

$$q_a = -kA_{ST,b} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \quad (\text{Q-2}) \quad (\text{calor retirado da base})$$

Vejam como aplicar estas equações para os casos A a D.

**Exercício 01:** deduza a expressão para o calor dissipado para o ambiente para o caso A. Dica: qual das expressões (Q-1) ou (Q-2) é mais fácil de ser resolvida para este caso?

**Exercício 02:** deduza a expressão para o calor dissipado para o ambiente para o caso B. Dica: qual das expressões (Q-1) ou (Q-2) é mais fácil de ser resolvida para este caso?

### Para aletas correspondentes ao caso C temos:

Note que neste caso a equação (Q-2) não pode ser aplicada diretamente, uma vez que se pode dissipar calor para o ambiente através das superfícies em  $x=0$  e em  $x=L$ . Vejamos, como fica este caso.

#### Cálculo da taxa de calor por condução atravessando a seção transversal da aleta em $x=0$ :

$$q_b = q|_{x=0} = -kA_{ST} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \frac{kA_{ST}m}{\sinh mL} (\theta_L - \theta_b \cosh mL) = \frac{M \left( \cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_b} \right)}{\sinh mL}$$



**Cálculo da taxa de calor por condução atravessando a seção transversal da aleta em  $x=L$ :**

$$q_L = q|_{x=L} = -kA_{ST} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = \frac{kA_{ST}m}{\sinh mL} (\theta_L \cosh mL - \theta_b) = \frac{M \left( 1 - \frac{\theta_L}{\theta_b} \cosh mL \right)}{\sinh mL}$$

**Cálculo da transferência de calor para o meio externo**

**Casos em que ocorre ponto de mínimo ou máximo:**

$$|q_{cv}| = |q_b| + |q_L|$$

**Demais situações:**

$$|q_{cv}| = |q_b| - |q_L|; \text{ se } T_b > T_L$$

ou

$$|q_{cv}| = |q_L| - |q_b|; \text{ se } T_b < T_L$$

**Equivalência entre os casos B e C para as situações em que no caso C existe ponto de mínimo ou máximo:**

Quando ocorrer ponto de mínimo ou máximo na posição  $x_{ss}$ , a aleta pode ser representada como duas aletas adiabáticas uma de comprimento  $x_{ss}$  e a outra de comprimento  $L - x_{ss}$ . Isto ocorre porque no ponto de mínimo ou máximo o gradiente de temperatura é nulo. Como o cálculo de  $x_{ss}$  não é trivial, a substituição da representação da aleta de caso C pela aleta do caso B é simples quando  $T_L$  e  $T_b$  são iguais, uma vez que nesta situação  $x_{ss} = \frac{L}{2}$ . A prova formal da equivalência dos modelos para o caso geral é bastante complexa, sendo a seguir apresentada uma idéia de como isso pode ser feito.

**Equivalência do cálculo do calor dissipado para o meio ambiente para o caso em que  $T_L = T_b$ :**

Opção de cálculo pelo caso B:  $q_{cv(b)} = 2M \operatorname{tgh} M \frac{L}{2}$

Opção de cálculo pelo caso C:  $q_{cv(c)} = 2M \frac{\cosh mL - 1}{\sinh mL}$

$$q_{cv(b)} = q_{cv(c)}$$

Portfolio de:

---

$$2MtghM \frac{L}{2} = 2M \frac{\cosh mL - 1}{\sinh mL}$$

$$\frac{e^{\frac{mL}{2}} - e^{-\frac{mL}{2}}}{e^{\frac{mL}{2}} + e^{-\frac{mL}{2}}} = \frac{e^{mL} + e^{-mL} - 1}{2}$$

$$\frac{e^{\frac{3mL}{2}} - e^{\frac{mL}{2}} - e^{-\frac{mL}{2}} + e^{-\frac{3mL}{2}}}{2} = e^{\frac{3mL}{2}} + e^{\frac{mL}{2}} - 2e^{\frac{mL}{2}} + e^{\frac{mL}{2}} + e^{-\frac{3mL}{2}} - 2e^{-\frac{mL}{2}}$$

Logo,  $0=0$ , c.q.d.

### Para aletas correspondentes ao caso D temos:

Como na extremidade da aleta a temperatura da aleta é a temperatura da vizinhança, não há troca por convecção de modo que:

$$dA = Pdx$$

e

$$q_a = \int_0^{L \rightarrow \infty} h\theta_b e^{-mx} P dx = \frac{hP\theta_b}{-m} e^{-mx} \Big|_0^{\infty} = \frac{hP\theta_b}{m} = \theta_b \sqrt{\frac{h^2 P^2 kA}{hP}} = \theta_b \sqrt{hPkA} = M$$

**Exercício 01:** deduza a expressão para o calor dissipado para o ambiente para o caso D a partir da equação (Q-2).

As soluções dos perfis de temperatura para os casos A a D e as correspondentes taxas de calor dissipados são sumarizados na tabela a seguir:

**QUADRO RESUMO DOS MODELOS DE ALETAS:**

Caso (condição de contorno)	Distribuição de temperatura	Equações para o Cálculo da Transferência de Calor
<b>A: (aleta com convecção na ponta)</b> $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \theta = \theta_b \\ x = L : -k \frac{d\theta}{dx} = h\theta \end{array} \right.$	$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{mk} \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{mk} \sinh mL}$ <p><b>Solução aproximada:</b>  <math display="block">\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L_c - x)}{\cosh mL_c}</math></p>	$q_b = M \frac{\sinh mL + \frac{h}{mk} \cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{mk} \sinh mL}$ <p><b>Solução aproximada:</b>  <math display="block">q_b = MtghmL_c</math></p>
<b>B: (aleta adiabática)</b> $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \theta = \theta_b \\ x = L : \frac{d\theta}{dx} = 0 \end{array} \right.$	$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$q_b = MtghmL$
<b>C: (aleta com temperatura na extremidade conhecida)</b> $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \theta = \theta_b \\ x = L : \theta = \theta_L \end{array} \right.$	$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\frac{\theta_L}{\theta_b} \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$	$q_b = \frac{M \left( \cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_b} \right)}{\sinh mL}$ $q_L = \frac{M \left( 1 - \frac{\theta_L}{\theta_b} \cosh mL \right)}{\sinh mL}$
<b>D: (aleta de comprimento infinito)</b> $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \theta = \theta_b \\ x = L \rightarrow \infty : \theta \rightarrow 0 \end{array} \right.$	$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$	$q_b = M$

$$\theta = T - T_\infty; m = \sqrt{\frac{hP}{kA_{ST}}}; M = \theta_b \sqrt{hPkA_{ST}}; q_b = -kA_{ST} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}; q_L = -kA_{ST} \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L};$$

$$L_c = L + \frac{A_{ST}}{P}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Dos quatro casos apresentados, o caso D é aquele que apresenta a solução mais simples, assim a questão que surge é quando o caso D pode ser usado. Para tanto, analise o exemplo 3.8 de Incropera & De Witt (p. 87 na 5ª edição e p. 62 na 4ª edição) e anote a seguir, as suas conclusões sobre o estudo do **exemplo 3.8 de Incropera & De Witt**.

A partir do seu estudo sobre o exemplo 3.8, quais são os critérios para se justificar se uma aleta é muito comprida?

Percebe-se nitidamente **a complexidade da fórmula** que leva em conta a perda de calor na seção transversal da aleta em contato com o fluido, i.e., quando a extremidade é ativa. Por outro lado, a fórmula de aleta adiabática é consideravelmente mais simples. Levando-se em conta este fato, foi estabelecido um cálculo do calor dissipado por aletas com extremidade ativa que utiliza as equações obtidas para aletas adiabáticas. Para tanto, corrige-se o comprimento da aleta adiabática equivalente como:

$$L_c = L + \frac{A_{ST}}{P}$$

**idéia:** aumentar o comprimento da aleta de modo que a área superficial aumentada corresponda à área da seção transversal. Este procedimento data de 1922.

**Interpretação geométrica do procedimento de correção de comprimento para aletas com extremidade ativa:**

**para aletas com seção transversal de área retangular de largura  $b$  muito grande e espessura  $t$ , i.e.,  $b \gg t$ :**

$$L_c = L + \frac{t}{2}$$

**(pois:**  $L_c = L + \frac{bt}{2b + 2t} \approx L + \frac{bt}{2b} = L + \frac{t}{2}$ )

**para aletas com seção transversal de área circular:**

$$L_c = L + \frac{D}{4}$$

O cálculo da dissipação de calor nas aletas pode também ser feito a partir da definição de um rendimento. Este procedimento é notadamente importante para aletas de seção transversal não constante. O rendimento pode ser apresentado por fórmulas tabeladas (deduzidas para aletas adiabáticas) ou por gráficos.

## Rendimento (eficiência -não confundir com efetividade) de aletas:

**definição:** é a **relação** entre o **calor dissipado** e o **máximo** que poderia ser dissipado pela aleta.

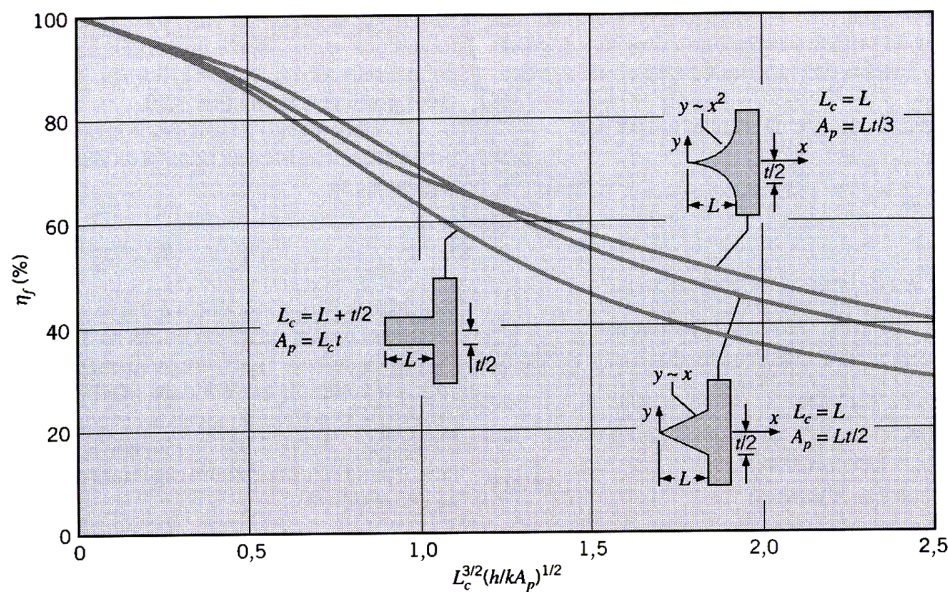
**fórmula:** 
$$\eta_f = \frac{q_a}{hA_a\theta_b}$$

sendo,  $A_a$  a área superficial total da aleta.

**Exercício 01:** por quê o máximo calor que pode ser dissipado pela aleta é dado por  $hA_a\theta_b$  ?

**para o caso da aleta adiabática:** 
$$\eta_f = \frac{tgh(mL)}{mL}$$

A figura (figura 3.18 de Incropera & De Witt) a seguir corresponde à representação gráfica da solução analítica obtida para o caso B e também para aletas de seção retangular, mas área não constante. Para o caso de aleta de seção constante (que corresponde ao caso B), na figura a seguir assume-se que  $w \gg t$  ( $w$  e  $t$  são as dimensões da seção transversal da aleta retangular).



Para a resolução de alguns problemas envolvendo aletas é conveniente pensar-se em termos de resistência. A seguir, apresentamos como calcular resistências de aletas.

### Resistência de aletas:

$$q_a = \frac{\Delta \theta_b}{R_a} \Rightarrow R_a = \frac{\theta_b}{q_a}$$

Por exemplo, para o caso B:

$$R_a = \sqrt{hPkA_{ST}} \tanh mL$$

Por exemplo, para o caso D:

$$R_a = \sqrt{hPkA_{ST}}$$

**Exercício 01:** deduza a expressão para a resistência de aletas para os casos A e C.

## Múltiplas aletas:

**idéia:** a troca de calor se dá da superfície não aletada para o meio externo e também da superfície de cada aleta para o meio externo, a saber:

$$q_T = q_{base} + q_{aletas}$$

onde,  $q_T$  é o calor total dissipado pela base e pelas aletas,  $q_{base}$  o calor dissipado pela base e  $q_{aletas}$  o calor dissipado por todas as aletas.

Logo temos, as seguintes opções de cálculo, assumindo, ainda, a hipótese do coeficiente de troca térmica para o ambiente ser constante:

### opção de cálculo a partir do rendimento de uma aleta:

$$q_T = hA_{TC} (T_b - T_\infty)$$

sendo,  $q_T$  o calor total trocado,  $A_{TC}$  a área de troca térmica com o meio externo, calculada como:

$$A_{TC} = (A_t - NA_{ST}) + N(A_a \eta_f)$$

sendo,  $A_t$  a área total da parede em que as aletas são colocadas e  $N$  o número de aletas e  $A_a$  como na p. 150.

### opção de cálculo a partir das taxas de calor:

$$q_T = h(A_t - NA_{ST})(T_b - T_\infty) + Nq_a$$

Esta opção é usada quando se deseja obter  $q_a$  a partir e.g. das fórmulas da tabela 3.4 de Incropera & De Witt

**Exercício 01:** a hipótese de coeficiente de troca térmica constante para o ambiente é restritiva?

## Efetividade de aletas ( $\varepsilon_f$ )

**definição:** é a relação da **potência dissipada sobre a potência que seria dissipada** caso não existissem as aletas

**fórmula de cálculo:** 
$$\varepsilon_f = \frac{q_a}{hA_{ST,b}\theta_b}$$

sendo,  $A_{ST,b}$  a área de interseção da aleta com a parede e  $\theta_b = T_b - T_\infty$ .

### Utilidade:

- para a análise da utilização de aletas: a condução de calor pelas aletas não deixa de ser uma resistência e assim, o projeto das aletas deve ser tal que ocorra uma dissipação significativa. **Recomenda-se o uso das aletas sempre que  $\varepsilon_f \geq 2$ .** Para aletas de comprimento

muito longo e seção transversal de área constante,  $\varepsilon_f = \sqrt{\frac{kP}{hA_{ST}}}$ .

- para a análise de como projetar aletas:

1. A partir da fórmula da efetividade percebemos que **a escolha do material é importante**. Quanto maior a sua condutividade térmica, maior o calor dissipado. Usam-se com frequência aletas de cobre ou de alumínio, apesar das primeiras serem mais eficientes, elas são em geral mais caras e mais pesadas.
2. A partir da fórmula da efetividade percebemos que a geometria também afeta o calor dissipado. Quanto maior a relação entre o perímetro e a área da seção transversal  $\left(\frac{P}{A_{ST}}\right)$ , maior será a efetividade (note o caso de aletas de comprimento muito longo).
3. O uso de aletas é mais fortemente **recomendado quando o coeficiente de convecção é mais baixo**. Por exemplo, recorrendo aos valores típicos de coeficiente de troca térmica apresentados no início do curso, percebemos que o uso de aletas em contato com fluidos gasosos é mais necessário que para o caso de líquidos (como o caso do radiador dos carros!). Esta necessidade também é mais sentida para a convecção natural.

### Aletas anulares – seção transversal não constante

O BE considerando área variável pode ser escrito como:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} \frac{1}{A_{ST}} \frac{dA_{ST}}{dx} - \frac{h}{kA_{ST}} (T - T_\infty) \frac{dA_{sup}}{dx} = 0$$



Para as **aletas anulares** de espessura  $t$ , têm-se que:

$$x=r$$

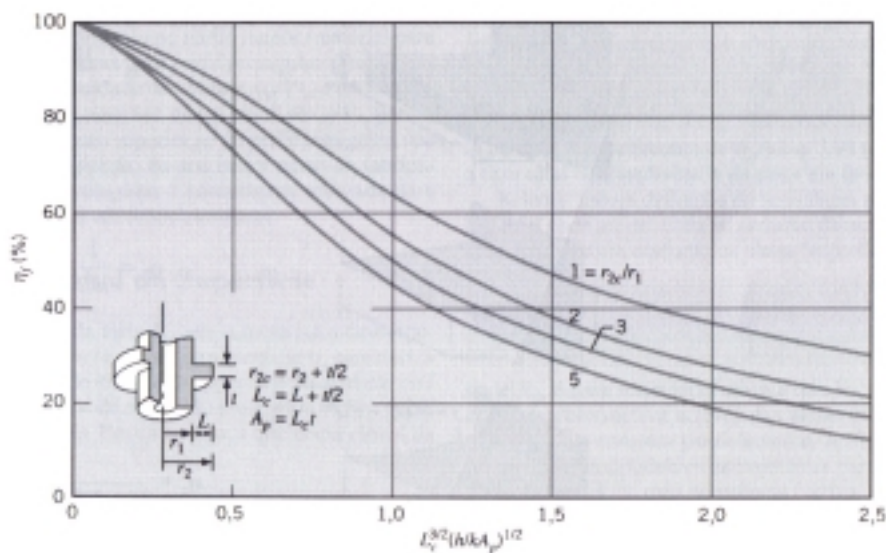
$$A_{\text{sup}} = 2\pi (r^2 - r_1^2)$$

$$A_{ST} = 2\pi r t$$

Desta forma, o BE resulta em:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{2h}{Kt} (T - T_{\infty}) = 0$$

Para esta equação também existe uma **solução analítica** para o caso de **superfície exterior da aleta adiabática**, a qual pode ser **corrigida para o caso de superfície ativa** e representada **graficamente** como:



Eficiência de aletas anulares de perfil retangular.