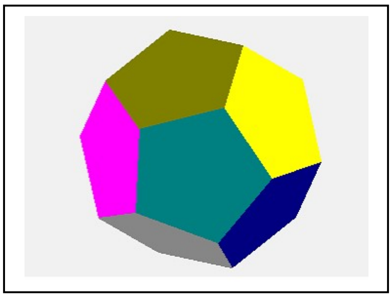
Relativitetsteori

Fra bogen Elementær Fysik 2

Ole Witt-Hansen 1979 (2016)



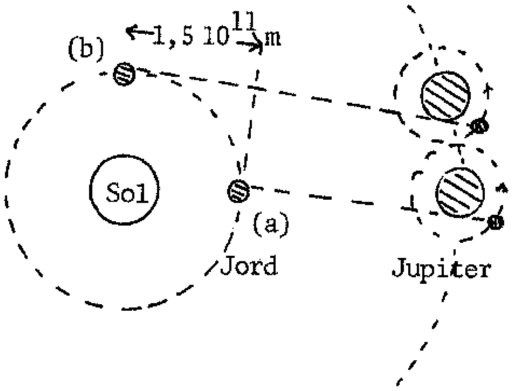
Indhold

KAP. X RELATIVITETSTEORI

1. BESTEMMELSE AF LYSETS UDBREDELSESHASTIGHED.

Det var danskeren Ole Rømer, der opdagede at lyset har en endelig udbredelseshastighed. Ole Rømer konstruerede selv sine instrumenter, og efter tidens standard rådede han over nogle af de bedste og mest præcise instrumenter til astronomiske observationer.
Ved stüdiet af planeten Jupiter havde han opdaget, at denne planet er omkredset af en række måner.

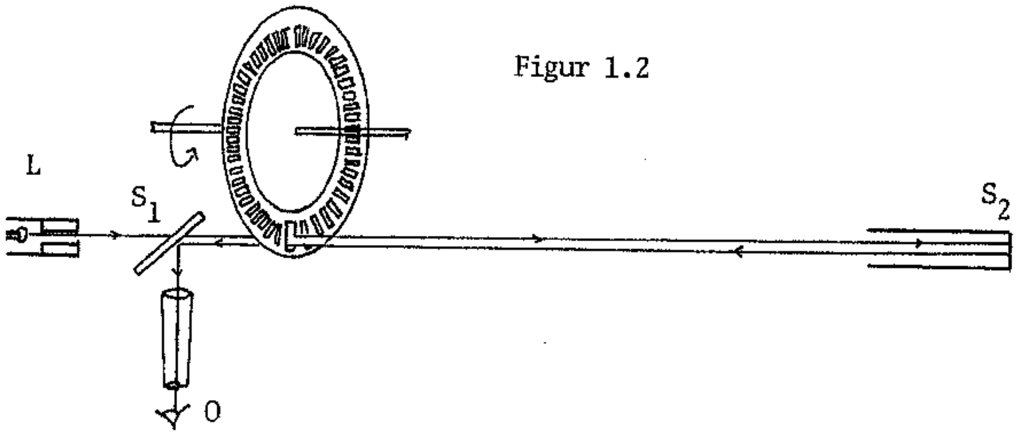
Figur 1.1



I et forsøg på at bestemme en af Jupitermånernes omløbstid, opdagede han at det tidspunkt, hvor Jupitermånen forsvandt bag planeten, tilsyneladende var afhængig af jordens position i forhold til Jupiter.
På figuren er vist to sådanne positioner (a) og (b).

I positionen (a) bestemte Rømer Jupitermånens omløbstid. Under den antagelse, at Jupitermånen har en konstant omløbstid, kunne Rømer nøjagtig udregne det tidspunkt, hvor månen skulle forsvinde bag planeten i positionen (b).
Det observerede tidspunkt bestemte Rømer til at være ca. 11 minutter forsinket i forhold til det beregnede.
Rømer forklarede denne tidsforskel, som den tid lyset benyttede til at tilbagelægge vejforskellen fra Jupiter til jorden i de to positioner. Vejforskellen svarer ca. til Jordens baneradius som er $1{,}5\ 10^{11}$ m.
Ved at dividere denne strækning med 11 min. = 660 s, finder man en lyshastighed på $2{,}3\ 10^{8}$ m/s.
Den nu accepterede værdi for lysets hastighed er $c = 2{,}997929\ 10^{8}$ m/s.

På grund af størrelsesordenen er en direkte eksperimentel bestemmelse af lyshastigheden vanskelig. Det første vellykkede eksperiment i den retning blev udført af franskmændene Fizeau og Foucault (1849) Den principielle forsøgsopstilling er vist nedenfor.



Figur 1.2

L er en lyskilde, der sender lys gennem det halvgennemsigtige spejl S_1. Lyset passerer dernæst en roterende skive, der er forsynet med en række spalter, ækvidistant og cirkulært anbragt, og således at spaltebredden er lig med afstanden mellem spalterne.
Efter at lyset er reflekteret fra spejlet S_2, passerer det atter spalterne, og det reflekterede lys kan iagttages ved O.
Når skiven roterer, vil den have bevæget sig et lille stykke i den tid det tager lyset at gennemløbe strækningen fra S_1 til S_2 og tilbage. Ved en passende stor rotationshastighed kan man opnå, at skiven netop har drejet frem til et mellemrum mellem spalterne, når lyset kommer tilbage fra S_2. Ved denne rotationshastighed vil det altså kunne iagttages, at lyset forsvinder ved O.
Er skivens omløbsfrekvens og spalteafstanden kendt, kan det tidsrum, der forløber mellem spalteåbning og spaltemellemrum beregnes, og dette tidsrum kan da divideres op i afstanden $2|S_1S_2|$ til beregning af lyshastigheden.
Til illustration af hvor vanskeligt forsøget er at udføre tjener følgende regneeksempel.
Forsøget blev udført med en afstand $|S_1S_2| = 9\ km$. Tiden for et gennemløb er således: $\Delta t = 2|S_1S_2|/c = 18{,}0\ 10^3\ m/3{,}0\ 10^8\ m/s = 6{,}0\ 10^{-5}\ s$. Hjulet havde en radius på 0,38 m og spalternes afstand lig med spaltebredden var 1,7 mm. I det anførte tidsrum skal hjulet altså nå at

Kap X

dreje en vinkel $\Delta\varphi = \frac{1,7}{380} = 0,0044$ *radian. Heraf kan vinkelhastigheden* ω *bestemmes:*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{0,0044}{6,0\ 10^{-6}\ s} = 73\ \text{radian/sek} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 11,6\ \text{omdr/s}$$

Det er imponerende, at det faktisk lykkedes de to franskmænd at bestemme en værdi for lyshastigheden, som var nær den korrekte værdi.

Nu om dage bestemmes lyshastigheden ved hjælp af radarbølger, der ligesom lys er elektromagnetiske bølger, men med en bølgelængde af størrelsesordenen 1 cm. Til bestemmelse af lysets hastighed kan også anvendes en laser, der udsender fuldstændig kohærent lys med én veldefineret bølgelængde. I alle tilfælde bestemmes lyshastigheden ved at studere inteferensen mellem den afsendte og den reflekterede bølge over kendte afstande. Ud fra interferensbilledet, kan tidsforskellen mellem den afsendte og modtagne bølge bestemmes, og hermed kan lyshastigheden beregnes.

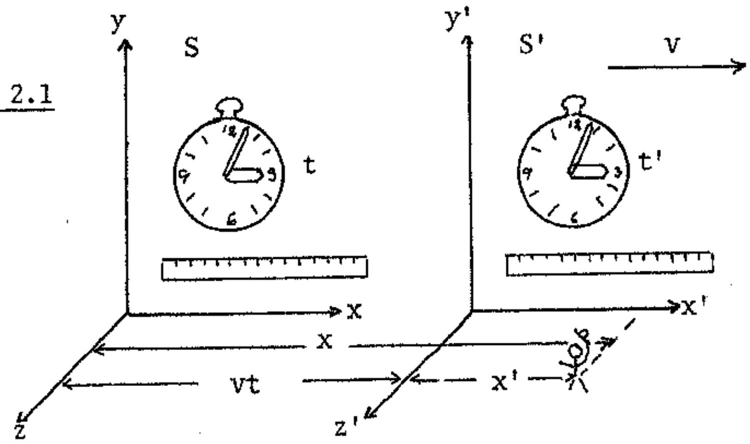
2. GALILEI-TRANSFORMATIONEN.

Vi har i bind I omtalt inertiens lov. Et inertialsystem er et koordinatsystem (iagttagelsessted eller ståsted), hvor inertiens lov gælder. Som omtalt er inertiens lov en forudsætning for gyldigheden af Newtons love.
Alle inertialsystemer bevæger sig jævnt og retlinet i forhold til hinanden.
Vi vil karakterisere en begivenhed ved positionen (x,y,z), hvor den fandt sted, samt tidspunktet t hvornår den fandt sted.

Vi ønsker nu at finde sammenhængen mellem koordinaterne til den samme begivenhed iagttaget fra to forskellige inertialsystemer S og S'.
Vi skal antage, at S' bevæger sig med hastigheden v i forhold til S.
En begivenhed i S betegnes med (x,y,z) og t, mens den samme begivenhed i S' betegnes med (x',y',z') og t'.
For nemheds skyld vil vi endvidere antage, at de to koordinatsyste-

mer er akseparallelle og sammenfaldende til tidspunktet $t = t' = 0$.

Figur 2.1



Begge iagttagere i inertialsystemerne S og S' er udstyret med identiske ure, som synkroniseres når de passerer hinanden.
Vi skal da gøre to tilsyneladende trivielle antagelser:

I) De to ure vil fremdeles vise samme tidspunkt $t = t'$ for den samme begivenhed iagttaget fra S og S'. (Naturligvis underforstået, at de to iagttagere korrigerer for den tid det tager lyset at tilbagelægge vejen fra stedet for begivenheden til iagttageren).

II) Er iagttagerne udstyret med identiske målestokke, vil de finde samme resultat af en længdemåling, foretaget fra de to inertialsystemer S og S'. Specielt vil de være enige om at de to målestokke fremdeles er lig lange uafhængig af deres indbydres bevægelse.

Vi nævner de to antagelser så udførligt, fordi de begge viser sig at være forkerte i relativitetsteorien, i hvert fald når hastigheden v nærmer sig lyshastigheden c.
Tænker vi os derimod foreløbig, at de to antagelser er gyldige, fremgår det umiddelbart af figuren, at der gælder følgende sammenhæng mellem (x,y,z) og t som målt i S og (x',y',z') og t' som målt i S'.

$$x' = x - vt \;, \quad y' = y \;, \quad z' = z \quad \text{og} \quad t' = t \tag{2.1}$$

Kap X

Formlerne (2.1) angiver sammenhængen mellem koordinaterne til den samme begivenhed i de to inertialsystemer S og S'.
Formlerne kaldes for Galilei-transformationen.
Ligningerne kan naturligvis trivielt løses med hensyn til x,y,z og t.

$$(2.2) \qquad x = x' + vt \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad \text{og} \quad t = t'$$

Formlerne (2.2) udtrykker overgangen fra S' til S. De kan også opnåes ved at ombytte mærkede med umærkede koordinater og erstatte v med -v, idet S jo bevæger sig med hastigheden -v i forhold til S'.

Skal man finde sammenhængen mellem hastighederne og accelerationerne i en partikels bevægelse set fra S og S', kan dette opnåes ud fra (2.1), idet vi sætter: $u_x = dx/dt$, $u'_x = dx'/dt'$ og sådan fremdeles.
På denne måde finder man ved differentiation:

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v\frac{dt}{dt} = u_x - v \\ a'_x &= \frac{du'_x}{dt'} = \frac{d}{dt}(u_x - v) = \frac{du_x}{dt} = a_x \end{aligned}$$

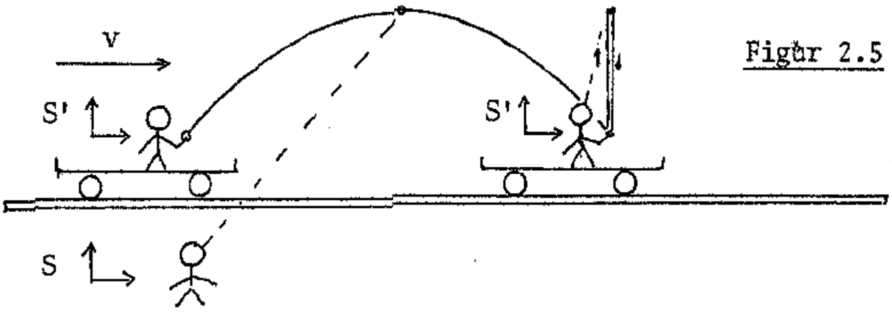
Hastigheder og accelerationer i y og z retning er naturligvis de samme ifølge (2.1).
Det man især bemærker ud fra (2.3) er, at de to iagttagere vil måle de samme accelerationer for en partikels bevægelse, selv om bevægelsen vil tage sig forskelligt ud i de to inertialsystemer.
Gør vi nu sluttelig den antagelse, (III) at massen af et legeme ikke afhænger af om det er i bevægelse eller hvile (en antagelse, der heller ikke kan opretholdes i relativitetsteorien), har Newtons 2. lov åbenbart samme form i de to inertialsystemer.
Det følger nemlig af (2.3):

$$(2.4) \qquad F'_x = m'a'_x = ma_x = F_x \quad \Rightarrow \quad (F'_x = m'a'_x \Leftrightarrow F_x = ma_x)$$

Man siger, at Newtons love er forminvariante overfor Galilei-trans-

formationen. Af denne grund er de to systemer fuldstændig ligeberettigede, og der findes intet eksperiment, der er i stand til at afgøre, hvilket af systemerne der er "i hvile", og hvilket der er i "bevægelse". Man kan kun konstatere, at de to systemer bevæger sig jævnt og retlinet i forhold til hinanden.
Af denne grund siger man, at relativitetsprincippet gælder.

En og samme bevægelse vil naturligvis tage sig forskelligt ud i to inertialsystemer, der bevæger sig jævnt i forhold til hinanden.
Som eksempel vil vi se på, hvorledes et lodret kast udført i S' vil se ud fra en iagttager i S.



Figur 2.5

Antag, at iagtageren i S' kaster et legeme op med begyndelseshastigheden u_o langs y'-aksen. Nedenfor er opstillet bevægelsesligningerne for bevægelsen i begge inertialsystemer S' og S.

$$a'_x = 0 \qquad\qquad a_x = 0$$
$$a'_y = -g \qquad\qquad a_y = -g$$

$$v'_x = 0 \qquad\qquad v_x = v$$
$$v'_y = u_o - gt' \qquad\qquad v_y = u_o - gt$$

$$x' = 0 \qquad\qquad x = vt$$
$$y' = u_o t' - \tfrac{1}{2}gt'^2 \qquad\qquad y = u_o t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

I S' er kastet som omtalt et lodret kast med begyndelseshastighed u_o. Banekurven i S kan bestemmes ved at eliminere t i udtrykkene for x og y. Indsætter man således $t = \frac{x}{v}$ i udtrykket for y, finder man:

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2 + \frac{u_o}{v}x = -ax^2 + bx$$

Banekurven er en kasteparabel i inertialsystemet S, og bevægelsen vil derfor tage sig ud som et skråt kast set fra S.

3. RELATIVITETSPRINCIPPET OG LYSHASTIGHEDENS INVARIANS.

Fra Newtons tid og helt op til begyndelsen af århundredeskiftet var Newtons love sammen med Galilei-transformationen grundlaget for verdensopfattelsen.

I slutningen af 1800-tallet var der imidlertid fremkommet såvel eksperimentelle som teoretiske vidnesbyrd, som på den ene eller den anden måde syntes at være i strid med den traditionelle verdensopfattelse.

Omkring 1870 havde englænderen Maxwell fået sammenfattet teorien for elektricitet og magnetisme i de fire såkaldte Maxwell-ligninger.

Som en konsekvens af ligningerne kunne Maxwell drage den slutning, at lys var en udbredelse af varierende elektriske og magnetiske felter. Udbredelseshastigheden c kunne Maxwell knytte sammen med to andre fundamentale naturkonstanter ε_0 (fra Coulombs lov) og μ_0 (fra amperedefinitionen), således at $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. Denne værdi for c var helt i overensstemmelse med den, man kendte fra eksperimenter.

Maxwells ligninger syntes i alle henseender at være i overensstemmelse med erfaringen, og der var faktisk kun én alvorlig anstødssten, nemlig at ligningerne ikke var forminvariante overfor Galilei-transformationen.

Modsat Newtons love var Maxwell-ligningerne ikke de samme i forskellige inertialsystemer, og man kunne derfor ud fra formen af Maxwell-ligningerne afgøre hvilket inertialsystem man befandt sig i.

Dette var imidlertid et klart brud med relativitetsprincippet, men alternativet syntes at være et brud med Galilei-transformationen.

Den teori der fulgte, æter-teorien var i realiteten et brud med relativitetsprincippet, men i en iklædning, der bevarede såvel Galilei-transformationen som Maxwell-ligningerne.

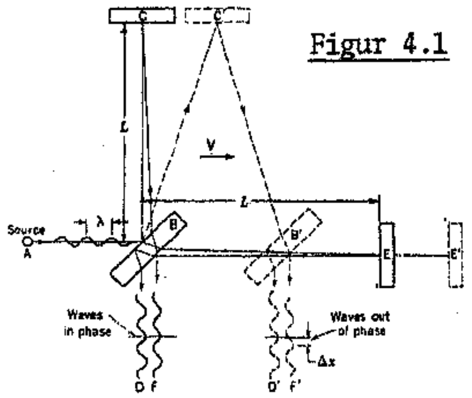
I æter-teorien opfatter man lysets udbredelse på samme måde som lyd-

udbredelse. Lyden udbreder sig i forhold til atmosfærisk luft med en konstant hastighed uafhængig af lydgiverens bevægelse.
I et inertialsystem, der er i hvile i forhold til luften, udbreder lyden sig med denne værdi, men i ethvert andet inertialsystem er lydhastigheden en anden, og sammenhængen mellem lydhastighederne i de to systemer kan bestemmes ved hjælp af Galilei-transformationen.
I analogi med dette antog man, at lyset udbredte sig i et medium, som man kaldte for æteren. I æterene var lyshastigheden c, mens hastigheden i ethvert andet inertialsystem kunne bestemmes ved hjælp af Galilei-transformationen. Lyshastigheden antoges endvidere at være uafhængig af lysgiverens hastighed i forhold til æteren.
Teorien syntes ikke at være helt urimelig, men en vanskelighed var det dog at acceptere eksistensen af den ikke direkte observerbare æter, der gennemstrømmede hele verdensrummet.(Dette i modsætning til atmosfærisk luft, som har flere andre fremtrædelsesformer).
Ikke direkte observerbare størrelser, der griber forstyrrende ind i i naturens love, har altid været problematiske i fysikken. De bliver indført for at forklare et bestemt resultat, men så længe "forklaringen" er en trossag, har det aldrig ført til forøget indsigt.

4. MICHELSON-MORLEY FORSØGET.

Æterteorien udpegede ét inertialsystem frem for alle andre, nemlig der hvor æteren var i hvile, og lyshastigheden var c.
Æterteorien kunne derfor delvis godtgøres, hvis man var i stand til at måle jordens hastighed i forhold til æteren, den såkaldte ætervind.
Det mest berømte forsøg på at bestemme ætervinden blev udført af amerikanerne Michelson og Morley i 1887.
Forsøgsopstillingen er skematisk vist og beskrevet på næste side.

Vi antager, at opstillingen er lavet således, at afstanden BC er lig med afstanden BE. Denne afstand kaldes for L. Hvis apparatet var i hvile i forhold til æteren, ville lyset, der reflekteres fra spejlene C og E være i fase efter refleksionen, og man vil ikke iagttage



Figur 4.1

Lyset fra lyskilden ved A rammer det halvgennemskinnelige spejl B. Noget af lyset reflekteres op på spejlet C, hvor det reflekteres tilbage til B'. Noget lys passerer B, hvor det reflekteres tilbage fra spejlet E. Hvis lyset, der reflekteres fra C og E er ude af fase, vil man kunne observere interferens ved B'.

interferens ved B'. Vi vil nu vise, at man derimod <u>vil</u> iagttage interferens, hvis apparatet som vist på figuren bevæger sig med hastigheden v i forhold til æteren.

Vi finder først de tidsrum t_1 og t_2, som det tager lyset at gennemløbe strækningerne BE og tilbage (på figuren strækningen B'E'). Udregningerne af hastighederne sker i forhold til ætersystemet, hvor lyset har udbredelseshastigheden c.

I tidsrummet t_1 bevæger lyset sig stykket ct_1, men i samme tidsrum har opstilllingen bevæget sig stykket vt_1 (nemlig fra E til E'), så der må gælde: $ct_1 = L + vt_1$.

I tidsrummet t_2 bevæger lyset sig stykket ct_2, mens apparatet bevæger sig stykket vt_2, men da B kommer lyset i møde gælder der: $ct_2 = L - vt_2$. Af de to ligninger:

$$ct_1 = L + vt_1 \quad \text{og} \quad ct_2 = L - vt_2 \qquad \text{følger}$$

$$(4.2) \qquad t_1 = \frac{L}{c - v} \quad \text{og} \quad t_2 = \frac{L}{c + v}$$

Udtrykkene (4.2) kan også direkte opskrives ved at notere sig, at lyset på ud og tilbagevejen vil have hastighederne c - v og c + v i forhold til apparaturet (ifølge Galilei-transformationen), og at lyset i begge tilfælde skal gennemløbe strækningen L. Af (4.2) fås:

$$(4.3) \qquad t_1 + t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{2L}{c}}{1 - v^2/c^2}$$

For at bestemme tiden for den anden refleksion, bemærker vi, at lyset i ætersystemet vil følge den stiplede bane B-C'-B'. Det tidsrum lyset er om at gennemløbe strækningen BC' kaldes for t_3. I dette tidsrum bevæger opstillingen sig stykket vt_3, mens lyset bevæger sig strækningen BC', som er ct_3. Da stykkerne L, vt_3 og ct_3 er sider i en retvinklet trekant, må der gælde:

$$(4.4) \qquad (ct_3)^2 = (vt_3)^2 + L^2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Tiden for at lyset gennemløber strækningen B-C'-B' er da $2t_3$.

$$(4.5) \qquad 2t_3 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Man bemærker, at ifølge (4.3) og (4.5) er $t_1 + t_2 \neq 2t_3$, således at det reflekterede lys for $v \neq 0$ vil være ude af fase ved D'F', og man skulle kunne observere interferensstriber. Ud fra interferensstriberne er det principielt mulig at bestemme tidsforskellen $t_1 + t_2 - 2t_3$, og dermed hastigheden v.
I praksis ville det dog være umuligt at opnå at BC = BE med en nøjagtighed svarende til lysets bølgelængde. I stedet indrettede Michelson og Morley sig, så de kunne rotere hele opstillingen 90°. På denne måde blev de to strålegange ombyttet, og man skulle for $v \neq 0$ kunne observere en forskydning af interferensstriberne.
Michelson og Morley udførte forsøget på tidspunkter af døgnet, hvor hastigheden hidrørende fra jordens rotation var parallel med hastigheden hidrørende fra jordens bevægelse om solen, og med den ene strålegang i hastighedens retning.
Forsøget blev udført, men viste ingen forskydning af interferensstriberne. Alle senere forsøg på at bestemme jordens hastighed i forhold til æteren gav samme negative resultat.
Forsøgene tydede således på, at æter-hypotesen var forkert, og at relativitetsprincippet havde uindskrænket gyldighed.
Det var dermed en følge af Maxwell-ligningerne, at Galilei-transformationen (og dermed også Newtons love) måtte være forkerte.

Kap X

Ved århundredeskiftet var det klart, at der øjensynlig skulle ske en ret omfattende revision af verdensbilledet, før man igen kunne finde konsistens, dvs. modsigelsesfrihed, i naturlovene. Denne revision blev givet af A. Einstein med den specielle relativitetsteori, der fremkom i 1905.

Det bør tilføjes, at det negative resultat af Michelson-Morley forsøget kan forklares, hvis man antager, at et legeme i bevægelsesretningen forkortes med en faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Indsætter man nemlig i (4.3) $L_{||} = L\sqrt{1-v^2/c^2}$, finder man netop at $2t_3 = t_1 + t_2$.

Ud fra denne (bizarre) antagelse vil der åbenbart ikke ske nogen forskydning af interferesstriberne (i overensstemmelse med erfaringen).

Længdeforkortelsen med den anførte faktor er netop én af de overraskende konsekvenser af Einsteins relativitetsteori, som således er i stand til at redegøre for det negative resultat af Michelson-Morley forsøget.

5. RELATIVITETSTEORIENS GRUNDLAG. EINSTEINS TOG.

Einstein var den første der indså nødvendigheden af at ændre det verdensbillede, der hvilede på Galilei-transformationen og Newtons love, (samt en række stiltiende antagelser om tidens, længdens og massens uforanderlighed fra et inertialsystem til et andet).

Einstein byggede sin teori på to fundamentale antagelser, hvis gyldighed han fandt indlysende på det foreliggende eksperimentelle grundlag. De to antagelser kan formuleres som følger:

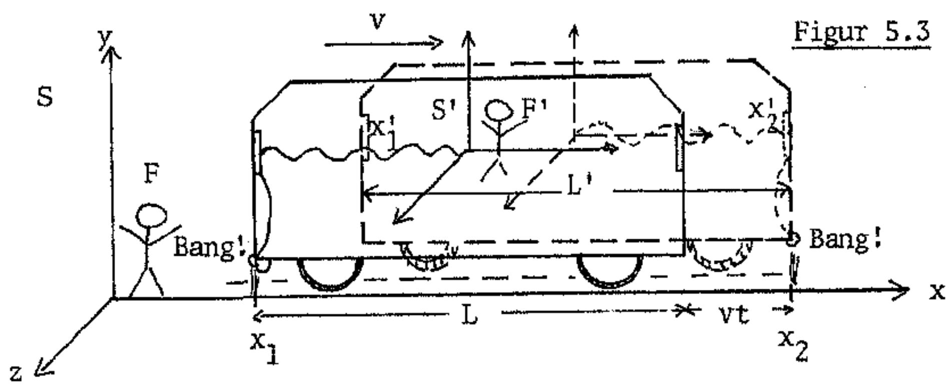
(5.1) Relativitetsprincippet: Alle inertialsystemer er ligeberettigede. Der findes intet eksperiment, der kan afgøre om man er i hvile eller bevæger sig jævnt og retlinet. Som følge heraf skal de fysiske grundlove være forminvariante, dvs. "se ens ud" i de forskellige inertialsystemer.

(5.2) Lyshastighedens invarians: Lyset udbreder sig med den samme hastighed c i alle inertialsystemer. Specielt er lyshastigheden den samme i alle retninger, og er uafhængig af lysgiverens bevægelse. Hastigheder større end lyshastigheden er umulig.

Vi vil ikke argumentere yderligere for Einsteins to antagelser, selv om deres gyldighed ikke er umiddelbart indlysende.
I stedet vil vi drage en række væsentlige konsekvenser af de to antagelser, som normalt sammenfattes under navnet: "Den specielle relativitetsteori". Det viser sig blandt andet, at både Galilei-transformationen og Newtons love kun med tilnærmelse er korrekte, når de indgåede hastigheder er meget mindre end lyshastigheden c.

Einstein opstillede selv nogle simple tankeeksperimenter for at belyse den konsekvente logik i teorien. Vi skal her analysere hans berømte tankeeksperiment med toget.

Figur 5.3



Lad os antage at et tog, svarende til inertialsystemet S', kører med hastigheden v langs et banelegeme, som svarer til inertialsystemet S. I inertialsystemerne S og S' er placeret fysikerne F og F'.
F' ønsker at meddele F, hvor lang togvognen er. Selv kan han jo blot måle togvognen på en medbragt målestok, og lad os antage, at han måler vognens længde til L'. F og F' bliver nu enige om et forsøg, som bringer F i stand til at måle togvognens længde med sin egen målestok. Resultatet af længdemålingen i S vil vi betegne L.
F' anbringer sprængladninger i begge ender af toget, og sprængladningerne udløses ved, at en fotocelle ved togvognens endevæg belyses. Ved eksplosionen afsættes der mærker på skinnerne, som bagefter kan udmåles af F.

For at eksplosionerne skal ske samtidig i S', udsender F' fra midten af vognen et lyssignal i begge retninger. I S' vil lyssignalerne ramme endevæggene til samme tidspunkt $t_1' = t_2' = \frac{\frac{1}{2}L'}{c}$, da lyset udbreder sig med hastigheden c i begge retninger.

F er ifølge antagelse (5.2) enig i, at lyset udbreder sig med hastigheden c i begge retninger, men i det tidsrum det tager lyset at nå til endevæggene, har toget i forhold til S bevæget sig et stykke, således at den bageste endevæg er kommet signalet i møde, mens den forreste endevæg har flyttet sig væk.

F vil altså hævde, at den bageste fotocelle blev udløst før den forreste, og dermed at eksplosionerne ikke skete samtidig i inertialsystemet S.

Tidspunktet t_1, hvor lyset rammer den bageste endevæg, kan bestemmes ved at bemærke, at lyset bevæger sig stykket ct_1, toget bevæger sig stykket vt_1 og togvognens halve længde er $\frac{1}{2}L$. Heraf fås: $ct_1 = \frac{1}{2}L - vt_1$.

På samme måde bestemmes tidspunktet t_2, hvor lyssignalet rammer den forreste endevæg. Vi kan således opstille ligningerne:

$$ct_1 = \tfrac{1}{2}L - vt_1 \quad \text{og} \quad ct_2 = \tfrac{1}{2}L + vt_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{c+v} \quad \text{og} \quad t_2 = \frac{\frac{1}{2}L}{c-v} \qquad (5.4)$$

Det fremgår at $t_1 \neq t_2$ for enhver værdi af $v \neq 0$.

Af eksemplet konkluderer vi, at to begivenheder der er samtidige i et inertialsystem S', normalt ikke er samtidige i et andet inertialsystem S. Følgelig må også tidsintervaller mellem begivenheder være forskellige i de to inertialsystemer.

Dette kaldes for tidens relativitet.

Men heller ikke længdemålinger vil de to fysikere F og F' være enige om. Da eksplosionerne indtraf samtidig i S', vil F' hævde, at afstanden mellem mærkerne på skinnerne nøjagtig svarer til den længde L' af togvognen, som han har udmålt med sin målestok i S'.

F på den anden side vil hævde, at det bageste mærke blev sat først, og at toget dermed bevægede sig et stykke, før det forreste mærke blev sat. F vil således hævde, at toget er kortere end afstanden mellem mærkerne på skinnerne, dvs. $L < L'$. I almindelighed vil man derfor ikke finde samme resultat af en længdemåling i to forskellige inertialsystemer. Dette kaldes for længdens relativitet.

6. LORENTZ-TRANSFORMATIONEN.

Vi skal nu udlede den sammenhæng mellem koordinaterne og tiderne i de to inertialsystemer S og S', som opfylder Einsteins to fundamentale antagelser (5.1) og (5.2). For at finde transformationsformlerne, skal vi yderligere gøre en række rimelige antagelser.
For det første er vi klar over, at Galilei-transformationen med tilnærmelse må være gyldig ved små hastigheder. Hvis S' bevæger sig med hastigheden v i forhold til S, ledes vi til at forsøge med en løsning af formen: $x' = \gamma(x - vt)$. γ er en konstant, der ikke afhænger af koordinaterne, men nok af v og c. γ må være positiv og $\gamma \approx 1$, når $v \ll c$, idet transformationsformlerne i denne grænse skal gå over i Galilei-transformationen.
Ifølge relativitetsprincippet, må overgangsformlerne fra S' til S have samme form, hvor blot v er erstattet med -v, samtidig med at koordinaterne bytter roller. Vi forsøger da med overgangsformlerne:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad \text{og} \quad x = \gamma(x' + vt') \tag{6.1}$$

Ved hjælp af disse formler analyserer vi da tankeeksperimentet med toget. Togvognen svarer da til inertialsystemet S', der bevæger sig med hastigheden v i forhold til banelegemet (inertialsystem S).
Vi antager, at de to koordinatsystemer er sammenfaldende til tidspunktet $t = t' = 0$.
Da eksplosionerne indtraf samtidig i S', gælder der at $t_1' = t_2'$, svarende til endevæggenes koordinater $x_1' = -\frac{1}{2}L'$ og $x_2' = \frac{1}{2}L'$.
I S indtraf eksplosionerne til tidspunkterne t_1 og t_2, som anført i (5.4), og ved koordinaterne x_1 og x_2, som er mærkerne på skinnerne.

Indsættes disse oplysninger i (6.1) finder man:

11

Kap X

(6.2) $$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1) = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

(6.3) $$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x_2' + vt_2') - \gamma(x_1' + vt_1') = \gamma\Delta x'$$

Vi har i (6.3) benyttet at $t_1' = t_2'$. $\Delta t = t_2 - t_1$ beregnes ud fra (5.4)

(6.4) $$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}L}{c-v} - \frac{\frac{1}{2}L}{c+v} = \frac{Lv}{c^2 - v^2} = \frac{Lv/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

F vil hævde, at afstanden $\Delta x = x_2 - x_1$ er lig med vognens længde L plus det stykke $v\Delta t$, som toget har bevæget sig i tidsrummet Δt.

(6.5) $$\Delta x = L + v\Delta t$$

Indfører man udtrykket Δt fra (6.4) i (6.5) finder man:

(6.6) $$\Delta x = L + v\frac{Lv}{c^2 - v^2} = \frac{Lc^2}{c^2 - v^2} = \frac{L}{1 - v^2/c^2}$$

I (6.2) og (6.3) indfører vi nu at $\Delta x' = L'$. (6.5) indsættes i (6.2) og (6.6) indsættes i (6.3). Heraf fremkommer to ligninger:

(6.7) $$L' = \gamma L \quad \text{og} \quad \frac{L}{1 - v^2/c^2} = \gamma L'$$

Indsættes den første ligning i den sidste og bortforkortes L, finder man en ligning til bestemmelse af γ.

(6.8) $$\frac{1}{1 - v^2/c^2} = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

I (6.8) har vi forkastet den negative løsning, da γ skal være positiv. Udtrykket for γ substitueres nu tilbage i udtrykkene (6.1), som derefter giver de ønskede transformationsformler.

(6.9) $$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

For at finde sammenhængen mellem tidspunkterne t og t' i S og S' for den samme begivenhed, tænker vi os, at der til tidspunktet $t = t' = 0$ udsendes et lyssignal fra koordinatsystemernes fælles begyndelsespunkt. Da lyset udbreder sig langs 1. aksen med hastigheden c i begge inertialsystemer (antagelsen (5.2)), må der for den samme begivenhed (x,t) og (x',t') i S og S' gælde: $x = ct$ og $x' = ct'$.

$$(6.10) \qquad x = ct \Rightarrow t = \frac{x}{c} \quad \text{og} \quad x' = ct' \Rightarrow t' = \frac{x'}{c}$$

Indføres udtrykkene (6.10) i formlerne (6.9) og divideres på begge sider med c, finder man de ønskede transformationsformler mellem t og t'.

$$(6.11) \qquad \boxed{t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{og} \quad t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Formlerne (6.9) og (6.11) kaldes tilsammen for Lorentz-transformationen, idet H.A. Lorentz opdagede at Maxwell-ligningerne var forminvariante overfor disse transformationer. (Jævnfør §3).
Vi har her udledt transformationsformlerne ud fra Einsteins to fundamentale antagelser (5.1) og (5.2). Formlerne er hovedhjørnestenen i den specielle relativitetsteori.
Man bemærker at $\gamma \approx 1$ når $v \ll c$, og at formlerne (6.9) og (6.11) går over i Galilei-transformationen i denne grænse.

7. KONSEKVENSER AF LORENTZ-TRANSFORMATIONEN.

Af ligningen (6.7) $L' = \gamma L$ fremgår sammenhængen mellem længden af vognen, som målt af fysikeren F', der følger med toget, og F som toget passerer forbi. Indsættes udtrykket (6.8) for γ får man:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad L = L'\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

L' er længden af vognen, målt af én der er i hvile i forhold til vognen. L' kaldes derfor for hvilelængden og betegnes ofte med L_o.
Vi får således:

$$(7.2) \qquad \boxed{L = L_o\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Kap X

Af (7.2) fremgår, at et legeme i bevægelse med hastigheden v, vil være forkortet i bevægelsesretningen med en faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
Nu er det jo ikke blot togvognen, som F vil hævde er kortere end som angivet af F'. F' har jo målt togvognens længde til L' med sin målestok, og F vil derfor hævde, at den målestok F' har, og dermed alt hvad der befinder sig i inertialsystemet S', er forkortet i bevægelsesretningen med den samme faktor.

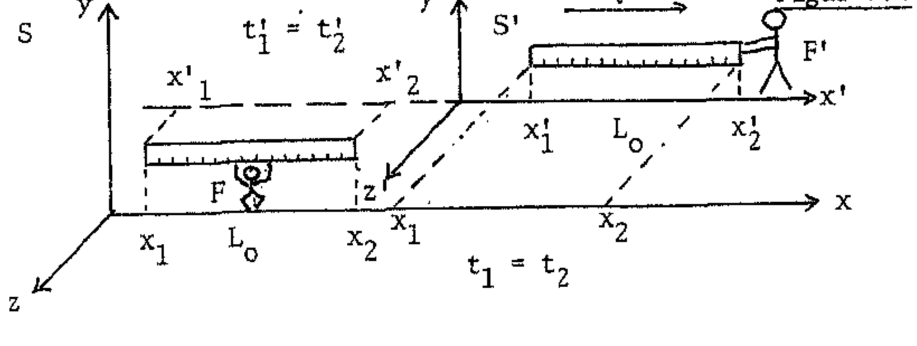
Lad os nu antage, at F og F' vil lave målinger i inertialsystemet S.
For at F' skal lave en måling i S, må han bestemme de to tilsvarende koordinater x_1' og x_2' samtidigt i S' ($t_1' = t_2'$). I inertialsystemet S er det naturligvis ligegyldigt om aflæsningen af de to koordinater x_1 og x_2 sker samtidigt eller ej, da de ikke flytter sig med tiden.
For at finde afstanden mellem begivenhederne i S' benytter vi derfor den anden af formlerne (6.9) med $t_1' = t_2'$.

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + vt_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1' + vt_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{7.3}$$

Af (7.3) fremgår det, at ved målingen vil F' finde, at en længde i S er forkortet med en faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ i forhold til, hvad der er angivet af F. Specielt vil F' altså hævde, at målestokkene i S er forkortet med denne faktor.
Det lyder måske umiddelbart som det modsatte af hvad vi fandt før, men der gjaldt det en måling i inertialsystemet S'.

Figur 7.4



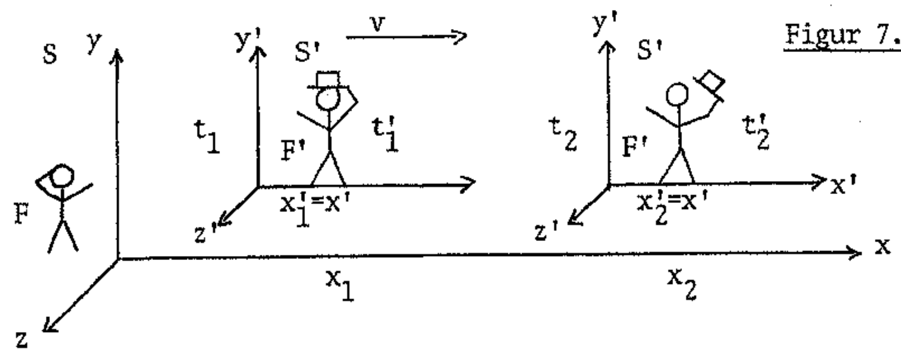
Vi ender altså med den lidt overraskende konklusion, at begge fysikere vil hævde, at den anden anvender for korte målestokke til målinger i sit eget inertialsystem. Kan det nu virkelig være rigtigt? Det er rigtigt, og hvis man tænker over det, kan man indse, at det følger af relativitetsprincippet, at det netop må være således. Var der nemlig forskel på, hvad de to fysikere F og F' ville hævde om den andens målinger, ville de to inertialsystemer ikke være ligeberettigede, og F og F' kunne principielt skelne mellem, hvem der var i hvile, og hvem der bevægede sig jævnt og retlinet.

Vi skal dernæst udregne de tidsintervaller, som de to fysikere F og F' måler mellem to begivenheder på samme sted i S'.
Vi indsætter derfor $x_1' = x_2' = x'$ i den sidste af formlerne (6.11), og søger sammenhængen mellem $\Delta t' = t_2' - t_1'$ og $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_1' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$(7.4) \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Af (7.4) fremgår, at tidsintervallet mellem to begivenheder i samme rumpunkt i S' er længere for en iagttager i S end for en iagttager i S'. For denne slags begivenheder vil F altså hævde, at urene i S' går for langsomt med faktoren $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$



Figur 7.5

Lad os derefter antage, at de to fysikere vil sammenligne tidsintervaller for to begivenheder i samme rumpunkt i S.

Kap X

Indsætter man $x_1 = x_2 = x$ i (6.11) og søger sammenhængen mellem $\Delta t = t_2 - t_1$ og $\Delta t' = t_2' - t_1'$, finder man på samme måde som før:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{7.6}$$

Tidsintervallet mellem to begivenheder i S er altså længere for en iagttager i S' end for en iagttager i S. F' vil altså hævde, at urene i S går for langsomt med faktoren $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
Umiddelbart kan dette forekomme i modstrid med hvad vi fandt tidligere, men der gjaldt det to begivenheder på samme sted i S'.

Begge fysikere F og F' vil altså hævde at den andens ure går for langsomt. Selv om denne konklusion kan virke overraskende, er den i overensstemmelse med relativitetsprincippet, ifølge hvilket de to inertialsystemer skal være helt ligeberettigede.

Især tidens relativitet har givet anledning til mange indvendinger mod relativitetsteorien.
En af de mest kendte er det såkaldte tvillinge paradox.
Lad os antage af den ene af to tvillinger sendes afsted fra jorden med et rumskib, der bevæger sig med hastigheder, der nærmer sig lysets. Ifølge det foregående, vil begge tvillinger hævde, at den andens ure og dermed livsfunktioner forløber langsommere end ens egne. Begge tvillingerne vil altså mærke, at de selv bliver gamle, mens den anden ses at holde sig ung.
Men lad os da antage, at tvillingen i rumskibet bremser op og vender tilbage til jorden med samme hastighed. Tidsforlængelsen vil for begge tvillinger være den samme på tilbagevejen, idet der i formlerne (7.4) og (7.6) kun indgår v^2, men ikke fortegnet for v.
Ved gensynet på jorden kan tvillingerne imidlertid direkte sammenligne og afgøre, hvem der er blevet ældst. Da de åbenbart begge vil hævde at den anden er yngre, må de på grund af relativitetsprincippet være lige gamle. Hvabeha'r! Er tidens relativitet noget vås?? Nej, relativitesteorien er god nok, men sagen er jo blot den, at vi netop ikke kan benytte relativitetsprincippet på de to tvillinger.

For at de skal mødes igen, er den ene tvilling (ham i rumskibet) nød til at accelerere, og han befinder sig derfor ikke længere i et inertialsystem. Men er de ikke stadig ligeberettigede af den grund? Betyder det ikke blot, at de accelererer i forhold til hinanden?
Svaret er nej! I rumskibet gælder inertiens lov ikke længere under vendingen af rumskibet (accelerationen), mens den fortsat gælder i det andet inertialsystem. De to systemer er ikke ligeberettigede, og der er således ikke noget principielt forkert i at de kan have forskellig alder, når de mødes igen. Men hvem er da den ældste?
Det er tvillingen på jorden. Han vil jo blot opfatte rumskibet som en serie af inertialsystemer, hvor urene går langsommere svarende til den øjeblikkelige hastighed v.
Hvorledes tingene vil forløbe i rumskibet, som altså er et accelereret ståsted, kan vi ikke analysere ud fra den specielle relativitetsteori, da rumskibet ikke er et inertialsystem.
Dette kan imidlertid lade sig gøre ud fra den generelle relativitetsteori, der omhandler accelererede koordinatsystemer. Den generelle relativitetsteori blev fremsat af Einstein i 1916. Den generelle relativitetsteori løser tvillinge-paradoxet fuldstændig, idet der ifølge denne teori ingen forskel vil være på hvad de to tvillinger hævder, når de mødes igen.
Mens den specielle relativitetsteori er enkel og matematisk simpel, er den generelle teori kompliceret og matematisk ret vanskelig tilgængelig.

7.7 Opgaver.

1) Ved omtalen af Einsteins tog, konkluderede vi at de to eksplosioner ikke ville være samtidige i S. Antag at toget har længden 100 m, og at det kører med hastigheden 120 km/h. Beregn hvor stor tidsforskellen vil være for eksplosionerne i S.

2) Jorden bevæger sig rundt om solen med en fart på 30 km/s. Beregn hvor meget længere et år vil være for en iagttager på solen.

3) Bestem den relative hastighed en meterstok må have for at længden

Kap X

er formindsket med 0,1 %.

4) En myon er en ustabil partikel, der når den produceres i hvile har en middellevetid på 2,2 10^{-6} s.

a) Angiv middellevetiden af myoner, der produceres med hastigheden 0,99c, hvor c er lyshastigheden.

b) Hvor langt vil en myon med denne hastighed bevæge sig.

c) Angiv hvor langt dette stykke vil være i forhold til et inertialsystem , der følger med myonens bevægelse.

8. TRANSFORMATION AF HASTIGHEDER.

Før vi udleder formlerne for transformation af hastigheder, skal vi bemærke, at en længdemåling vinkelret på bevægelsesretningen vil føre til samme resultat i de to inertialsystemer S og S'.
Til formlerne (6.9) kan vi således føje at: $y = y'$ og $z = z'$.
Dette er klart, idet de to iagttagere direkte kan sammenligne målinger vinkelret på bevægelsesretningen.
Fysikeren F kan nemlig ved hjælp af sin meterstok tegne linien $y = 1$ m i koordinatsystemet S. I S' kan fysikeren F' da blot lægge sin meterstok vinkelret på x-aksen (som er sammenfaldende med x'-aksen) og se om den passer med afstanden ud til den linie som F har tegnet.
Da F' kan gøre det samme i S', kan målestokkenes længde vinkelret på bevægelsesretningen direkte sammenlignes, og de må derfor, ifølge relativitetsprincippet være lige lange.

Til beregning af transformationsformlerne er det nødvendigt at opskrive Lorentz-transformationen for tilvækster. Det følger således trivielt af (6.9) og (6.11):

(8.1) $$\Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{og} \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

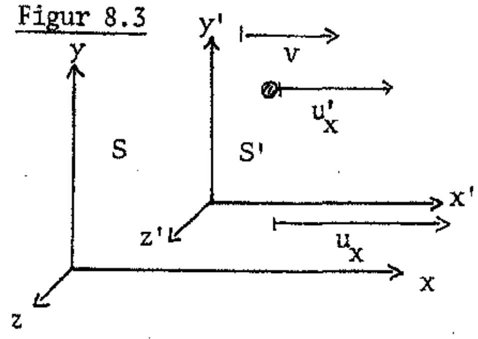
Endvidere følger det af bemærkningen ovenfor at $\Delta y = \Delta y'$ og $\Delta z = \Delta z'$

Lad os nu antage, at den samme bevægelse bliver iagttaget fra to inertialsystemer S og S'.

I S måler fysikeren F hastighederne u_x og u_y, mens fysikeren F' i S' måler hastighedrene u'_x og u'_y. Disse hastigheder beregnes efter formlerne:

(8.2) $$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \text{og} \qquad u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}$$

Figur 8.3



For at finde sammenhængen mellem u_x og u'_x dividerer vi den anden af formlerne (8.1) op i den første. Kvadratrødderne i nævneren vil gå ud, og man finder:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}{c^2}}$$

Heraf følger:

(8.4) $$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}$$

(8.4) er den relativistiske formel for addition af hastigheder i bevægelsesretningen.

8.5 Eksempel.

Lad os f.eks. antage, at en radioaktiv partikel bevæger sig med hastigheden ½c i laboratoriesystemet. Partiklen henfalder, og udsender en anden partikel med hastigheden ½c relativt til moderpartiklen og i dennes bevægelsesretning.

Ifølge Galilei-transformationen (og almindelige forestillinger) skulle den udsendte partikel have hastigheden ½c + ½c = c i forhold til laboratoriet.

Lad os nu beregne hastigheden i laboratoriet efter formlen (8.4). Moderpartiklen svarer til inertialsystemet S', der bevæger sig med hastigheden $v = \frac{1}{2}c$ i forhold til laboratoriet, som er inertialsystemet S. Hastigheden af den udsendte partikel er derfor $u'_x = \frac{1}{2}c$ i S'.

Heraf fås:

$$u_x = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{\frac{1}{2}c\,\frac{1}{2}c}{c^2}} = \frac{c}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}c$$

Kap X

For relativistisk addition af hastigheder er " $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ *" altså ikke 1, men lig med* $\frac{4}{5}$.

8.5 Eksempel.

Lad os dernæst antage, at en radioaktiv partikel, der har hastigheden v i forhold til laboratoriet, udsender en γ-kvant. γ-kvanten er elektromagnetisk stråling, der udbreder sig med hastigheden c. γ-kvantens hastighed i forhold til laboratoriet kan bestemmes ud fra formlen (8.4) med $u'_x = c$.

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c\,\frac{c + v}{c + v} = c$$

Det er således en konsekvens af additionsformlen, at "lys" vil have den samme udbredelseshastighed c i begge inertialsystemer, uafhængig af deres relative bevægelse. Dette er i overensstemmelse med den anden af Einsteins grundlæggende antagelser (5.2).

Vi vil nu udlede transformationsformlerne for hastigheder i y-aksens retning. Vi udregner derfor $u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ ved anvendelse af formlen (8.1), samt vores forudsætning om at $\Delta y' = \Delta y$.

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}} = \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v\frac{\Delta x'}{\Delta t'}}{c^2}}$$

(8.6)
$$u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Det bemærkes, at u_y ikke blot afhænger af u'_y og v, men også af u'_x . Ofte anvender man formlen (8.6) for $u'_x = 0$, og den antager da den simple form:

(8.7)
$$u_y = u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad \text{(Gyldig når } u'_x = 0\text{)}$$

Formlerne (8.4),(8.6) og (8.7) er de relativistiske formler for transformation af hastigheder mellem to inertialsystemer. Formlerne er nødvendige for at opnå nogle resultater i den relativistiske mekanik.

9. RELATIVISTISK MEKANIK.

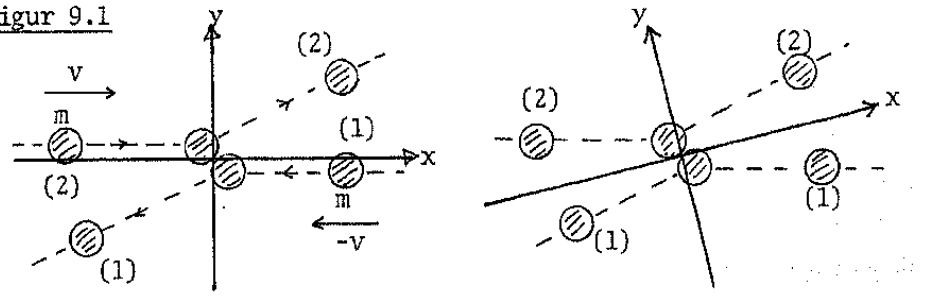
Det er klart, at den klassiske mekanik der hviler på Newtons love må revideres med indførelsen af relativitetsteorien.
Betragter vi blot en partikel i et konstant kraftfelt, vil partiklen ifølge den klassiske mekanik have en konstant acceleration, og hastigheden vil vokse proportionalt med tiden. Efter et endeligt tidsrum vil hastigheden ifølge den klassiske mekanik overstige lyshastigheden, hvilket er umuligt ifølge relativitetsteorien.
Newtons love på den nuværende form kan således ikke være gyldige, i hvert fald når hastighederne er sammenlignelige med lyshastigheden.

For at foretage den fornødne revision af Newtons love skal vi bygge på tre antagelser.

1. Lorentztransformationen og dens konsekvenser.
2. Massen af et legeme afhænger af dets hastighed. Vi vil derfor skrive m(u) eller m_u for massen af et legeme med hastigheden u.
3. Impulsbevarelsessætningen for et isoleret system antages fortsat at have uindskrænket gyldighed. Dog skal impulsen beregnes med den "relativistiske masse", således at $p = m_u u$, jævnfør 2.

Vores opgave er da at bestemme funktionen m(u). Dette vil vi gøre ved at analysere et simpelt eksempel, og på snedig måde anvende en kombination af Lorentz-transformationen og impulsbevarelsessætningen.

Figur 9.1



Vi vil betragte et elastisk sammenstød mellem to identiske masser, der bevæger sig mod hinanden med lige store, men modsat rettede hastigheder. Situationen før og efter sammenstødet er skitseret ovenfor.

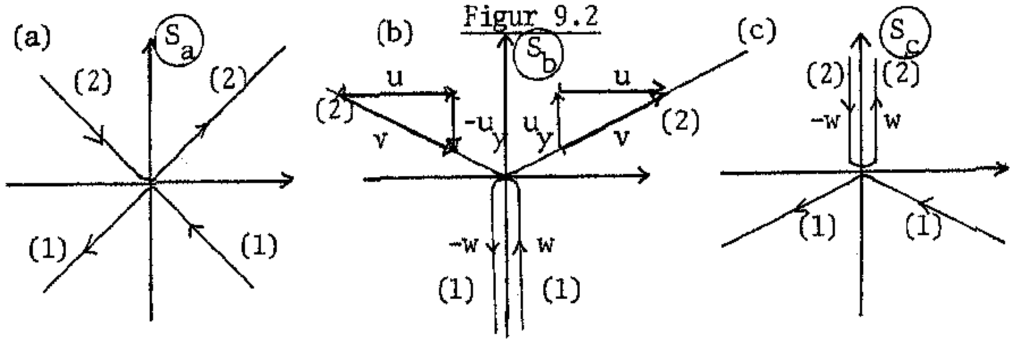
Kap X

Systemets samlede impuls er nul før sammenstødet, og ifølge antagelsen 3. må summen af de to legemers impuls også være nul efter stødet. Efter stødet har de to legemer altså lige store, men modsat rettede impulser i såvel x som y-retningen. Da de to legemer er identiske, må de også have lige store, men modsat rettede hastigheder i såvel x som y-retningen.

Vi drejer nu vores koordinatsystem, så stødet bliver symmetrisk med hensyn til akserne. Dette er vist forrige side, og nedefor er stødet skitseret endnu engang i det drejede koordinatsystem. Figur (9.2a).

På grund af symmetrien i stødet, er hver af legemernes impuls i x-retningen uforandret, mens impulsen i y-retningen skifter fortegn. Hvad der gælder for impulserne, må imidlertid også gælde for hastighederne da legemerne er identiske.

Figur 9.2



Foruden inertialsystemet S_a, vil vi betragte stødet i to andre inertialsystemer S_b og S_c.

Inertialsystemet S_b følger med partikel (1), således at denne partikel i S_b har hastigheden 0 langs x-retningen. Vist på figur (b).

Inertialsystemet S_c følger derimod med partikel (2), således at denne partikel i S_c har hastigheden 0 i x-retningen. Vist på figur (c). Det bemærkes, at på grund af symmetrien i stødet er figurene (b) og (c) identiske men spejlvendte.

Vi koncentrerer os nu om inertialsystemet S_b. Partiklernes hastigheder i dette inertialsystem er angivet på figuren. Vi udtrykker da, at der er impulsbevarelse i y-retningen. (Impulsbevarelsen må gælde i ethvert inertialsystem på grund af relativitetsprincippet). Ved stødet får partiklerne impulstilvæksterne Δp_{1y} og Δp_{2y}

$$\Delta p_{1y} = m_w(-w) - m_w w = -2m_w w$$

(9.3)

$$\Delta p_{2y} = m_v u_y - m_v(-u_y) = 2m_v u_y$$

v betegner farten af partikel (2) i S_b. Der gælder $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_y$. For at udnytte impulsbevarelsen må vi imidlertid finde en sammenhæng mellem w og u_y. Men her kan vi, (og det er trick'et), anvende inertialsystemet S_c. Da $u'_{2x} = 0$ i S_c, må dette inertialsystem bevæge sig med hastigheden u i forhold til S_b. Ifølge formlen (8.7) kan vi da beregne hastigheden u_y i S_b. Hastigheden $u'_y = w$ i S_c, og vi finder derfor:

(9.4) $$u_y = w\sqrt{1 - u^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_{2y} = 2m_v w\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Udtrykket (9.4) for Δp_{2y} benyttes nu i impulsbevarelsen:

(9.5) $$\Delta p_{1y} + \Delta p_{2y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2m_w w + 2m_v w\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0$$

(9.6) $$m_v = \frac{m_w}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

(9.6) er udledt for en vilkårlig hastighed $w \neq 0$. Relationen må derfor også holde når w går imod nul. Af relationen

$$v^2 = u^2 + u_y^2 = u^2 + w^2(1 - u^2/c^2)$$

ses, at v nærmer sig til u, når w går imod nul. Tager vi således grænseværdien af (9.6) for $w \to 0$, finder vi den ønskede relation:

(9.7) $$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

I (9.7) er bestemt den fundamentale relation, der angiver hvorledes massen af et vilkårligt legeme vokser med hastigheden. m_0 betegner massen af legemet, når det er i hvile den såkaldte hvilemasse.

Ved hjælp af formlen (9.7) kan vi foretage den bebudede revision af

Kap X

Newtons 2. lov. Først bemærker vi, at impulsen $\vec{p}$ af et legeme stadig skal udregnes som produktet af massen m_v med hastigheden $\vec{v}$.

(9.8) $$\vec{p} = m_v\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Newtons 2. lov skrives da uændret som: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_v\vec{v})}{dt}$, men med den væsentlige ændring, at impulsen $\vec{p}$ skal udregnes efter den relativistiske formel (9.8). Massen m_v afhænger af farten v, og den kan derfor ikke flyttes udenfor ved differentiationen. Benyttes udtrykket (9.8) finder man den relativistiske formulering af Newtons 2. lov:

(9.9) $$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

Accelerationen i bevægelsen er stadig defineret som differentialkvotienten af hastigheden: $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Der gælder således ikke at "kraft er lig med masse gange acceleration", som i det urelativistiske udtryk. Hvis man vil inddrage accelerationen i den relativistiske formulering af Newtons 2. lov, må man udføre differentiationen (9.9). Her må man dog huske, at $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, hvor komposanterne v_x, v_y og v_z i almindelighed er funktioner af tiden.
Ved at udføre differentiationen i (9.9) for hver af komposanterne, finder man efter en langstrakt, men ligetil sammensat differentiation:

(9.10) $$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0c^{-2}\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{v}$$

Af (9.10) fremgår det, at kraften $\vec{F}$ i almindelighed ikke er ensrettet med accelerationen $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Det andet led svarer nemlig til en komposant langs hastigheden $\vec{v}$. Kun i det tilfælde, at hastighed og acceleration er ortogonale, så at $\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ forsvinder det sidste led. Kun i tilfælde af at $\vec{a} \perp \vec{v}$ gælder ligningen: $\vec{F} = m_v\vec{a}$.

En plan bevægelse, hvor $\vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$ til alle tidspunkter er en jævn cirkelbevægelse, og for en sådan bevægelse gælder Newtons 2. lov altså uforandret, blot man erstatter hvilemassen med den relativistiske masse. Alle de formler vi har udledt for den jævne cirkelbevægelse gælder uforandret efter substitutionen $m_0 \to m_v$. Dette er en væsentlig lettelse, når man skal beregne relativistiske korrektioner.

10. RETLINET BEVÆGELSE I ET KONSTANT KRAFTFELT.

Vi kan f.eks. tænke på en partikel med hvilemasse m_0 og ladning q, der accelererer i et konstant elektrisk felt E. Også i relativitetsteorien er ladningen uafhængig af hastigheden, og partiklen vil derfor være påvirket af den konstante kraft $F = qE$.
Hvis partiklen har begyndelseshastigheden 0, vil bevægelsen blive retlinet, og Newtons 2. lov bliver ifølge (9.9):

$$(10.1) \qquad F = qE = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \iff \frac{qE}{m_0} = \frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

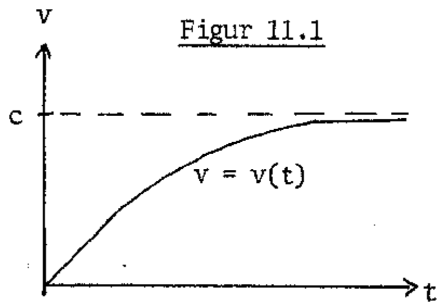
For overskuelighedens skyld sætter vi $a = \frac{qE}{m_0}$ (= accelerationen i den ikke relativistiske fremstilling). Da begyndelseshastigheden $v = 0$ for $t = 0$, kan (10.1) nemt integreres til at give

$$(10.2) \qquad \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qE}{m_0}t \iff \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = at$$

Ved at kvadrere (10.2) og løse med hensyn til v fås

$$(10.3) \qquad v = \frac{at}{\sqrt{1 + (\frac{at}{c})^2}} \iff v = \frac{at}{\sqrt{c^2 + (at)^2}}\,c$$

Figur 11.1



Formlerne (10.3) angiver, hvorledes hastigheden vil vokse med tiden i tilfælde af en konstant kraft. Grafen for funktionen er skitseret på figuren ved siden af. Man bemærker naturligvis, at <u>accelerationen ikke er konstant</u>, da v-t grafen ikke er retlinet. <u>Kurven nærmer sig asymptotisk til lyshastigheden c.</u>

Kap X

For at forstå formlen (10.3) kan vi betragte bevægelsen i to grænser:

1) $(\frac{at}{c}) \ll 1 \Leftrightarrow t \ll \frac{c}{a}$: I dette tilfælde kan man negligere $(\frac{at}{c})^2$ i forhold til 1 under kvadratrodstegnet i (10.3). Man får da simpelthen at $v = at$, som i den urelativistiske beskrivelse. Dette i overensstemmelse med, at den "gamle" mekanik giver de rigtige svar, når hastighederne er meget mindre end lyshastigheden.

2) $(\frac{at}{c}) \gg 1 \Leftrightarrow (at)^2 \gg c^2$: I dette tilfælde kan vi negligere c^2 i forhold til $(at)^2$. Gøres dette i den anden af formlerne (10.3), kan man bortforkorte (at), og man finder at $v = c$. Partiklen bevæger sig altså med konstant hastighed lig med lyshastigheden. Det bemærkes dog, at ud fra (10.3) 2. formel ses, at v aldrig kan overstige c, men at v nærmer sig asymptotisk til c, når $t \to \infty$.
At hastigheden nærmer sig asymptotisk til lyshastigheden kan man forstå, når man tænker på at partiklen i denne grænse (ifølge (9.7)) vil blive tungere og tungere, således at den ikke vil accelereres nævneværdigt af den konstante kraft.

Formlerne (10.3) kan integreres endnu engang til at angive positionen s som funktion af tiden t. Vi benytter at $v = \frac{ds}{dt}$, og antager at $s_0 = 0$.

$$s = \int_0^t \frac{c\,at\,dt}{\sqrt{c^2 + (at)^2}} = \frac{c}{a}\int_0^t \frac{d(at)^2}{2\sqrt{c^2 + (at)^2}} = \frac{c}{a}\Big[\sqrt{c^2 + (at)^2}\Big]_0^t$$

(10.5) $$s = \frac{c}{a}\sqrt{c^2 + (at)^2} - \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + (\frac{a}{c})^2 t^2} - 1\right)$$

Ligesom ved (10.3) kan vi bestemme den urelativistiske grænse af udtrykket (10.5), som indtræffer når, $(at) \ll c$. Det andet led under kvadratrodstegnet i det sidste af udtrykkene (10.5) vil da være lille i forhold til 1, og vi kan da benytte tilnærmelsen: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.
Dette giver:

(10.6) $$s \approx \frac{c^2}{a}\left(1 + \tfrac{1}{2}(\frac{a}{c})^2 t^2 - 1\right) = \tfrac{1}{2}at^2$$

I den urelativistiske grænse genfinder vi det sædvanlige udtryk for den tilbagelagte vej ved én retlinet bevægelse med konstant kraft.

10.7 Eksempel. For at undersøge under hvilke omstændigheder man kommer op på relativistiske hastigheder, skal vi betragte en elektron i et konstant elektrisk felt $E = 10^5$ V/m. (Dette kan f.eks. realiseres med en pladekapacitor, der har pladeafstanden 1 cm, og som er pålagt spændingen 1000 V).
Ud fra tilfældene (1) og (2) på side 168, ser man at den relativistiske grænse indtræffer, når $c = at$. Indsætter man $at = c$ i den sidste af formlerne (10.3) ser man nemt at $v = \frac{\sqrt{2}}{2}c \approx 0,71\,c$.
For at undersøge, hvor lang tid der går før elektronen når denne hastighed, indsætter vi $a = \frac{qE}{m_0}$ i ligningen $c = at$ og bestemmer t.

$$t = \frac{m_0 c}{qE} = \frac{9,11\,10^{-31}\,kg\;3,0\,10^{8}\,m/s}{1,6\,10^{-19}\,C\;10^{5}\,V/m} = 1,7\,10^{-8}\,s$$

Vi kan også benytte formlen (10.5) for s til at finde accelerationsvejen svarende til tidsrummet ovenfor. Indsætter man $at = c$ i (10.5), ser man at

$$s = \frac{c^2}{a}(\sqrt{2} - 1) = ct(\sqrt{2} - 1) = 3,0\,10^{8}\,1,7\,10^{-8}\,0,41\;m \doteq 2,1\,m$$

11. ÆKVIVALENSEN MELLEM MASSE OG ENERGI.

Vi skal nu se på en af de mest væsentlige konsekvenser af den specielle relativitetsteori: Ækvivalensen mellem masse og energi.
Det viser sig at være en konsekvens af teorien, at energien E af et legeme kan udtrykkes som den relativistiske masse gange kvadratet på lysets hastighed.

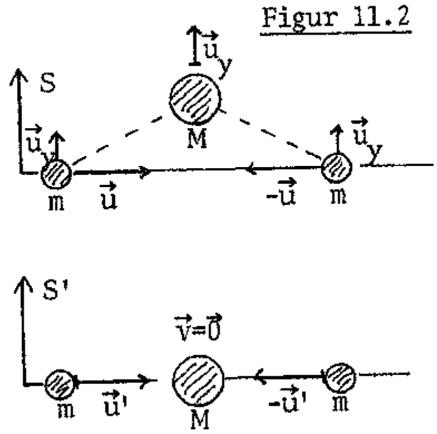
$$\boxed{(11.1)\qquad E = m_v c^2 \iff E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Vi vil nu først argumentere for rigtigheden af denne påstand.
Vi betragter derfor et sammenstød mellem to legemer med samme hvilemasse, der bevæger sig mod hinanden med lige store og modsat rettede hastigheder u og -u i x-retningen.

Kap X

For at anvende impulssætningen med fordel, skal vi også antage, at legemerne har en hastighedskomposant i y-retningen u_y, som er den samme for begge legemer. Legemernes fælles fart betegnes v.

Figur 11.2



Vi antager nu at stødet er fuldstændig uelastisk, således at de to legemer med massen m_v efter stødet danner ét legeme med massen M.

Det er klart, at M også må have hastigheden u_y i y-retningen efter stødet.

Betragtes stødet nemlig i et inertialsystem, der bevæger sig med hastigheden u_y i y-retningen i forhold til det oprindelige system, vil begge de indkommende legemer have hastigheden $u_y' = 0$ i dette system. Da de to legemer efter stødet danner legemet M, må dette legeme på grund af impulsbevarelsen i y-retningen også have hastighedskomposanten $u_y' = 0$. Følgelig må M have hastigheden u_y i det oprindelige system.

Vi anvender da impulssætningen i y-retningen. Vi husker, at vi skal anvende de relativistiske masser m_v, hvor $v^2 = u^2 + u_y^2$.

$$(11.3) \qquad m_v u_y + m_v u_y = M u_y \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Relationen (11.3) gælder for alle $u_y \neq 0$. Vi kan derfor lade u_y gå imod nul. Herved vil $v \to u$, og da M er i hvile i grænsen $u_y \to 0$, vil M nærme sig til hvilemassen M_0. Relationen (11.3) bliver da:

$$(11.4) \qquad M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Vi bemærker, at ifølge (11.4) er det sammensatte legemes masse lig med summen af de to indkommende legemers relativistiske masser.

Dette er ikke helt trivielt, da M er i hvile. Man kan nemlig heraf se, at der må være sket en forøgelse af hvilemassen for det samlede

system. Samtidig er det jo indlysende, at systemet har mistet kinetisk energi.
Hvis vi ønsker at opretholde en energibevarelsessætning, og det gør vi, er det nærliggende, at fortolke masseforøgelsen som en kompensation for tabet i kinetisk energi. Men dette må nødvendigvis føre til, at vi opfatter selve masse-begrebet som et udtryk for energi.

Vi skal nu give et mere formelt bevis for at ovennævnte opfattelse er rigtig. Vi erindrer derfor om, at vi oprindelig definerede den kinetiske energi af et legeme, som værende lig med den resulterende krafts arbejde, når legemet blev accelereret fra hvile.
Denne definition vil vi fastholde, men vil nu udregne arbejdet ved hjælp af formlerne i den relativistiske mekanik.

$$E_{kin} = \int_0^v \vec{F}_{res} \cdot d\vec{s} = \int_0^v \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) \cdot d\vec{s}$$

$$E_{kin} = \int_0^v d\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \int_0^v \vec{u} \cdot d\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right)$$

Integralet ovenfor kan integreres ved en delt integration, idet skalarproduktet kan behandles, som om det drejede sig om et almindeligt produkt af to funktioner. (Dette kan indses, hvis man skriver skalarproduktet ud i koordinater, og integrerer hvert af leddene).

(11.5) $$E_{kin} = \left[\frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right]_0^v - \int_0^v \frac{m_0 \vec{u} \cdot d\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \left[-m_0 c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}\right]_0^v$$

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - m_0 c^2$$

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

Kap X

(11.6) $$\boxed{E_{kin} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = m_vc^2 - m_0c^2}$$

Ovenstående udtryk kan opfattes som en definitionsligning for kinetisk energi i den relativistiske mekanik.

I vores indledende eksempel så vi imidlertid, at kinetisk energi tilsyneladende kan omdannes til en masseforøgelse, således at hvilemasse blot er en anden energiform.

Denne tankegang foranledigede A. Einstein til at foreslå, at den totale energi af et system altid kan udtrykkes som den samlede masse gange kvadratet på lysets hastighed. Dette er Einsteins berømte ækvivalens mellem masse og energi.

(11.7) $$E = m_vc^2 \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(For en partikel)}$$

Vi understreger det helt generelle i Einsteins ækvivalens mellem masse og energi. For et system af partikler, der er bundet sammen af kræfter, vil massen af systemet M være mindre end summen af masserne af de partikler som systemet består af. Forskellen i masse ΔM, (den såkaldte massedefekt) gange c^2 er lig med partiklernes kinetiske energi plus deres indbyrdes potentielle energi. (Bindingsenergien)

For et system af partikler med massen M_{system} gælder i alle tilfælde:

(11.8) $$E_{system} = M_{system} \cdot c^2 \quad \text{og} \quad E_{binding} = E_{kin} + E_{pot} = \Delta M \cdot c^2$$

Når farten v = 0, følger det af (11.7), at $E = m_0c^2$. Denne energi kaldes for hvileenergien. Af (11.6) ses da at den samlede energi er lig med hvileenergien plus den kinetiske energi: $E = E_{kin} + m_0c^2$.

Tilsyneladende har udtrykket (11.6) ikke megen lighed med det sædvanlige urelativistiske udtryk for den kinetiske energi: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$.

Vi vil dog vise, at (11.6) med tilnærmelse er lig med $\frac{1}{2}mv^2$ i den urelativistiske grænse, når $v \ll c$.

Af formlen: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$, når h er lille, følger at $\frac{1}{\sqrt{1+h}} \approx 1 - \frac{1}{2}h$, når formlen anvendes på funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Benytter vi denne formel med $h = -v^2/c^2$ på udtrykket for den kinetiske energi, er betingelsen $h \ll 1 \Leftrightarrow v \ll c$, og vi finder da:

$$E_{kin} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 \approx m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) - m_0c^2 \Rightarrow$$

(11.9) $$E_{kin} \approx \tfrac{1}{2}m_0v^2 \quad \text{for} \quad v \ll c$$

Som i alle andre af vore eksempler er den relativistiske mekanik identisk med den Newton´ske mekanik, når legemernes hastigheder er meget mindre end lyshastigheden. Den Newton´ske mekanik er sådan set ikke forkert, men er blot et grænsetilfælde af den relativistiske mekanik, når hastighederne er små.

Til slut vil vi nævne en vigtig formel i den relativistiske mekanik. Mellem energien E og impulsen $\vec{p}$ af en partikel (eller et system af partikler) gælder følgende sammenhæng:

(11.10) $$E^2 - \vec{p}^{\,2}c^2 = m_0^{\,2}c^4$$

Dette bevises ved at indsætte udtrykkene (11.7) for E og (9.8) for $\vec{p}$, og udregne venstre side.

(11.11) $$\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 c^2 = \frac{m_0^2\,c^4(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}$$

Ved bortforkortning ses, at man opnår højre side af (11.10).
Ved overgang fra et inertialsystem til et andet ændres både energien og impulsen af en partikel, men kombinationen (11.10) af E og $\vec{p}$ er åbenbart en invariant overfor Lorentz-transformationer.

Der findes også en kombination af koordinater og tid, der er invariant overfor Lorentz-transformationer. Ved at benytte Lorentz-transformationen (6.9) og (6.11) er det direkte at vise at størrelsen $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$, således at denne kombination af koordinaterne til en begivenhed er den samme i alle inertialsystemer.

12. RELATIVISTISK DOPPLER-EFFEKT.

Vi har omtalt doppler-effekten for lydbølger i kap V §16. Vi vil her udlede et relativistisk korrekt udtryk for dopplereffekten.
Det relativistiske udtryk for lysets doppler-effekt, har haft overordentlig stor betydning i astrofysikken ved bestemmelsen af fjerne himmellegemers hastighed i forhold til vores solsystem. (I denne forbindelse omtales doppler-effekten normalt som rødforskydningen, idet man oftest observerer doppler-effekten for den røde linie i brintatomets Balmer-serie).

Lad os antage, at vi i inertialsystemet S observerer en plan harmonisk bølge, der udbreder sig langs x-aksen.

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \tag{12.1}$$

I inertialsystemet S', der bevæger sig med hastigheden v i forhold til S, vil man også observere en plan harmonisk bølge, men med en anden frekvens ω' og et andet bølgetal k'.
Vi betragter nu fasen $\omega t - kx$ svarende til begivenheden (x,t) i S. Den tilsvarende begivenhed i S' (samme fase) var (x',t') og fasen for denne begivenhed kan udtrykkes i S' ved hjælp af Lorentz-transformationen (6.9) og (6.11).

$$\omega t - kx = \omega\left(\frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) - k\left(\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \tag{12.2}$$

Dette udtryk vil vi nu søge at skrive på formen $\omega' t' - k'x'$, som er fasen i S'. Ved at omordne på leddene i (12.2) således at man samler koefficienterne til t' og x' finder man:

$$\omega t - kx = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, t' - \frac{k - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, x' = \omega' t' - k' x' \tag{12.3}$$

Skal (12.3) være opfyldt for alle x' og t', må der åbenbart gælde:

$$\omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{og} \quad k' = \frac{k - \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12.4}$$

Man bemærker sig, at transformationsformlerne for k og ω , på nær et c^2 er identiske med Lorentz-formationen for x og t.
(12.4) er det relativistisk korrekte udtryk for doppler-effekten.

Udtrykket kan specielt anvendes, hvis det drejer sig om en elektromagnetisk bølge (lys), som har udbredelseshastigheden c. Indsætter man at $k = \frac{\omega}{c}$ i det første af udtrykkene (12.4) fås:

$$(12.5) \qquad \omega' = \frac{\omega - \omega\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}}$$

Man ser at udtrykket (12.5) afhænger af fortegnet for v, således at man ved at måle frekvensændringen kan afgøre om lysgiverobjektet bevæger sig bort fra iagttageren eller imod iagtageren.

13. VIDNESBYRD OM RELATIVITETSTEORIENS GYLDIGHED.

Relativitetsteorien fremstilles ofte som en meget teoretisk sag, der vanskelig lader sig eksperimentelt efterprøve, fordi afvigelsen fra den Newton´ske mekanik først indtræder ved urealistisk store hastigheder. Således var situationen vel også ved teoriens fremkomst i 1905.
Man kan stadig møde "ikke fysikere", der mener at relativitetsteorien er en "trossag" på grund af dens analyser af begreberne "rum og tid", et indhold der tangerer filosofiske dicipliner.
Som altid i fysikken afgøres en teori ikke af antallet af troende, men om teorien er i overensstemmelse med erfaringen, dvs. om teoriens forudsigelser om resultater af forsøg holder stik.
Relativitetsteorien må i dag anses for en af de eksperimentelt bedst underbyggede teorien i fysikken.
Vi nævner i flæng nogle eksempler.
1. Ved sammenstød mellem atomare partikler med stor kinetisk energi, dannes der nye partikler. Massen af de dannede partikler (gange c^2) modsvares nøjagtig af tabet i kinetisk energi.
Ligeledes har man allerede tidligt (1934) ved spaltning af atomkerner kunnet konstatere, at dette var i overensstemmelse med Einsteins ækvivalens mellem masse og energi.

Kap X

2. En myon er en slags tung elektron, der, når den produceres i hvile har en levetid på $2{,}2\,10^{-6}\,s = \tau$. Ud fra en klassisk opfattelse kan en myon derfor højst bevæge sig et stykke $L = c\tau = 660\,m$.
På trods af dette modtager man på jorden myoner fra den kosmiske stråling, der må have bevæget sig meget længere.
Forklaringen på dette er indeholdt i tidsforlængelsen, der er givet ved formlen (7.4). Levetiden for partiklen er i et inertialsystem S', der følger med partiklen $\tau = 2{,}2\,10^{-6}s$, mens levetiden i "laboratoriet" på grund af (7.4) er forlænget med en faktor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. I partikelacceleratorerne producerer man flere partikler med en levetid af størrelsesordenen $10^{-10}s$. Ved at udmåle sporene af disse partikler kan man få et direkte eksperimentelt vidnesbyrd om sammenhængen mellem deres "levetid i laboratoriet" og deres hastighed. Denne sammenhæng er i overensstemmelse med Lorentz-transformationen. Det er værd at understrege endnu en gang, at tidsforlængelsen ikke er et "bedrag" knyttet til en iagttager, men et fuldstændig reelt fysisk fænomen.

4. Efter 1960 har man bygget acceleratorer, der er i stand til at accelerere protoner og elektroner op til hastigheder, der nærmer sig lysets. Ved 28 GeV proton-syncrotronen i CERN (Svejts) accelereres protoner op, således at deres masse er ca. 28 gange så stor som deres hvilemasse. For at dirigerer sådanne protoner i elektriske og magnetiske felter, er det naturligvis nødvendigt at dimensionere disse felter, svarende til en masse, der er 28 gange hvilemassen af protonerne.
På denne måde har man fået verificeret formlen: $m = m_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ med mere end 0,1% nøjagtighed.

5. I kernekraftværkerne omdannes masse til energi efter Einsteins formel. Hvorfor det ikke er muligt i ubegrænset målestok at omdanne masse til kinetisk energi (varme), vil vi diskutere i kernefysikken.