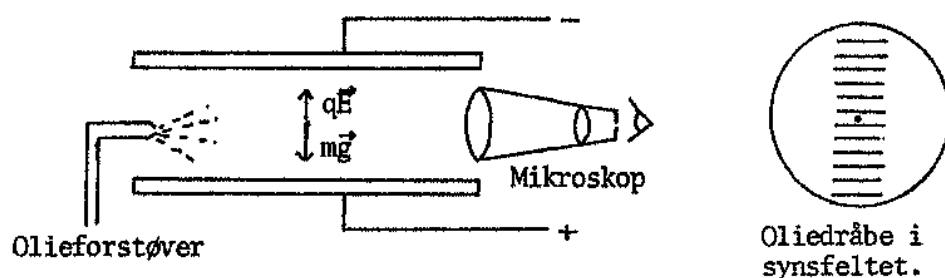


### III LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE I ELEKTRISKE OG MAGNETISKE FELTER.

#### 1. BESTEMMELSE AF ELEKTRONENS LADNING. MILLIKANS FORSØG.

Det elektriske elementarkvantum - numerisk lig med elektronens ladning - blev første gang nøjagtig bestemt af amerikaneren R.A. Millikan i hans berømte oliedråbeforsøg.

Figur 1.1



I forsøget blev olie forstøvet, og sprøjtet ind mellem to kapacitorplader. Oliedråberne (radius ca.  $10^{-3}$  mm) kunne ved kraftig belysning iagttages i et mikroskop. I nærheden af pladerne var også placeret en radioaktiv kilde. Ved bestrålingen fra denne kunne et eller flere af oliedråbens atomer ioniseres, og derved erhverve en ladning. Oliedråbernes ladning kunne registreres ved at pålægge kapacitoren et elektrisk felt  $E$ . Ved at regulere spændingen på kapacitoren således, at den elektriske kraftpåvirkning  $F_e = qE$  netop ophævede tyngden  $F_T = mg$  kunne man opnå én ligning til bestemmelse af ladningen  $q$ . De to kræfter ophævede hinanden, når man i mikroskopet kunne iagttage at oliedråben "svævede", d.v.s. var i hvile.

$$(1.2) \quad F_e = F_T \quad \Rightarrow \quad qE = mg \quad \Rightarrow \quad q = \frac{mg}{E}$$

Ligningen (1.2) er dog ikke tilstrækkelig til at bestemme oliedråbens ladning, idet massen  $m$  er ukendt. Man kan dog opstille endnu en ligning mellem  $m$  og  $q$  ved at fjerne det elektriske felt  $E$ , og iagttage oliedråben i et "frit fald" mellem kondensatorpladerne.

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

Ved et frit fald er oliedråben påvirket af tyngden  $F_T = mg$  og en gnidningskraft fra luftmodstanden. Til beregning af denne gnidningskraft, kan man benytte Stokes lov, der angiver gnidningskraften på et kugleformet legeme, der bevæger sig med hastigheden  $v$  i en væske eller gas.

$$(1.3) \quad F_{gn} = 6\pi\eta rv \quad (\text{Stokes lov})$$

$r$  betegner radius i kuglen.  $\eta$  er en friktionskoefficient, der er karakteristisk for de to stoffer. (I dette tilfælde luft - olie).

Sammenhængen mellem oliedråbens masse  $m$  og dens radius  $r$ , er den at  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , hvor  $\rho$  betegner oliens massefylde. (Det bemærkes, at gnidningskraften vokser proportionalt med  $r$ , mens tyngden vokser proportionalt med  $r^3$ , så gnidningskraftens betydning aftager med  $r^{-2}$ , og har altså stor betydning for små radier). Gnidningskraften vokser proportionalt med oliedråbens hastighed  $v$ , og efter et vist lille tidsrum, vil dråben have opnået en hastighed, hvor tyngdekraften netop er ophævet af gnidningskraften. (Oliedråbens hastighed kan bestemmes ved at iagttage dens fald på baggrund af en skala, der kan være anbragt i okularets brændplan.)

Radius  $r$  kan udregnes ved at sætte  $F_T = F_{gn}$ , som er opfyldt, når oliedråben udfører en jævn bevægelse.

$$(1.4) \quad F_{gn} = F_T \Leftrightarrow 6\pi\eta rv = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \Rightarrow r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}}$$

Benyttes  $r$  fra (1.4) til at udregne  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  og indsættes i (1.2)

fås:

$$(1.5) \quad q = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{9\eta v}{2\rho g}\right)^3 \cdot g\rho}{E} \Rightarrow q = \frac{9\pi}{E} \sqrt{\frac{2(\eta v)^3}{\rho g}}$$

Millikan fandt, at selv om de observerede oliedråber havde forskellig ladning, så var der en streng systematik i forskellene, idet forholdet mellem de forskellige ladninger altid var lig med forholdet mellem simple hele tal. På grundlag af dette fandt han ud af, at de observerede ladninger alle kunne skrives som et helt multiplum af en mindste ladning - det elektriske elementarkvantum - .

Kap III

Millikan identificerede korrekt det elektriske elementarkvantum med den numeriske værdi af elektronens ladning. Ud fra lange forsøgsrækker fandt han værdien  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

I virkeligheden var forsøget noget mere kompliceret, end her beskrevet. Ved nøjagtige målinger er man nød til at tage hensyn til opdriften i luft, (som blot betyder at vi må sætte  $\rho = \rho_{olie} - \rho_{luft}$  i formelen (1.5)), endvidere er det nødvendigt, at modificere Stokes lov noget.

2. EN LADET PARTIKELS BEVÆGELSE I ET ELEKTRISK FELT

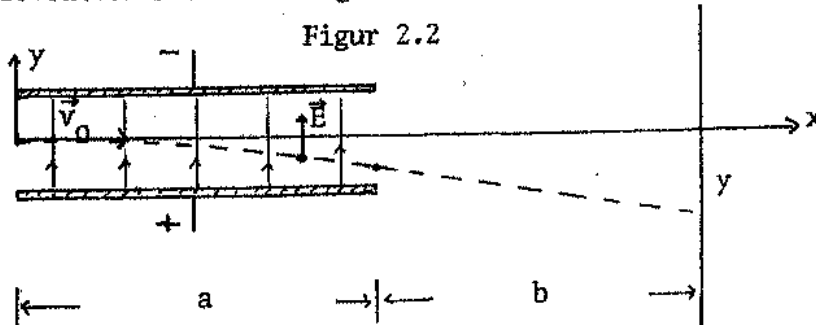
Vi skal først betragte det tilfælde, hvor partiklens begyndelseshastighed  $\vec{v}_0$  er parallel med det elektriske felt  $\vec{E}$ . I dette tilfælde, vil der være tale om en retlinet bevægelse med konstant acceleration. Accelerationen kan bestemmes af ligningen:  $F = ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m}$ .

Energibevarelsen kan, som tidligere anført, udtrykkes i ligningen:

$$(2.1) \quad qU = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (\text{Hvor } U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \text{ langs banen})$$

Partiklen med ladningen  $q$  har gennemløbet en spændingsforskel  $U$ , og har opnået hastigheden  $v$ . Hvis  $q$  er negativ, er partiklen blevet bremset, forudsat at  $U > 0$ .

(2.1) forudsætter som sædvanlig at bevægelsen foregår i vacuum.



Bevægelse i et elektrisk felt  $\vec{E}$ , hvor  $\vec{E}$  er vinkelret på begyndelseshastigheden  $\vec{v}_0$ , kan f.eks. lade sig realisere ved at lade en ladet partikel passere et sæt kapacitorplader, som vist på figur (2.2)  
Vi tænker os, at partiklen efter passagen af pladerne, bevæger sig

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

jævnt og retlinet i et feltfrit område, hvorefter den rammer en skærm. Vi antager at bevægelsen foregår i vacuum, og vi kan i alle tilfælde se bort fra tyngden, idet denne er forsvindende i forhold til den acceleration, som partiklen får fra feltet. (Tidsrummet, hvor partiklen passerer det feltfrie område er så kort, at den højst falder  $10^{-4}$  nm for "normale" hastigheder og afstande).

Bevægelsen mellem pladerne er en konstant accelereret bevægelse med begyndeshastighed  $\vec{v}_0$ . Indlægger vi et koordinatsystem, som vist på figur (2.2), gælder bevægelsesligningerne:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad \text{og} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad \text{hvor}$$

$$m \vec{a} = q \vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{qE}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{som indsat giver:}$$

$$(2.3) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \frac{qE}{m} t \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \frac{qE}{2m} t^2 \end{pmatrix}$$

Pladernes udstrækning i bevægelsesretningen kaldes a. Indsættes  $x=a$  bestemmes tiden for gennemløb af pladerne. Indsættes denne tid så i udtrykket for y og  $v_y$ , finder man afbøjning og hastighed i y-retning efter passage af pladerne.

$$(2.4) \quad t = \frac{a}{v_0} \Rightarrow y = \frac{qE}{2m} \left( \frac{a}{v_0} \right)^2 \quad \text{og} \quad v_y = \frac{qE}{m} \left( \frac{a}{v_0} \right)$$

Uden for pladerne vil partiklen udføre en jævn retlinet bevægelse.

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + v_0 t \\ \frac{qE}{2m} \left( \frac{a}{v_0} \right)^2 + \frac{qE}{m} \left( \frac{a}{v_0} \right) t \end{pmatrix}$$

Indsættes nu i (2.5)  $x = a + b$ , hvor b er afstanden fra kapacitoren til skærmen, finder man  $t = \frac{b}{v_0}$ . Dette indsættes så for at bestemme afbøjningen y på skærmen.

$$(2.6) \quad y = \frac{qE}{2m} \left( \frac{a}{v_0} \right)^2 + \frac{qEa}{mv_0} \left( \frac{b}{v_0} \right) = \frac{qEa}{mv_0^2} \left( \frac{1}{2}a + b \right)$$

Man bemærker, at afbøjningen y er proportional med feltet E mellem

Kap III

pladerne. Indfører vi  $E = \frac{U}{d}$ , hvor  $U$  er spændingsforskellen mellem pladerne, og  $d$  er pladeafstanden, finder man følgende udtryk for afbøjningen  $y$ :

$$(2.7) \quad y = \frac{qa \left(\frac{1}{2}a+b\right) U}{mv_0^2 d} = k_a U$$

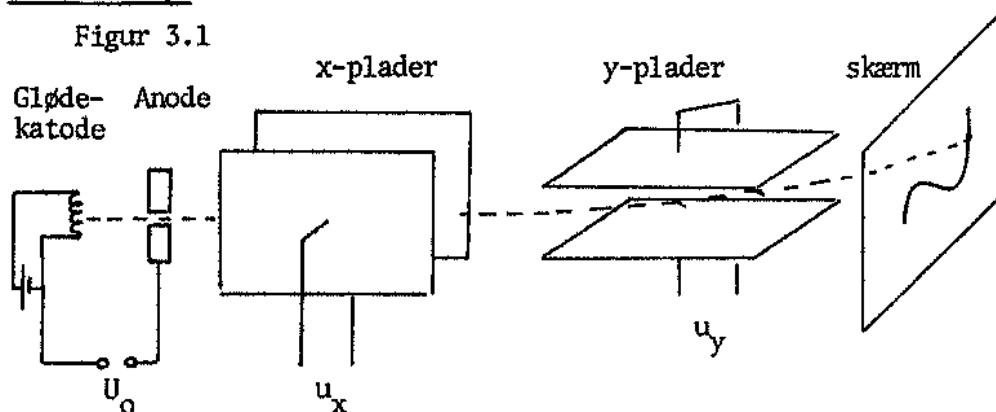
Af (2.7) fremgår det, at afbøjningen for partikler med en given hastighed  $v_0$  er proportional med spændingen over pladerne  $U$ . Denne simple kendsgerning udnyttes f.eks. i et katodestråleosilloskop.

3. KATODESTRÅLEOSCILLOSKOPET

Anbringer man to sæt kapacitorplader vinkelret på hinanden, således at en elektron-stråle (katodestråle) passerer begge kapacitorer, kan man ved at regulere på spændingerne, afbøje elektronstrålen i to ortogonale retninger. Rammer elektronstrålen efter at have passeret pladerne en flourescerende skærm (som lyser, der hvor strålen rammer), vil billedet på skærmen være en afbildning af spændingernes tidslige variation.

Nedenfor er groft skematisk illustreret princippet i et katodestråle-oscilloskop.

Figur 3.1



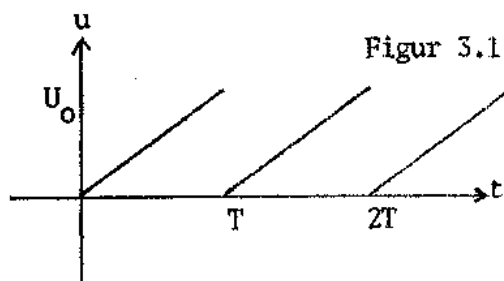
Fra venstre mod højre består oscilloskopet af en glødekathode, der frigør elektroner ved opvarmning. Elektronerne accelereres op mod anoden, der er udformet som en kollimator, således at elektronstrålen efter passagen har en veldefineret retning. Herefter passerer elektronstrålen en kapacitor, der kaldes x-pladerne fordi elektronerne får en vandret afbøjning ved passagen. Elektronstrålen fort-

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

sætter gennem y-pladerne, hvor den bliver afbøjet i lodret retning. Elektronstrålen vil ramme skærmen i et punkt  $(x,y)$ , hvor der gælder, at  $x = k_1 u_x$  og  $y = k_2 u_y$ . Afbøjningen i x og y-retning er proportional med spændingen  $u_x$  og  $u_y$  over henholdsvis x- og y-plader. Afhænger  $u_x$  og  $u_y$  af tiden, vil der åbenbart gælde, at  $x = k_1 u_x(t)$  og  $y = k_2 u_y(t)$ . Det grafiske billede som elektronstrålen tegner på skærmen vil derfor, (på nær en ret affinitet) være grafen for vektorfunktionen  $(u_x, u_y) = (u_x(t), u_y(t))$ . Pålægges man f.eks. en cos-formet vekselspænding over begge plader af formen  $(u_x, u_y) = (U_x \cos(\omega t), U_y \sin(\omega t))$  vil det grafiske billede på skærmen være en ellipse eller en cirkel.

Normalt vil man være interesseret i at afbilde den tidslige variation af kun én ukendt spænding. Til dette formål er der i oscilloskopet indbygget en såkaldt sweep-spænding over x-pladerne, der får elektronstrålen til at bevæge sig med jævn hastighed i x-retningen. Pålægges den ukendte spænding på y-pladerne, vil man på skærmen få tegnet det grafiske billede af funktionen  $u_y = u(t)$ .

Sweep-spændingen indrettes således, at den vokser fra 0 V til  $U_0$  i løbet af perioden T. I denne periode fejer strålen så hen over skærmen. Nedenfor er vist det grafiske billede af sweep-spændingen.



I tidsrummet fra 0 til T vokser spændingen lineært, og dette gentages periodisk. Spændingen til tidspunktet t kan derfor skrives:

$$(3.2) \quad u_x(t) = U_0 \frac{t}{T} - U_0 \left[ \frac{t}{T} \right]$$

[ ] betegner som sædvanlig heltalsværdi. På oscilloskopet kan perioden i sweep-spændingen reguleres fra f.eks.  $5 \mu s$  til 5 s.

Er skærmens bredde a, vil absissen af elektronstrålen være givet ved udtrykket  $x = \frac{a}{T} t$ , periodisk med perioden T. Pålægges da f.eks. en sinusformet (veksel)spænding på y-pladerne, vil elektronstrålens ordinat være givet ved et udtryk af formen  $y = y_0 \sin \omega t$ , indsættes her  $t = \frac{x}{a} T$  finder man:  $y = y_0 \sin(\frac{\omega T}{a} x)$ . Vælges T så  $\omega T = n2\pi$  vil man på skærmen se n perioder af spændingsfunktionen  $u_y = u_{y0} \sin \omega t$ .

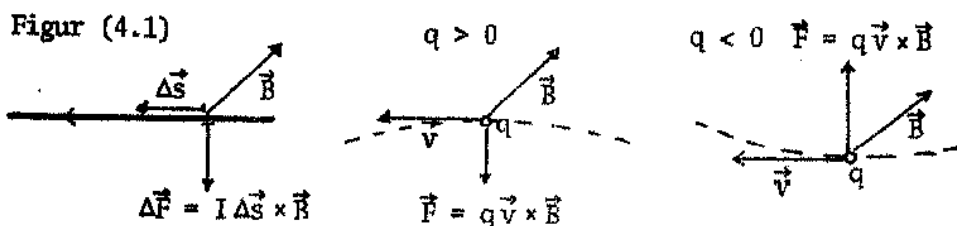
Kap III

4. BEVÆGELSE I ET KOMBINERET ELEKTRISK OG MAGNETISK FELT.

Vi skal her udlede et udtryk for den kraft, der virker på en partikel med ladning  $q$ , der bevæger sig med hastigheden  $\vec{v}$  i et kombineret elektrisk og magnetisk felt.

Kraften fra det elektriske felt  $\vec{E}$  er - som vi allerede tidligere har angivet -:  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ .

For at bestemme kraften på en ladet partikel, der bevæger sig i et magnetfelt  $\vec{B}$ , tager vi udgangspunkt i Laplace lov, der angiver kraften på et lederstykke  $\Delta\vec{s}$ , hvori der går en elektrisk strøm  $I$ .



Laplace kraften må ifølge sin natur være en kraft der virker på de ladninger, der er i bevægelse i lederen. Man kan da bestemme kraften på en enkelt ladning, ved at dividere laplacekraften med antallet af ladningsbærere, der befinder sig i lederstykket  $\Delta s$ .

Vi har tidligere (I.3.5.2) fundet udtrykket  $I = |q|nvA$  for den elektriske strøm gennem en leder med  $n$  ladningsbærere pr. rumfangsenhed, og tværsnitsarealet  $A$ . Antallet af ladningsbærere  $N$  i stykket  $\Delta s$  er  $N = nA\Delta s$ . Ved anvendelse af udtrykket for strømstyrken  $I$ , kan Laplacekraften skrives på følgende form:

$$(4.2) \quad \vec{F} = I \Delta\vec{s} \times \vec{B} = |q|nvA \Delta\vec{s} \times \vec{B} = qnA\Delta s \vec{v} \times \vec{B}$$

Man overbeviser sig om at (4.2) er korrekt for såvel positive som negative ladningsbærere (elektroner). Ved division med  $N$  finder man kraften på en enkelt ladningsbærer:

$$(4.3) \quad \vec{F}_m = \frac{\vec{F}}{N} = \frac{qnA\Delta s \vec{v} \times \vec{B}}{nA\Delta s} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}}$$

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

Bevæger en partikel sig i et kombineret elektrisk og magnetisk felt finder man således følgende udtryk for kraften på partiklen.

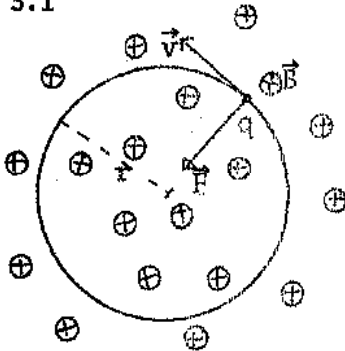
$$(4.4) \quad \vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \Rightarrow \boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$

Udtrykket (4.4) kaldes for Lorentz-kraften.

Man ser, at den magnetiske kraft  $\vec{F}_m$  altid er vinkelret på partiklens hastighed  $\vec{v}$ . Kraftens effekt  $\vec{F}_m \cdot \vec{v} = 0$  og partiklens fart - og dermed kinetiske energi - ændres ikke ved passagen af et magnetfelt. Magnetfelter anvendes derfor i udstrakt grad til at styre ladede partikler, således at farten holdes konstant.

5. EN LADET PARTIKELS BEVÆGELSE I ET HOMOGENT MAGNETFELT.

Figur 5.1



Vi skal antage, at partiklen har ladningen  $q$ , og bevæger sig med hastigheden  $\vec{v}$  vinkelret på et homogent magnetfelt  $\vec{B}$ . Vi vil da vise at partiklen vil foretage en jævn cirkelbevægelse. Bevægelsesligningen findes ud fra (4.3)

$$(5.1) \quad \vec{F}_m = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Af (5.1) ser man at accelerationen er vinkelret på såvel  $\vec{v}$  som  $\vec{B}$ .

Partiklen vil derfor udføre en plan bevægelse (vinkelret på  $\vec{B}$ ), hvor accelerationen stedse er vinkelret på hastigheden. Dette er netop tilfældet for en jævn cirkelbevægelse, og radius i cirkelbevægelsen kan beregnes ved at sætte  $\vec{F}_m$  lig med udtrykket for centripetalkraften.

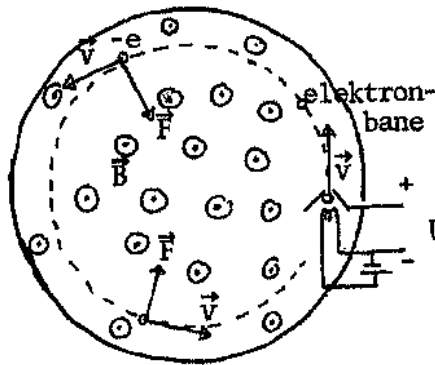
$$(5.2) \quad \vec{F}_c = \vec{F}_m \Rightarrow m \frac{v^2}{r} = |q|vB \Rightarrow r = \frac{mv}{|q|B}$$

Formlen (5.2) kan benyttes til at bestemme forholdet mellem elektronens masse og ladning. Forsøget blev udført første gang af englænderen J.J. Thomson.



Kap III

I Thomsons forsøg accelereres elektronerne op til hastigheden  $v$  i en såkaldt elektronkanon. Gennemløber elektronerne spændingsforskellen  $U$ , vil de få en kinetisk energi  $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ . Befinder elektron-



kanonen sig i et homogent magnetfelt  $B$  af kendt styrke, vil de beskrive en cirkelbane med radius givet ved (5.2).

$$(5.4) \quad r = \frac{mv}{eB} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{rB}$$

Opstillingen skal være anbragt i vacuum med en luftrest af f.eks. brint. Elektronernes bane vil da

ses som en lysende ring, hvis radius kan udmåles. Forholdet  $\frac{e}{m}$  kan da udtrykkes ved  $U$ ,  $r$  og  $B$ , der alle kan måles.

$$(5.5) \quad \frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \wedge \quad \frac{e}{m} = \frac{v}{rB} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U} = \frac{v}{rB} \Rightarrow v = \frac{2U}{rB}$$

Indsættes dette i (5.4) finder man:  $\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}$

Det homogene magnetfelt vil man oftest frembringe ved hjælp af et par såkaldte Helmholtz-spoler, der er to flade spoler, anbragt parallellet i en afstand lig med radius i spolerne. Man kan vise at feltet mellem spolerne med tilnærmelse er homogent. Ved hjælp af formelen kap II (3.5b) kan vi beregne  $B$ -feltet midt mellem spolerne på deres centerlinie.

$$(5.6) \quad B(x) = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow B = 2B(\frac{1}{2}R) = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{N \cdot I}{R}$$

I (5.6) betegner  $R$  radius og  $N$  vindingstallet på hver af spolerne. I forsøget anbringes en udpumpet kolbe med elektronkanonen imellem Helmholtz-spolerne.  $B$ -feltet beregnes da af (5.6), idet strømstyrken aflæses på et amperemeter.

Ved det beskrevne forsøg finder man:  $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  C/kg. Da elektronens ladning er bestemt af Millikans forsøg, kan man bestemme  $m$ . Man finder eksperimentelt  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg.

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

Formlen (5.5) for  $e/m$  er gyldig, så længe elektronen er urelativistisk. Urelativistisk betyder normalt, at elektronens hastighed  $v$  er mindre end  $0,1c$ , hvor  $c$  er lyshastigheden  $3 \cdot 10^8$  m/s. I dette tilfælde vil afvigelserne på grund af relativistiske effekter være mindre end 1%. Det bør dog bemærkes, at formen (5.4) bevarer sin gyldighed, hvis man erstatter  $m = m_0$  (hvilemassen) med den relativistiske masse,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ og udregner } v \text{ af: } Ue = E_{\text{kin}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

Det er bemærkelsesværdigt, at man før relativitetsteoriens fremkomst havde iagttaget at forholdet  $e/m$  tilsyneladende blev formindsket med forøget hastighed af elektronen.

5.7 Eksempel.

I et  $e/m$  forsøg er accelerationsspændingen 250 V. Magnetfeltet dannes af to Helmholtz-spoler med radius 8,0 cm. Strømstyrken gennem spolerne måles til 2,75 A. Hver af spolerne har 30 vindinger.

- Beregn elektronernes fart. Kan de betragtes som urelativistiske?
- Beregn radius og frekvens i elektronernes cirkelbevægelse.
- Beregn elektronernes centripetalacceleration. Kan man tillade sig at se bort fra tyngden?

Løsning: Hastigheden beregnes af formelen  $\frac{1}{2}mv^2 = Ue$ .

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 9,37 \cdot 10^6 \text{ m/s} < 0,1 c$$

Vi beregner  $B$ -feltet mellem Helmholtz-spolerne.

$$\text{Af (5.6)} \quad B = \mu_0 I \frac{B}{5\sqrt{5}} \frac{N}{R} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{B}}{\text{A}} \frac{30 \cdot 2,75}{0,08} \text{ T} = 9,27 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

$$\text{Af (5.2)} \quad r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 9,37 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,27 \cdot 10^{-4}} \text{ m} = 0,0576 \text{ m}$$

$$\text{Af formlen } v = \omega r = 2\pi\nu r \text{ fås: } \nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{9,37 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 0,0576} \text{ Hz} = 2,58 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

$$\text{Af formlen } a = \frac{v^2}{r} \text{ fås: } a = \frac{(9,37 \cdot 10^6)^2}{0,0576} \text{ m/s}^2 = 1,52 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

Af det sidste resultat fremgår, at tyngdeaccelerationen  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$  er helt uden betydning.

Kap III

6. ACCELERATION AF LADEDE PARTIKLER. ENERGIENHEDEN ELEKTRONVOLT.

Til flere forskellige formål, f.eks. i massespektrografen har man brug for hurtige ioner. Ioner kan ligesom elektroner accelereres ved at lade dem gennemløbe en spændingsforskel. Den hastighed en enkeltladet ion får ved at gennemløbe en spændingsforskel på  $U$ , kan beregnes af ligningen:

$$(6.1) \quad \frac{1}{2}mv^2 = Ue \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$$

Massen af ioner er imidlertid flere tusinde gange større en massen af en elektron, så spændingsforskellen skal forøges tilsvarende for at opnå samme hastighed, som for en elektron. I praksis er spændingsforskelle på flere millioner volt ikke mulige. Man har da i stedet bygget såkaldte accelerators, der er baseret på at lade ionerne gennemløbe den samme spændingsforskel flere gange.

For atomare partikler er energienheden Joule en meget stor, og ikke særlig relevant enhed. For ladede partikler angiver man normalt energien ved den spændingsforskel en enkeltladet ion skal gennemløbe, for at opnå denne kinetiske energi. Energienheden kaldes da elektronvolt.

6.2 Defintion: Ved energien 1 elektronvolt forstås den energi en enkeltladet ion (eller elektron) får ved at gennemløbe en spændingsforskel på 1 volt.

$$(6.2) \quad 1 \text{ elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Hvis en dobbeltladet Cu ion gennemløber et spændingsfald på 500 V får den en kinetisk energi på 1000 eV.

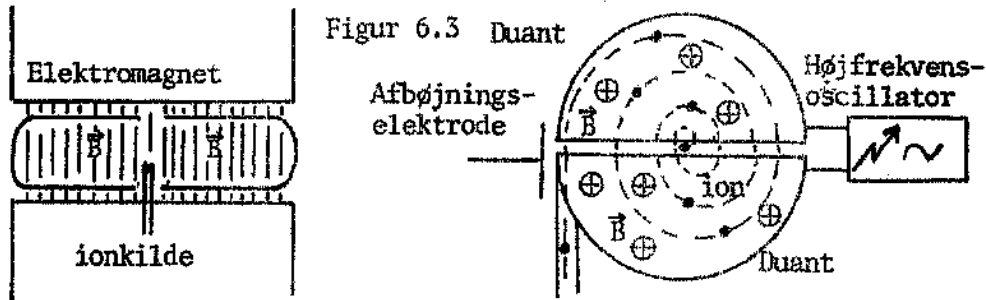
Meget ofte benytter man enhederne keV, MeV og GeV.

Den første egentlige accelerator blev bygget af englænderen Lawrence i 1932. Maskinen kaldes for en cyklotron. Princippet i cyklotronen er skematisk vist på figur (6.3).

Cyklotronen består af to store hule halvskiveformede elektroder, de såkaldte duanter. Duanterne er anbragt i en stor vacuumtank. Vinkelret på duanterne er et kraftigt homogent magnetfelt i hele deres udstrækning. Midt imellem elektroderne er anbragt ionkilden, der leverer de ioner, der skal accelereres. Spændingsforskellen mellem elek-

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

troderne (duanterne) leveres af en højfrekvensoscillator, der er i stand til at vende spændingen i løbet af få mikrosekunder.



En ladet partikel fra ionkilden vil blive tiltrukket af den ene af elektroderne. På grund af magnetfeltet, vil ionen gå ind i en cirkelbane. Når partiklen befinder sig inde i duanten er det elektriske felt nul. (Det elektriske felt er nul i en hul leder). Partiklen gennemløber her en del af en jævn cirkelbevægelse. Mens partiklen er inde i det feltfrie område, bliver spændingsforskellen vendt af højfrekvensoscillatoren. Når den kommer ud i området mellem de to duanter, vil den derfor blive accelereret over mod den anden duant. Dette forløb gentages flere gange, og partiklen vil gennemløbe en spiralformet bane med stigende fart. Til slut ledes de accelererede ioner ud gennem et rør ved hjælp af en afbøjningselektrode, hvorefter de kan styres ved hjælp af passende magnetfelter.

Afgørende for cyklotronens funktion er naturligvis, at man får vendt spændingen på præcis de rigtige tidspunkter. At dette overhovedet er praktisk muligt, skyldes at omløbstiden for en ladet partikel i et homogent magnetfelt er uafhængig af partiklens baneradius og fart. Dette kan indses, ved at benytte udtrykket (5.2) for baneradius.

$$(6.4) \quad r = \frac{mv}{qB} \quad \wedge \quad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \frac{m}{qB}$$

Det fremgår af (6.4), at omløbstiden  $T$  kun afhænger af ionens  $q/m$  forhold og feltstyrken  $B$ . Indstilles da frekvensen i spændingsoscillatoren til at være den samme som ionens frekvens i cirkelbevægelsen, opnår man præcis, at spændingen er maximal i den rigtige retning, hver

Kap III

gang ionen passerer mellem duanterne.

Hvis spændingen mellem duanterne oscillerer mellem værdierne  $-U$  og  $U$ , får ionen (med ladning  $q$ ) en tilvækst i kinetisk energi på  $qU$ , hver gang den passerer fra den ene duant til den anden.

Den maksimale energi en ladet partikel kan opnå i cyklotronen afhænger af spændingen  $U$ , samt apparatets dimensioner. Det er klart, at baneradius  $r$  skal være mindre end radius i cyklotronen  $R$ . Af (5.2) følger:

$$(6.5) \quad r = \frac{mv}{qB} < R \Rightarrow v < \frac{qRB}{m} \quad \text{og dermed} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 < \frac{(qRB)^2}{2m}$$

**6.6 Eksempel.** En cyklotron har en radius  $R = 1,25 \text{ m}$ , og det homogene magnetfelt har styrken  $B = 1,5 \text{ Wb/m}^2$ . Maximalspændingen er  $1000 \text{ V}$   
a) Beregn for en proton, den maksimale hastighed og energi (i eV), som den kan opnå. Beregn endvidere frekvensen i højfrekvensoscillatoren, samt antallet af omløb en proton foretager ved maximal energi.

Løsning:

$$\text{Af (6.5)} \quad v_H = \frac{eRB}{m_H} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1,25 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ T}}{1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 1,81 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2}mv_H^2 = 2,71 \cdot 10^{-11} \text{ J} = \frac{2,71 \cdot 10^{-11}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 169 \text{ MeV}$$

$$\text{Af (6.4)} \quad \nu_{\text{os}} = \nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} = 2,30 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

Hver gang protonen passerer mellem duanterne får den en tilvækst i kinetisk energi på  $1000 \text{ eV}$ . Heraf findes antallet  $n$  af omløb.

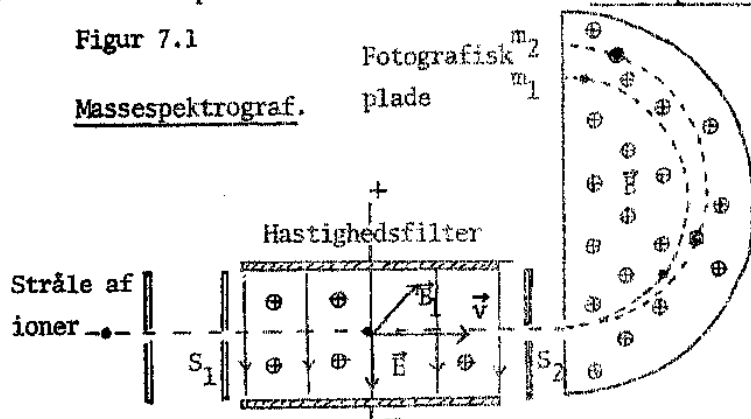
$$n = \frac{E_{\text{kin}}}{eU} = \frac{169 \text{ MeV}}{1 \text{ keV}} = 8,45 \cdot 10^4 \text{ omløb.}$$

I alle beregningerne vedrørende cyklotronen har vi antaget at partiklerne er urelativistiske. Eksempel 6.6 viser, at for denne cyklotron vil en proton være svagt relativistisk. Det er egentlig de relativistiske effekter, der sætter grænsen for hvor store energier man kan opnå i en cyklotron. Den relativistiske masseforøgelse vil nemlig bevirke at omløbstiden forøges. Cyklotronen i eksempel (6.6) vil høre til de største man kan bygge .

LADDEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

7. BESTEMMELSE AF ATOMMASSE. MASSESPKETROGRAFEN.

En direkte bestemmelse af atomernes masser har været en eksperimentel udfordring lige siden atometeoriens fremkomst. I 1910 lykkedes det for den engelske fysiker Aston at bygge et apparat, med hvilken han kunne bestemme massen af ioner med stor nøjagtighed. Apparater til at måle atomare partiklers masser kaldes for massespektrografer.



På figuren ovenfor er vist en type af massespektrograf, som hyppigt anvendes. (Det er en forbedret Aston-spektrograf, som skyldes Bainbridge.) En stråle af accelererede ioner ledes ind i spektrografen. Denne er forsynet med et såkaldt hastighedsfilter. Hastighedsfilteret består af en kapacitor, der er anbragt i et homogent magnetfelt  $\vec{B}_1$ , som er vinkelret på det homogene elektriske felt  $\vec{E}$  mellem pladerne. Retningen af  $\vec{E}$  og  $\vec{B}_1$  felterne er valgt således, at kræfterne på en ladet partikel fra disse to felter er modsat rettede. Kun i det tilfælde, at de to kræfter er lige store, vil en ladet partikel passere kapacitoren uden afbøjning. Hastighedsfilteret udvælger disse partikler ved at anbringe en smal spalte i begge ender af kapacitoren. Betingelsen for at en ladet partikel passerer hastighedsfilteret er således:

$$(7.2) \quad F_e = F_m \Leftrightarrow qE = qvB_1 \Rightarrow v = \frac{E}{B_1}$$

Hastighedsbestemmelsen af (7.2) kan gøres meget nøjagtig. Efter passagen af filteret, træder partiklen ind i et rent homogent magnetfelt, hvor partiklerne afbøjes 180°. Efter afbøjningen rammer ioner-

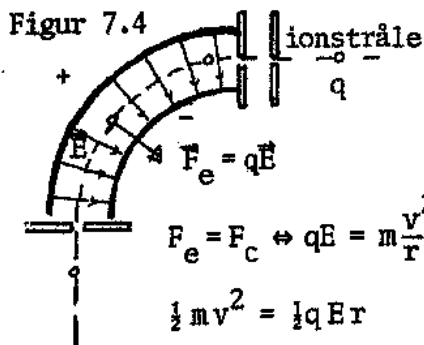
Kap III

ne en fotografisk plade, hvor sværtningen kan udmåles med stor nøjagtighed. Afstanden fra spalten  $S_2$  til sværtningen på den fotografiske plade er lig med diameteren i partiklens cirkelbevægelse. Massen  $m$  af en ion (med kendt ladning  $q$ ) kan da bestemmes, ved at anvende udtrykket (5.2) for baneradius, og (7.2) til beregning af hastigheden  $v$ .

$$(7.3) \quad r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow m = \frac{qrB}{v} \quad (v = \frac{E}{B_1} \text{ for samtlige ioner})$$

Ved hjælp af massespektrografen har man været i stand til at adskille de i naturen forekommende grundstoffer i isotoper. Isotoper er som bekendt atomer af samme grundstof, der kemisk set er identiske, men som har forskellig masse. (Masseforskellen skyldes et forskelligt antal neutroner i kernen, noget som ikke påvirker elektronstrukturen, og dermed ingen indflydelse har på de kemiske egenskaber). På denne måde har man fået løst et gammelt mysterium om, hvorfor de relative atommasser, (som kendt fra kemien), ikke altid er et multiplum af brintatomets masse. F.eks. har Klor atommassen 35,453, nemlig 75% Cl (atommasse 35) og 25% Cl (atommasse 37).

Til forskellige formål har man ofte brug for rene, normalt radioaktive isotoper. F.eks. anvendes de indenfor biologi og medicin som sporingstoffer i biologiske kredsløb. Anvendes massespektrografen til at adskille isotoper, kaldes den for en isotopseparator.

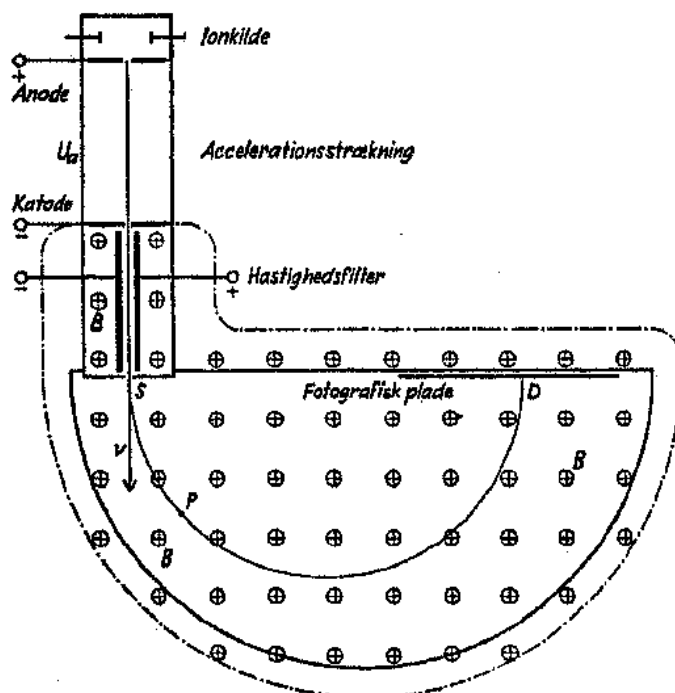


Ofte er massespektrografer forsynet med et såkaldt energifilter i stedet for et hastighedsfilter. Energifilteret er vist på figur (7.4). Det består af en krum pladecapacitor, der er forsynet med spalter på samme måde som hastighedsfilteret. Betingelsen for at en ion passerer filteret er, at den elektriske

kraft  $F_e = qE$  er lig med centripetalkraften  $F_c = mv^2/r$ , svarende til en cirkelbevægelse med radius  $r$ . Dette giver betingelsen:  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}qEr$ . Energifilteret har den fordel, at ionerne normalt accelereres gennem en spændingsforskel  $U$ , således at  $qU = \frac{1}{2}mv^2$ . Forskellige isotoper vil derfor have samme kinetiske energi, men forskellig hastighed.

LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE

7.6 Eksempel.



I en massespektrograf, som vist ovenfor sendes enkeltladede positive ioner ud gennem spalten S med hastigheden  $v$ . Ionstrålen bliver afbøjet i en halvcirkel i et homogent magnetfelt  $B = 0,5 \text{ T}$ . Hastighedsfilteret er indrettet således, at kun ioner med farten  $v = 7,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$  slipper igennem spalten S, uafhængig af, hvilken massen ionen har. På den fotografiske plade registrerer man en sværtning ved D, så at afstanden SD er 46,8 cm.

a) Beregn massen af de ioner, der rammer pladen ved D.

Afstanden mellem pladerne i kapacitoren er 5,00 mm.

b) Angiv den spænding, der skal pålægges kapacitoren for at ioner med den angivne hastighed passerer filteret.

Ionerne dannes i ionkilden, og accelereres af spændingen  $U_a$  mellem anode og katode.

c) Find spændingen  $U_a$

Ved opløsningsevnen forstår man forholdet mellem den forskydning på den fotografiske plade som en massetilvækst giver, divideret med denne massetilvækst.

d) Beregn opløsningsevnen for den viste massespektrograf.



Kap III

Løsning: a) Ifølge formelen (7.3)

$$(7.6a) \quad m = \frac{q\mu B}{v} \Rightarrow m = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,234 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ T}}{7,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}} = 2,50 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

Oftest udtrykker man massen i u, hvor  $1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  (Atommasse-enheden). I denne enhed finder man:  $m = 150 \text{ u}$ .

b) Betingelsen for at en ion passerer filteret er, at  $v = \frac{E}{B}$

Indfører man at  $E = \frac{U}{d}$  finder man at  $U = dvB = 0,005 \text{ m} \cdot 7,5 \cdot 10^4 \text{ m/s} \cdot 0,5 \text{ T}$   
 $\Rightarrow U = 188 \text{ V}$ .

c) Accelerationsspændingen bestemmes af (2.1)

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU_a \Rightarrow U_a = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{q} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,50 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot (7,5 \cdot 10^4 \text{ m/s})^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$\Rightarrow U_a = 4,39 \text{ kV}$$

d) Af formelen (7.3)  $r = \frac{mv}{qB}$  følger  $\Delta r = \frac{\Delta mv}{qB} \Rightarrow \frac{\Delta r}{\Delta m} = \frac{v}{qB}$

Forskydningen af pletten på den fotografiske plade er det dobbelte af  $\Delta r$ . Heraf følger for opløsningsevnen:

$$\text{Opløsningsevne} = \frac{2\Delta r}{\Delta m} = \frac{2v}{qB} = \frac{2 \cdot 7,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,5 \text{ T}} = 1,875 \cdot 10^{24} \text{ m/kg}$$

Normalt vil man omregne opløsningsevnen i mm. pr. u. Betydningen er således, den forskydning, som en masseforøgelse på 1 u vil give anledning til.

$$\text{Opløsningsevnen} = 1,875 \cdot 10^{24} \cdot 10^3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ mm/u} = 3,11 \text{ mm/u}$$