



中国科学院力学研究所

INSTITUTE OF MECHANICS CHINESE ACADEMY OF SCIENCES



计算流体力学讲义2011

第三讲 有限差分法 (1)

李新亮

lixl@imech.ac.cn ; 力学所主楼219; 82543801

知识点:

差分方法的理论基础 (相容、收敛、稳定性; Lax等价定理; 精度、修正方程; 守恒性)
差分格式的构造
差分格式的Fourier分析

讲义、课件上传至 www.cfluid.com (流体中文网) -> “流体论坛” -> “CFD基础理论”

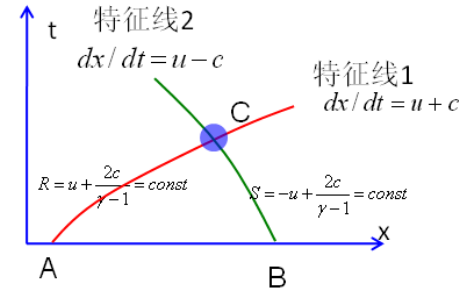
下载地址2: <http://cid-1cc0dcbff560c149.office.live.com/browse.aspx/.Public>

知识回顾

1. 双曲型方程组及其特征方程

特例：一维等熵流动

沿特征线Riemann不变量保持常数



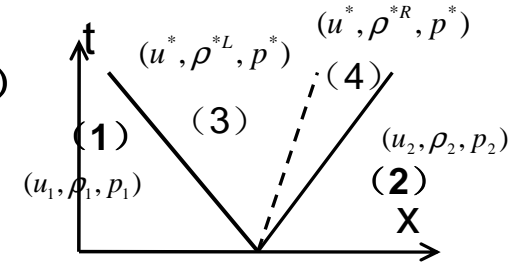
$$\text{特征线1: } dx/dt = u + c \longrightarrow R = u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const}$$

$$\text{特征线2: } dx/dt = u - c \longrightarrow S = -u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \text{const}$$

2. 双曲型方程的间断解

弱解：间断线上满足积分关系式 (R-H关系)

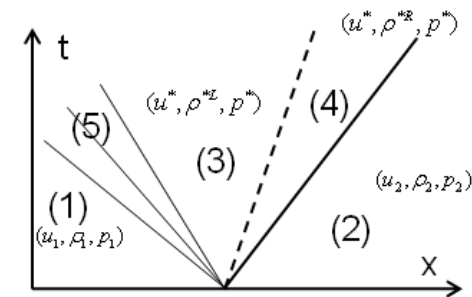
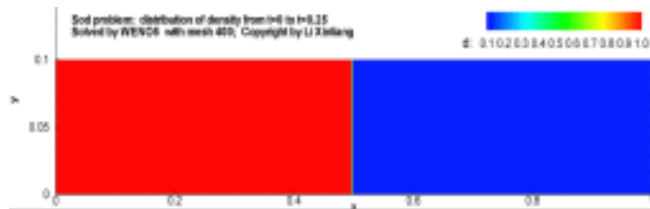
熵条件：特征线汇集于间断线



3. Riemann间断解

精确解：Godnov

近似解：HLL, HLLC, Roe



第三讲 有限差分法 (1)

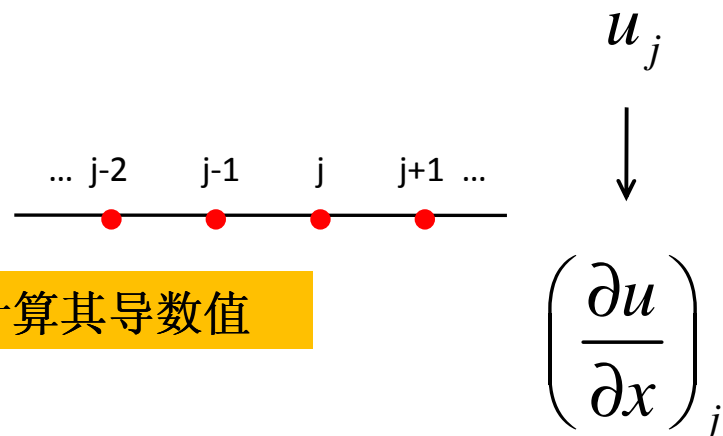
传统计算方法：有限差分法，有限体积法，有限元法，谱方法（谱元法）等；
最近发展的方法：基于粒子的算法（格子-Boltzmann, BGK），无网格

	优点	缺点	适用范围
有限差分法	简单成熟，可构造 高精度 格式	处理复杂网格不够灵活	相对简单外形的高精度计算
有限体积法	守恒性好 ，可处理 复杂网格	不易提高精度（二阶以上方法复杂）	复杂外形的工程计算
有限元法	基于变分原理， 守恒性好	对于复杂方程处理困难	多用于固体力学等
谱方法	精度高	外形、边界条件简单	简单外形的高精度计算
粒子类方法	算法简单，可处理 复杂外形	精度不易提高	复杂外形的工程计算

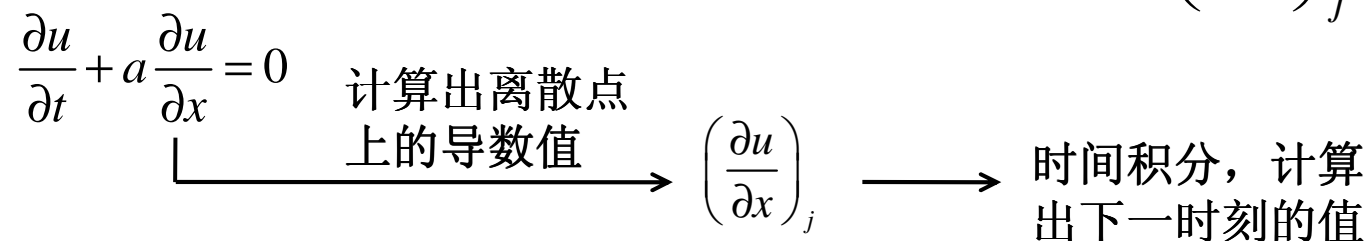
3.1 一维均匀网格上的差分格式

1. 差分法基本原理

基本功能： 计算导数



已知（一维均匀网格上的）函数分布，计算其导数值

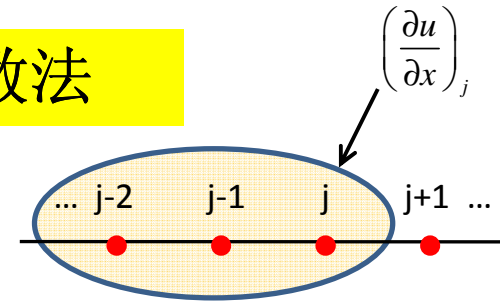


最简单的差分格式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$$

2. 构建差分格式的基本方法：待定系数法

已知均匀网格点上物理量的分布为 $\{u_j\}$ ，
试给出导数在j点值 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$ 的表达式。



Step 1: 确定基架点 (Stencil)

差分基架点：计算j点导数需要使用的点
根据计算量、精度需求等要求而定

例：使用

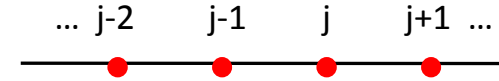
j-2, j-1, j

3个点上信息计算 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$

Step2: 写成待定系数形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j + O(\Delta x^n)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j + O(\Delta x^n)$$



Step3: 利用Taylor展开, 确定系数

$$u_{j-2} = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j (-2\Delta x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (-2\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (-2\Delta x)^3 + O(\Delta x^4)$$

$$u_{j-1} = u_j + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j (-\Delta x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j (-\Delta x)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j (-\Delta x)^3 + O(\Delta x^4)$$

计算差分格式系数的小程序, 流体中文网下载

$$a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) u_j$$

$$+ ((-2)a_1 + (-1)a_2) \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j$$

$$+ \frac{1}{2!} ((-2)^2 a_1 + (-1)^2 a_2) \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j$$

$$+ \frac{1}{3!} ((-2)^3 a_1 + (-1)^3 a_2) \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j$$

$$+ O(\Delta x^4)$$



$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$-2a_1 + (-1)a_2 = \frac{1}{\Delta x}$$

$$(-2)^2 a_1 + (-1)^2 a_2 = 0$$



$$a_1 = \frac{1}{2\Delta x}, a_2 = -\frac{4}{2\Delta x}, a_3 = \frac{3}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{2\Delta x} (u_{j-2} - 4u_{j-1} + 3u_j) + \frac{7}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

差分格式

截断误差

3. 差分格式基本概念:

a. 差分表达式 (差分格式)、截断误差、精度

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{2\Delta x}(u_{j-2} - 4u_{j-1} + 3u_j) + \frac{7}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$

n阶精度

导数 = 差分 + 截断误差

截断误差 = $O(\Delta x^n)$

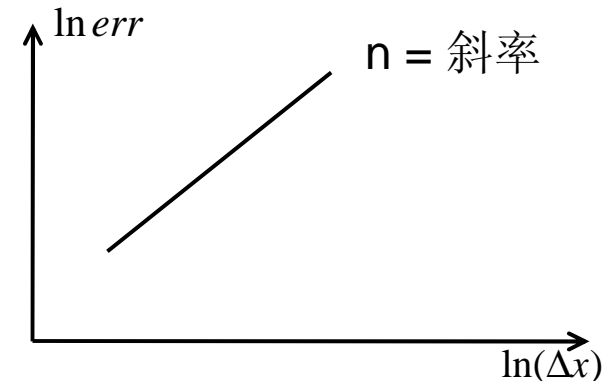
给定一个差分格式，如何判断精度？

方法1: 理论推导: **Taylor**展开，计算截断误差项 (非线性格式推导困难)

方法2: 数值实验

给定一测试函数 (可精确求导)，计算误差对网格尺度的依赖关系

$$err = A\Delta x^n \longrightarrow \ln err = \ln A + n \ln \Delta x$$

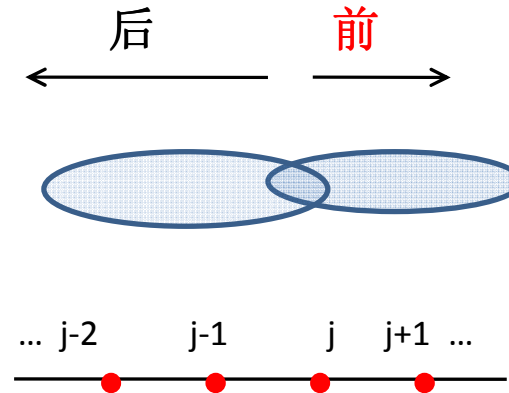


b. 前差、后差、中心差

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{前差}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \text{后差}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad \text{中心差}$$



其他：向前（后）偏心差分；

c. 差分方程

经差分离散后的方程，称为差分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

微分方程 = 差分方程 + 截断误差

半离散（只离散空间导数）

全离散

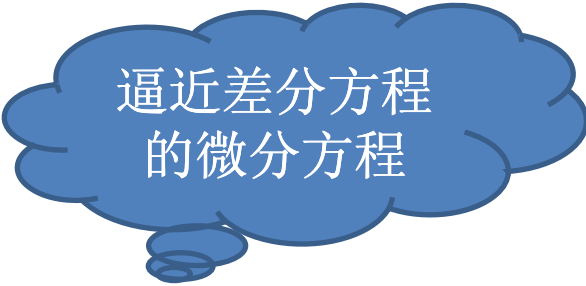
$$TE = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j \Delta t + \frac{a}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \Delta x + \dots$$

d. 差分方程的修正方程

修正方程——差分方程准确逼近（无误差逼近）的方程

微分方程=差分方程+截断误差

差分方程=微分方程-截断误差 = 修正方程



逼近差分方程
的微分方程

例：微分方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

的差分方程为： $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$ 试计算其修正方程。

思路：先计算单个差分格式的截断误差，再计算差分方程的误差

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} \dots$$

差分方程
微分方程
截断误差

↓
↓
↓

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = u_t + au_x + \frac{\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} + \dots$$

修正方程

等价于

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \longrightarrow \quad u_t + au_x + \frac{\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{\Delta x^2}{6} u_{xxx} - \frac{\Delta t}{2} u_{tt} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} + \dots = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u_t = -au_x \rightarrow u_{tt} = a^2 u_{xx} \rightarrow u_{ttt} = -a^3 u_{xxx}$$

$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$u_t + au_x = -\frac{a\Delta x}{2} (1 - \sigma) u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{6} (2\sigma^2 - 3\sigma + 1) u_{xxx} + O(\Delta^3)$$

✓通常，修正方程不出现时间高阶导数项
 （便于进行空间分析）

修正方程的主项

→ 一阶精度；
 耗散型；

d. 显格式及隐格式

显格式：无需解方程组就可直接计算n+1层的值；

隐格式：必须求解方程组才能计算n+1层的值

$$\rightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

常用的显格式：
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \delta_x f(u^n) = 0$$

1阶Euler

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(U)$$

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

$$U^{(2)} = 3/4 U^n + 1/4 [U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})]$$

$$U^{n+1} = 1/3 U^n + 2/3 [U^{(2)} + \Delta t L(U^{(2)})]$$

3阶R-K方法

e. 守恒型差分格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

定义：对于上述守恒型方程，差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad \text{其中：} \quad g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j-l+1}^n, u_{j-l+2}^n, \dots, u_{j+l}^n)$$

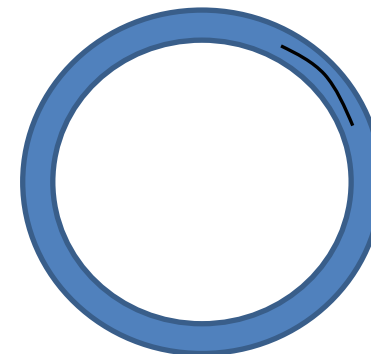
称为守恒型差分格式。

基本思想：保证（整个区域）积分守恒律严格满足

$$\sum_{j=1}^N \left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n \right) = g_{N+\frac{1}{2}}^n - g_{-\frac{1}{2}}^n$$

↓

✓ 如果 $\sum_j u_j^n$ 是准确的，则 $\sum_j u_j^{n+1}$ 也是准确的（假设边界条件没有误差）



守恒性的例子：
环形管道里的流动
—— 总质量保持不变

特点：消去了中间点上的值，只保留两端
物理含义：只要边界上没有误差，**总体积分方程**不会有任何误差。

✓关于守恒性格式的一些注解

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{\Delta x}$ 中的符号 $f_{j+1/2}$ 与函数 f 在 $j+1/2$ 点的值无关!

$f_{j+1/2} = f(u_{j-l}, u_{j-l+1}, \dots, u_{j+l})$ 是 j 点周围几个点上 f (或者 u) 值的函数, 为一记号, 请勿理解为 $j+1/2$ 点的值!

2) 常系数线性格式都是守恒的

例如, 差分格式: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x}(a_1 f_{j-3} + a_2 f_{j-2} + a_3 f_{j-1} + a_4 f_j + a_5 f_{j+1} + a_6 f_{j+2})$

等价于 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j = \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{\Delta x}$ $f_{j+1/2} = b_1 f_{j-2} + b_2 f_{j-1} + b_3 f_j + b_4 f_{j+1} + b_5 f_{j+2}$

其中 $b_1 = -a_1; b_k = b_{k-1} - a_k$ ($k = 2, 3, \dots$)

3) 关于 $f_{j-1/2}$ 守恒方程+ 守恒格式= 守恒解

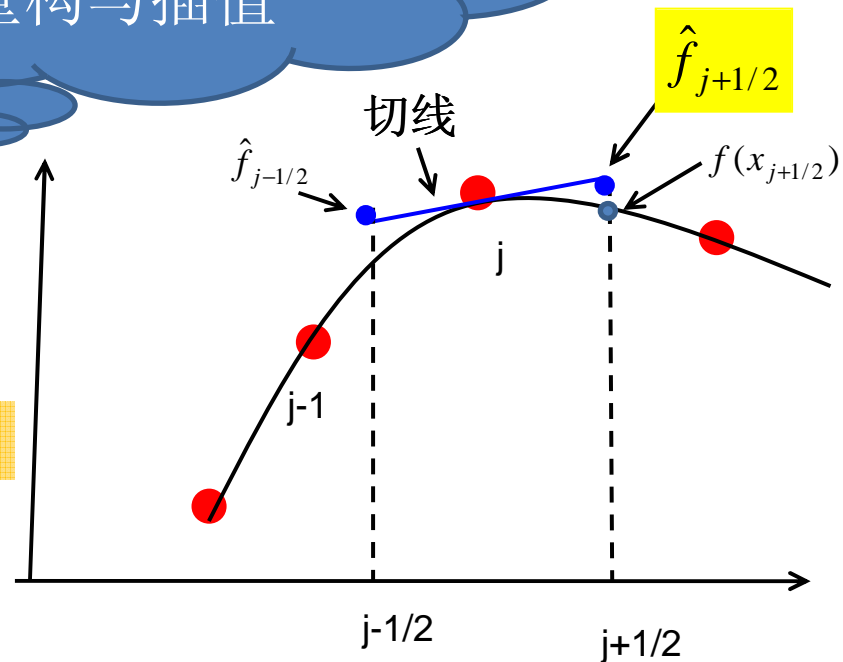
得到 $f_{j+1/2}$ 后, 将 j 替换成 $j-1$ 即可得到 $f_{j-1/2}$

无需单独计算 $f_{j-1/2}$! (白白增加计算量)

重要概念澄清：
重构与插值

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_j = \frac{\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}}{\Delta x}$$

注意： $\hat{f}_{j+1/2}$ 与 f 在 $x_{j+1/2}$ 点的值含义不同！



$\hat{f}_{j+1/2}$ (称为数值流通量) 的含义

用周围几个点的值 $\{f_j\}$ 计算 $\hat{f}_{j+1/2}$ 的过程称为“**重构**”，不能理解为用 f 来 **插值** $f(x_{j+1/2})$

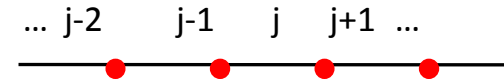
否则，最高只能达到**2阶精度**了！

记号 $f_{j+1/2}$ 确实容易混淆，让人容易联想起 $f(x_{j+1/2})$ 。记为 $\hat{f}_{j+1/2}$ 更好些

f. 传统型（非紧致）差分格式及紧致型差分格式

传统型：运用多个点函数值的组合逼近**一点的导数**

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_j = a_1 f_{j-k} + a_2 f_{j-k+1} + a_3 f_{j-k+2} + \dots + a_m f_{j-k+m-1}$$



例： $f'_j = (f_j - f_{j-1}) / \Delta x$

$$f'_j = (-2f_{j-3} + 15f_{j-2} - 60f_{j-1} + 20f_j + 30f_{j+1} - 3f_{j+2}) / 60\Delta x$$

紧致型：多个点函数值的组合逼近**多个点导数值的组合**

$$\alpha F_{j-1} + F_j + \beta F_{j+1} = a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j + a_4 u_{j+1} + a_5 u_{j+2} \quad F_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_j$$

$$a_j F_{j-1} + b_j F_j + c_j F_{j+1} = d_j$$

$$\downarrow$$

$$F_j = A_j F_{j-1} + B_j$$

例： $1/4 F_{j-1} + F_j + 1/4 F_{j+1} = 3(f_{j+1} - f_{j-1}) / 2\Delta x$

$$1/3 F_{j-1} + F_j + 1/3 F_{j+1} = (28(f_{j+1} - f_{j-1}) + (f_{j+2} - f_{j-2})) / 36\Delta x$$

$$2/5 F_{j-1} + 3/5 F_j = (-3f_{j-1} - 44f_{j+1} + 36f_j + 12f_{j+1} - f_{j+2}) / 120\Delta x$$

$$A_j = -\frac{a_j}{b_j + c_j A_{j+1}}; B_j = -\frac{d_j - c_j B_{j-1}}{b_j + c_j A_{j+1}}$$

联立求解 F_j ，多对角方程 \rightarrow 追赶法求解（LU分解法）

✓ 紧致格式：同样的基架点，可构造更高阶格式（因为自由参数更多）

✓ （最高）精度=自由参数个数-1

一些记号

约定: $\delta_x f_j = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_j$ 为一阶偏导数的差分算子

$\delta_{xx} f_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_j$ 为二阶偏导数的差分算子

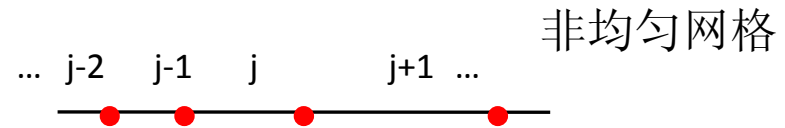
(本讲义中, 上面两个算子表示的差分格式形式可以任意, 包括线性/非线性、低阶/高阶、普通/紧致.....)

$\delta_x^+ f_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x}$ $\delta_x^- f_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{\Delta x}$ 分别为**一阶精度**前、后差的差分算子

$\delta_x^0 f_j = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{(\delta^+ + \delta^-)}{2} f_j$ 为二阶中心差分算子

上面三个算子有固定含义。

3. 复杂网格的处理方法



1) 一维情况：非均匀网格

方法1（常用）：网格（**Jacobian**）变换 $x = x(\xi)$ [0,1]的均匀网格
 $\xi_i = (i-1)/(N-1)$

$$x = x(\xi) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} \quad \frac{d\xi}{dx} \text{ 为已知函数}$$

$$x_i = x(\xi_i)$$

物理坐标 \longleftrightarrow 计算坐标

- ✓ 将方程由物理空间变到计算空间
(以 x 为自变量变为以 ξ 为自变量)

常用的一维坐标变换函数：

指数函数

双曲正切函数

$$x_j = \tanh(b_g \xi_j) / \tanh(b_g)$$

要求：坐标变换必须足够光滑，否则会降低精度

网格间距变化要缓慢，否则会带来较大误差

方法2) 在非等距网格上直接构造差分格式

原理: 直接进行Taylor展开, 构造格式
格式系数是坐标 (或网格间距) 的函数



$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j + a_4 u_{j+1} + O(\Delta^3)$$

$$u_{j-2} = u_j + u'_j(x_{j-2} - x_j) + \frac{1}{2!} u''_j(x_{j-2} - x_j)^2 + \frac{1}{3!} u^{(3)}_j(x_{j-2} - x_j)^3 + O(x_{j-2} - x_j)^4$$

$$u_{j-1} = u_j + u'_j(x_{j-1} - x_j) + \frac{1}{2!} u''_j(x_{j-1} - x_j)^2 + \frac{1}{3!} u^{(3)}_j(x_{j-1} - x_j)^3 + O(x_{j-1} - x_j)^4$$

$$u_{j+1} = u_j + u'_j(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2!} u''_j(x_{j+1} - x_j)^2 + \frac{1}{3!} u^{(3)}_j(x_{j+1} - x_j)^3 + O(x_{j+1} - x_j)^4$$



$$(x_{j-2} - x_j)^0 a_1 + (x_{j-1} - x_j)^0 a_2 + a_3 + (x_{j+1} - x_j)^0 a_4 = 0$$

$$(x_{j-2} - x_j)^1 a_1 + (x_{j-1} - x_j)^1 a_2 + 0^1 a_3 + (x_{j+1} - x_j)^1 a_4 = \frac{1}{\Delta}$$

$$(x_{j-2} - x_j)^2 a_1 + (x_{j-1} - x_j)^2 a_2 + 0^2 a_3 + (x_{j+1} - x_j)^2 a_4 = 0$$

$$(x_{j-2} - x_j)^3 a_1 + (x_{j-1} - x_j)^3 a_2 + 0^3 a_3 + (x_{j+1} - x_j)^3 a_4 = 0$$



解出系数

$$a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}$$

注: 系数随网格点(j)变化!

网格非光滑、间距剧烈变化不会降低精度;
随机网格都可保证精度

2) 二维/三维情况

坐标变换 → 均匀的直角网格

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 = \frac{\partial}{\partial x} V_1 + \frac{\partial}{\partial y} V_2$$

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T \quad f_1 = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p)]^T$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \eta_x \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \eta_y$$

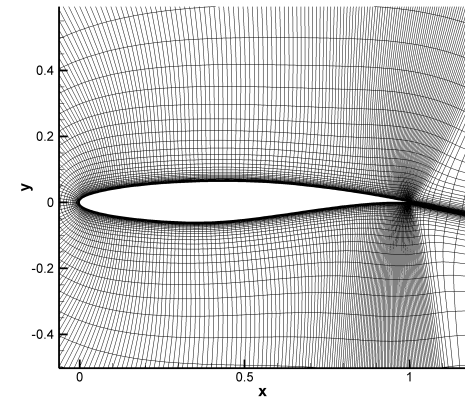
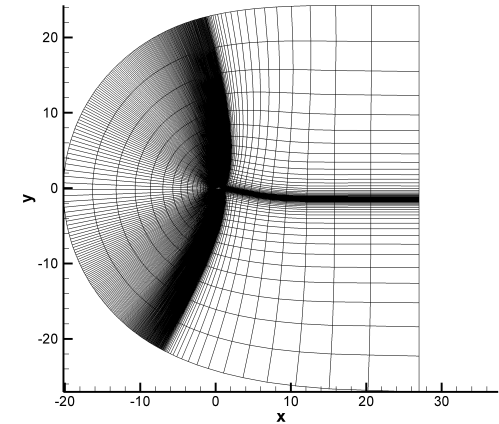
利用Jacobian 变换的性质简化



$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \eta}$$

$$\hat{U} = J^{-1}U \quad J^{-1} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad \hat{f}_1 = J^{-1}(\xi_x f_1 + \xi_y f_2)$$

$$\hat{f}_2 = J^{-1}(\eta_x f_1 + \eta_y f_2)$$



RAE2822翼型周围的网格

$$\frac{\partial(J^{-1}\xi_x)}{\partial \xi} + \frac{\partial(J^{-1}\eta_x)}{\partial \eta} = 0$$

.....

2) 二维/三维情况

坐标变换 → 均匀的直角网格

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 = \frac{\partial}{\partial x} V_1 + \frac{\partial}{\partial y} V_2 + \frac{\partial}{\partial z} V_3$$

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E]^T$$

$$f_1 = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, u(E + p)]^T \quad \dots\dots$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \zeta_x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \eta_y + \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \zeta_y$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial f_3}{\partial \eta} \eta_z + \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \zeta_z$$

对流项可组合，求**3**次导数即可

$$\hat{U} = J^{-1}U \quad J^{-1} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}$$

三个方向共需计算**9**次导数，
计算量大

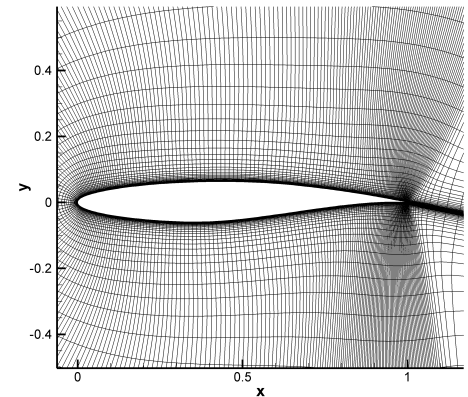
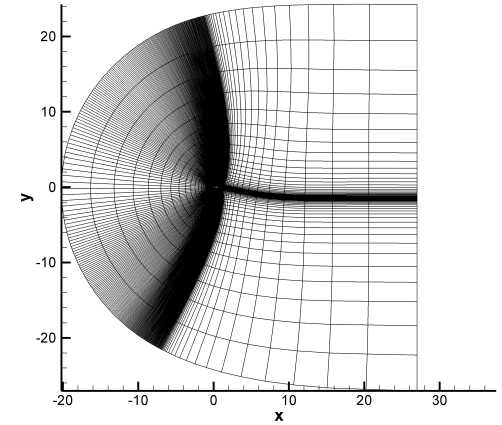
$$\frac{\partial(J^{-1}\xi_x)}{\partial \xi} + \frac{\partial(J^{-1}\eta_x)}{\partial \eta} + \frac{\partial(J^{-1}\zeta_x)}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{f}_3}{\partial \zeta} = \frac{\partial \hat{V}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{V}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{V}_3}{\partial \zeta}$$

$$\hat{f}_1 = J^{-1}(\xi_x f_1 + \xi_y f_2 + \xi_z f_3)$$

$$\hat{f}_2 = J^{-1}(\eta_x f_1 + \eta_y f_2 + \eta_z f_3)$$

$$\hat{f}_3 = J^{-1}(\zeta_x f_1 + \zeta_y f_2 + \zeta_z f_3)$$



RAE2822翼型周围的网格

4. 时间项的离散

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

1) 独立离散法——时间、空间导数独立离散

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \delta_x f(u^n) = 0$$

1阶Euler显格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \delta_x f(u^{n+1}) = 0$$

1阶Euler隐格式

(常用) Runge-Kutta 法

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(U)$$

目前经常使用的：**3步3阶TVD型R-K**

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n)$$

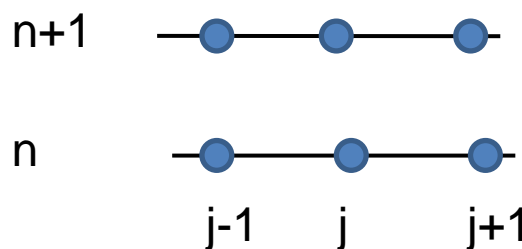
$$U^{(2)} = 3/4 U^n + 1/4 [U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)})]$$

$$U^{n+1} = 1/3 U^n + 2/3 [U^{(2)} + \Delta t L(U^{(2)})]$$

推荐!

2) 时-空耦合离散

$u(x,t)$ 在某一点进行
Taylor展开, 构造格式



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

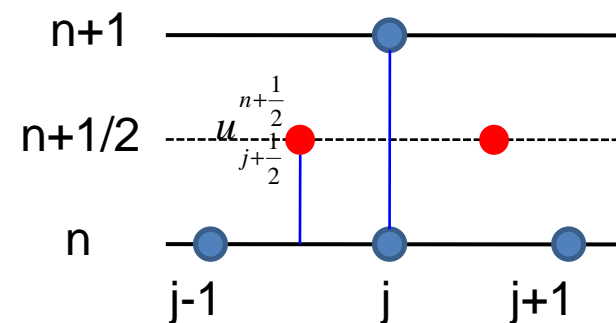
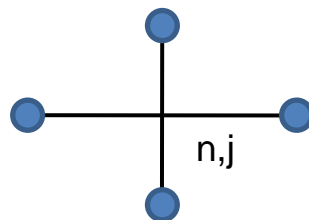
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

2阶Crank-Nicolson格式

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\delta_x f(u^n) + \delta_x f(u^{n+1})) = 0$$

蛙跳格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



Lax-Wandrof格式

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 a (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) \longrightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

半隐错点格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} \left[\frac{(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2} + \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{2} \right] = 0$$

MacCormack格式

$$u_j^{\bar{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_j^n + u_j^{\bar{n+1}}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_j^{\bar{n+1}} - f_{j-1}^{\bar{n+1}})$$

Lax-Wendroff 格式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_j^n = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2}$$

Taylor展开,
写出修正方程

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n)$$

人工粘性

$$u_t + \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t + \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^2 + a(u_x + \frac{1}{6} u_{xxx} \Delta x^2) = a^2 \Delta t (\frac{1}{2} u_{xx} + \frac{1}{24} u_{xxxx} \Delta x^2) + O(\Delta t^3, \Delta x^3)$$

$$u_t = -a u_x \Rightarrow u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u_t + a u_x = \frac{a^2 \Delta t}{24} u_{xxxx} \Delta x^2 - \frac{1}{6} u_{ttt} \Delta t^2 - \frac{a}{6} u_{xxx} \Delta x^2 + O(\Delta t^3, \Delta x^3)$$

特点：全离散、时刻耦合

时-空二阶精度

巧妙添加人工粘性，不但克服了不稳定性，而且抵消了时间误差，提高了时间精度

类似方法：Beam-Warming 格式

二阶精度迎风差分

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_{j-2}^n - 4u_{j-1}^n + 3u_j^n}{2\Delta x} = \frac{a^2 \Delta t}{2\Delta x^2} (u_{j-2}^n - 2u_{j-1}^n + u_j^n)$$

人工粘性，且提高时间精度

§ 3.2 差分方法理论基础

1. 相容、收敛、稳定性与Lax等价定理

1) 相容性: **含义: 方程趋近**

当差分方程中, 时间与空间步长均趋近于**0**时, 差分方程的**截断误差**也趋近于**0**, 则称差分方程与原微分方程是**相容**的。

2) 收敛性: **含义: 解趋近 (更强)**

当时间与空间步长均趋近于**0**时, 差分方程的**解**趋近于微分方程的解, 则称差分方程的解**收敛**于原微分方程的解。

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0 \quad u_h(x), u(x) \text{ 分别为差分方程和微分方程的解}$$

注意! 方程互相趋近 ~~≠~~ 解互相趋近 (多值性、奇异性

(根据Lax等价定理, 只有稳定性条件满足的情况下, 方程趋近才能保证解趋近)

L2 模: $\|u(x)\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$

$$\|u_h(x)\| = \sqrt{\sum_j u_j^2 \Delta x}$$

L_∞ 模: $\|u(x)\| = \max_x |u(x)|$

$$\|u_h(x)\| = \max_j |u_j|$$

相似的例子:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 不一定等于 } f(x_0)$$

只有连续函数才满足

3) 稳定性:

定义: 称差分方程的初值问题是稳定的, 如果当 Δt 和 Δx 做够小时, 存在于 Δt 和 Δx 无关的常数 C_1 和 C_2 使得:

$$\|u_h(x, t_n)\| \leq c_1 \exp[c_2(t_n - t_0)] \|u_h(x, t_0)\|$$

含义: 在差分方程的求解过程中, 如果引入的误差随时间的增长有界, 则称差分方程是稳定的。

4) Lax 等价定理

如果微分方程的初边问题是适定的, 差分方程是相容的, 则差分方程解的收敛性与稳定性是等价的。

含义: 如果微分方程不出问题 (适定), 差分方程性质好 (稳定), 则方程逼近就可保证解逼近。

如果方程逼近就可以导致解逼近, 则差分方程的性质肯定好 (稳定)

2. 差分格式稳定性分析方法

Fourier分析法:

基本思想: 初始时刻引入单波扰动, 考虑其随时间的变化

原理: 任何扰动都可认为是单波扰动的叠加; 线性情况下不同波之间独立发展。

引入单波扰动, 带入差分方程, 如果其振幅放大, 则不稳定; 否则稳定

例1: 考察右式给出差分格式的稳定性

引入单波扰动: $\varepsilon_j^n = G^n e^{ikx_j}$ 带入差分方程

$$\frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} e^{ikx_j} = -c G^n \frac{e^{ikx_j} (1 - e^{-ik\Delta x})}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad c > 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) = -c \frac{1}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

解出放大因子:

$$G = G^{n+1} / G^n = 1 - \sigma + \sigma e^{-i\alpha}$$

$$|G|^2 = 1 - 4\sigma(1 - \sigma) \sin^2(\alpha/2)$$

稳定性条件: 对所有 α $|G| \leq 1$



稳定条件: $0 \leq \sigma \leq 1$ $\sigma \equiv c\Delta t / \Delta x$ 称为库朗数

$$PPW = 2\pi / \alpha$$

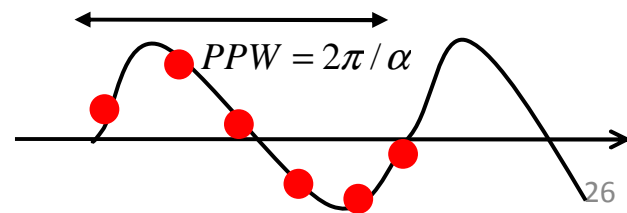
一个波里面的网格点数

Points Per Wavelength

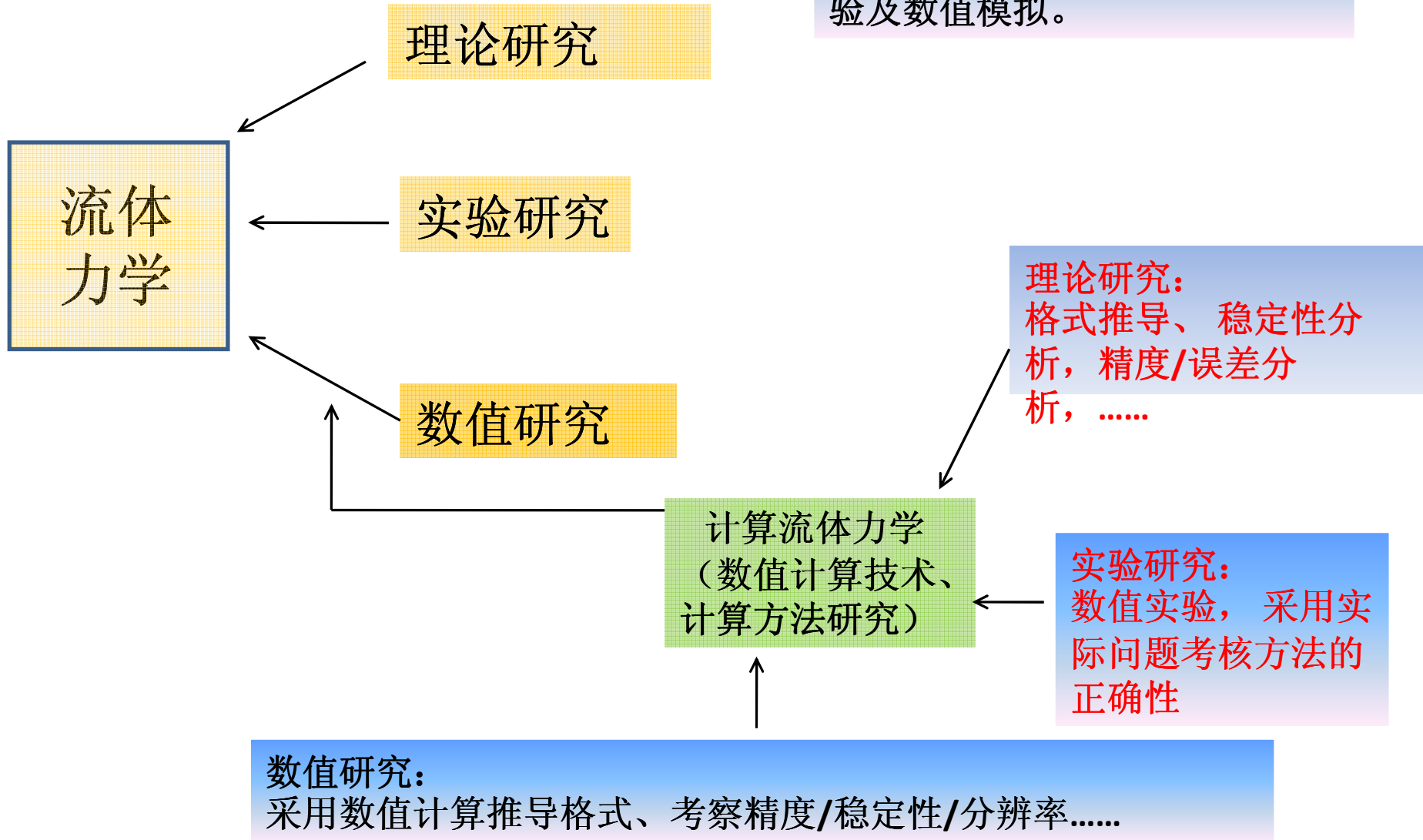
一些注解:

G, G^n, G^{n+1} 通常为复数; 可反映振幅及相位;

$\alpha \equiv k\Delta x$ 有效波数



“计算流体力学”作为一个学科，其研究手段依然包括理论、实验及数值模拟。



举例说明:

研究“计算流体力学”学科的理论手段、实验手段及计算手段

研究CFD的理论手段

例: Fourier分析



线性系统:
线性方程+ 线性格式

初始值



差分系统
(解差分
方程)



数值解 (特
定时刻离散
的函数值)

记为: $v_j = \Phi u_j$

Φ 是差分算子, 把离散函数
(有限点列) $\{u_j\}$ 映射为另
一个离散函数 $\{v_j\}$

任意函数都可分解为三角函数的叠加

$$u_j = \sum_k \hat{u}_k e^{ikx_j} \quad v_j = \sum_k \hat{v}_k e^{ikx_j}$$

$\{v_j\}$ 与 $\{u_j\}$ 的依赖关系



$\{\hat{v}_k\}$ 与 $\{\hat{u}_k\}$ 的依赖关系

线性系统, 可大为简化



波数空间单一的依赖关系: $\hat{v}_k = f(\hat{u}_k)$ ($\hat{v}_1 = f(\hat{u}_1), \hat{v}_2 = f(\hat{u}_2), \dots$)

线性差分系统: 针对一个单波, 研究经过差分系统后的变化就可以了解该系统。

原理:

线性系统, 输入一个波, 只能输出一个波 (且波数不变)。
非线性系统会产生多个谐波

Fourier误差分析; Fourier稳定性分析

✓理论分析的局限性: 对于复杂系统 (非线性方程、非线性格式) 非常困难

研究CFD的实验手段

思想：通过具体算例来研究（考核，分析...）差分方法

例：精度分析

$$\frac{du}{dx} \xrightarrow{\text{差分离散}} F_j = \delta_x u_j$$

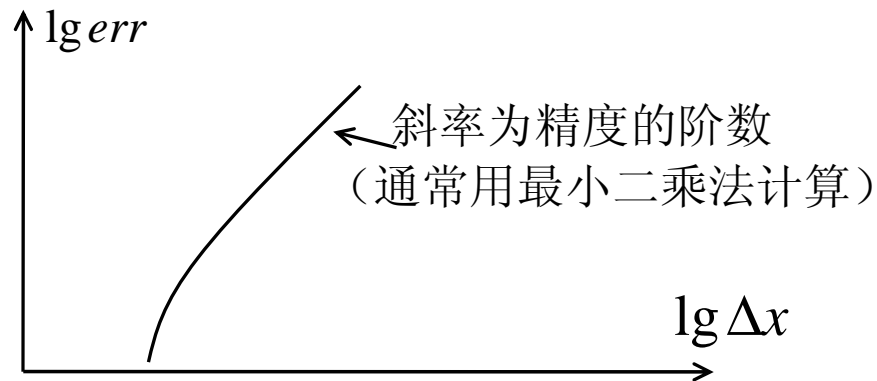
理论方法，Taylor展开，求余项。对于复杂（如非线性）格式，难度大。

实验方法，通过算例考核精度

$$u = \sin(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \quad \text{精确解}$$

计算误差 $err = \|F_j - \cos(x_j)\|$

分析误差对网格步长的依赖关系



$\|\phi_j\|$ 为该离散函数的模

常用的模:

1 模: $\|\phi_j\|_1 = \sum_j |\phi_j|$

2 模: $\|\phi_j\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j \phi_j^2}$

无穷模: $\|\phi_j\|_\infty = \max_j |\phi_j|$

$$err = \alpha \Delta x^n \Rightarrow \lg err = n \lg \Delta x + \lg \alpha$$

斜率为精度的阶数n

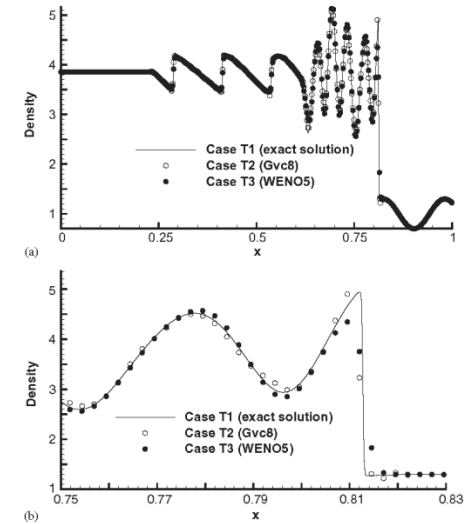
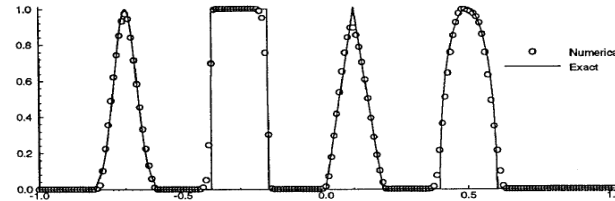
典型的文章：提出方法+理论分析 + 算例验证

常用的验证算例（“实验验证”）

考核方法通常找一些难度大的（条件苛刻、极端）的算例。否则，无法突出方法的优越性。

1维算例：

Sod 激波管， Shu-Osher, 方波/尖波.....



Shu-Osher问题的计算结果（Li et al. *Int. J. Num. Fluid.* 2005）

2维算例：

前/后台阶、双马赫反射、二维Riemann问题、漩涡-激波干扰、翼型扰流、圆柱绕流

3维复杂算例：

各向同性湍流的DNS, 槽道湍流的DNS, 激波-边界层干扰的DNS

► 航空领域权威的考核算例—— DPW标准计算模型

常用一、二维算例整理后已发到流体中文网 www.cfluid.com

研究CFD的计算手段

例：差分格式构造

理论方法：手工推导系数（工作量大）

数值方法：通过数值手段推导系数

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j = a_1 u_{j-2} + a_2 u_{j-1} + a_3 u_j + a_4 u_{j+1} + O(\Delta^3)$$
$$\sum_{j=1}^4 (j-3)^k a_j = b_k \quad k = 0, 1, 2, 3$$

数值求解，获得系数

格式优化；
通过数值计算手段进行 **Fourier** 分析；

.....

作业

3.1 对如下单波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad a > 0$$

构建的差分格式如下：

$$\frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) = -a \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

试利用**Fourier**方法，分析其稳定性