Alapvető helymeghatározó módszerek

dr. Paller Gábor

Készült Axel Küpper: Location-Based Services: Fundamentals and Operation c. könyve alapján

Alapvető helymeghatározó módszerek

- Közelségérzékelés (proximity sensing)
- Háromszögelés (lateration)
- Irányszög-mérés (angulation)
- Differenciális pozíciószámítás (dead reckoning)
- Mintaillesztés

Közelségérzékelés

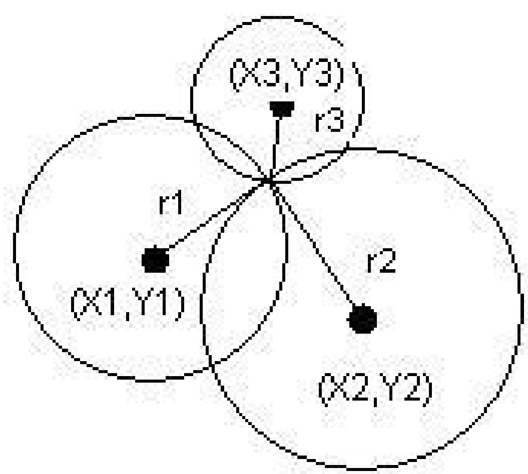
- Alapja a hordozóhullám (rádió, infravörös, ultrahang) véges terjedési távolsága.
- A szenzor érzékeli a hordozóhullámot és az azt kibocsátó forrás helyét tekintjük pozíciónak.
- Irányérzékenység
  - Körsugárzó
  - Szektorizált sugárzó (csak egy körszeletben fogható)
- Pontosság: függ a hordozóhullám terjedési távolságától. Infravörös: 1-2 m, celluláris: 30 km-ig fel.

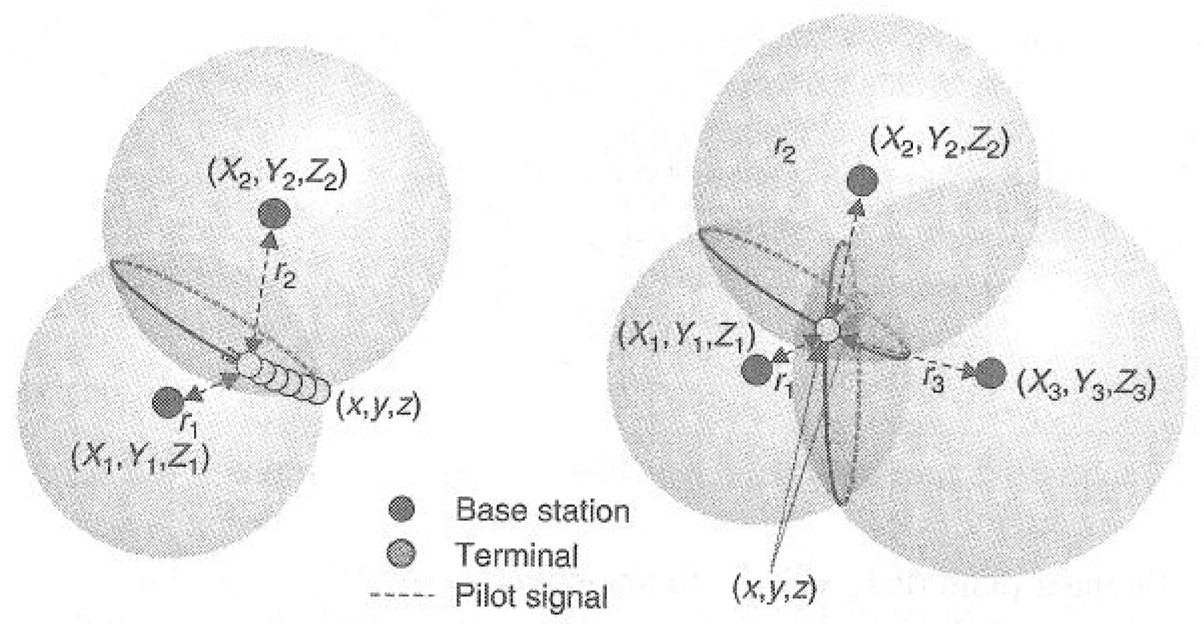
Háromszögelés

- Ismerjük a távolságot vagy a távolságkülönbségeket *n* ismert ponthoz.
- Ha n=3: háromszögelés
- Két alapvető fajta:
  - Ha a távolságot tudjuk az ismert pontokhoz: körkörös háromszögelés
  - Ha a távolságkülönbségeket tudjuk az ismert pontokhoz: hiperbolikus háromszögelés

Körkörös háromszögelés

- Távolságok ismert pontoktól ismertek. (r_i, i=1..n)
- 2D esetben három ponttól vett távolság egyértelmű megoldást ad.
- 3D esetben gömbök metszetéről van szó, ahol az egyik megoldás ésszerű megfontolásokkal (pl. föld alatt van) kizárható. Ha ez nem lehetséges, négy ponttól vett távolság kell.



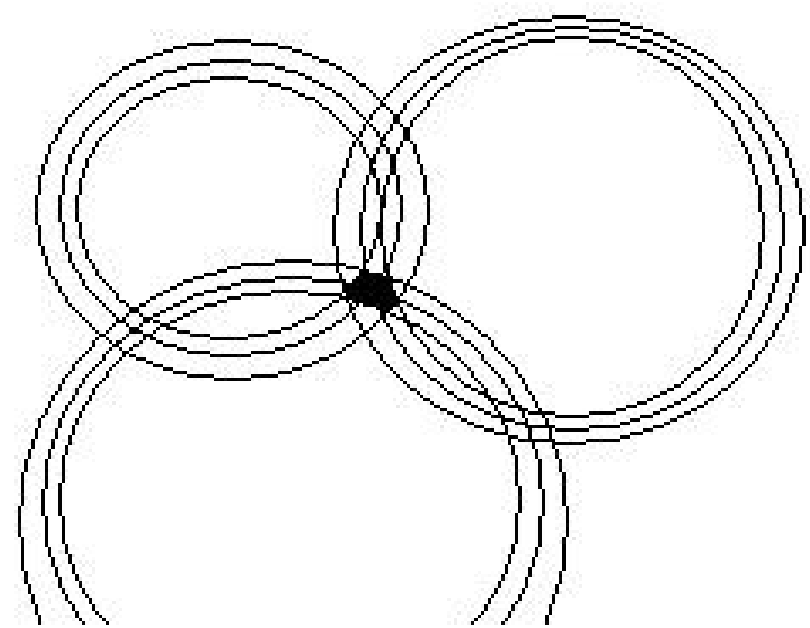


Körkörös háromszögelés (2)

- Elméleti esetben a megoldás a távolságokra és a koordinátákra felírt egyenletből származtatható.
- Valójában a távolságmérés sose pontos és hibát tartalmaz. p_i: pseudorange, becsült távolság.
- Az eredmény az, hogy a körök sose metszik egymást.

$$r_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2}$$

$$r_i = p_i + \varepsilon$$



Körkörös háromszögelés (3)

- Iteratív módszerrel határozzuk meg a valódi pozíciót
- Kezdő becslés (1).
- Korrekciós vektort keressük, amellyel a kezdő becslést pontosíthatjuk (2).
- x,y és z a kezdő becslés és a korrekciós vektor összegeként adódik (3)
- Lineáris becslést alkalmazunk (4)

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$p_i(x, y, z) = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2}$$

$$= p_i(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y} + \Delta y, \tilde{z} + \Delta z)$$

$$p_i(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y} + \Delta y, \tilde{z} + \Delta z) =$$

$$p_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{\partial p_i}{\partial \tilde{x}} \Delta x + \frac{\partial p_i}{\partial \tilde{y}} \Delta y + \frac{\partial p_i}{\partial \tilde{z}} \Delta z$$

Körkörös háromszögelés (4)

- Elvégezzük a parciális deriválást (3)-on, hogy (4)-be helyettesíthessük.
- Ezek a koefficiensek kiszámolhatók.

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{x}} = \frac{-X_i + \tilde{x}}{\sqrt{(X_i - \tilde{x})^2 + (Y_i - \tilde{y})^2 + (Z_i - \tilde{z})^2}} = a_i$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{y}} = \frac{-Y_i + \tilde{y}}{\sqrt{(X_i - \tilde{x})^2 + (Y_i - \tilde{y})^2 + (Z_i - \tilde{z})^2}} = b_i$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{z}} = \frac{-Z_i + \tilde{z}}{\sqrt{(X_i - \tilde{x})^2 + (Y_i - \tilde{y})^2 + (Z_i - \tilde{z})^2}} = c_i$$

Körkörös háromszögelés (5)

- A módosított koordináták most kiszámolhatók (5)

$$p_i = (\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y} + \Delta y, \tilde{z} + \Delta z) =$$

$$p_i(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + a_i \Delta x + b_i \Delta y + c_i \Delta z$$

- A korrekciós vektor csak a változás a kezdeti becsléshez képest.

$$\Delta p_i = a_i \Delta x + b_i \Delta y + c_i \Delta z$$

- Átírva mátrixalakba.

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \dots \\ \Delta p_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ \dots \\ a_n, b_n, c_n \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

Körkörös háromszögelés (6)

- Meg kell oldani az egyenletrendszert és megkapjuk a korrekciós vektort.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Sajnos ez egy túldeterminált egyenletrendszer (több egyenlet van, mint ismeretlen). Ráadásul tudjuk, hogy a megoldás esetleg nem is létezik a hibák miatt. Ezért a legkisebb négyzetes közelítő érték módszerét használjuk. Először vesszük a reziduális vektort. (x-hullám a becsült megoldás)

$$r = \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$$

- Ennek az eukledeszi négyzetét kell vennünk.

$$\|r\|^2 = r^T r = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}) =$$

$$\mathbf{b}^T\mathbf{b} - 2\tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$$

- Ezt kell minimalizálnunk. A deriváltját számítjuk és keressük a nullpontját.

$$-2\mathbf{A}^T\mathbf{b} + 2\mathbf{A}^T\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = 0$$

- Ez a következő, megoldható egyenletrendszerhez vezet (6).

$$\tilde{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

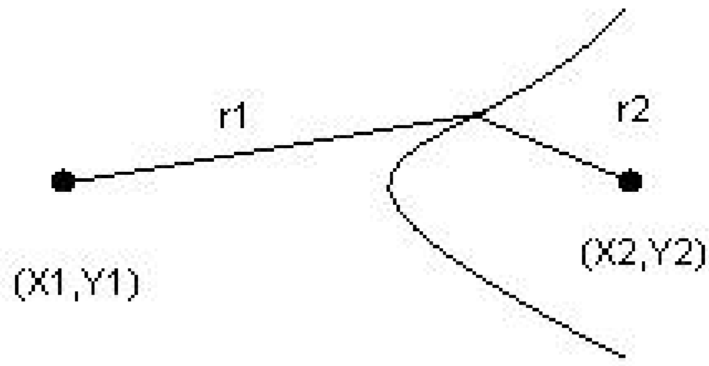
Körkörös háromszögelés (7)

- Az egyenlet megoldása a korrekciós vektor, amit az előzőleg becsült pozícióhoz kell hozzáadni ((1)-(2) egyenletek).
- Az (5)-(6) közötti lépéseket iteratívan alkalmazva egyre pontosabb megoldáshoz jutunk.
- Körkörös háromszögelést az érkezési idő (Time of Arrival, ToA) módszereknél használnak.
- Az idő szinkronizációja az adó és a vevő között elsőrendű fontosságú.
- Használják a celluláris technikában is, de elsősorban a GPS a legfontosabb felhasználási területe.

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\Delta \tilde{x}, \Delta \tilde{y}, \Delta \tilde{z})^T$$

Hiperbolikus háromszögelés

- Az abszolút távolságokat gyakran nehéz meghatározni
- Előfordul, hogy csak a távolság különbsége áll rendelkezésre
- Pl. ismert, hogy *i* és *j* indexű adótoronytól vett távolság $d_{ij}=r_i-r_j$
- Ezek a pontok egy hiperbolát jelölnek ki.
- 2D esetben három ponttól vett távolságkülönbségek 2 hiperbola metszéspontjaként jelölik ki a pozíciót.
- 3D esetben legalább három hiperbola-felület (4 bázispont) kell az egyértelmű helymeghatározáshoz.



Hiperbolikus háromszögelés (2)

- A távolság az i. és j. bázisállomás között a következő.
- Gyakori szokás, hogy a távolságokat egy referencia-bázisállomáshoz számítják és annak indexe az 1-es. Vagyis: i=1
- Elvégezve a parciális differenciálást a következőt kapjuk.
- Innentől kezdve a körkörös háromszögelésnél használt módszert használjuk.
- A hiperbolikus háromszögelést érkezési idő különbség (Time Difference of Arrival, TDoA) rendszerekben használnak.

$$d_{ij} = r_i - r_j =$$

$$\sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} -$$

$$\sqrt{(X_j - x)^2 + (Y_j - y)^2 + (Z_j - z)^2}$$

$$\tilde{r}_i = \sqrt{(X_i - \tilde{x})^2 + (Y_i - \tilde{y})^2 + (Z_i - \tilde{z})^2}$$

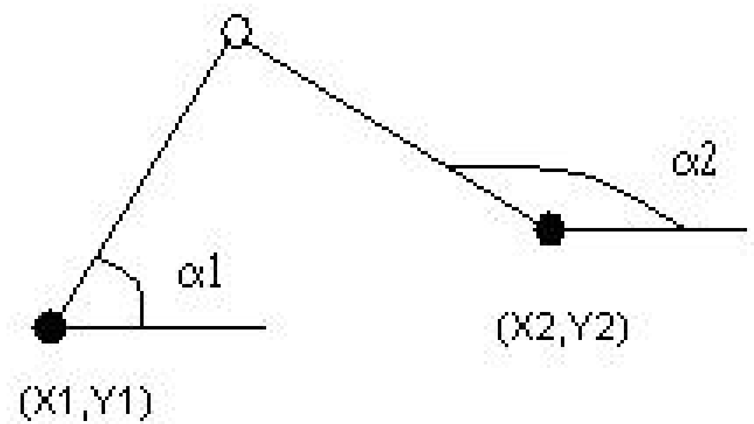
$$\frac{\partial d_{1j}}{\partial \tilde{x}} = \frac{-X_1 + \tilde{x}}{\tilde{r}_1} - \frac{-X_j + \tilde{x}}{\tilde{r}_j} = a_j$$

$$\frac{\partial d_{1j}}{\partial \tilde{y}} = \frac{-Y_1 + \tilde{y}}{\tilde{r}_1} - \frac{-Y_j + \tilde{y}}{\tilde{r}_j} = b_j$$

$$\frac{\partial d_{1j}}{\partial \tilde{z}} = \frac{-Z_1 + \tilde{z}}{\tilde{r}_1} - \frac{-Z_j + \tilde{z}}{\tilde{r}_j} = c_j$$

Irányszögelés

- Irányszögelés esetén a bázisállomásoknál megmérjük a vett jel érkezési irányát.
- Elméletileg két irányszög elegendő a forrás meghatározásához.
- Valójában a visszaverődések miatt ennél több állomás kell (a hibák kiküszöbölése végett)



Irányszögelés (2)

- Ha kettőnél több bázispontunk van, a korábbiakhoz hasonlóan hibák léphetnek fel és nem lesz egyértelmű megoldás.
- A megfigyelt irányszöget a céltárgy becsült pozíciója és egy korrekciós vektor összegeként írjuk fel.

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{Y_i - y}{X_i - x}\right)$$

$$\phi_i(x, y, z) = \arctan\left(\frac{Y_i - y}{X_i - x}\right) =$$

$$\phi_i(\tilde{x} + \Delta x, \tilde{y} + \Delta y)$$

- A körkörös differenciálásnál ismertetett módszert használjuk. A mátrix elemeit az ott ismertetett módszerhez parciális differenciálással határozzuk meg. (r_i az i. bázisállomástól mért távolság)

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \tilde{x}} = \frac{\sin \phi_i}{r_i} = a_i$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\cos \phi_i}{r_i} = b_i$$

Differenciális pozíciószámítás

- Az egyik legrégebb módszer.
- Adott egy ismert pozíció.
- Ehhez képest meghatározzuk az elmozdulásunkat (pl. sebességet, irányt és időt mérünk)
- A pozíciót a mért elmozdulással helyesbítjük.
- A pozíciómeghatározás pontossága folyamatosan romlik, ahogy a hibák felgyűlnek.
- Felhasználás: autóban GPS pontosítása olyankor, amikor a műholdak láthatósága rossz.

Mintaillesztés

- A pozíciót olymódon határozzuk meg, hogy ismert helyek (optikai vagy nem optikai) mintáit illesztjük az érzékelt képre (vagy egyéb, helyre jellemző szenzor-adatra)
- Optikai esetben képeket készítünk és ismert pozícióban készített képekkel való hasonlóságot keressük.
- Nem optikai esetben egyéb szenzorbemenetet, például rádiójelet használunk.
  - Elkészítjük a hely „ujjlenyomatát”, a helyen fogható rádiójelek (pl. több WLAN állomás) térképét.
  - Amikor helymeghatározást végzünk, akkor az aktuális szenzorbemenetet hasonlítjuk az „ujjlenyomatokhoz”.