

# Kapitel 3

## Geführte Wellen in optischen Wellenleitern

### Inhalt

3.1	State-of-the-Art der Glasfaserkommunikation	3-3
3.1.1	Dämpfungsverluste in Glasfasern	3-5
3.1.2	Aufbruch in die «Tera-Ära»	3-9
3.2	Einfache Betrachtungen mit Hilfe der geometrischen Optik	3-14
3.3	Die Wellengleichung für zylindrische Wellenleiterstrukturen	3-19
3.3.1	Separation der Wellenleitergeometrie	3-19
3.3.2	Separation der Feldkomponenten	3-23
3.4	Der dielektrische planare Filmwellenleiter	3-29
3.4.1	Der symmetrische planare Filmwellenleiter	3-29
3.4.2	Der unsymmetrische planare Filmwellenleiter	3-39
3.4.3	Allgemeine Betrachtungen zum planaren Filmwellenleiter	3-42
3.5	Der dielektrische planare Mehrschichtwellenleiter	3-49
3.6	Der Rippenwellenleiter	3-57

---

3.7	Die optische Glasfaser	3-63
3.7.1	Vektorielle Lösung der Stufenindexfaser	3-63
3.7.2	Skalare Lösung – Näherung durch LP-Modi	3-74
3.7.3	Dispersion schwachführender Glasfasern	3-79
3.7.4	Systemimplikationen der Dispersion	3-91
3.7.5	Zur mehrwelligen Gradientenfaser	3-98
	Anhang	A-1

## 3. Geführte Wellen in optischen Wellenleitern

Was geschah 1976? Mao Tse-tung starb, Nina Hagen wurde gebeten die DDR zu verlassen und im italienischen Seveso ereignete sich einer der schlimmsten Giftgasunfälle aller Zeiten. Technik-kritische Stimmen artikulierten sich tausendfach aus den Reihen der ersten grossen Anti-Atomkraft-Demonstrationen, doch trat gleichzeitig auch eine neue Technologie in Erscheinung, deren praktische Handhabung uns heute keine Mühe mehr bereitet: Die optische Telekommunikation.

Für diese stellt das Jahr 1976 einen ganz besonderen Meilenstein dar, denn zu jenem Zeitpunkt wurden gleich drei entscheidende Schlüsseltechnologien der modernen Nachrichtenübertragung zur Fertigungsreife gebracht: 1. So wurde beispielsweise durch das britische *Post Office Research Centre (PORC, Vorläuferin der BT Labs)* eine erste, kommerziell nutzbare, 13 km lange, optische Glasfaserstrecke nach Ipswich aufgebaut, welche bereits eine Datenrate von 8 Mb/s zulies. 2. Gelang der japanischen *Nippon Telegraph and Telephone (NTT)* die Herstellung einer Glasfaser mit einer, für damalige Verhältnisse ausserordentlich niedrigen Dämpfung von 0.5 dB/km. 3. Fertigte eine Gruppe am *Massachusetts Institute of Technology (MIT)* die erste Halbleiterlasodiode in InGaAsP(Indium-Gallium-Arsenid-Phosphid)-Technologie für Dauerstrichbetrieb bei Raumtemperatur und mit einer Emissionswellenlänge von 1.1  $\mu\text{m}$ . Kurz darauf gelang auch *NTT* die Realisierung eines Halbleiterlasers für den Betrieb im nahen Infrarot ( $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ ).

Fazit: Die Verfügbarkeit einerseits von Glasfasern mit niedriger Dämpfung und andererseits von modulierbaren Lichtquellen bei der «richtigen» Wellenlänge zusammen mit der Erfahrung, dass die haardünnen Glasfasern sich erstaunlich gut verlegen liessen und gleichzeitig eine enorme Übertragungsbandbreite versprochen, hatte damals überbordenden Enthusiasmus ausgelöst. Und heute? Ungebrochener denn je: Stetige, exponentielle Zunahme der Übertragungskapazität während eines Vierteljahrhunderts! Ob solcher Entwicklungen scheinen Distanzen plötzlich keine Rolle mehr zu spielen – wir klicken auf die Webseite ohne je auf ihre Herkunft zu achten. Die britische Telekom *BT* verkürzte dieses Denken zum einschlägigen Werbeslogan: «*Geography is History.*»

Eigentlich wollen wir hier weder Technik schönreden noch Historisches aufwärmen, sondern intensiv über die *Voraussetzungen und konkreten Randbedingungen* nachdenken, welche diese Revolution erst möglich gemacht haben. Soviel zum Zweck und Inhalt des vorliegenden Kapitels.

### 3.1 State-of-the-Art der Glasfaserkommunikation

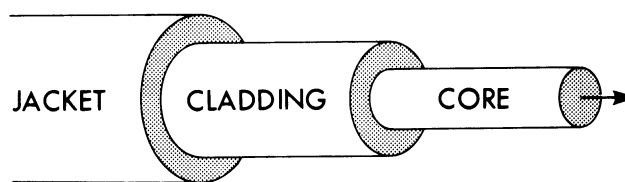
Von der technikgeschichtlichen (oder auch der techniksoziologischen) Perspektive aus betrachtet, darf die optische Glasfaser mit Recht als eine der interessantesten technischen Innovationen unserer Zeit bezeichnet werden. Untypisch ist ihr verschlungener, zum Teil auch widersprüchlich anmutender Entwicklungspfad hingegen nicht. Meistens offenbart sich erst im Nachhinein, wie überaus empfindlich ein solcher Pfad auf den zeitgenössischen Kontext (wie z.B. das Zusammentreffen der unter 1.-3. bereits erwähnten Tatbestände) reagiert und wie stark technisches Wunschenken das Handeln von Wissenschaftlerinnen und Technikern beeinflusst hat.

So überrascht keineswegs, dass der Lichtwellenleiter nicht wegen seines Zwecks – nämlich dem Führen eines optischen Wellenfelds – erstmals ins Gerede kam. Die Tatsache, dass ein hochbrechendes Medium Licht durch interne Totalreflexion bündeln und leiten kann, wurde bereits 1841 vom Genfer Physiker Jean Daniel Colladon am Beispiel eines Wasserstrahls demonstriert. Erst als 1962 die Gruppe von Robert Hall bei *General Electrics* den ersten Halbleiterlaser<sup>1</sup> durch direkte Strominjektion (zwar nur für kurze Zeit) zum Leuchten brachte, wurde Licht als Informationsträger im grösseren Rahmen überhaupt erst diskutiert. Angeleitet durch diesen

<sup>1</sup> Diese (erste) Laserdiode bestand aus dem transparenten Halbleitermaterial GaAs(Gallium-Arsenid).

technischen «Glücksfall», nun plötzlich über einen Signalträger bei einer Frequenz von 360 THz ( $\lambda = 0.83 \mu\text{m}$ ) verfügen zu können, erging sich manch Wissenschaftler in freudiger Spekulation: Verhält sich die maximale Nutzsignalfrequenz ungefähr proportional zur Trägerfrequenz, dann müsste die Verlagerung der hochfrequenten Trägerfelder in den optischen Bereich umgekehrt auch eine 100'000-fache Datenrate zur Folge haben! Traumhaft.

Die technische Realität in den Labors sah damals aber alles andere als ermutigend aus. Man experimentierte zwar in England ab 1954 bereits mit ummantelten Faserkernen (siehe hierzu *Fig.3.1*), doch waren Dämpfungsverluste von 10'000 dB/km immer noch an der Tagesordnung. Die Ursache lag einerseits an der noch mangelhaften Glasqualität (fehlende Reinheit durch unerwünschte oder unerwünscht hohe Kontamination der dotierten Silikatgläser<sup>2</sup>) und andererseits traten an der Grenzschicht von Kern und Mantel erhebliche Streuverluste auf.



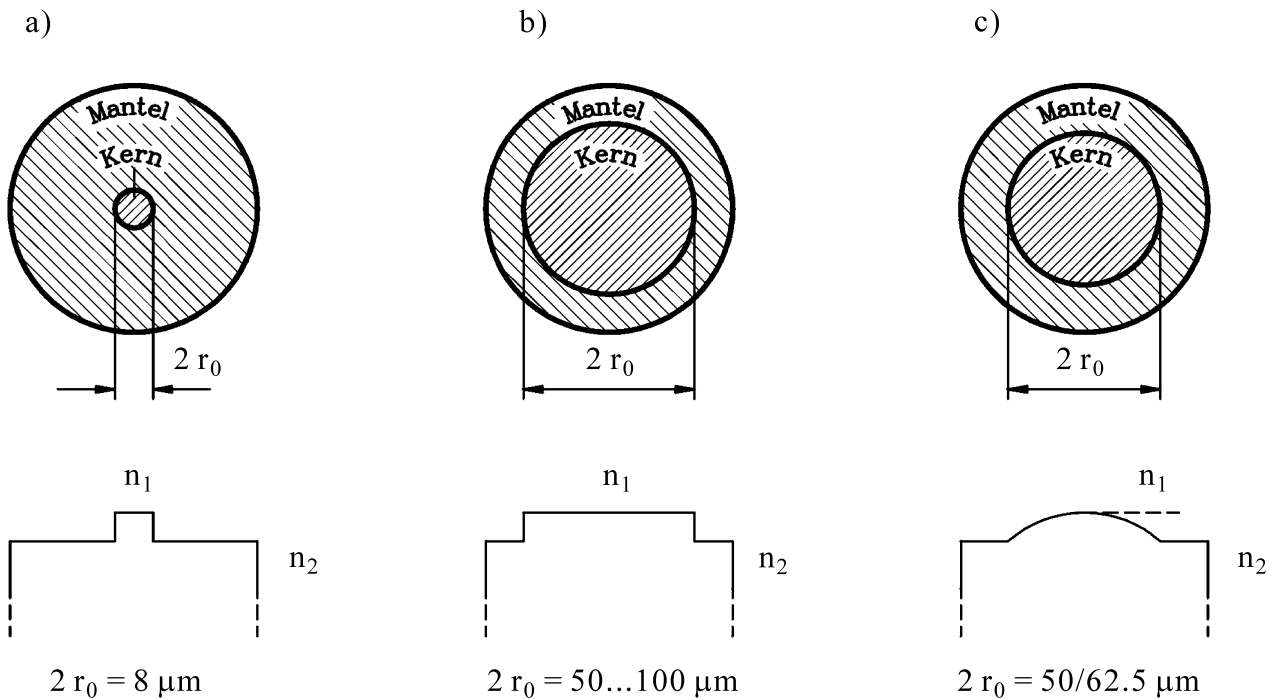
*Fig.3.1: Schematischer Aufbau einer Glasfaser. Das Licht wird an der Übergangsschicht vom optisch dichteren Glaskern (core) zum entsprechenden dünneren Glasmantel (cladding) totalreflektiert und dadurch im Faserkern geführt. Die Umhüllung (jacket) dient lediglich zum Schutz vor äusseren Einflüssen und zur mechanischen Stabilisierung der Faser.*

Um diese, durch die Oberflächenrauigkeit der Grenzschicht hervorgerufenen Verluste zu beheben, hat man einiges ausprobiert. Ein interessanter Ansatz wurde z.B. 1961 von einer Gruppe der *University of Southampton* unter dem Namen *optical pipeline* vorgeschlagen. Hier wurde der Glaskern ganz weggelassen und das Licht im Innern eines dünnen, spiegelglatten Glasröhrchens geführt. Eine Modifikation dieses Röhrchenkonzepts hatte Georg Goubau (*US Army Electronics Command*) bereits 1960 entwickelt, indem er das Lichtfeld im Röhrchen durch eine Reihe von periodisch angeordneten *Fokussierlinsen* führte und dadurch ganz von der problematischen Röhrchen-Innenwand fern halten konnte. Anfangs der 70er Jahre haben die Wissenschaftler aus Southampton mit sogenannten *liquid core fibers* experimentiert. Diese bestanden wiederum aus einem dünnen Glasröhrchen, dessen Innenraum nun mit einer hochbrechenden Flüssigkeit gefüllt wurde. Die grosse Brechzahl der Kernflüssigkeit und die glatte Benetzung an der Grenzschicht haben beachtlich tiefe Verluste von 4 dB/km ergeben, doch dauerte die Füllung des 120  $\mu\text{m}$  dicken und 1 km langen Röhrchens ganze 4 Stunden. Für eine realistisch dünne «Faser» (Kerndurchmesser nur wenige  $\mu\text{m}$ ) wurde die Füllprozedur bei gleichem Druck (2400 at) und gleicher Länge hingegen auf 5 Jahre veranschlagt! Alternative Forschungsanstrengungen an der *University of New South Wales* (Australien) übernahmen z.B. 1964 Konzepte aus der Mikrowellentechnik und beschäftigten sich intensiv mit der Lichtführung in dünnen, dielektrischen Bandleitern (*polymer tapes*).

Der Durchbruch erfolgte erst 1966, als Charles Kao und George Hockham, beides Forscher der *Standard Telecommunications Laboratories* in England, in einem theoretischen Beitrag einen hybriden Ausbreitungszustand des Lichtfeldes ( $HE_{11}$ -Mode) identifizieren konnten, der eine sehr verlustarme optische Signalübertragung versprach. Wie aus der *Fig.3.1* hervorgeht, gehören die optischen Glasfasern – und damit auch alle dielektrischen Wellenleiterstrukturen – wegen ihrer Brechzahlunterschiede  $n_i$  in der Transversalebene nicht zur Klasse der querhomogenen Wellen-

<sup>2</sup> Silikatgläser (Quarzgläser) basieren auf amorphen  $\text{SiO}_2$ -Komplexen und haben einen Brechungsindex von etwa  $n = 1.45$ .

leiter. Im Gegensatz z.B. zum Hohlleiter oder zur Zweidrahtleitung gestaltet sich die mathematische Behandlung eines solchen Ausbreitungsproblems um einiges schwieriger. Um diese Ausbreitungszustände (*Modi*) überhaupt bestimmen zu können, müssen die Eigenwertgleichungen der entsprechenden Wellenleiterstruktur formuliert werden, was übrigens zur hauptsächlichen Zielsetzung des vorliegenden Kapitels gehört. Wir werden später zeigen, dass eine solche Glasfaser, je nach Bauform eine einzige Eigenlösung oder auch mehrere davon besitzt, d.h. eine oder auch mehrere Modi führen kann. Man ordnet Glasfasern daher nach einwelligen (*single mode*), bzw. nach mehrwelligen (*multimode*) Fasertypen ein (siehe *Fig.3.2*).



*Fig.3.2: Typen von optischen Fasern. a) einwellige (single mode) Stufenprofilfaser, b) mehrwellige (multimode) Stufenprofilfaser und c) mehrwellige (multimode) Gradientenprofilfaser.*

Das Überzeugende am Beitrag von Kao und Hockham war die Feststellung, dass die Bauform der ummantelten Glasfaser als solche (bei einem Brechzahlunterschied von rund 1 %) *prinzipiell* fantastische Übertragungseigenschaften in Aussicht stellte; die enorm hohen Verluste der damalige Realisierung, hingegen, allein auf die Glasqualität und die oft unterschätzten *microbending losses* (durch Lichtstreuung an Mikro-Undulationen entlang der Faser) zurückzuführen waren. Somit rückten die Dämpfungseigenschaften der entsprechenden Silikatgläser ins Zentrum der wissenschaftlichen Studien.

### 3.1.1 Dämpfungsverluste in Glasfasern

Der typische Dämpfungsverlauf z.B. für eine Gradientenprofilfaser ist in *Fig.3.3* abgebildet. Das nutzbare Spektrum für die optische Signalübertragung reicht von ungefähr 800 nm bis etwa 1600 nm, wobei auf einen ersten Blick drei technische Übertragungsfenster identifiziert werden können:

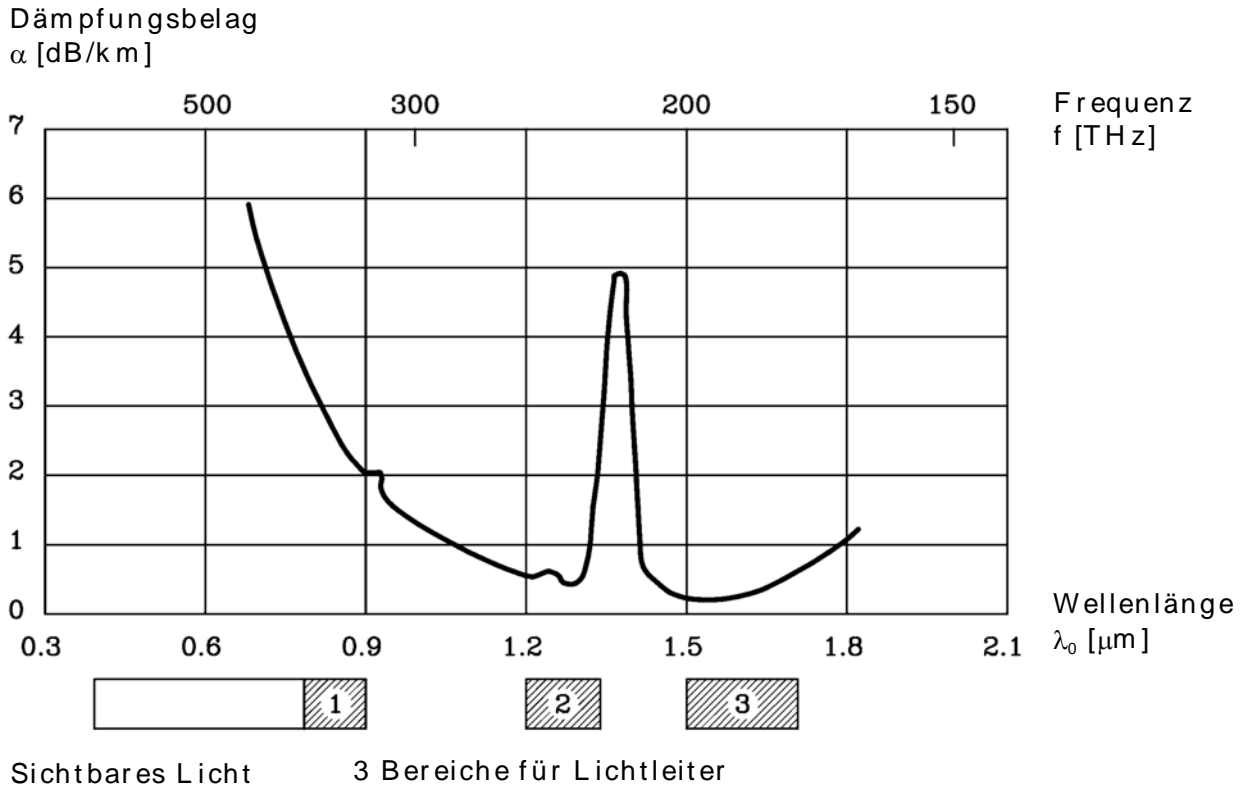


Fig.3.3: Spektrale Dämpfungskurve einer Gradientenfaser unter Angabe der drei Transmissionsfenster für eine mögliche optische Signalübertragung.

1. 0.8...0.85  $\mu\text{m}$ : Für diesen Bereich stehen kostengünstige Lichtquellen wie GaAs(Gallium-Arsenid)-Laserdioden und Lumineszenzdioden (LED) zur Verfügung. Dieses Wellenlängenfenster ist aber, wie aus Fig.3.3 ersichtlich wird, bezüglich der Dämpfung (um 2 dB/km) nicht optimal und eignet sich daher nur für kostengünstige Kurzstanzverbindungen.
2. Um 1.3  $\mu\text{m}$ : Hier zeigt das Glas deutlich bessere Verlust- und chromatische Dispersionseigenschaften als der 1. Bereich. Für Glasfasern sind Dämpfungswerte von 0.5 dB/km durchaus typisch. Die zugehörigen Lichtquellen wie InGaAsP(Indium-Gallium-Arsenid-Phosphid)-Laser und LED sind sehr ausgereift, dafür aber wesentlich teurer.
3. Um 1.55  $\mu\text{m}$ : In diesem Transmissionsfenster können z.B. Single-Mode-Fasern mit minimaler Dämpfung von 0.2–0.3 dB/km realisiert werden. Die Lichtquellen, hauptsächlich InGaAsP (Indium-Gallium-Arsenid-Phosphid)-Laser sind wesentlich aufwändiger herzustellen und daher entsprechend teuer.

Wie wir in Fig.3.3 sehen, ist diese erste Einteilung in drei optische Transmissionsfenster vor allem pragmatisch motiviert. So werden die einzelnen Bereiche einerseits mit der Verfügbarkeit entsprechender Lichtquellen begründet und andererseits um ein scharf auftretendes Dämpfungsmaximum geordnet. Diese schmalbandige Dämpfungsspitze resultiert durch Anregung von OH-Radikalen, welche vom unerwünschten molekularen Wassergehalt im Quarzglas herrühren. Die OH-Radikale haben ihre Hauptresonanz bei einer Wellenlänge von  $\lambda_0 = 2.73 \mu\text{m}$ , die gleichzeitig auftretenden «Ober- und Mischttöne» produzieren aber noch weiter Dämpfungsmaxima im sichtbaren Bereich (bei  $\lambda_0 = 1.39 \mu\text{m} / 1.23 \mu\text{m} / 0.95 \mu\text{m}$ ), wobei die erste Harmonische bei  $\lambda_0 = 1.39 \mu\text{m}$  zur oben erwähnten «prominenten» Dämpfungsspitze führt.

Wie die Fig. 3.4 zeigt, unterscheidet man linksseitig der Dämpfungsspitze – d.h. auf der Hochenergieseite, im Bereich kurzer Wellenlängen – zwischen der *Rayleigh-Streuung* (an mikroskopischen Dichte-Fluktuationen im amorphen Glasmaterial) und der *UV(ultraviolett)-Absorption* (Anregung von Elektronenzuständen im molekularen  $\text{SiO}_2$ -Komplex). *Rayleigh-Streuung* setzt stochastischen Dichtefluktuationen innerhalb von Längenskalen  $< \lambda$  voraus. Übrigens ganz gleich wie beim Lichtstreuungsphänomen eines romantischen Sonnenuntergangs (Rotfärbung) verhält sich auch bei der *Rayleigh-Streuung* die Absorption proportional zu  $\lambda^{-4}$ . Auf der Niederenergieseite wird der Dämpfungsverlauf hauptsächlich von der *IR(infrarot)-Absorption* bestimmt. Diese entsteht durch Phononen-Anregung im Quarzglas (Vibrationsresonanzen des Si-O-Komplex im Glas dessen ausgeprägte Hauptresonanz bei  $\lambda_0 \approx 10 \mu\text{m}$  liegt und deren eine Resonanzflanke bis in den sichtbaren Bereich ragt). Ein weiterer Verlustanteil rührt von Streuung an stochastisch auftretenden, mikroskopischen Variationen der Fasergeometrie her. Solche Variationen treten aber im Gegensatz zur *Rayleigh-Streuung* in viel grösseren Längenskalen als die Lichtwellenlänge  $\lambda$  auf, was im betrachteten Wellenlängenbereich zu einem konstanten spektralen Verlauf des Dämpfungsbeitrags führt (sogenannte *Mie-Streuung*). Hierzu gehören sicher einmal die bereits erwähnten *microbending losses*, doch der weit dominanterer Anteil wird der Rauigkeit der Kern-Mantel-Grenzschicht zugeordnet.

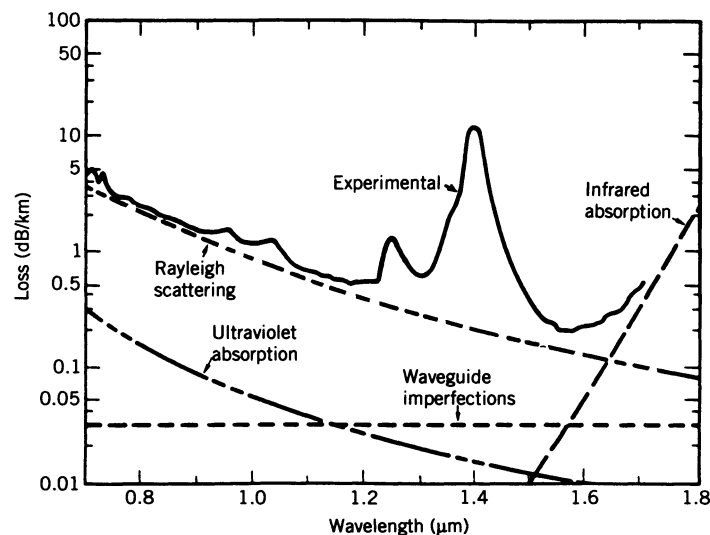


Fig.3.4: Die zugrunde liegenden Verlustmechanismen, welche zum gesamten Dämpfungsspektrum der Glasfaser beitragen. Die «Ränder» des gesamten optischen Übertragungsbereichs werden massgeblich durch die Rayleigh-Streuung und die IR-Absorption bestimmt.

In diesem Sinne können wir die beschriebenen Verlustmechanismen wie folgt kategorisieren:

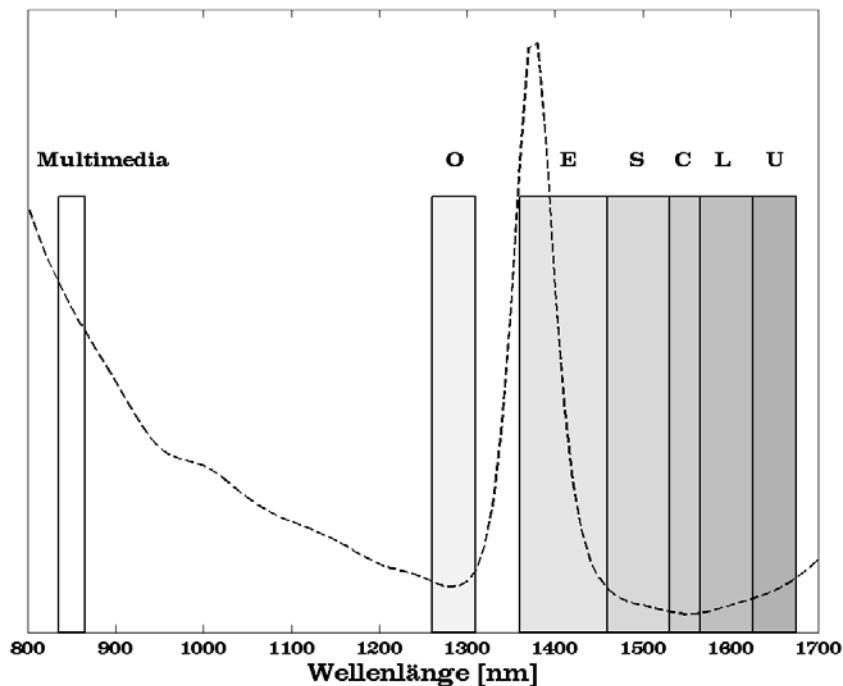
#### Absorptionsmechanismen

- Intrinsische Materialabsorption: Durch Anregung der Atome/Moleküle im Basismaterial Glas. Hierzu gehören die UV-Absorption (Elektronenanregung) und IR-Absorption (Phononenanregung).
- Extrinsische Materialabsorption: Durch Anregung molekularer/atomarer Verunreinigungen im Glas, wie z.B. die Absorption durch Anregung von OH-Radikalen oder Dotieratomen.
- Streuverluste wegen Fasernichtidealitäten: Durch Streuung an Dichte- und Formfluktuationen in der Glasfaser. Hierzu zählt man die Rayleigh-Streuung (Dichteveränderungen  $< \lambda$ ) und die durch microbending losses und/oder Rauigkeit hervorgerufene Mie-Streuung (Formvariationen  $> \lambda$ ).

Im Sinne einer praktischen Bewirtschaftung der in *Fig.3.3* dargestellten optischen Übertragungsfenster, hat die *ITU (International Telecommunication Union)* eine weitere Unterteilung vorgenommen und sechs kommerziell nutzbare optische Transmissionsbänder definiert:

- *O-Band:* 1260 nm – 1360 nm (*original band*)
- *E-Band:* 1360 nm – 1460 nm (*extended band*)
- *S-Band:* 1460 nm – 1530 nm (*short band*)
- *C-Band:* 1530 nm – 1565 nm (*conventional band*)
- *L-Band:* 1565 nm – 1625 nm (*long band*)
- *U-Band:* 1625 nm – 1675 nm (*ultra-long band*)
- *Multimedia:* um 850 nm

Diese Aufteilung ist in *Fig.3.5* wiedergegeben. Das siebte *Multimedia*-Band wird von *ITU* nicht reglementiert und steht somit für die freie Nutzung, wie z.B. für «private» Multimode-Netze oder für Anwendungen in der Unterhaltungselektronik zur Verfügung.



*Fig.3.5:* Darstellung der sechs, von *ITU* vorgegebenen optischen Transmissionsfenster (O-E-S-C-L-U). Ausgangspunkt ist das C-Band (conventional band). Unter Einhaltung der Sicherheitsvorschriften für Laserstrahlung darf das siebte Multimedia-Band um 850 nm frei genutzt werden. Die spektrale Dämpfungskurve ist der Orientierung halber (gestrichelt) eingezeichnet.

Die Glasfasertechnologie hat sich im Laufe der Zeit rasant weiterentwickelt. Moderne Fasertypen mit verbesserten Eigenschaften – so z.B. polarisationserhaltende Fasern, dispersionskompensierte Fasern, Fasern mit mikrostrukturierten Fiberquerschnitten oder einfach handhabbare Plasikfasern mit extrem grossen Fiberquerschnitten – sind bereits im Einsatz oder zumindest



Gegenstand laufender Forschung und Entwicklung. Einiges davon wird im Verlauf der Vorlesung noch zur Sprache kommen, doch soll an dieser Stelle kurz auf zwei zukunftssträchtige (und sehr naheliegende) Entwicklungstendenzen eingegangen werden.

Eine erste Tendenz weist in Richtung *neuer Glasmaterialien*, namentlich der schwermetall-dotierten *Fluoridgläser* (anstelle von Silikatgläsern). Fasern, welche aus derartigem Material gezogen werden, weisen ein phantastisch tiefes Dämpfungsminimum von 0.01 dB/km auf und dies bei Wellenlängen zwischen 2–3  $\mu\text{m}$  entsprechend der Glaszusammensetzung. Angesichts der Distanzen, welche man dadurch ohne Signalregeneration überwinden könnte, hat diese Reduktion der Dämpfungsverluste um mehr als eine Größenordnung ein enormes Zukunftspotential. Die technologische Realisierung von Lichtquellen für den angegebenen Wellenlängenbereich erweisen sich hingegen als äusserst aufwändig. Ansätze hierzu, wie III-V GaSb(Gallium-Antimonid)-Laserdioden oder komplexere Übergitter-Laserstrukturen bestehend aus IV-VI Heteroübergängen für direkte Bandübergänge bzw. Subband-Übergänge um 3  $\mu\text{m}$  erscheinen trotzdem recht vielversprechend. In Bezug auf die tiefen Dämpfungsverluste und die einfachere Handhabung bei derart grossen Wellenlängen ist es gar nicht so abwegig zu denken, dass die optische Telekommunikation der Zukunft im mittleren Infrarot zwischen 2–3  $\mu\text{m}$  stattfinden könnte.

Der zweite Ansatz zielt direkt auf die störende OH-Resonanz ab. Durch gezieltes Ausdiffundieren des molekularen Wassers im Herstellungsprozess unter 1 ppb lässt sich die Absorptionsspitze der OH-Radikale praktisch vollständig eliminieren. So ist es z.B. *Lucent* 1998 erstmals gelungen mit ihrem Produkt *AllWave*<sup>TM</sup> eine Fiber von höchster Reinheit anzubieten, welche über ein durchgehend nutzbares optisches Transmissionsfenster von 58 THz verfügt. Ein solch enormes Fenster könnte simultan von z.B.  $5000 \times 10 \text{ Gb/s}$  Kanälen belegt werden und bietet Hand zu dem, was ein Forschungsdirektor vor Kurzem etwas prosaisch mit «*White Light Telecom*» umschrieben hatte.

### 3.1.2 Aufbruch in die «Tera-Ära»

Als im November 1988 das erste Glasfaser-Transatlantikkabel, das TAT-8 System, in Betrieb genommen wurde, zeigte sich – gerade im Vergleich zu den damals geläufigen Satelliten-Richtfunksystemen – bereits deutlich, welches Potential in der Glasfaserübertragung steckt.

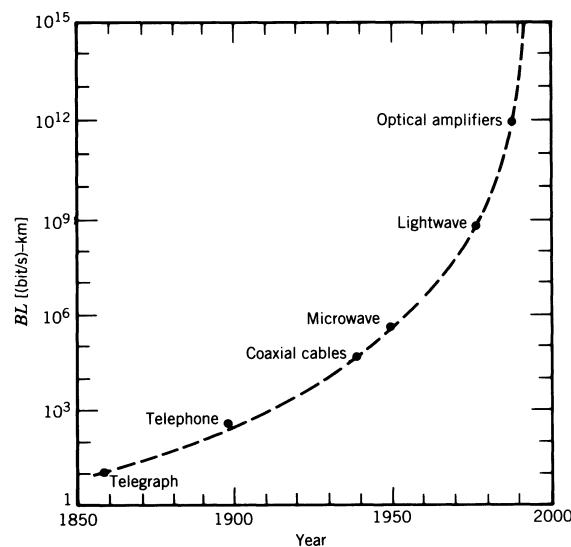
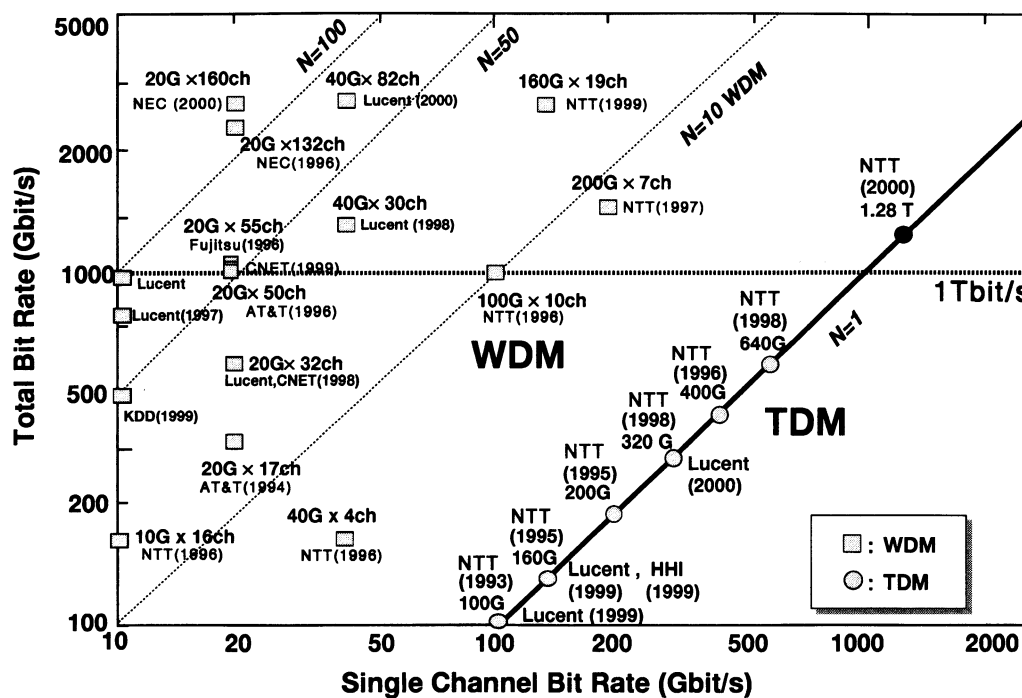


Fig.3.6: Historische Entwicklung des Bitraten-Längen-Produkts (BL) im Kontext der unterschiedlichen, installierten Übertragungstechnologien. Das exponentielle Wachstum impliziert (auch für die optische Telekommunikation) eine Verdopplung von BL pro Jahr (Moore's Law).

Das TAT-8 war ein digitales System mit einer Datenrate von 296 Mb/s pro Glasfaser und bot schon damals eine Kapazität von 2000 konventionellen Telefonkanälen pro Faser an. Das optische Signal musste jeweils im Abstand von 50 km mit Zwischenverstärkern regeneriert werden. Wie aus späteren Ausführungen hervorgeht, rührt die Nutzungslimite solcher Glasfaserverbindung vor allem von der Faserdispersion und den Dämpfungsverlusten her und wird mit dem sogenannten *Bitraten-Längen-Produkt* (auch *BL-Produkt*) bezüglich der unverstärkten Übertragungsdistanz *L* charakterisiert. Die historische Entwicklung der Kennzahl *BL* ist in *Fig.3.6* abgebildet.

Offensichtlich scheint das exponentielle Wachstum typisch für technische Innovationen zu sein, zumindest für deren Anfangsphase, wo die Nachfrage (z.B. nach Übertragungskapazität) bis jetzt noch ungebrochen ist. Solchen exponentiellen Entwicklungen wird oft ein heuristisches Gesetz unterstellt, welches in der Literatur unter der Bezeichnung *Moore's Law*<sup>3</sup> figuriert. In Anlehnung an *Moore's Law* nimmt z.B. die übertragene *Bitrate* pro Kanal *alle 10 Jahre* um einen *Faktor 10* zu. Bei derart ambitionösen Prognosen spielen Laborexperimente, d.h. sogenannte «*Hero Experiments*» eine tragende Rolle. So wurde z.B. an einer Konferenz im Herbst 2000 der staunenden Wissenschaftsgemeinde folgender Weltrekord vorgestellt: ForscherInnen der japanischen *NTT* gelang die Übertragung eines optischen, im Zeitmultiplexverfahren codierten Signals (*OTDM-Signal*) bei einer Bitrate von 1.28 Tb/s über eine Distanz von 70 km. Dieses Experiment ergibt ein  $BL = 8.96 \cdot 10^4 \text{ Gb/s} \cdot \text{km} = 8.96 \cdot 10^{13} \text{ b/s} \cdot \text{km}$  und ist als schwarzer Punkt in der untenstehenden *Fig.3.7* eingetragen.



*Fig.3.7: Zusammenstellung der aktuellsten «Hero Experiments» der optischen Datenübertragung. TDM (oder auch OTDM) bezeichnet das optische Zeitmultiplexverfahren bezüglich eines Wellenlängenkanals und WDM steht entsprechend für das Wellenlängenmultiplexen von derartigen Zeitsignalen auf N verschiedene Wellenlängenkanäle.*

Wie aus der Darstellung hervorgeht, erreicht man noch höhere Übertragungskapazitäten durch das Wellenlängenmultiplexen (WDM) von bereits im Zeitmultiplexverfahren codierten, optischen

<sup>3</sup> Moore's Law: 1964 prognostizierte Gordon Moore (Intel) für den  $\mu\text{P}$  alle 18 Monate eine Verdopplung der Transistoren.

Signalen (OTDM). Mit Hilfe eines solchen kombinierten OTDM×WDM-Übertragungsformats wurde auch der absolute Übertragungsrekord realisiert. Im Frühjahr 2001 demonstrierte die japanische Firma *NEC* einen 117 km langen optischen Link für 10.9 Tb/s. Bei diesem Laboraufbau wurden 273 Wellenlängenkanälen über die drei zusammenhängenden ITU-Bänder *S*, *C*, und *L* verteilt, wobei jeder der Kanäle eine Datenrate von 40 Gb/s unterstützt. Die aggregierte Übertragungsbandbreite des Systems liegt demnach über 11 THz, was bei einer Bandmitte der drei ITU-Bänder von  $\lambda \approx 1550$  nm bzw.  $f \approx 193$  THz schon recht gut ins Bild der «*White Light Telecom*» passt. In Anbetracht der Signalaufteilung in Datenrate und Lichtfrequenz ergab sich hier eine spektrale Übertragungseffizienz von 0.8 b/s/Hz.

Versucht man nun auch diese Entwicklung mit einer weiteren Variante von *Moore's Law* zu beschreiben so folgt für die gesamte *Übertragungskapazität* eine Steigerung um den *Faktor 100* innerhalb eines *Zeitabschnitts von 10 Jahren*, was wiederum bedeutet, dass in 15 Jahren die *Tera-Ära* eigentlich Alltag sein müsste. All die hier angesprochenen Laborexperimente verwenden jedoch sehr spezielle, kurze und teure Glasfasertypen, deren nichtlineare Eigenschaften gerade für die Übertragung kurzer Pulse<sup>4</sup> gut geeignet sind.

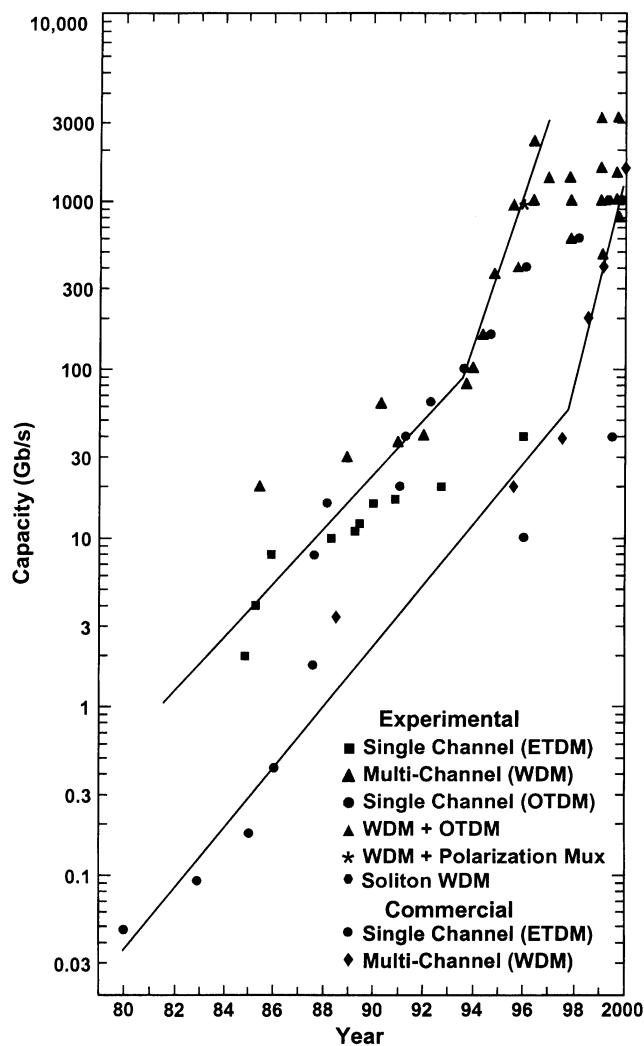


Fig.3.8: Historische Entwicklung der Übertragungskapazität optischer Glasfasersysteme. Die obere Linie charakterisiert die Laborversuche (hero experiments), währenddessen die untere Linie die Entwicklung kommerziell erhältlicher Systeme wiedergibt.

<sup>4</sup> Faser-Nichtlinearität erlaubt Übertragung spezieller Eigenlösungen in der Gestalt stabiler, kurzer Pulse: sog. *Solitonen*.

Man darf sich also mit Recht fragen, ob solche Systeme in der realen Welt überhaupt zur Anwendung kommen werden. Interessanterweise zeigt die chronologische Darstellung der optischen Übertragungssysteme in *Fig.3.8*, erstens, die durch *Moore's Law* prognostizierte exponentielle Kapazitätssteigerung, welche durch den zunehmenden Einsatz von Erbium dotierten Faserverstärkern (EDFA) Mitte der 90er Jahre eine weitere Beschleunigung erfährt. Zweitens, folgt die Evolution der kommerziellen Systeme einer gleichen, aber ungefähr um vier Jahre verzögerten Entwicklung der *hero experiments* und, drittens, wird gegen das Jahr 2000 eine Durchmischung von Laborprototypen und kommerziellen Systemen sichtbar. So setzen sich z.B. viele der OTDM×WDM-Systemprototypen aus kommerziell bereits erhältlichen 40 Gb/s-Links zusammen. Bei *Lucent* wird ab Herbst 2001 das optische OTDM×WDM-Übertragungssystem *WaveStar™1.6T OLS* für aggregierte Bitraten von 1.6 Tb/s (10 Gb/s × 160 Kanäle) und einer Maximaldistanz von 1020 km bereits als Gesamtsystem zum Kauf angeboten. Ein weiteres Beispiel hierfür ist die von *Alcatel* im Sommer 2001 realisierte 40 Gb/s × 32 = 1.28 Tb/s OTDM×WDM-Übertragung über eine Distanz von 2400 km. Dieser Weltrekord erfolgte mit Hilfe des kommerziell erhältlichen Glasfaserprodukts *TeraLight™* (auch diese Faser erlaubt die Belegung der drei zusammenhängenden ITU-Bänder *S*, *C*, und *L*). Über die weitere Entwicklung solcher Hochleistungssysteme darf man gespannt sein; zumindest haben ForscherInnen der *Universität Osaka* vorausgesagt, dass die optische Übertragungen von Datenströmen bei 160 Gb/s über Distanzen von 3000 km ( $BL = 4.80 \cdot 10^5 \text{ Gb/s} \cdot \text{km} = 4.80 \cdot 10^{14} \text{ b/s} \cdot \text{km}$ ) durchaus im Bereich des Machbaren liegt, wenn entsprechende Glasfaserabschnitte mit gegenläufigem Dispersionsverhalten hintereinandergelagert werden (Dispersionsmanagement).

Bisher haben wir uns fast ausschliesslich mit der technologischen Leistungsentwicklung von optischen Übertragungssystemen auseinandergesetzt. Solche Evolutionen unterliegen natürlich strengsten Selektionsmechanismen, wobei die *Kosten* sicher eines der schärfsten Kriterien darstellen. Ein gewiefter Geist könnte die Heuristik von *Moore's Law* gar damit erklären, dass Wirtschaftsprognosen eh immer von exponentieller Natur sein müssen, damit die entsprechende Firma das ungebrochene Vertrauen ihrer Finanziers genießt. Stellen die Kosten nun ein hartes Selektionskriterium dar, dann wird es zur Überlebensfrage ob die Realisierung optischer Innovationen den Kurven entsprechender «Powerpoint-Präsentationen» zu folgen vermag. Ein solch kausales Bild mag durchaus seinen Reiz haben, büsst aber spätestens dann an Erklärungskraft ein, wenn man sich mit dem gesamten *sozio-technischen* Komplex z.B. der optischen Telekommunikation auseinandersetzen muss. Aus dem Blickwinkel der Wirtschaft haben einfache Heuristiken hingegen eine gewisse Strahlkraft, so auch die sog. *Dixon-Clapp-Rule*, die besagt, dass die *Kosten pro Sprachkanal mit der Wurzel der Übertragungskapazität abnehmen*. Verheiratet man *Dixon-Clapp* nun mit *Moore* (bezüglich der Übertragungskapazität), dann ergibt sich eine *10-fache Verbilligung der Kanalkosten über einen Zeitabschnitt von 10 Jahren*.

Zunehmende Übertragungskapazitäten bei sinkenden Kosten: Zwei offensichtliche Tatsachen, die sich zwar gegenseitig bedingen, gleichzeitig aber auch eine Lawine von entsprechenden Bautätigkeiten auslösen. Noch nie in der Geschichte wurde derart viel wertvolles Glas in der Erde vergraben! So bemerkt z.B. ein Chefbeamter der *Deutschen Bundespost* im Nachschlag der deutschen Wiedervereinigung auf den Zustand des Telefonnetzes in den neuen Bundesländern angesprochen: *...die optische Verkabelung schreitet mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h voran!*

Wessen Zukunft ist das und wessen Alltagsleben hängt an einem Glasfaden?<sup>5</sup> Die Telekom-Anbieter haben uns alle im Auge, zumal die Chancen gut stehen, dass der *10G-Ethernet-Standard* von IEEE<sup>6</sup> bereits im Mai 2002 zugelassen wird. *Fiber-to-the-Desk* lautet hier eine geläufige Losung. Gemeint ist Ihr Desk und dieser soll in naher Zukunft für angeblich weniger als 1 Dollar optisch verdrahtet werden. Wir bleiben dran!

<sup>5</sup> Merke: 8 % der auf dem Internet verfügbaren Bandbreite wird allein durch Napster-Applikationen belegt (Herbst 2001).

<sup>6</sup> IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers): Dieser amerikanische Berufsverband agiert hier als Normierungsausschuss für den *10G-Ethernet-Standard*. Ein solcher Standard erlaubt die optische Übertragung bei 10 Gb/s über eine Distanz von maximal 40 km bei Singlemodfasern bzw. 300 m bei Multimodfasern.

**Lernkontrolle:** Was war der eigentliche Auslöser für den Entwicklungsschub in der Glasfasertechnologie? Nach welchen zwei Hauptkriterien werden Glasfasern eingeteilt? Welche Mechanismen begrenzen die Übertragungskapazität optischer Fiber-Links? Wie begründen Sie die Lage der optischen Transmissionsfenster? Welche Entwicklungstendenzen könnten für die Zukunft der Glasfaserkommunikation prägend sein und warum? Nehmen Sie ein rekordverdächtiges «Hero Experiment»: Gibt es überhaupt reale Datenquellen, welche diese Übertragungskapazität auslasten könnten? Wie begründen Sie entlang einer technischen und einer nachfrageorientierten Argumentationslinie den Bedarf von derart grossen Übertragungskapazitäten?

## Literatur

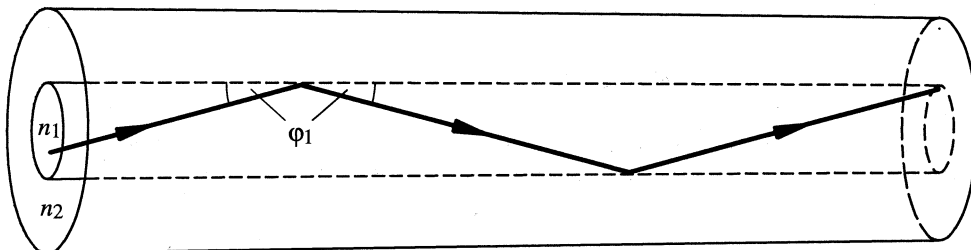
- [1] The Millenium Issue, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 6, no. 6, Nov./Dec. 2000.
- [2] Jeff Hecht. *The City of Light – The Story of Fiber Optics*. New York: Oxford University Press, 1999.
- [3] Jürgen Labs. *Verbindungstechnik für Lichtwellenleiter*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1989.

### 3.2 Einfache Betrachtungen mit Hilfe der geometrischen Optik

In den kommenden Abschnitten dieses 3. Kapitels wenden wir uns nun der konkreten Betrachtung von dielektrischen Wellenleitern zu. Aus Gründen der Plausibilität werden wir unsere Einführung in die Theorie der dielektrischen Wellenleiter – namentlich der *optischen Wellenleiter* – aber in mehreren Schritten vornehmen:

- Mit Hilfe der bestens bekannten *geometrischen Optik* sollen grundlegende Prinzipien verstanden und die geläufigen Kennzahlen für Glasfasern vorgestellt werden.
- Am einfachen Beispiel des *dielektrischen Parallelplatten-Wellenleiters (dielectric slab waveguide)* sollen später die fundamentalen Eigenschaften von dielektrischen Wellenleitern wie die Lösungsmenge der geführten Wellen (*Modi*) und deren *Dispersion* auf sehr plausible Weise und ohne grossen mathematischen Aufwand hergeleitet werden.
- Bei der Berechnung von Glasfasern werden wir später eine weitere Näherung für kleine Brechzahlunterschiede einführen – die sog. *weak guidance approximation*, und dadurch zu einer sehr einfachen Beschreibung von Wellenfeldern in Glasfasern gelangen.

Wie bereits im Zusammenhang zur *Fig.3.1* angetönt wurde, geschieht die Führung des Lichts in der Glasfaser, indem es an der Grenzschicht vom optisch dichteren Glaskern zum entsprechenden dünneren Glasmantel *totalreflektiert* wird (die genaueren Ausführungen zum Phänomen der *Totalreflexion* werden in *Anhang A* dargelegt).



*Fig.3.9: Strahlengang des Lichtes durch eine (multimode) Stufenprofilfaser. Das Licht trifft unter dem Winkel  $\varphi_1$  auf die Grenzschicht zwischen Faserkern und Mantel auf. In Bezug auf die Flächennormale wird dieser Einfallswinkel oft auch mit  $\theta_1 = \pi/2 - \varphi_1$  angegeben.*

Anhand der Vermassung aus *Fig.3.9*, in der  $\varphi_1$  den Auftreffwinkel kennzeichnet, liest sich das Brechungsgesetz von *Snellius* gemäss  $n_1 \cdot \cos(\varphi_1) = n_2 \cdot \cos(\varphi_2)$ , wobei  $\varphi_2$  hier für den Austrittswinkel des transmittierten Strahls in das Mantelmedium  $n_2$  steht. Da der Faserkern gegenüber dem Mantel das optisch dichtere Medium darstellt, gilt  $n_1 > n_2$  und man erhält genau dann *Totalreflexion*, wenn mittels transmittiertem Strahl wegen des Austrittswinkels  $\varphi_2 = 0$  ins Mantelmedium keine Leistung mehr in den Mantel dringt. Aus dem Brechungsgesetz berechnet sich der Grenzwinkel  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_c$  gemäss

$$\cos(\varphi_c) = \frac{n_2}{n_1} < 1 \quad (3.1)$$

Im Winkelbereich  $\varphi_l \in [0, \varphi_c]$  weist das Brechungsgesetz für  $\varphi_2$  keine rein reellen Lösungen mehr auf, d.h. es gibt im Mantelmedium  $n_2$  nur noch abklingende, *evaneszente*<sup>7</sup> Feldlösungen und die propagierenden Lichtstrahlen bleiben dadurch im Kernmedium  $n_1$  «gefangen».

Der einfachste Lichtwellenleiter ist die bereits erwähnte *Stufenprofilfaser* (*step index fiber*), welche gemäss Fig.3.2 in der Multimode-Ausführung aus einem runden Glaskern mit der Brechzahl  $n_1$  und einem Durchmesser von 50 – 100  $\mu\text{m}$  besteht. Die Brechzahl  $n_2$  des umgebenden Mantelmediums ist gegenüber derjenigen des Faserkerns um etwa 1 % kleiner. Dadurch ergibt sich ein Grenzwinkel  $\varphi_c = 9^\circ$ . Alle optischen Strahlen mit  $\varphi_l < 9^\circ$  werden demnach durch wiederholte Totalreflexion auf einem «Zick-Zack-Kurs» im Kern geführt. Dieser Winkel ist relativ klein, d.h. die Laufzeitunterschiede der einzelnen Strahlen innerhalb dieses Winkelbereichs sind auch nicht gerade gross (und gleichermassen ist auch der Bereich der auftretenden Gruppenlaufzeiten<sup>8</sup> eingeschränkt): Dies ist mit ein Grund, warum mehrwellige optische Signalübertragung bis zu gewissen Distanzen überhaupt ermöglicht ist.

Gehen wir in Gedanken wieder zurück an den Faseranfang, zur Faserstirnfläche sozusagen. Wie Fig.3.10 zeigt, lässt sich die Bedingung für den Grenzwinkel  $\varphi_c$  auch als eine Bedingung für einen maximalen Einkopplungswinkel  $\varphi_a$  lesen.

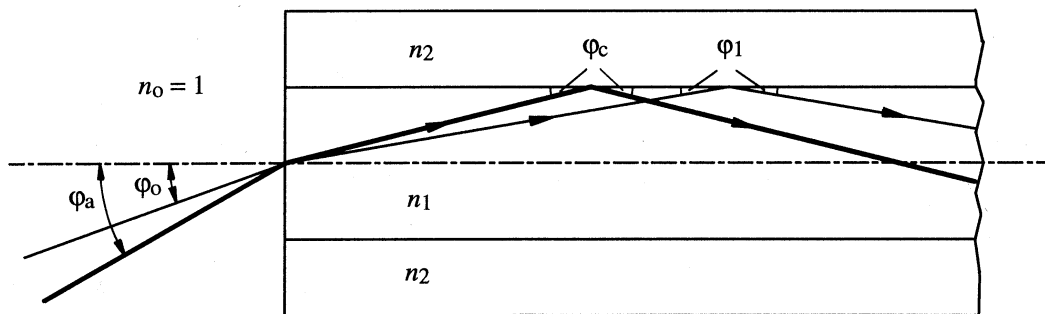


Fig.3.10: Lichteinkopplung in eine (mehrwellige) Stufenprofilfaser. Der Grenzwinkel  $\varphi_c$  kann hier sofort in einen maximalen Einkopplungswinkel  $\varphi_a$  übersetzt werden.

Damit der Winkel  $\varphi_l$  des Lichtstrahls in der Faser den Grenzwinkel  $\varphi_c$  nicht überschreitet, muss der Einkopplungswinkel  $\varphi_0$  an der Faserstirnfläche sich stets innerhalb des sogenannten *Akzeptanzwinkels*  $\varphi_a$  befinden. Bemühen wir hierzu das Brechungsgesetz, dann heisst es entsprechend

$$n_0 \cdot \sin(\varphi_a) = n_1 \cdot \sin(\varphi_c) = n_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.2),$$

wobei für  $\sin(\varphi_c)^2 = 1 - \cos(\varphi_c)^2$  die Gleichung (3.1) zum Tragen kommt. Mit dem ersten und dem

<sup>7</sup> *Evaneszent* heisst abklingend. Zu den Mechanismen und Notationen siehe auch *Anhang A*.

<sup>8</sup> Einfache geometrische Betrachtung: Breitet sich eine homogene ebene Welle jeweils unter dem Winkel  $\varphi_l$  auf Zick-Zack-Kurs entlang der Faserrichtung  $z$  aus, dann kann die *Phasengeschwindigkeit*  $v_p$ , d.h. die Geschwindigkeit der Wellenfronten entlang der  $z$ -Achse mit  $v_p = c_0 / (n_1 \cdot \cos(\varphi_l))$  angegeben werden. Die Beziehung für die *Gruppengeschwindigkeit*  $v_g$ , d.h. die Geschwindigkeit der Wellenfronten *projiziert* auf die  $z$ -Achse lautet hingegen  $v_g = (c_0 / n_1) \cdot \cos(\varphi_l)$ .

letzten Term von (3.2) lässt sich das «Akzeptanzproblem» somit vollständig beschreiben. Man nennt den Parameter  $\sin(\varphi_a)$  auch die *numerische Apertur NA* und schreibt im Fall des Luft-Glasfaserübergangs ( $n_0 = 1$ )

$$NA = \sin(\varphi_a) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta} \quad (3.3),$$

wenn der Brechungsindexunterschied  $\Delta$  zwischen Faserkern und Mantel durch den einfachen Ausdruck  $n_2 = n_1(1 - \Delta)$  gegeben ist. Der Mantelindex  $n_2$  wird in der Praxis so gewählt, dass für  $\Delta$  Werte von 1 % ... 3 % (bei *multimode* Fasern), bzw. 0.2 % ... 1 % (bei *singlemode* Fasern) resultieren.

**Beispiel:** Für eine Stufenprofilfaser, dessen Kernmedium eine Brechzahl von 1.5 aufweist, ergibt sich bei einer Brechzahldifferenz von 1% eine numerische Apertur  $NA = 0.21$  und entsprechend dazu einen Akzeptanzwinkel von  $12.2^\circ$ .

Sämtliches Licht, welches unter einem kleineren Winkel als  $12.2^\circ$  in die Glasfaser einkoppelt, wird von der Glasfaser also auch geführt. Alle anderen Lichtstrahlen werden somit keine geführten Modi der Faser anregen können. Eine etwas magere Ausbeute!

Wir können diese prekäre Situation in einem Gedankenexperiment noch weiter verdeutlichen. Der Luft-Glasfaserkernübergang als reiner Indexsprung betrachtet, ergibt – um nochmals beim obigen Beispiel zu bleiben – mit der Beziehung (A.9) aus *Anhang A* für die *Leistungstransmission T* (*transmittance*) unter quasi-senkrechttem Einfall ( $\varphi_0 < 12.2^\circ$ ) ungefähr 96 %. Gilt es hingegen eine punktförmige, in den ganzen Halbraum abstrahlende Lichtquelle (z.B. LED, Laserdiode) an die Faser anzukoppeln, dann ist es die *numerische Apertur*, welche den Kopplungswirkungsgrad bestimmt. Man stelle sich vor: Diese punktförmige, in den ganzen Halbraum abstrahlende Lichtquelle beleuchte eine umgebende Einheitshalbkugel entsprechend ihrer Ausstrahlcharakteristik mehr oder weniger homogen von Innen. Der Fleck, den ein Kegel mit  $24.4^\circ$  Öffnungswinkel an die Kugelinnenwand projiziert, entspricht somit etwa dem Leistungsanteil, der von der Lichtquelle in die Faser gekoppelt werden kann. Anhand dieses zugegebenermassen etwas intuitiven Modells erhalten wir für kleine Grenzwinkel  $\varphi_a$  einen *Einkopplungswirkungsgrad*  $\eta_c$ , der sich proportional zu  $NA^2$  verhält. Unter Berücksichtigung des Indexsprungs verallgemeinert sich die Beziehung dann zu

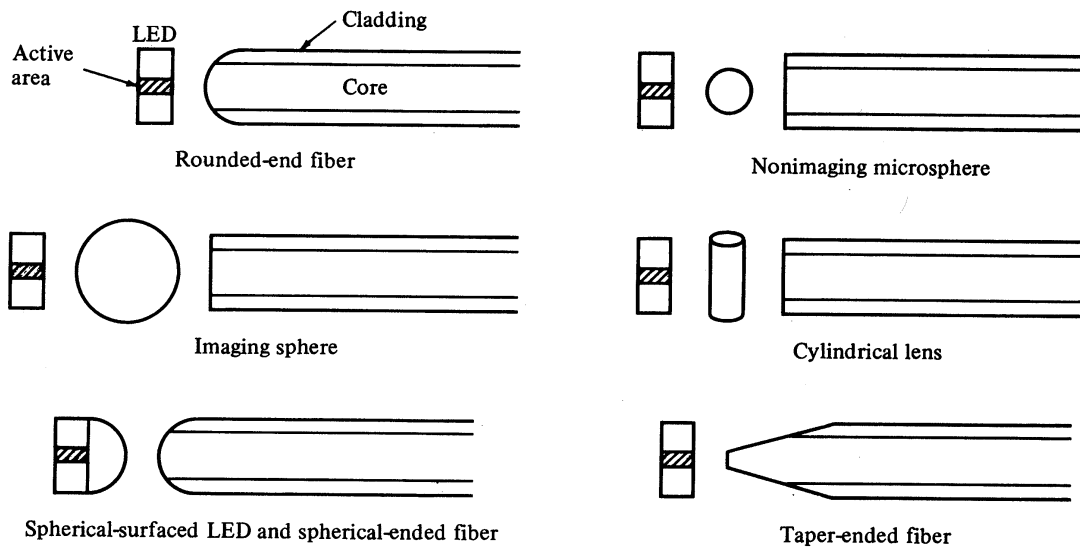
$$\eta_c \propto T \cdot NA^2 = (1 - R) \cdot NA^2 \quad (3.3).$$

Die Grösse  $R = 1 - T$  steht für die *Leistungs-, bzw. Intensitätsreflexion (reflectance)*. Wir sehen: Bei direkter Faserankopplung (*butt coupling*) bewegt sich der *Einkopplungswirkungsgrad*  $\eta_c$  im Bereich weniger Prozente! Bisher wurde nichts über die wahren Grössenverhältnisse der (als punktförmig angenommenen) Quelle im Vergleich zur Faserstirnfläche ausgesagt. Wir haben die fehlende Information einfach in der Proportionalität «versteckt». Oft ist die strahlende Fläche  $a_q^2 \cdot \pi$  z.B. einer Laserdiode verschieden von der Stirnfläche  $r_c^2 \cdot \pi$  des Faserkerns, wobei die Quelle der Einfachheit halber als kreisförmig angenommen wurde. Unter diesem Gesichtspunkt erhalten wir (ohne Herleitung) für die in die Fiber eingekoppelte Leistung  $P_c$



$$P_c = P_q \cdot \left( \frac{\min\{r_c, a_q\}}{a_q} \right)^2 \cdot T \cdot NA^2 = P_q \cdot \left( \frac{\min\{r_c, a_q\}}{a_q} \right)^2 \cdot (1 - R) \cdot NA^2 \quad (3.4).$$

Die Grösse  $a_q$  steht für den Radius der strahlenden Quellenfläche,  $r_c$  entsprechend für den Radius des Faserkerns und  $\min\{.,.\}$  nimmt das Minimum der beiden Argumente und macht dadurch eine Fallunterscheidung zwischen den beiden Szenarien, bei dem die strahlende Quellenfläche grösser als der Faserkernquerschnitt ist, bzw. bei dem diese kleiner ist. Geht man zusätzlich davon aus, dass die total ausgestrahlte Leistung der Quelle  $P_q$  selbst proportional zu  $a_q^2 \cdot \pi$  ist, dann ergibt sich eine optimale Leistungseinkopplung, wenn die Quellenfläche mit dem Faserkernquerschnitt übereinstimmt. In der Optoelektronik und der integrierten Optik stellt die Faserankopplung eine der häufigsten Problemstellungen dar, die man zu bewältigen hat. Es liegt daher auf der Hand, dass die Komplexität eines Ankopplungssystems möglichst klein zu halten ist. Aus diesem Grund bietet einzig der Fall  $a_q < r_c$  ein gewisses Optimierungspotenzial: Man versucht mit möglichst einfachen Mitteln den Strahlfleck  $a_q^2 \cdot \pi$  der Quelle zu vergrössern<sup>9</sup> und so auf den Faserkernquerschnitt abzubilden. Geeignete Massnahmen sind in *Fig.3.11* abgebildet.



*Fig.3.11: Die am häufigsten verwendeten Linsensysteme um die Fasereinkopplung zu verbessern.*

Blicken wir kurz zurück: Wir haben in den letzten Abschnitten versucht, sowohl die zugrunde liegenden Mechanismen der Lichtführung in der Glasfaser, als auch die Fasereinkopplung mit Hilfe des optischen Strahlmodells herzuleiten. Es scheint nun naheliegend, dass wir die Analyse der Wellenausbreitung in gleicher Weise fortführen. Leider wird dies für dielektrische Wellenleiter zu wenig genau, denn wie der *Anhang A* ausführt, sind die Verhältnisse bei der «Spiegelung» (Totalreflexion) von optischen Strahlen an dielektrischen Grenzflächen etwas komplexer. Obschon bei der Totalreflexion die gesamte Leistung reflektiert wird, dringt die Welle um eine gewisse *Eindringtiefe*  $x_E$  ins optisch weniger dichte Medium ein und erfährt die effektive Spiegelung erst nach dieser Distanz.

<sup>9</sup> Die Vergrösserung der strahlenden Fläche (Nahfeld) bedeutet immer auch eine entsprechende Verkleinerung des Ausstrahlungswinkels (Fernfeld). Diese Beziehung ist fundamental und kann mit Hilfe der sogenannten *Fourier-Optik* leicht hergeleitet werden (siehe hierzu den Literaturhinweis [6]).

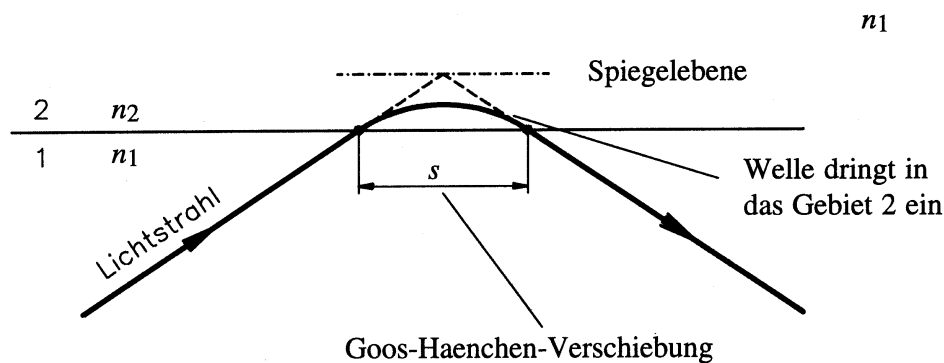


Fig.3.12: Die Goos-Haenchen-Verschiebung: Die Strahlreflexion erscheint um  $s$  in Ausbreitungsrichtung verschoben. Dieser Effekt rührt von der um  $x_E$  (Eindringtiefe) versetzten effektiven Spiegelebene her.

Der reflektierte Lichtstrahl tritt daher erst nach einer scheinbaren Länge  $s$  in Ausbreitungsrichtung wieder ins Kernmedium ein. Dieser Versatz  $s$  heisst *Goos-Haenchen-Verschiebung* und ist in Fig.3.12 schematisch dargestellt.

Wie bereits in *Anhang A* angedeutet wird, können derartige Reflexionsverhältnisse eigentlich nur mit Hilfe der exakten Wellengleichungen analysiert werden. Dennoch gibt es bekannte Lehrbücher, die den gesamten Stoff der dielektrischen Wellenleiter mit Hilfe der geometrischen Optik «abwickeln». Dies mag einerseits historisch bedingt sein, andererseits ist den optischen Strahlen eine gewisse didaktische Anschaulichkeit nicht abzuspüren. Trotzdem, wir wählen hier einen anderen Weg. Am einfachen Beispiel des *dielektrischen Parallelplatten-Wellenleiters* (*dielectric slab waveguide*) sollen später die fundamentalen Eigenschaften von dielektrischen Wellenleitern wie die Lösungsmenge der geführten Wellen (*Modi*) und deren *Dispersion* direkt aus den *Wellengleichungen* hergeleitet werden. Der hiermit vorgestellte Analysevorgang kann später dann auch in sehr anschaulicher Art auf das zylindrische Wellenleiterproblem (die Glasfaser) übertragen werden. Daher meinen wir: In der *Photonik* stellen die Wellengleichungen – trotz allem – die beste «didaktische Basis» dar.

**Lernkontrolle:** Was genau charakterisiert die numerische Apertur NA? Haben Sie bereits eine Vorstellung, warum das Strahlenmodell der geometrischen Optik gerade bei der mehrwelligen Stufenprofilfaser zum Zuge kommt? Wie müsste eine ideale Ankopplung eines Flächenstrahlers an die Glasfaser erfolgen? Welche limitierenden Faktoren treten dabei auf? Welchem Phänomen wird mit der Goos-Haenchen-Verschiebung Rechnung getragen?

## Literatur

- [4] Werner Bächtold. *Lineare Elemente der Höchstfrequenztechnik*. Zürich: vdf – Verlag der Fachvereine, 2. Auflage, 1998.
- [5] Gerd Keiser. *Optical Fiber Communications*. Boston: McGraw-Hill, Series in Electrical and Computer Engineering, 3<sup>rd</sup> Edition, 2000.
- [6] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. New York: McGraw-Hill, Series in Electrical and Computer Engineering, 2<sup>nd</sup> Edition, 1996.

### 3.3 Die Wellengleichung für zylindrische Wellenleiterstrukturen

Im folgenden Abschnitt sollen die Wellengleichungen für die Klasse der *querinhomogenen dielektrischen* Wellenleiter behandelt werden. Zu diesem Zweck betrachten wir Strukturen, deren allgemeine Gestalt z.B. in Fig.3.13 abgebildet ist.

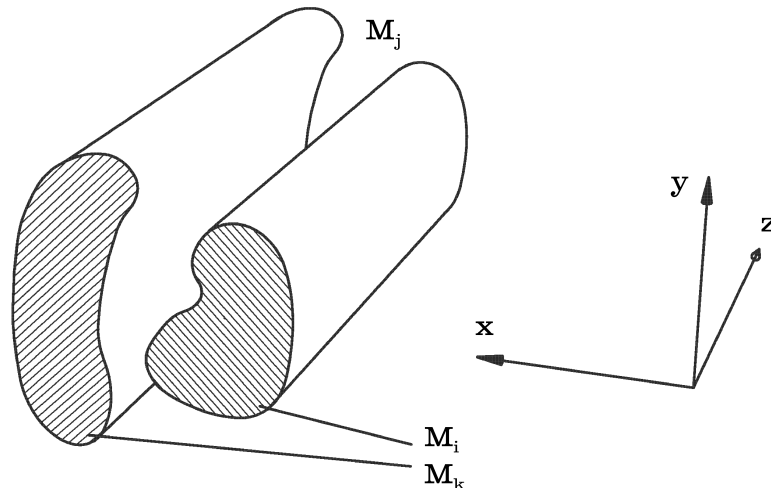


Fig.3.13: Allgemeine Form einer zylindrischen, dielektrischen Wellenleiterstruktur, gegeben durch die Materialgebiete  $M_i$ ,  $M_j$  und  $M_k$ .

Da Wellenleiter – wie der Name bereits besagt – elektromagnetische Wellen führen und dadurch die Signalübertragung von einem Ort zu einem entsprechend entfernten Ort ermöglichen, können in deren Aufbau grundsätzlich zwei Richtungen ausgezeichnet werden: 1. Wellenleiterstrukturen sind *homogen* in Ausbreitungsrichtung (*Longitudinalrichtung*, die wir fortan mit der  $z$ -Achse gleichsetzen); 2. Sie sind *inhomogen* bezüglich allen Richtungen, die in der Querschnittsebene liegen (d.h. der  $xy$ -Ebene bzw. in *Transversalrichtung*). Durch diese Begrenzungen (Inhomogenitäten) innerhalb der Querschnittsebene werden Bedingungen für *transversale Resonanzen* geschaffen, welche wiederum die Grundlage für die *longitudinale Wellenausbreitung* bilden. Kurz: Die geführte Wellenausbreitung in zylindrischen Wellenleiterstrukturen stellt ein *Eigenwertproblem* dar. Die Ausbreitungskonstante (*Eigenwert*) und die zugehörige Feldverteilung der geführten Welle (*Eigenfunktion*) sind die Lösungen dieses Eigenwertproblems.

#### 3.3.1 Lösungsansatz durch Separation der Wellenleitergeometrie

Doch bevor wir uns einigen konkreten Eigenwertproblemen zuwenden, gilt es zunächst die *Maxwellgleichungen* und die resultierenden *Wellengleichungen* für das zylindrische Wellenleiterproblem umzudeuten, indem wir uns die angetönte Separation der zylindrischen Wellenleitergeometrie in eine *transversale T-Richtung* und in die *longitudinale z-Richtung* zunutze machen:

$$\vec{r} = \vec{r}_T + r_z \cdot \vec{e}_z \quad (3.5).$$

Ausgehend von den *Maxwellgleichungen* soll dann in einem weiteren Schritt die vektorielle *Wellengleichung* für elektromagnetische Wellen in zylindrischen Wellenleiterstrukturen angegeben werden. Eine allgemeine Herleitung der Wellengleichung wurde bereits in *Anhang C* in allen detaillierten Schritten vorweg genommen, somit können wir uns ganz auf den technisch wichtigen Spezialfall des optischen Wellenleiters konzentrieren. Die technisch gebräuchlichste Form<sup>10</sup> der *Maxwellgleichungen* lautet

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} & \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)-(3.9),$$

wobei die Rotationsgleichung für das  $\mathbf{E}$ -Feld (3.6) den *Induktionssatz* wiedergibt und diejenige für das  $\mathbf{B}$ -Feld (3.7) dem *Durchflutungsgesetz* entspricht. Die Divergenzgleichungen (3.8) und (3.9) zeigen an, ob das entsprechende Vektorfeld quellenfrei ist oder nicht (die *Ladungsdichte*  $\rho$  in (3.8) ist demnach die Quelle des  $\mathbf{E}$ -Feldes). Nebst dem  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{H}$ -Feld kommen in dieser allgemeinen Formulierung auch das  $\mathbf{B}$ -Feld (Feld der *magnetischen Induktion*) und  $\mathbf{D}$ -Feld (Feld des *dielektrischen Verschiebungsstroms*) zum tragen. Wie in *Anhang E* begründet wird, dürfen in der *Photonik* folgende Vereinfachungen gemacht werden:

- Bei den *Maxwellgleichungen* wird *Quellenfreiheit* angenommen, d.h. die klassischen Quellenterme  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  existieren in dieser Form nicht mehr und werden daher identisch Null gesetzt.
- Optische Wellen werden von *dielektrischen* Wellenleiterstrukturen geführt<sup>11</sup>. Aus diesem Grund spielen die *magnetischen Eigenschaften* solcher Materialien kaum eine Rolle und können in den Wellengleichungen entsprechend mit  $\mu \equiv \mu_0$  ( $\mu_r = 1$ ) vernachlässigt werden.
- In der *Photonik* können die optischen Signale jeweils als entsprechend modulierte Lichtträgersignale aufgefasst werden, deren optische Frequenz um Grössenordnungen über der Modulationsfrequenz liegt. Aus diesem Grund werden wir das optische Feld als *harmonisch* voraussetzen.
- Zusätzlich sollen alle involvierten Medien als *homogen* angenommen werden.

Unter Einbezug der *Materialgleichungen*

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} \end{aligned} \quad (3.10)-(3.11)$$

und für den Fall *homogener* Medien schreiben sich die *Maxwellgleichungen* gemäss

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} & \nabla \times \vec{H} &= \epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)-(3.15).$$

<sup>10</sup> In MKS-Einheiten.

<sup>11</sup> Da sich Metalle bei *optischen Frequenzen* nicht mehr wie Metalle «aufführen», ist auch ihre charakteristische Eignung bei der Wellenführung (Zweidrahtleitung, Koaxialkabel, Hohlleiter) nicht mehr gegeben.

Wie in *Anhang C* ausgeführt wird, lässt sich unter diesen Bedingungen eine *homogene Wellengleichung* herleiten. Dies geschieht z.B. für das  $\mathbf{E}$ -Feld, indem man den Rotationsoperator auf (3.12) wirken lässt und (3.13) nochmals nach der Zeit ableitet und das Resultat in das vorherige Ergebnis einsetzt, wobei der Divergenzfreiheit des  $\mathbf{E}$ -Felds mittels (3.14) Rechnung getragen werden muss. In Übereinstimmung mit der Herleitung aus *Anhang C* für den Ausdruck (C.21) erhalten wir so die *homogenen, vektoriellen Wellengleichungen* der Elektrodynamik

$$\begin{aligned} \left( \Delta - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} &= 0 \\ \left( \Delta - \mu \varepsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)-(3.17).$$

Obwohl die beiden Wellengleichungen (3.16) und (3.17) sehr einfach sind, können, selbst mit den getroffenen Einschränkungen der *zylindrischen* Geometrie und der *Homogenität* aller involvierten Materialien, wenig Probleme analytisch gelöst werden. Wir machen uns aus diesem Grund das *harmonische* Zeitverhalten des optischen Feldes zu Nutze und schreiben die Felder, unter Berücksichtigung der entsprechenden Vorzeichenkonvention<sup>12</sup> mittels sogenannter *Phasoren* an

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \right\} \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (3.18)-(3.19),$$

wobei  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  und  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  Vektoren mit komplexen Komponenten (*Phasoren*) darstellen. Bis auf Widerruf sollen ab jetzt alle Feldgrößen als *Phasoren* aufgefasst werden. Eingesetzt in (3.16) bzw. (3.17) ergeben sich mit  $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$  und  $\partial^2/\partial t^2 \rightarrow -\omega^2$

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega^2 \mu \varepsilon) \vec{E} &= 0 \\ (\Delta + \omega^2 \mu \varepsilon) \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)-(3.21),$$

was sich wiederum mit  $k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$  folgendermassen schreibt

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \vec{E} &= 0 \\ (\Delta + k^2) \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)-(3.23).$$

Diese beiden Wellengleichungen mit harmonischer Zeitabhängigkeit heissen *Helmholtzgleichungen*.

<sup>12</sup> Die *Vorzeichennotation* hängt von der Wahl des harmonischen Ansatzes ab – Konvention: *Leitungstheorie*  $\rightarrow e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , *Feldtheorie*  $\rightarrow e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ . Im Fall der Abstrahlung werden Felder vom Typ  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  angenommen.

Gehen wir nun zurück zum Separationsansatz (3.5) für die Ortsvariable  $\mathbf{r}$ . Dieser Ansatz stellt sozusagen die erste Konzession an das *zylindrische* Wellenleiterproblem dar. Als nächstes gilt es nun die zugehörige Separation der entsprechenden Differentialoperatoren zu finden, damit wir (3.22)-(3.23) in einer geeigneten Form darstellen können. Mit Hilfe der Vektoridentität (B.21) aus *Anhang B* separiert sich der *Laplace-Operator*  $\Delta$  gemäss

$$\Delta \equiv \Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

und zwar unter der Annahme, dass die  $z$ -Achse in Ausbreitungsrichtung zeigt, was wir übrigens auch mit der Separation des Wellenvektors

$$\vec{k} = \vec{k}_T + k_z \cdot \vec{e}_z \quad (3.25)$$

nochmals bekräftigen können. Nimmt man die Zerlegung der *homogenen Helmholtzgleichungen* im Sinn von (3.24) und (3.25) mit  $k^2 = k_T^2 + k_z^2$  z.B. für das  $\mathbf{E}$ -Feld vor,

$$\left( \Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_T^2 + k_z^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (3.26)$$

dann folgt daraus für die Ausbreitungsrichtung sofort

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_z^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (3.27).$$

Dies trägt einerseits, wegen  $\partial/\partial z \rightarrow -ik_z$  und  $\partial^2/\partial z^2 \rightarrow -k_z^2$ , dem harmonischen Ansatz vom Typ  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  Rechnung und andererseits haben wir laut (3.25) die Wellenausbreitung entlang der positiven  $z$ -Richtung mit  $e^{-ik_z z}$  bezeichnet. Die Lösungen der *homogenen Helmholtzgleichung* (3.22) bzw. (3.23) in  $z$ -Richtung sind demnach bereits bekannt: Sie sind von der einfachen Gestalt einer *ebenen Welle*, d.h. alle Komponenten der erhaltenen Feldlösungen breiten sich gemäss  $e^{\pm ik_z z}$  entlang des Wellenleiters aus. In Bezug auf (3.26) kann auch noch den *transversale* Anteil gesondert angegeben werden. Man erhält so für beide Felder

$$\begin{aligned} (\Delta_T + k_T^2) \vec{E} &= 0 \\ (\Delta_T + k_T^2) \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)-(3.29).$$

Im Gegensatz zu (3.27) sind die Lösungen des Querschnittsproblems noch nicht bekannt. Sie müssen,

ausgehend von einer gegebenen Frequenz  $\omega$  und anhand des inhomogenen Wellenleiterquerschnitts  $\varepsilon(\vec{r}_T)$  unter Einhaltung der *Randbedingungen*<sup>13</sup> (für die entsprechenden Feldkomponenten an den unterschiedlichen Materialgrenzen  $\partial M_{ij}$ ) berechnet werden. Die *homogenen Helmholtzgleichungen* sind im Kontext von Wellenleiterstrukturen

$$\begin{aligned} (\Delta_T + k_T^2) \vec{E}(\vec{r}_T) &= 0 \\ (\Delta_T + k_T^2) \vec{H}(\vec{r}_T) &= 0 \end{aligned} \tag{3.28)-(3.29}$$

mit

$$k_T^2 = \omega^2 \mu \varepsilon(\vec{r}_T) - k_z^2 \tag{3.30}$$

als zwei entkoppelte *Eigenwertgleichungen* aufzufassen. Der Eigenwert wird sowohl durch die transversale Wellenzahl  $k_T = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  als auch durch die Ausbreitungskonstante  $k_z$  wiedergegeben; die zugehörigen Eigenfunktionen entsprechen den Feldverteilungen  $\mathbf{E}(\vec{r}_T)$  bzw.  $\mathbf{H}(\vec{r}_T)$  entlang der Querschnittsebene. Die *homogenen Helmholtzgleichungen* (3.28)-(3.29) sind zwar bezüglich der Transversalebene angesetzt, müssen aber für alle drei Komponenten des  $\mathbf{E}$ -Felds bzw. des  $\mathbf{H}$ -Felds erfüllt sein. Auch wenn die beiden *Helmholtzgleichungen* eine Entkopplung aller Feldkomponenten<sup>14</sup> für das  $\mathbf{E}$ -Feld bzw. für das  $\mathbf{H}$ -Feld suggerieren, sind es wiederum die *Maxwellgleichungen* (3.12)-(3.15) (und natürlich auch die *Randbedingungen* an den Grenzflächen der Wellenleitergeometrie), die eine entsprechende Verknüpfung der Feldkomponenten wieder erzwingen. Wie dies bei einem praktischen Vorgehen geschehen soll, berichtet der nächste Abschnitt.

### 3.3.2 Separationsansatz für die Feldkomponenten

Bei der Lösung eines konkreten Problems stellt sich umgehend die Frage, welches nun die *unabhängigen* Feldkomponenten und welches die daraus *abhängigen* Komponenten des Problems sind. Es liegt auf der Hand, dass die Anzahl der *unabhängigen* Feldkomponenten möglichst klein sein soll, damit sich deren Bestimmung – d.h. die Lösung des eigentlichen Wellenproblems – auch entsprechend einfach gestaltet. Diese Suche nach einer möglichst geringen Anzahl *unabhängiger* Komponenten ist demnach der Suche nach einer *geeigneten Entkopplung der Maxwellgleichungen* gleichzusetzen. Gerade in der Frage nach der *geeigneten Entkopplung* wurden bereits die unterschiedlichsten Anstrengungen unternommen. So hat sich das Problem z.B. mit der Einführung von Hilfsfunktionen, den sog. *Potentialen*, auf die Berechnung von 4 unabhängigen Komponenten reduziert: Das *Skalarpotential*  $\varphi$  und die 3 Komponenten des *Vektorpotentials*  $\mathbf{A}$ . Für beide Funktionen  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  kann eine identische Wellengleichung vom Typ (3.16)-(3.17) angeschrieben werden, deren Entkopplung aber durch eine geeignete Wahl von  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  – d.h. mit Hilfe der sogenannten *Lorentz-Eichung* – zusätzlich erzwungen werden muss. Die Grössen  $\varphi$  und  $\mathbf{A}$  sind somit implizit miteinander verbunden<sup>15</sup> und es liegt auf der Hand, dass für solche Grössen keine einfachen *Randbedingungen*

<sup>13</sup> Siehe hierzu (C.8) und (C.9) aus *Anhang C*.

<sup>14</sup> Gilt strenggenommen nur für die Problemformulierung in einem *kartesischen* Koordinatensystem.

<sup>15</sup> Die *Lorentzeichung*  $\text{div}(\mathbf{A}) = -(\mu\sigma + \mu\varepsilon \partial/\partial t) \varphi$  übernimmt hier eine ähnliche Funktion wie die Verknüpfung der Maxwellgleichungen über die Ladungserhaltung ihrer Quellenterme  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  (siehe auch (C.30) in *Anhang C*).

mehr formulierbar sind. Leider verbirgt sich hinter dieser speziellen Wahl von *Potentialfunktionen* die Tatsache, dass die Anzahl von 4 *unabhängigen* Komponenten immer noch nicht minimal ist, um das gesamte elektromagnetische Feld der gegebenen Problemstellung beschreiben zu können. Daher wurde in einem weiteren Ansatz gezeigt, dass die elektromagnetischen Felder nur von einem einzigen Vektorfeld, dem sogenannten *Hertzschen Vektor*  $\mathbf{\Pi}$ , abgeleitet werden können, was das gesamte Problem nun auf 3 *unabhängige* Feldkomponenten reduziert hat. Auch diese künstlich gewählte Funktion  $\mathbf{\Pi}$  lässt sich als *Potential* deuten. Für die Wellenausbreitung im homogenen quellenfreien Raum kann  $\mathbf{\Pi}$  in zwei weitere Vektoren  $\mathbf{\Pi}_e$  und  $\mathbf{\Pi}_h$  separiert werden, die im Falle von geführten Wellenfeldern lediglich noch 2 longitudinale, *unabhängige* Komponenten aufweisen. Die Vereinfachung, die man sich mit der Einführung jeglicher Art von *Potentialfunktionen* erhofft hat, wurde aber teuer erkaufte, zumal die Behandlung der entsprechenden *Randbedingungen* schlicht «unnatürlich» und unpraktikabel kompliziert geworden ist.

Trotz dieser etwas entmutigenden Entwicklung wollen wir hier eine etwas andere *Entkopplung der Maxwellgleichungen* anstreben. Sie basiert auf der direkten *Separation der Phasoren* für das  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{H}$ -Feld (lies  $\mathbf{v} = \mathbf{E}, \mathbf{H}$ )

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{e}_z \cdot v_z \quad (3.31)$$

mit den *transversalen* bzw. *longitudinalen* Komponenten

$$\vec{v}_T = \vec{e}_z \times \vec{v} \times \vec{e}_z \quad \vec{e}_z \cdot v_z = \vec{e}_z \cdot \vec{v} \cdot \vec{e}_z \quad (3.32)$$

und führt uns direkt zu einer Minimalmenge *unabhängiger* Komponenten, welche aber, im Gegensatz zu den *Potentialen*, nun als «natürliche» Feldgrößen vorliegen. Zu diesem Zweck gehen wir wieder von den *Maxwellgleichungen* (3.12)-(3.15) aus, setzen aber entsprechend separierbare Varianten der Differentialoperatoren an. Für den Gradienten, die Divergenz und die Rotation lauten diese gemäss (B.17)-(B.19) aus *Anhang B*

$$\begin{aligned} \nabla s &= \nabla_T s + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} s \\ \nabla \cdot \vec{v} &= \nabla_T \cdot \vec{v}_T + \frac{\partial}{\partial z} v_z \\ \nabla \times \vec{v} &= \left( \nabla_T \cdot (\vec{v}_T \times \vec{e}_z) \right) \cdot \vec{e}_z + \left( \nabla_T v_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{v}_T \right) \times \vec{e}_z \end{aligned} \quad (3.33)-(3.35).$$

In der Schreibweise von (3.35) liest sich (3.12), d.h. die Rotation des  $\mathbf{E}$ -Felds aus den *Maxwellgleichungen* entsprechend

$$\nabla \times \vec{E} = \left( \nabla_T \cdot (\vec{E}_T \times \vec{e}_z) \right) \cdot \vec{e}_z + \left( \nabla_T E_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_T \right) \times \vec{e}_z = -i\omega\mu\vec{H} \quad (3.36).$$



Komponentenweise geordnet ergeben sich daraus zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \left( \nabla_T E_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_T \right) \times \vec{e}_z &= -i\omega\mu\vec{H}_T \\ \nabla_T \cdot (\vec{E}_T \times \vec{e}_z) &= -i\omega\mu H_z \end{aligned} \quad (3.37)-(3.38).$$

Wir führen nun die Vektormultiplikation  $\vec{e}_z \times$  von links mit der Gleichung (3.37) aus und erhalten wegen  $\vec{e}_z \times \mathbf{v}_T \times \vec{e}_z = \mathbf{v}_T$  und  $\partial/\partial z \rightarrow -ik_z$  den (vektoriellen) Ausdruck

$$k_z \vec{E}_T - i\nabla_T E_z = -\omega\mu (\vec{e}_z \times \vec{H}_T) \quad (3.39).$$

Die zweite Gleichung (3.38) lässt sich durch die Relation  $\mathbf{v}_T \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \mathbf{v}_T$  in eine vergleichbare (skalare) Form bringen

$$\nabla_T \cdot (\vec{e}_z \times \vec{E}_T) = i\omega\mu H_z \quad (3.40).$$

Für das  $\mathbf{H}$ -Feld können wir nun die gleichen Überlegungen und Rechenschritte ausführen, oder als Alternative dazu das *Dualitätsprinzip*<sup>16</sup> bezüglich der quellenfreien *Maxwellgleichungen* anwenden und erhalten die analogen Ausdrücke zu (3.39) und (3.40). Die gemäss den entsprechenden Vektoroperatoren *separierten Maxwellgleichungen* heissen nun

$$\begin{aligned} k_z \vec{E}_T - i\nabla_T E_z &= -\omega\mu (\vec{e}_z \times \vec{H}_T) \\ k_z \vec{H}_T - i\nabla_T H_z &= \omega\varepsilon (\vec{e}_z \times \vec{E}_T) \\ \nabla_T \cdot (\vec{e}_z \times \vec{E}_T) &= i\omega\mu H_z \\ \nabla_T \cdot (\vec{e}_z \times \vec{H}_T) &= -i\omega\varepsilon E_z \end{aligned} \quad (3.41)-(3.44).$$

Was haben wir gewonnen? Einiges, denn diese Darstellung der *Maxwellgleichungen* bezieht sich einerseits auf das *transversale* Wellenleiterproblem und veranschaulicht andererseits in äusserst expliziter Weise die Verknüpfung zwischen den *transversalen* und den *longitudinalen* Feldkomponenten. Wir können jetzt nach Linearkombinationen suchen, damit sich die *transversalen* Feldkomponenten einzig durch die *longitudinalen* Feldkomponenten ausdrücken lassen, was sicher von Vorteil wäre, zumal mit  $E_z$  und  $H_z$  dann die minimale Anzahl von 2 *unabhängigen* Komponenten vorliegen würde.

Wir erreichen dies durch Elimination der Klammerausdrücke auf der rechten Seite von (3.41) bzw.

<sup>16</sup> *Dualitätsprinzip* (für den quellenfreien Fall): Die Maxwellgleichungen sind *symmetrisch* unter den Substitutionen  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$ ,  $\mu \rightarrow -\varepsilon$ , und  $\varepsilon \rightarrow -\mu$ .

(3.42). Um die Bestimmungsgleichung für  $\mathbf{E}_T$  und  $\mathbf{H}_T$  ermitteln zu können, müssen zuerst die Vektorprodukte  $\omega\varepsilon\mathbf{e}_z\times(3.41)$  und  $-\omega\mu\mathbf{e}_z\times(3.42)$  mit den angegebenen Gleichungen gebildet werden, wobei wir gleichzeitig auf die Relation  $\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_T=-\mathbf{v}_T$  zu achten haben. Diese, um jeweils  $\pi/2$  in der Transversalebene «gedrehten» Gleichungen werden nun mit den ursprünglichen Gleichungen kombiniert, und zwar wie folgt:  $-\omega\mu\mathbf{e}_z\times(3.42)+k_z\cdot(3.41)$  und  $\omega\varepsilon\mathbf{e}_z\times(3.41)+k_z\cdot(3.42)$ . Wir erhalten (unter Verwendung der Beziehung (3.30) und in der angegebenen Reihenfolge) die gewünschte explizite Darstellung der *Transversalkomponenten* aus den *Longitudinalkomponenten* der Felder, d.h. die *abhängigen* Komponenten  $\mathbf{E}_T$  und  $\mathbf{H}_T$  aus den *unabhängigen* Komponenten  $E_z$  und  $H_z$

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ k_z \cdot \nabla_T E_z - \omega\mu (\vec{e}_z \times \nabla_T) H_z \right\} \\ \vec{H}_T &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ k_z \cdot \nabla_T H_z + \omega\varepsilon (\vec{e}_z \times \nabla_T) E_z \right\} \end{aligned} \quad (3.45)-(3.46).$$

Um die *unabhängigen* Komponenten  $E_z$  und  $H_z$  ermitteln zu können, müssen hingegen *Helmholtzgleichungen* für das gegebene Wellenleiterproblem gelöst werden. Die zweidimensionalen *Helmholtzgleichungen* erhalten wir direkt aus (3.28)-(3.29), indem wir diese nur für die gesuchten  $z$ -Komponenten anschreiben

$$\begin{aligned} (\Delta_T + k_T^2) E_z &= 0 \\ (\Delta_T + k_T^2) H_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)-(3.48),$$

wobei für die *transversale* Wellenzahl  $k_T$  die bereits bekannte Beziehung

$$k_T^2 = k^2 - k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon(\vec{r}_T) - k_z^2 \quad (3.30)$$

gilt. Die Gleichungen (3.45)-(3.46) stellen somit die, durch die *Maxwellgleichungen* erzwungene Verknüpfung der (*transversalen* und *longitudinalen*) Feldkomponenten dar; eine mögliche Verknüpfung von  $E_z$  und  $H_z$  erfolgt hingegen über die *Randbedingungen* des Wellenleiterproblems.

Ohne das Wellenleiterproblem im Detail zu kennen, kann bereits jetzt eine Kategorisierung der Lösungsmenge der geführten Modi vorgenommen werden. In Anlehnung an die Ausführungen im *Anhang A* können geführte Wellen von folgendem Typ sein:

- $E_z \neq 0, H_z \equiv 0$ : Die geführten Wellen enthalten lediglich im  $\mathbf{E}$ -Feld eine Longitudinalkomponente. Somit ist deren magnetisches Feld rein transversal. Solche Wellen heissen *TM-Wellen* (*transversal magnetische Wellen*) oder *E-Wellen*. Für die Lösung muss nur die  $E_z$ -Komponente angesetzt werden, d.h. *Helmholtzgleichung* (3.47).
- $H_z \neq 0, E_z \equiv 0$ : Bei diesen Wellen enthält lediglich das  $\mathbf{H}$ -Feld eine Longitudinalkomponente. Somit ist deren elektrisches Feld rein transversal. Solche Wellen heissen analog *TE-Wellen* (*transversal elektrische Wellen*) oder *H-Wellen*. Für die Lösung gilt es einzig die  $H_z$ -Komponente anzusetzen, d.h. wir benützen die *Helmholtzgleichung* (3.48).

- $E_z \neq 0, H_z \neq 0$ : Sowohl das  $\mathbf{E}$ -Feld, als auch das  $\mathbf{H}$ -Feld der Welle enthält eine Longitudinalkomponente. Solche Wellen heissen *hybride Wellen* und wir nennen sie, je nach dominanter Longitudinalkomponente *EH-Wellen* («TE-artig») oder *HE-Wellen* («TM-artig»). Wir erhalten diesen allgemeinen Wellentyp, wenn wir beide Komponenten  $E_z$  und  $H_z$  ansetzen, d.h. beide *Helmholtzgleichungen* (3.47) und (3.48) müssen erfüllt sein.
- $E_z \equiv 0, H_z \equiv 0$ : Solche Wellen enthalten keine longitudinalen Feldkomponenten und man nennt sie entsprechend *TEM-Wellen* (*transversal elektromagnetische Wellen*). In Anbetracht unserer Vorgehensweise tritt hier eine *Komplikation* ein: Wir können lediglich die trivialen Lösungen  $E_z = H_z = 0$  ansetzen, was wenig Sinn macht, weil dadurch keine interessanten Lösungen gewonnen werden. In Anlehnung an *Abschnitt 3.2*, wo wir die Ausbreitungsbedingungen in dielektrischen Wellenleiterstrukturen mit dem optischen Prinzip der Totalreflexion begründet haben, lässt sich aber folgendes sagen: Je kleiner der transversale Indexsprung  $\delta_T n^2 = \delta_T \varepsilon$  zwischen dem Wellenleiterkern und dessen Mantelmedium, umso flacher wird der «Zick-Zack-Kurs» der geführten optischen Strahlen ausfallen. Werden nun anstelle der optischen Strahlen z.B. ebene *p*-Wellen angenommen, dann können wir etwas intuitiv folgern: 1. Bei abnehmendem Auftreffwinkel werden die *longitudinalen* Feldkomponenten im Vergleich zu den *transversalen* Komponenten auch immer kleiner und man charakterisiert diesen Fall mit  $|\nabla_T E_z| \ll |k_z \cdot E_z|$ . 2. Der resultierende Wellenvektor  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_T + \mathbf{e}_z \cdot k_z$  zeigt bei flacherem Strahlengang hauptsächlich in Richtung optischer Achse  $\mathbf{e}_z$ , was  $\mathbf{k}_T$  bei gegebener Frequenz  $\omega$  entsprechend kleiner werden lässt, d.h.  $\mathbf{k}_T$  strebt im Grenzfall gegen Null. 3. Das resultierende Wellenfeld weist in transversaler Richtung, wegen der abnehmenden Transversalwellenzahl  $\mathbf{k}_T$  eine kleinere Variation auf, d.h.  $\nabla_T \mathbf{E}_T$  verschwindet auch. All diese hier getroffenen Annahmen werden in der Literatur mit der *weak guidance approximation* umschrieben und man bezeichnet die resultierenden Lösungen entsprechend als *Quasi-TEM-Wellen*. Denken wir nun das begonnene Gedankenexperiment konsequent weiter, dann kann man für  $\delta_T \varepsilon \rightarrow 0$  zu folgender Grenzwertbildung gelangen:

$$\vec{E}_T = \frac{1}{ik_T^2} \{ k_z \cdot \nabla_T E_z \} = -ik_z \frac{\nabla_T E_z}{k_T^2} \xrightarrow{\delta_T \varepsilon \rightarrow 0} -\nabla_T \varphi_e \quad \forall \varphi_e = k_z \frac{E_z}{k_T} \quad (3.49).$$

Mit anderen Worten: Wir haben aus beiden verschwindenden Grössen  $E_z/k_T$  eine nichtverschwindende *Potentialfunktion*  $\varphi_e$  definiert und behandeln die Feldverteilung im Wellenleiterquerschnitt

$$\vec{E}_T = -\nabla_T \varphi_e \quad \vec{H}_T = \frac{1}{\eta} \left( \vec{e}_z \times \vec{E}_T \right) \quad (3.50),$$

nun als *statisches* Problem  $\Delta \varphi_e = 0$ , wobei  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  die Feldwellenimpedanz des Vakuums darstellt. Das reine (statisch berechnete) *TEM-Wellenproblem* stellt somit kein Eigenwertproblem mehr dar, denn es gilt für diesen Grenzfall  $k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ . Im Fall von *TEM-Wellen* kann man natürlich auch bei (3.28) ansetzen und diese *Helmholtzgleichung* direkt für die *transversalen* Komponenten lösen. In völliger Übereinstimmung mit (3.50) ergibt sich

$$\left( \Delta_T + k_T^2 \right) \vec{E}_T = 0 \xrightarrow{\delta_T \varepsilon \rightarrow 0} \Delta_T \vec{E}_T = 0 \quad (3.51).$$

Die kleinen Brechzahlunterschiede bei realen optischen Wellenleitern – d.h. die Annahmen der *weak guidance approximation* – sind übrigens mit ein Grund, warum in der Literatur viel häufiger direkt mit den *transversalen* Feldern gerechnet wird.

Wir können die gewonnenen Erkenntnisse wie folgt zusammenfassen:

#### Zur Lösung zylindrischer Wellenleiterprobleme

- In Wellenleiterstrukturen formulieren die Helmholtzgleichungen ein Eigenwertproblem, dessen Eigenwert die Ausbreitungskonstante  $k_z$  ist und dessen Eigenfunktion die transversale Feldverteilung  $\mathbf{E}(r_T)$ ,  $\mathbf{H}(r_T)$  darstellt.
- Die Helmholtzgleichungen (3.47)-(3.48) werden für die longitudinalen Komponenten  $E_z$  und/oder  $H_z$  angesetzt. Mit Hilfe der Randbedingungen an der Wellenleiterstruktur werden die zugehörigen Lösungsfunktionen bestimmt.
- Je nach Wahl der Komponenten –  $H_z$  allein,  $E_z$  allein oder  $E_z$  und  $H_z$  zusammen – werden Wellentypen selektiert. In diesem Fall *TE*-, *TM*-, oder dann hybride *HE*- bzw. *EH*-Modi.
- Die transversalen Komponenten  $\mathbf{E}_T$  und  $\mathbf{H}_T$  lassen sich nachträglich aus den Beziehungen (3.45)-(3.46) berechnen.
- Durch die Erzwingung der Randbedingungen für die longitudinalen  $z$ - und auch für die entsprechenden transversalen  $T$ -Komponenten erhält man die gesuchte Eigenwertgleichung.
- Bei fehlenden longitudinalen Komponenten  $E_z$  und  $H_z$  ergeben sich *TEM*-Wellen als Lösungen. Das Eigenwertproblem reduziert sich dann auf ein einfaches transversales Potentialproblem. Dieser Wellentyp entsteht bei dielektrischen Wellenleitern mit verschwindenden Brechzahlunterschieden oder bei metallischen Mehrleiterstrukturen der Leitungstheorie.
- Bei querinhomogenen, dielektrischen Wellenleiterstrukturen stellen die hybriden Modi die allgemeinste Lösung dar.
- Jede querinhomogene, dielektrische Wellenleiterstruktur hat transversale Eigenlösungen, d.h. jede querinhomogene, dielektrische Wellenleiterstruktur führt *TE*- oder *TM*-Modi (ohne Beweis).

Es gilt noch nachzutragen, dass die *Ausbreitungskonstante*  $k_z$  in Anlehnung an die Leitungstheorie auch als  $\gamma = \alpha + i\beta$  angeschrieben werden kann ( $\alpha$ : Dämpfungsbelag,  $\beta$ : Phasenbelag). Dabei gilt gemäss der Vorzeichenkonvention

$$e^{-ik_z z} = e^{-\gamma z} \quad \rightarrow \quad \gamma = \alpha + i\beta = ik_z \quad (3.52).$$

$$k_z = \beta - i\alpha = -i\gamma$$

**Lernkontrolle:** Wellenleiterstrukturen: Wie gehen wir am besten bei der Berechnung vor? Welche Mechanismen tragen zur Verkopplung der Feldkomponenten bei? Wie gehen die Randbedingungen in die Eigenwertberechnung ein? Im Fall von *TEM*-Wellen, die eigentlich nicht aus einem Eigenwertproblem hervorgehen, wurde u.a. auf die Leitungstheorie verwiesen. Wie behandelt die Leitungstheorie diesen «Eigenwert»?

## Literatur

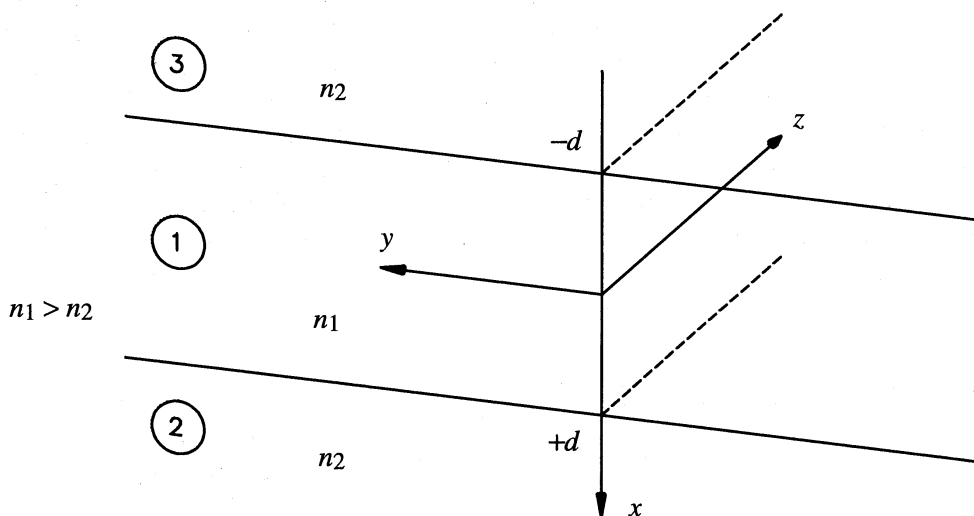
- [7] Christian Hafner. *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder*. Berlin: Springer – Verlag, 1987.
- [8] Charles Vassallo. *Optical Waveguide Concepts*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1991.
- [9] Reinhard März. *Integrated Optics*. Boston: Artech House, 1994.

### 3.4 Der dielektrische planare Filmwellenleiter

Der *dielektrische planare Filmwellenleiter* besteht aus einem zweidimensionalen planparallelen Film, welcher unten vom Substrat und oben vom Deckmaterial, beide mit einem kleineren Brechungsindex, begrenzt ist. Dieser dielektrische Parallelplatten-Wellenleiter (auch *dielectric slab waveguide* genannt) stellt den einfachsten Typus unter den optischen Wellenleiterstrukturen dar und eignet sich deshalb hervorragend, um die fundamentalen Eigenschaften wie die Lösungsmenge der geführten Wellen (*Modi*) und deren *Dispersion* auf sehr plausible Weise und ohne grossen mathematischen Aufwand herleiten zu können. In Anbetracht der Vielfalt an Wellenleiterstrukturen in der integrierten Optik, bildet der *planare Filmwellenleiter* so etwas wie die (eindimensionale) *Basisstruktur* für all diese Wellenleitertypen. Doch wenden wir uns zuerst einmal der einfachsten Variante des *planaren Filmwellenleiters* zu.

#### 3.4.1 Der symmetrische planare Filmwellenleiter

Um den planaren Filmwellenleiter nach dem besprochenen Lösungsgang für zylindrische Wellenleiterprobleme analysieren zu können, betrachten wir zunächst die eindimensionale Struktur nach *Fig.3.14*. Sie besteht aus einer in der *yz*-Ebene unendlich ausgedehnten Platte der Dicke  $2d$  mit dem Brechungsindex  $n_1$ , die in einem umgebenden Material vom Brechungsindex  $n_2$  eingebettet ist.



*Fig.3.14: Der symmetrische planare Filmwellenleiter.*

#### a) Geführte TE-Modi

In Übereinstimmung mit (3.48) setzen wir diesen Modentyp für die longitudinalen Komponenten  $E_z=0, H_z \neq 0$  an. Die resultierende *Helmholtzgleichung* lautet dann, unter Berücksichtigung der Schreibweise (3.52) für  $k_z$  in verlustlosen Medien ( $\alpha = 0$ )

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1^2 - \beta^2 \right) H_z = 0 \tag{3.53}.$$

Unter der gegebenen Materialkonfiguration aus *Fig.3.14* ergibt sich für die Wellenzahl  $k_i$  im entsprechenden Medium mit der Brechzahl  $n_i$  ( $\forall i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned}
 k_i &= \omega \cdot \sqrt{\mu \varepsilon_i} = \frac{2\pi}{\lambda_{fi}} = k_0 n_i \\
 k_0 &= \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.54)-(3.55),}$$

wobei  $k_0$  die Wellenzahl und  $\lambda_0$  die Freiraumwellenlänge im Vakuum ist. Entsprechend bedeutet  $\lambda_{fi}$  die Freiraumwellenlänge im Dielektrikum mit der Brechzahl  $n_i$ . Da die gegebene Wellenleiterstruktur symmetrisch bezüglich  $x=0$  ist, sind auch nur symmetrische Lösungen für  $H_z(x)$  zu erwarten. Die allgemeinen Lösungen der *Helmholtzgleichung* (3.53) können in  $x$ -Richtung als harmonische Funktionen, d.h. «ebene Wellen» vom Typ  $e^{\pm i k_{Ti} x}$  angesetzt werden mit der transversalen Wellenzahl  $k_{Ti}^2 = k_i^2 - \beta^2$  für das entsprechende *Medium*  $i$ . Wir können bereits jetzt festhalten, dass der Eigenwert  $\beta$  aus physikalischen Gründen<sup>17</sup> nur Werte *zwischen*  $k_2 = k_0 n_2$  und  $k_1 = k_0 n_1$  einnehmen kann. Somit ergeben sich für  $H_z$  die folgenden Lösungsansätze ( $A$  und  $B$  sind beliebige Konstanten):

- Gebiet ①:  $n = n_1, k_1 > \beta, |x| < d$

$$H_z(x) = A \cdot \begin{cases} \sin\left(x \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \\ \cos\left(x \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \end{cases}
 \tag{3.56);}$$

- Gebiet ②:  $n = n_2, k_2 < \beta, x > d$

$$H_z(x) = B \cdot e^{-(x-d) \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2}}
 \tag{3.57);}$$

- Gebiet ③:  $n = n_2, k_2 < \beta, x < -d$  (Vorzeichen: (+) beim *cos*-Ansatz)

$$H_z(x) = -(\text{+}) B \cdot e^{(x+d) \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2}}
 \tag{3.58).}$$

Die Lösungen für das *Gebiet 1* sind mehr oder weniger im Film konzentriert, währenddessen sie in den Aussengebieten des Films (*Gebiet 2* und *3*) exponentiell abfallen. An den Übergängen zwischen den Gebieten müssen die Randbedingungen (C.9) für die *Tangentialkomponenten* der Felder erfüllt sein, d.h. es wird einerseits die Stetigkeit von  $H_z$  gefordert und andererseits muss diese Stetigkeit auch für

<sup>17</sup> Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle in einem homogenen *Medium*  $i$   $v_i = c_0/n_i$  beträgt, kann die geführte Mode des Filmwellenleiters weder schneller als eine ebene Welle im *Mantelmedium 2*, noch langsamer als eine ebene Welle im *Kernmedium 1* propagieren. Dieser Schluss kann intuitiv aus einer Grenzwertbetrachtung erfolgen, indem man die Filmdicke  $2d$  einerseits nach Unendlich und andererseits nach Null streben lässt.

$E_y$  erfüllt werden. Aus diesem Grunde berechnen wir die *Transversalkomponenten* des elektromagnetischen Feldes aus der longitudinalen Komponente  $H_z$  gemäss den bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned}\vec{E}_T &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ k_z \cdot \nabla_T E_z - \omega \mu (\vec{e}_z \times \nabla_T) H_z \right\} \\ \vec{H}_T &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ k_z \cdot \nabla_T H_z + \omega \varepsilon (\vec{e}_z \times \nabla_T) E_z \right\}\end{aligned}\tag{3.45)-(3.46),$$

welche sich für den eindimensionalen Fall folgendermassen anschreiben lassen:

$$\begin{aligned}E_y &= \frac{i\omega\mu}{k_i^2 - \beta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} H_z \\ H_x &= \frac{-i\beta}{k_i^2 - \beta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} H_z\end{aligned}\tag{3.59)-(3.60).$$

Dabei muss beachtet werden, dass bereits zu Anfang  $E_z \equiv 0$  angesetzt wurde und zudem die  $E_x$ -, bzw. die  $H_y$ -Komponente verschwindet, weil die Felder des Filmwellenleiters in  $y$ -Richtung als konstant anzunehmen sind, d.h. alle Ableitungen  $\partial/\partial y$  ergeben dementsprechend Null. Das  $\mathbf{E}$ -Feld der  $TE$ -Mode wird somit einzig aus einer  $E_y$ -Komponente bestehen und das zugehörige  $\mathbf{H}$ -Feld enthält definitionsgemäss eine  $H_z$ - und eine  $H_x$ -Komponente.

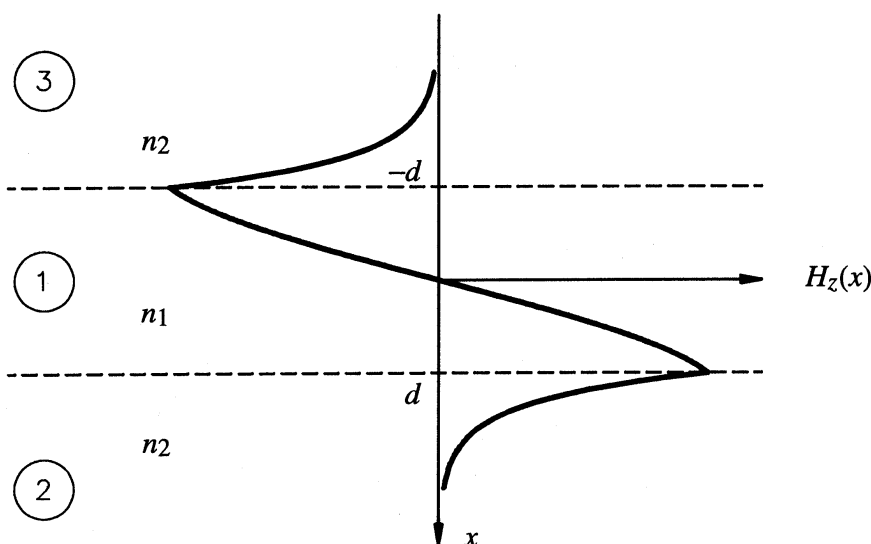


Fig.3.15:  $H_z$ -Feldverteilung der Grundmode für den symmetrischen Filmwellenleiter.

Eine mögliche Feldverteilung bezüglich der  $H_z$ -Komponente ist in Fig.3.15 dargestellt. Um diesen Verlauf rechnerisch erfassen zu können, müssen die vorhin geforderten *Randbedingungen* erzwungen

werden. Diese setzen wir mit Bezug auf die Grenzen zwischen den *Gebieten 1* und *2* bzw. den *Gebieten 1* und *3* an.

- Stetigkeit der  $H_z$ -Komponente: (Vorzeichen: (+) beim *cos*-Ansatz)

$$H_z(\pm d) = A \cdot \left\{ \begin{array}{l} \pm \sin\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \\ \cos\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \end{array} \right\} = \pm (+)B \quad (3.61).$$

- Stetigkeit der  $E_y$ -Komponente: (Vorzeichen: ( $\pm$ ) beim *cos*-Ansatz für  $H_z$ )

$$E_y(\pm d) = + \frac{i\omega\mu_1 \cdot A}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \\ \mp \sin\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \end{array} \right\} = + (\pm) \frac{i\omega\mu_2 \cdot B}{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}} \quad (3.62).$$

Es müssen beide Ausdrücke, d.h. (3.61) und (3.62) gleichzeitig erfüllt sein und es gilt  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Aus diesem Grund transformieren wir die beiden Bedingungsgleichungen in einen einzigen Ausdruck, was z.B. mittels Division von (3.61) mit (3.62) erreicht wird. Für die «Sinus-Variante» (entspricht bei der Grundmode dem Feldverlauf  $H_z(x)$  aus *Fig.3.15*) aus (3.61) bzw. (3.56) ergibt sich

$$\tan\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) = \frac{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \quad (3.63),$$

und analog dazu für die «Cosinus-Variante» von (3.61) bzw. (3.56)

$$-\cot\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) = \frac{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \quad (3.64).$$

Wir sind hiermit zu einer ersten Darstellung des gesuchten Eigenwertproblems für die Ausbreitungskonstante – in diesem Fall für den Phasenbelag  $\beta$  – gelangt. Die *transzendenten* Gleichungen (3.63) und (3.64) müssen jeweils bei gegebener Frequenz (d.h. mit den ebenso gegebenen Konstanten  $k_1$  und  $k_2$ ) für die Variable  $\beta$  gelöst werden. Um eine *graphische* Lösung der transzendenten Eigenwertgleichung erhalten zu können, machen wir folgende Substitutionen

$$\begin{aligned} \xi &= d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \\ \eta &= d \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \end{aligned} \quad (3.65)-(3.66),$$



bei welcher  $\xi/d$  die transversale Wellenzahl im Kernmedium  $n_1$  darstellt und  $\eta/d$  für die Abklingkonstante des Feldes im Mantelmedium  $n_2$  (bzw.  $n_3$  beim unsymmetrischen Filmwellenleiter) steht. Die *transzendenten* Eigenwertgleichungen (3.63) und (3.64) erhalten dadurch die einprägsame Form

$$\eta = \xi \cdot \tan(\xi) \quad \eta = -\xi \cdot \cot(\xi) \quad (3.67)-(3.68).$$

Das graphische Vorgehen hat den Vorteil, dass uns damit eine äusserst einfache Interpretationshilfe bezüglich der gefundenen Lösungen zur Verfügung steht. Wir müssen unsere *transzendente* Gleichungen lediglich noch auf die konkrete Wellenleiterstruktur «erden». Dies veranschaulichen wir mit Hilfe des sogenannten *Strukturparameters*  $V$  (der auf die Struktur *normierten Frequenz*  $V$ )

$$V = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = d \cdot \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = k_0 d \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.69).$$

Der *Strukturparameter*  $V$  nach (3.69) verknüpft die Strukturgrössen des Wellenleiters  $d$ ,  $n_1$ , und  $n_2$  mit der relevanten Strukturgrösse  $\lambda_0$  der elektromagnetischen Welle. Berücksichtigen wir die Definition der *numerischen Apertur*  $NA$  aus (3.3), dann kann der *Strukturparameter*  $V$  auch gemäss  $V = k_0 \cdot d \cdot NA = (2\pi/\lambda_0) \cdot d \cdot NA = (2\pi f/c_0) \cdot d \cdot NA$  angeschrieben werden. Zur graphischen Eigenwertbestimmung tragen wir sowohl (3.67) und (3.68), als auch  $V$  in den untenstehenden Graphen ein. Hierbei kann  $V$ , gemäss dem ersten Ausdruck aus (3.69) als Radius eines Kreises aufgefasst werden.

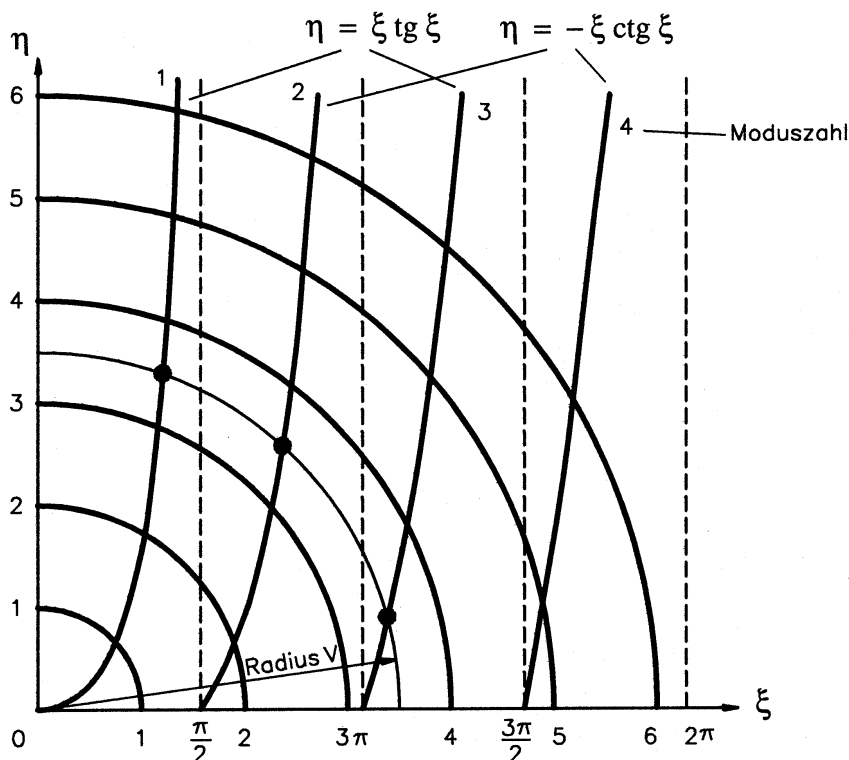


Fig.3.16: Graphische Darstellung der Eigenwertgleichung (3.67)-(3.68). Für eine gegebene Frequenz wird ein Kreis mit Radius  $V$  eingezeichnet. Jeder Schnittpunkt entspricht einer geführten TE-Mode.

Jeder Schnittpunkt des Kreises  $V = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}$  bzw.  $\eta = \sqrt{V^2 - \xi^2}$  mit den Kurven  $\xi \cdot \tan(\xi)$  und  $-\xi \cdot \cot(\xi)$  im ersten Quadranten<sup>18</sup> des Graphen markiert eine ausbreitungsfähige *TE*-Mode (bzw. *H*-Mode), dessen Ausbreitungskonstante (bzw. Phasenbelag  $\beta$ ) aus (3.65) oder (3.66) hervorgeht. Die geführte Mode stellt somit eine Welle dar, deren Phasenfronten sowohl im Kern- als auch im Mantelgebiet gleich sind, ganz ähnlich wie bei einer ebenen Welle. Wir haben mit diesem Bild eine weitere Ansicht des Eigenwertproblems gewonnen: Die Feldverteilung entlang des Wellenleiterquerschnitts muss sich also derart einstellen, dass in allen Gebieten jeweils die gleiche Ausbreitungskonstante resultiert. Dabei ist  $V$  der einzige Parameter, welcher über die Existenz der Modi und ihrer zugehörigen Phasenbeläge bestimmt.

Wir können nun diese Schnittpunkte bei vorgegebener Wellenleiterstruktur als Funktion der Frequenz – d.h. als Funktion des variierenden Radius  $V$  – analysieren. Bei kleinen Variationen von  $V$  erhalten wir entsprechend kleine «Ortsänderungen» der Schnittpunkte. Diese «Ortsänderungen» geben die Dispersion<sup>19</sup> der zugehörigen *TE*-Mode für das betrachtete Frequenzband wieder. Bei grösseren Variationen von  $V$  ändert sich hingegen die Anzahl der Schnittpunkte und damit auch die Anzahl der ausbreitungsfähigen *TE*-Modi. Mit dieser einfachen Betrachtung können bereits zum jetzigen Zeitpunkt zwei Dispersionsmechanismen identifiziert werden: 1. Die *Wellenleiterdispersion*, gegeben durch die nichtlineare Beziehung  $\beta(\omega)$ . 2. Die *modale Dispersion* (auch *Modendispersion* oder *intermodale Dispersion* genannt), herrührend durch die Anregung verschiedener Modi  $\beta_i$ .

Bei kleinen Frequenzen, d.h. für kleine Radien  $V$  ist nur eine geführte Welle ausbreitungsfähig, nämlich die *TE*<sub>1</sub>-Mode, bzw. die *H*<sub>1</sub>-Mode. Diese Mode existiert sogar bei beliebig tiefen Frequenzen<sup>20</sup> und in dieser Umgebung ( $V \ll 1$ ) gilt, wenn man den Term  $\xi \cdot \tan(\xi)$  als Taylorreihe für kleine Argumenten  $\xi$  entwickelt:  $\eta \approx \xi^2$ . Dadurch erfährt das Feld, wegen  $d/\eta$ , beidseitig des Films eine grosse

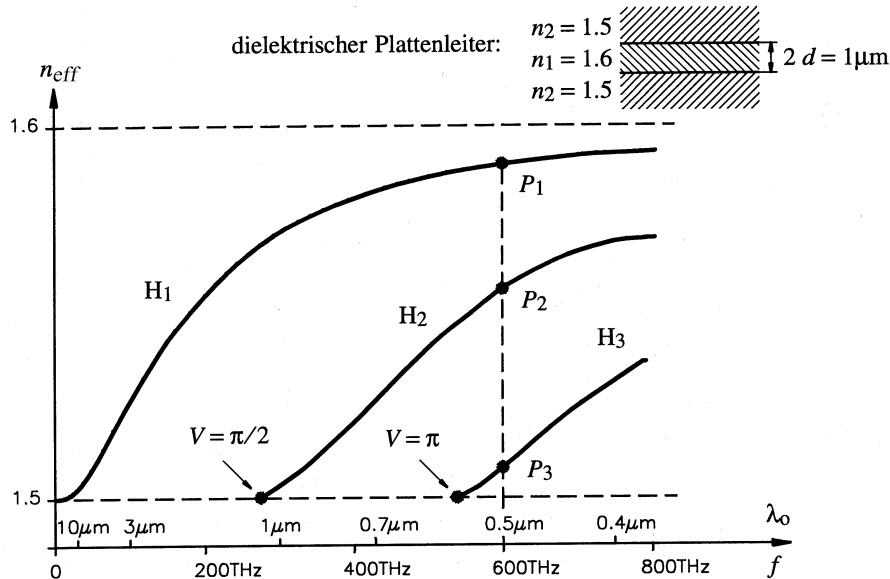


Fig.3.17: Effektiver Brechungsindex  $n_{eff}$  des symmetrischen Filmwellenleiters als Funktion der Frequenz  $f$ , bzw. der Wellenlänge  $\lambda_0$  für die Modi *TE*<sub>1</sub> (*H*<sub>1</sub>), *TE*<sub>2</sub> (*H*<sub>2</sub>) und *TE*<sub>3</sub> (*H*<sub>3</sub>). Die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  bei 600 THz beziehen sich auf die Feldverteilungen aus Fig.3.18.

<sup>18</sup> Nebst der positiven Definition (3.65)-(3.66) von  $\xi$  und  $\eta$  machen bei geführten Modi nur Lösungen mit *abklingenden* Feldverläufen im Mantelmedium Sinn, daher gilt  $\eta > 0$ ; zudem würden negative  $\xi$  zu identischen Eigenwertgleichungen führen.

<sup>19</sup> Unter *Dispersion* verstehen wir die Tatsache, dass verschiedene spektrale Komponenten eines Signals unterschiedliche Laufzeiten haben. Die Dispersion wird anhand der  $\omega$ - $\beta$ -Abhängigkeit des Wellenleiters charakterisiert.

<sup>20</sup> Wie wir später noch sehen werden, gilt dies nur für den *symmetrischen* Filmwellenleiter.

Eindringtiefe in das umgebende Mantelmedium. Kehren wir das Szenario um, dann startet die  $TE_1$ -Mode bei Frequenz Null als reine ebene Welle entlang der  $z$ -Richtung (und füllt daher den ganzen Raum des Wellenleiterquerschnitts aus) und konzentriert sich mit zunehmender Frequenz immer mehr im Wellenleiterkern. Der Phasenbelag  $\beta$  nähert sich dabei, ausgehend von  $k_2$  immer mehr dem Wert  $k_1$  an. Bezüglich des Wertebereichs von  $\beta$  äussert sich diese Entwicklung folgendermassen

$$\begin{aligned} k_2 &\leq \beta \leq k_1 \\ k_0 \cdot n_2 &\leq \beta \leq k_0 \cdot n_1 \\ n_2 &\leq \beta/k_0 \leq n_1 \quad \rightarrow \quad n_{eff} = \beta/k_0 \end{aligned} \quad (3.70).$$

Ein verwandter Zusammenhang wurde übrigens bereits in Fussnote<sup>17</sup> angesprochen. Der mit  $k_0$  normierte Eigenwert  $\beta$  ist vom Typ einer Brechzahl. Wir nennen diese Grösse *effektiver Brechungsindex*  $n_{eff}$  und sein in (3.70) erläutertes Frequenzverhalten ist in Fig.3.17 dargestellt. Aus den Kurven des dort vorgestellten Beispiels ist sofort ersichtlich, dass  $n_{eff} \in [n_2, n_1]$ , zumal  $n_{eff}(f)$  für alle Modi zwischen den gestrichelten Begrenzungslinien liegt. Die zugehörigen Feldverteilungen  $H_z(x)$  und  $E_y(x)$  aller angeregten Modi (siehe Betriebspunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  aus Fig.3.17) können der Fig.3.18 entnommen werden.

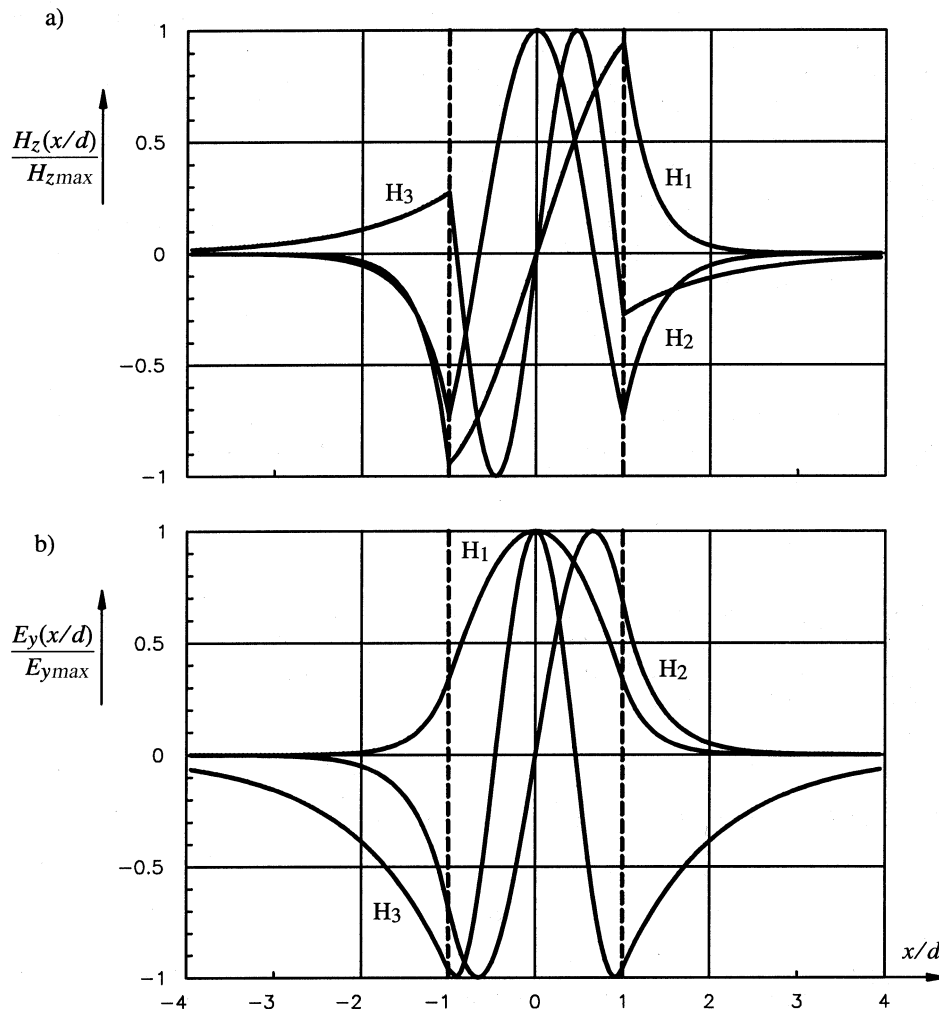


Fig.3.18: Normierte Feldverteilungen (a)  $H_z(x)$  und (b)  $E_y(x)$  für die Modi  $TE_1$  ( $H_1$ ),  $TE_2$  ( $H_2$ ) und  $TE_3$  ( $H_3$ ).

Blicken wir nochmals zurück auf die Abbildungen *Fig.3.16* und *Fig.3.17* und lassen uns das Geschehen bei zunehmender Frequenz – d.h. bei zunehmendem *Strukturparameter*  $V$  – Revue passieren: Für  $V = \pi/2$  tritt die Mode  $TE_2$  ( $H_2$ ) in Erscheinung, für  $V = \pi$  die Mode  $TE_3$  ( $H_3$ ), usw. Die Modeneinsätze folgen somit einem Raster  $p \cdot \pi/2$  auf der  $\xi$ -Achse, mit  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Die Grösse  $p \cdot \pi/2$  stellt somit die normierte *Cutoff-Frequenz* der Mode  $TE_{p+1}$  dar: Für *gerade*  $p$  (inklusive  $p=0$ ) ergeben sich *gerade*  $E_y(x)$ -Funktionen (*even mode*) und bei *ungeraden*  $p$  resultieren entsprechend *ungerade*  $E_y(x)$ -Funktionen (*odd mode*)<sup>21</sup>.

Wir können uns diesen Zusammenhang auch für die *numerische* Berechnung des vorliegenden Eigenwertproblems zu Nutze machen. Zu diesem Zweck folgen wir nicht der Schreibweise (3.63) oder (3.64), sondern reproduzieren analytisch, was wir graphisch mit dem Schnittpunkt der beiden Kurven gemeint haben

$$\sqrt{V^2 - \xi^2} = \begin{cases} \xi \cdot \tan(\xi) \\ -\xi \cdot \cot(\xi) \end{cases} \quad (3.71).$$

Unter Bemühung des entsprechenden Additionstheorems für die Tangensfunktion gilt zudem

$$\tan\left(\alpha - \frac{p \cdot \pi}{2}\right) = \begin{cases} -\cot(\alpha) & \forall p : \text{ungerade} \\ \tan(\alpha) & \forall p : \text{gerade} \end{cases} \quad (3.72)$$

und wir schreiben die Eigenwertgleichung (3.71) neu

$$\sqrt{V^2 - \xi^2} = \xi \cdot \tan\left(\xi - \frac{p \cdot \pi}{2}\right) \quad (3.73),$$

mit  $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Nun gilt es den Ausdruck (3.73) nur noch leicht umzuformen und wir erhalten eine einzige, *alternative Darstellung* der Eigenwertgleichungen (3.67)-(3.68), bzw. (3.71)

$$\boxed{\xi = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{V^2}{\xi^2} - 1}\right) + \frac{p \cdot \pi}{2}} \quad (3.74),$$

wobei  $p$  die Funktion des Zählindex der  $TE_{p+1}$ - bzw. der  $H_{p+1}$ -Mode hat. Mit  $\text{Arctan}(\cdot)$  wird der *Hauptwert* der Arcustangensfunktion gekennzeichnet, für welchen  $|\text{Arctan}(\cdot)| < \pi/2$  gilt. Somit hat (3.74) bei gegebenem  $V$  für jeden Modenzähler  $p$  eine einzige Lösung, vorausgesetzt  $V > p \pi/2$ . Die Gleichung (3.74) ist aus diesem Grund für die Programmierung sehr gut geeignet (siehe hierzu *Anhang F*).

<sup>21</sup> Die Zählweise hängt von der Bezeichnung der Grundmode ab. Hier stellt  $TE_1$  ( $H_1$ ) die Grundmode dar, in anderen Büchern heisst diese  $TE_0$  ( $H_0$ ).

Bei gefundenem Eigenwert  $\xi$  kann der zugehörige Phasenbelag  $\beta$  für die  $TE_{p+1}$ - bzw. die  $H_{p+1}$ -Mode aus (3.65) direkt ermittelt werden.

Es bleibt noch nachzutragen, dass Gleichung (3.65) auch anhand von geometrisch-optisch geleiteten Überlegungen hätte gefunden werden können. Zu diesem Zweck wird der «Zick-Zack-Pfad» des optischen Strahls im Wellenleiter untersucht, indem das Phasenmass entlang des Strahlwegs sorgfältig ausgewertet wird: Neben der Phasenakkumulation  $k_0 \cdot n_1 \cdot s$  entlang des optischen Strahlwegs  $s$  ergibt jede Reflexion an der Grenzfläche von Kern- und Mantelmaterial einen zusätzlichen Phasenbeitrag, welcher sich gemäss der *Goos-Haenchen-Verschiebung* aus Fig.3.12 oder besser noch gemäss der Auswertung von (A.7) aus *Anhang A* berechnen lässt. Die *charakteristische Gleichung* regelt den Umstand, dass der Strahl nach einem «Zick-Zack» (bezüglich seiner Phasenfront) mit seinem Ausgangspunkt konstruktiv interferieren muss. Beim Aneinanderreihen solcher «Zick-Zack-Pfade» dürfen sich diese Pfade also nur um ein Vielfaches der Wellenlängen in ihrer Länge versetzt unterscheiden. Die gesamte Phasenbilanz entlang des Strahls muss daher nach zweimaliger Reflexion *modulo*( $2\pi$ ) «aufgehen», was im Endeffekt auf den gleichen Ausdruck wie in (3.74) führt.

Wir haben hiermit alle wichtigen Beziehungen für die *TE*-Wellenausbreitung im symmetrischen planaren Filmwellenleiter hergeleitet. Mit analogen Überlegungen können auch die *TM*- bzw. *E*-Modi untersucht werden.

## b) Geführte TM-Modi

In Übereinstimmung mit (3.47) setzen wir hier nun die longitudinalen Komponenten  $E_z \neq 0$ ,  $H_z \equiv 0$  an. Die resultierende *Helmholtzgleichung* lautet dann, unter Berücksichtigung der Schreibweise (3.52)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_i^2 - \beta^2 \right) E_z = 0 \quad (3.75),$$

was formal die gleichen Lösungsansätze für  $E_z$  wie aus (3.56)-(3.58) ergibt. Die resultierenden Transversalkomponenten berechnen wir wiederum gemäss (3.45)-(3.46). Sie entsprechen diesmal

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-i\beta}{k_i^2 - \beta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ H_y &= \frac{-i\omega\epsilon}{k_i^2 - \beta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} E_z \end{aligned} \quad (3.76)-(3.77).$$

Dabei gilt es zu beachten, dass  $H_z \equiv 0$  bereits zu Anfang angesetzt wurde und die  $E_y$ -, bzw die  $H_x$ -Komponente verschwindet, weil die Felder des Filmwellenleiters in  $y$ -Richtung konstant sind, d.h. für alle entsprechenden Ableitungen gilt  $\partial/\partial y \rightarrow 0$ . Das  $\mathbf{H}$ -Feld der *TM*-Mode wird somit einzig aus einer  $H_y$ -Komponente gebildet und das zugehörige  $\mathbf{E}$ -Feld enthält definitionsgemäss eine  $E_z$ - und eine  $E_x$ -Komponente.

Um zur Eigenwertgleichung gelangen zu können, müssen auch hier die *Randbedingungen* erzwungen werden. Diese setzen wir mit Bezug auf die Grenzen zwischen den *Gebieten 1* und *2* bzw. den *Gebieten 1* und *3* an und erhalten

- Stetigkeit der  $E_z$ -Komponente: (Vorzeichen: (+) beim  $\cos$ -Ansatz)

$$E_z(\pm d) = A \cdot \left\{ \begin{array}{l} \pm \sin\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \\ \cos\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \end{array} \right\} = \pm (+) B \quad (3.78).$$

- Stetigkeit der  $H_y$ -Komponente: (Vorzeichen: ( $\pm$ ) beim  $\cos$ -Ansatz für  $E_z$ )

$$H_y(\pm d) = -\frac{i\omega\varepsilon_1 \cdot A}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \\ \mp \sin\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) \end{array} \right\} = -(\pm) \frac{i\omega\varepsilon_2 \cdot B}{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}} \quad (3.79).$$

Es müssen jeweils beide Ausdrücke, d.h. (3.78) und (3.79) erfüllt sein. Im Gegensatz zum  $TE$ -Fall gilt nun  $\varepsilon_1 = n_1^2 \neq \varepsilon_2 = n_2^2$ . Aus diesem Grund formen wir die beiden Bedingungsgleichungen in einen zu (3.63) bzw. (3.64) unterschiedlichen Ausdruck um. Es ergeben sich für die «Sinus-» bzw. die «Cosinus-Variante» von (3.78) die folgenden Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} \tan\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \\ -\cot\left(d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2}\right) &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 - k_2^2}}{\sqrt{k_1^2 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (3.80)-(3.81).$$

Wir führen die gleichen Substitutionen wie in (3.65)-(3.66) durch und führen zusätzlich  $\mathcal{G}$  ein

$$\xi = d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \eta = d \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \mathcal{G} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad (3.82)-(3.84)$$

und erhalten nach analoger Umrechnung die Eigenwertgleichung für die  $TM_{p+l}$ - bzw. die  $E_{p+l}$ -Mode.

$$\boxed{\xi = \text{Arctan}\left(\mathcal{G} \cdot \sqrt{\frac{V^2}{\xi^2} - 1}\right) + \frac{p \cdot \pi}{2}} \quad (3.85),$$

Die transzendente Eigenwertgleichung (3.85) hat bei gegebenem  $V$  für jeden Modenzähler  $p$  eine einzige Lösung, vorausgesetzt  $V > p \pi/2$ .  $TE$ - und  $TM$ -Modi sind beim *symmetrischen* Film im *Cutoff entartet!*

### 3.4.2 Der unsymmetrische planare Filmwellenleiter

Im Gegensatz zum symmetrischen Fall wird beim *unsymmetrischen* planaren Filmwellenleiter die eindimensionale Struktur nach Fig.3.19 untersucht. Sie besteht aus einer in der *yz*-Ebene unendlich ausgedehnten Platte, nun von der Dicke *d* mit dem Brechungsindex des Kernmediums *n*<sub>1</sub>, und den Brechzahlen *n*<sub>2</sub> für das Substratmedium und *n*<sub>3</sub> für das Deckmaterial. Die Vermassung wurde im Vergleich zu Fig.3.14 leicht geändert, zumal die transversalen Modenprofile nicht mehr symmetrisch im Kerngebiet angenommen werden können.

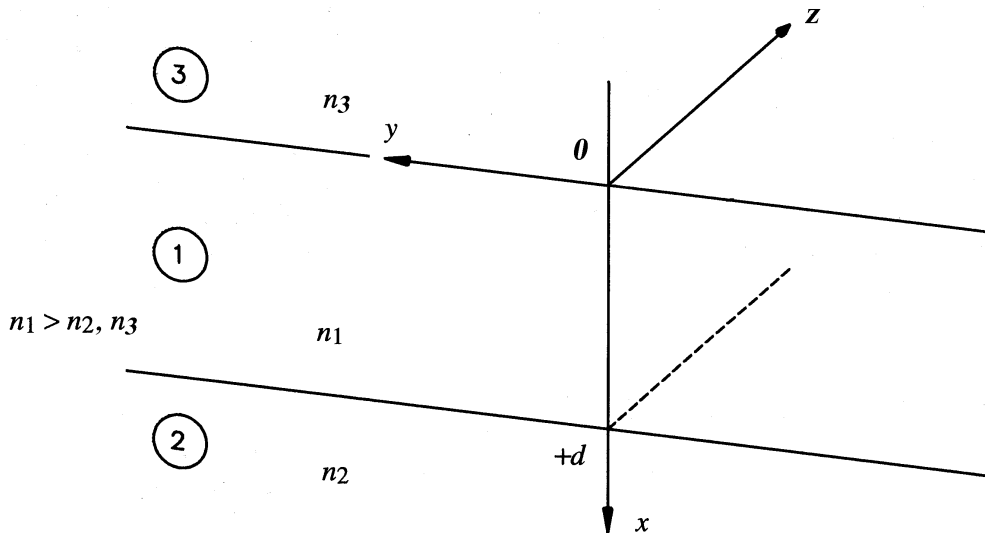


Fig.3.19: Der unsymmetrische planare Filmwellenleiter (*n*<sub>2</sub> ≥ *n*<sub>3</sub>).

Wir wollen an dieser Stelle nicht die ganze Herleitung des vorherigen Kapitels, diesmal für den unsymmetrischen Filmwellenleiter, wiederholen. Es sollen vielmehr die relevanten Ausdrücke angegeben werden, um dann möglichst rasch zu den gesuchten Eigenwertgleichungen zu gelangen. In diesem Sinne definieren wir für die unsymmetrische Struktur zwei neue, spezielle Strukturparameter<sup>22</sup>

$$V = k_0 d \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \qquad \tilde{V} = k_0 d \cdot \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \qquad (3.86)-(3.87).$$

#### a) Geführte TE-Modi

Auch hier setzen wir, in Übereinstimmung mit (3.48) die longitudinalen Komponenten *E*<sub>z</sub> = 0, *H*<sub>z</sub> ≠ 0 an. Die resultierende *Helmholtzgleichung* heisst dann

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_i^2 - \beta^2 \right) H_z = 0 \qquad (3.88),$$

<sup>22</sup> Achtung: Diese Strukturparameter haben wegen der unterschiedlich definierten Dicke den doppelten Wert von (3.69).

was wiederum zu harmonischen Lösungsansätzen in  $x$ -Richtung führt. Diese allgemeinen Lösungen sind jetzt vom Typ  $e^{\pm i(k_T x - \psi)}$  wobei  $\psi$  der Verschiebung des Modenprofils in transversaler Richtung Rechnung trägt. Die transversale Wellenzahl  $k_{Ti}^2 = k_i^2 - \beta^2$  gilt für das entsprechende *Medium*  $i$  und kann folglich, je nach Gebiet *reelle* (im Kernmedium) oder *imaginäre* (in den beiden Aussengebieten) Werte annehmen. Wir können bereits jetzt festhalten, dass der Eigenwert  $\beta$  bei geführten Modenlösungen innerhalb des Intervalls  $\beta \in [\max(k_2, k_3), k_1]$  zu liegen kommt, wobei  $k_i = k_0 \cdot n_i$  die Wellenzahl im entsprechenden *Medium*  $i$  ist. Bevor wir zu den Lösungsfunktionen kommen, schreiben wir die transversalen Wellenzahlen für die drei Gebiete nochmals an:

$$k_{T1} = \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad k_{T2} = \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad k_{T3} = \sqrt{\beta^2 - k_3^2} \quad (3.89)-(3.91).$$

Für die Materialverhältnisse schreiben wir analog zu (3.84)

$$\mathfrak{G} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \quad \tilde{\mathfrak{G}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{n_1^2}{n_3^2} \quad (3.92)-(3.93).$$

Zusätzlich definieren wir, ähnlich wie in (3.65)-(3.66) die folgenden Grössen (beachte hierzu Fussnote<sup>22</sup>)

$$\xi = d \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \eta = d \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad \tilde{\eta} = d \cdot \sqrt{\beta^2 - k_3^2} \quad (3.94)-(3.96),$$

Die transversalen  $H_z$ -Feldprofile für die Ausbreitungsfähigen *TE*-Modi lauten (ohne Herleitung):

- Gebiet ①:  $n = n_1, k_1 > \beta, x < d$

$$H_z(x) = A \cdot \begin{Bmatrix} \sin(k_{T1} \cdot x - \psi) \\ \cos(k_{T1} \cdot x - \psi) \end{Bmatrix} \quad (3.97);$$

- Gebiet ②:  $n = n_2, k_2 < \beta, x > d$

$$H_z(x) = A \cdot \begin{Bmatrix} \sin(\xi - \psi) \\ \cos(\xi - \psi) \end{Bmatrix} \cdot e^{-k_{T2} \cdot (x-d)} \quad (3.98);$$

- Gebiet ③:  $n = n_3, k_3 < \beta, x < 0$

$$H_z(x) = A \cdot \begin{Bmatrix} \sin(\psi) \\ \cos(\psi) \end{Bmatrix} \cdot e^{k_{T3} \cdot x} \quad (3.99).$$



Um zur Eigenwertgleichung zu gelangen, müssen auch hier die *Randbedingungen* sowohl für die  $H_z$ -Komponente, als auch für die gemäss (3.45) noch zu berechnende transversale  $E_y$ -Komponente erzwungen werden. Das  $\mathbf{E}$ -Feld der  $TE$ -Mode wird somit einzig aus einer  $E_y$ -Komponente bestehen und das zugehörige  $\mathbf{H}$ -Feld enthält definitionsgemäss eine  $H_z$ - und eine  $H_x$ -Komponente. Analog zum Vorgehen in *Abschnitt 3.4.1 a)* gelangen wir dann zur Eigenwertgleichung für die  $TE_{p+1}$ - bzw. die  $H_{p+1}$ -Mode.

$$\xi = \text{Arctan} \left( \sqrt{\frac{V^2}{\xi^2} - 1} \right) + \text{Arctan} \left( \sqrt{\frac{\tilde{V}^2}{\xi^2} - 1} \right) + p \cdot \pi \quad (3.100),$$

wobei  $p$  die Funktion des Zählindex der  $TE_{p+1}$ - bzw. der  $H_{p+1}$ -Mode hat. Somit hat (3.100) bei gegebenem  $V$  für jeden Modenzähler  $p$  eine einzige Lösung, vorausgesetzt  $V > V_p$ . Die *Cutoff*-Bedingung hat sich, im Vergleich zum symmetrischen Filmwellenleiter, verändert. Dies hat einen plausiblen Grund. Ist die *Cutoff*-Bedingung beispielsweise für  $V$  erfüllt, dann muss sie für  $\tilde{V}$  nicht zwangsläufig erfüllt sein, was auch bedeutet, dass die Mode nur bezüglich der einen Wellenleitergrenze  $\partial M_{12}$  «geführt» wäre, bezüglich der anderen Grenze  $\partial M_{13}$  hingegen ist die Totalreflexion nicht gewährleistet und das Feld leckt aus in das *Medium 3*. Die *Cutoff*-Bedingung für eine  $TE_{p+1}$ - bzw. der  $H_{p+1}$ -Mode lautet somit (ohne Herleitung)

$$V > V_p = \text{Arctan} \left( \sqrt{\frac{1}{\tilde{\mathfrak{g}}} \cdot \frac{\tilde{\mathfrak{g}} - \mathfrak{g}}{\mathfrak{g} - 1}} \right) + p \cdot \pi \quad (3.101).$$

Unsymmetrische Filmwellenleiter können wegen  $\mathfrak{g} \neq \tilde{\mathfrak{g}}$  d.h.  $V > V_p$  die Grundmode nicht bis zur Frequenz Null führen. Man sieht sofort, dass der *Arctan*(.)-Term für den symmetrischen Fall verschwindet und (3.101), wegen Fussnote<sup>22</sup>, auch identisch zur früheren Beziehung  $p \pi/2$  für den *Cutoff* wird. Die *transversale Modenverschiebung*  $\psi$  kann dann bei gefundenem Eigenwert  $\xi$  direkt mit Hilfe von

$$\tan(\xi - \psi) = \frac{\xi}{\eta} \quad (3.102)$$

ermittelt werden.

## b) Geführte TM-Modi

In Übereinstimmung mit (3.47) setzen wir hier nun die longitudinalen Komponenten  $E_z \neq 0$ ,  $H_z \equiv 0$  an. Die resultierende *Helmholtzgleichung* lautet dann

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1^2 - \beta^2 \right) E_z = 0 \quad (3.103),$$

was formal die gleichen Lösungsansätze für  $E_z$  wie aus (3.97)-(3.99) ergibt. Die resultierenden Transversalkomponenten berechnen wir wiederum gemäss (3.45)-(3.46). Das  $\mathbf{H}$ -Feld der  $TM$ -Mode wird somit einzig aus einer  $H_y$ -Komponente gebildet und das zugehörige  $\mathbf{E}$ -Feld enthält definitionsgemäss eine  $E_z$ - und eine  $E_x$ -Komponente. Wir sparen uns die weiteren Rechenschritte und kommen direkt zu transzendenten Eigenwertlösungen für die  $TM_{p+1}$ - bzw. die  $E_{p+1}$ -Mode

$$\xi = \text{Arctan} \left( \mathfrak{G} \cdot \sqrt{\frac{V^2}{\xi^2} - 1} \right) + \text{Arctan} \left( \tilde{\mathfrak{G}} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{V}^2}{\xi^2} - 1} \right) + p \cdot \pi \quad (3.104),$$

wobei für die Materialverhältnisse (3.92) bzw. (3.93) einzusetzen sind. Auch hier gilt es eine modifizierte *Cutoff*-Beziehung zu beachten. Sie lautet

$$V > V_p = \text{Arctan} \left( \sqrt{\tilde{\mathfrak{G}} \cdot \frac{\tilde{\mathfrak{G}} - \mathfrak{G}}{\mathfrak{G} - 1}} \right) + p \cdot \pi \quad (3.105).$$

Die *transversale Modenverschiebung*  $\psi$  berechnet sich, bei gefundenem Eigenwert  $\xi$  direkt über den Ausdruck

$$\mathfrak{G} \cdot \tan(\xi - \psi) = \frac{\xi}{\eta} \quad (3.106).$$

Mit den Eigenwertgleichungen (3.74), (3.85), (3.100) und (3.104) ist das Problem der geführten Wellen im dielektrischen planaren Fimwellenleiter eigentlich vollständig analysiert. Die Gleichungen (3.74) und (3.85) können zudem als Spezialfälle von (3.100) bzw. (3.104) betrachtet werden. Für die numerische Berechnung genügen die letzteren beiden Beziehungen vollauf. Ein entsprechender Programmierungsvorschlag in *Matlab*<sup>TM</sup> kann im *Anhang F* eingesehen werden.

### 3.4.3 Allgemeine Betrachtungen zum planaren Filmwellenleiter

Lassen wir die vorhin behandelte Problemstellung nochmals Revue passieren: Gegeben ist eine äusserst einfache Einschichtstruktur – der dielektrische planare Filmwellenleiter. Wir suchen nach Bedingungen für die *geführte* Wellenausbreitung und landen, nach einigen Umrechnungen, bei einer nicht minder einfachen Eigenwertgleichung. Diese ist, wie wir gezeigt haben, z.B. vom Typ

$$w = -z \cdot \cot(z) \quad (3.68).$$

Wir lösen diese transzendente Gleichung z.B. mit Intervallschachtelung oder anderen Fixpunktiterationsmethoden und erhalten bei gegebener Frequenz d.h. für ein gegebenes  $V$  mit der Nebenbedingung

$V^2 = z^2 + w^2$  einen entsprechenden Satz *reeller* Lösungen. Eigentlich sind wir zufrieden, denn im Falle *geführter* Modi sind *reelle* Lösungen ja auch zu erwarten. Wir wissen zudem, dass die so ermittelten Lösungen *exakt* sind; während unserer gesamten Herleitung wurden nämlich keinerlei Vereinfachungen getroffen!

Man kann sich aber trotzdem fragen, ob die Gleichung (3.68) mehr leistet, als nur die *reellen* Eigenwerte der geführten Modi zu bestimmen. Oder umgekehrt: Sind die gefundenen *reellen* Eigenwerte eine *vollständige* Beschreibung der Lösungsmenge von (3.68) oder hat die Gleichung (3.68) noch weitere Lösungen? Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, wird (3.68) *analytisch fortgesetzt*, indem wir beide Variablen, d.h.  $w = u + iv$  und  $z = x + iy$  als komplexe Größen auffassen. Die Größen  $x$  und  $y$  sind zufällig benannt und haben nichts mit dem kartesischen Koordinatensystem der Wellenleiterstruktur zu tun. Unter diesem Gesichtspunkt schreibt sich (3.68) und die Nebenbedingung wie folgt:

$$\begin{aligned}
 u + iv &= -(x + iy) \cdot \cot(x + iy) \\
 u^2 - v^2 + x^2 - y^2 &= V^2 \\
 u \cdot v + x \cdot y &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.107)-(3.109).}$$

In diesem nichtlinearen, komplexen Gleichungssystem lässt sich  $w = u + iv$  über die Nebenbedingung mittels  $V$  eliminieren, und man erhält (nach einigen Umrechnungen) die Gleichung  $z = V \cdot \sin(z)$ , was sich in Komponentenschreibweisen folgendermassen darstellt:

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{\sin(x)} &= \pm V \cdot \cosh(y) \\
 \cos(x) &= \pm \frac{y}{V \cdot \sin(y)}
 \end{aligned}
 \tag{3.110)-(3.111).}$$

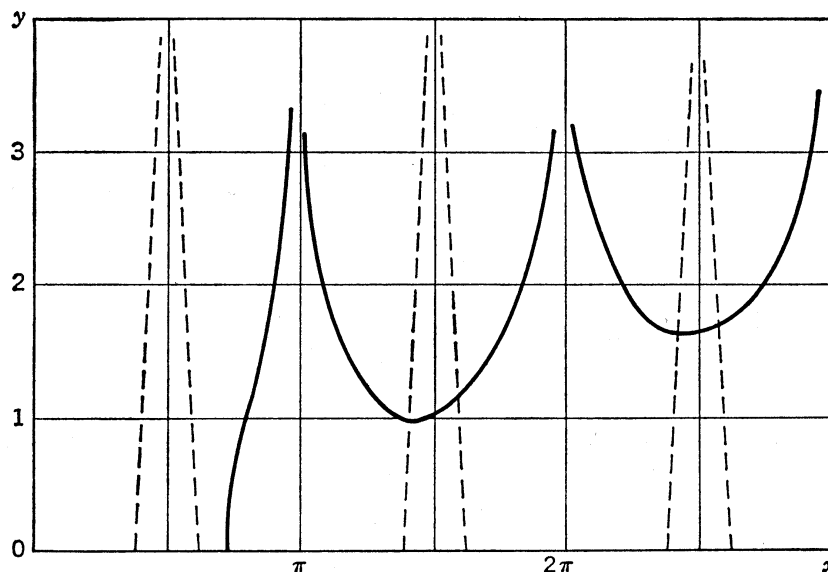


Fig.3.20: Lösungskurven der Gleichungen (a) (3.110) durchgezogene und (b) (3.111) gestrichelte Linie.

Die Lösungskurven der Gleichung (3.110) bzw. (3.111) sind je für  $V=3$  in Fig.3.20 eingetragen, d.h. die Schnittpunkte der beiden Kurven entsprechen gerade den Lösungen von (3.107)-(3.109), nun aber für die komplexen Komponenten  $x$  und  $y$ . Sei  $x_l$  und  $y_l$  ein so gefundener Schnittpunkt, dann heissen die Lösungen gemäss (3.110)-(3.111):  $x_l + iy_l$ ,  $x_l - iy_l$ ,  $-x_l + iy_l$  und  $-x_l - iy_l$ . Es sind nur Lösungen gültig, die auch (3.109) erfüllen. Die  $x$ -Lösungen liegen in der Nähe, d.h. jeweils *unterhalb* der bekannten Werte für den *Cutoff*  $x \approx (m - 1/2) \cdot \pi$ ,  $\forall m = 1, 2, \dots$ <sup>23</sup> und bei grossen  $x$ -Werten vereinfacht sich  $y$ , wegen (3.110), zu  $y \approx \ln[(2m-1) \cdot \pi / V]$ . Die erste Lösung (der erste Schnittpunkt in Fig.3.20 d.h.  $m=2$ ) ermitteln wir demnach bei  $x_l = \pm 1.4 \pi$  und  $y_l = \pm 1$ . Erinnerung man sich an die Form (3.68), dann ist  $w = u + iv$  von der Art einer *transversalen* Wellenzahl (im umgebenden Medium), und wir erhalten mit  $V^2 = z^2 + w^2$  für  $w$  die entsprechenden Werte  $u_l = -1.32$  und  $v_l = \pm 3.33$ , weil, wegen der (nicht angegebene) Komponentenschreibweise von (3.68), immer  $\text{Re}\{w\} < 0$  gelten muss.

Warum so viel Aufhebens ob dieser Lösung? Schauen wir zurück auf unser graphisches Verfahren aus Fig.3.16, so scheinen wir mit  $V=3$  eine *cot(.)*-Kurve zu «schneiden», die eigentlich noch gar nicht in Reichweite von  $V$  liegen dürfte! Im Gegensatz zu den geführten Modi handelt es sich hier um spezielle (komplexe) Lösungen, die *unterhalb* der *Cutoff*-Frequenz auftreten. Im Fall der geführten Modi wurden die Schnittpunkte stets im ersten Quadranten der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene ermittelt (siehe Fussnote<sup>18</sup>); hier liegen nun aber plötzlich Lösungen vor, bei denen  $\text{Re}\{\eta\} < 0$  ist. Die resultierenden Wellen zeigen beim Eindringen ins umgebende Medium daher einen exponentiell *anwachsenden* Verlauf, klingen hingegen in Ausbreitungsrichtung entsprechend ab. Diesem seltsamen Verhalten ordnet man eigens ein neuer Modentyp zu, welcher in der Literatur auch *leaky mode* (Leckwellen) genannt wird. Wo treten *leaky modes* denn überhaupt auf? Im Fall, wo man eine geführte Mode – z.B. durch Aufdrücken eines hochbrechenden Glasprismas auf die Wellenleiterstruktur – auskoppeln möchte, geschieht die Feldbeschreibung innerhalb der «Auskoppelzone» u.a. mit Hilfe solcher *leaky modes*. Wir stellen fest: Beim untersuchten Filmwellenleiter treten sowohl geführte Modi als auch Leckwellen in Erscheinung. Sind noch weitere Feld- bzw. Wellentypen zu erwarten? Die Antwort ist ja.

Machen wir ein kleines *Gedankenexperiment*: Gegeben sei ein allgemeiner Filmwellenleiter, dessen *Kernmedium* die Brechzahl  $n_f$  (*film*) hat, das *Substratmedium* die Brechzahl  $n_s$  (*substrate*) und dessen *Deckmaterial* den Brechungsindex  $n_c$  (*cladding*) besitzt. Der Film ist wie bis anhin in der  $yz$ -Ebene unendlich ausgedehnt und misst entlang der  $x$ -Achse die *Dicke*  $h$ . Es gilt zudem  $n_c < n_s < n_f$ , was übrigens der Materialanordnung der meisten Wellenleiterrealisierungen entspricht. Gleich, wie bei der Eigenwertsuche, geben wir zuerst die Frequenz vor, woraus mit  $|\mathbf{k}|^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  ein konstanter Betrag für den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  resultiert. Hat der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  nun eine spezifische Lage zur Wellenleitergeometrie, dann sind seine Projektionen sowohl in *longitudinaler* als auch in *transversaler* Richtung gemäss der bestens bekannten Relation

$$\begin{aligned} k_{Ti}^2 &= \omega^2 \mu \epsilon_i - \beta^2 \\ \vec{k}_{Ti} &= \vec{k}_i - \vec{e}_z \cdot \beta \end{aligned} \tag{3.112)-(3.113}$$

bereits bestimmt ( $i = c, s, f$ ). Das *Gedankenexperiment* besteht nun darin, dass wir den Wellenvektor bei fixem Betrag langsam von der optischen Achse  $z$  hin zum Substrat und symmetrisch entgegengesetzt zum Deckmaterial wegdrehen – ähnlich den Schenkeln einer Schere. Liegt  $\mathbf{k}$  noch in der optischen Achse ( $z$ -Richtung), dann würde der *longitudinale* Anteil  $\beta$  gemäss (3.113) exakt  $k_0 \cdot n_f$  betragen, d.h.  $\beta$  kann unter keinen Umständen grösser als diese Zahl werden. Bereiche oberhalb von  $k_0 \cdot n_f$  sind für propagierende Eigenlösungen  $\beta$  deshalb *verboten*, was wir in Fig.3.22 entsprechend markieren.  $\beta$  wäre unter solchen Umständen *rein imaginär*, was einer *evaneszenten* Lösung in Ausbrei-

<sup>23</sup>  $m$  ist hier der «Modenzähler» bezüglich der *cot(.)*-Funktion, die gemäss (3.72) auch die ungeraden  $p$  indizieren würde.

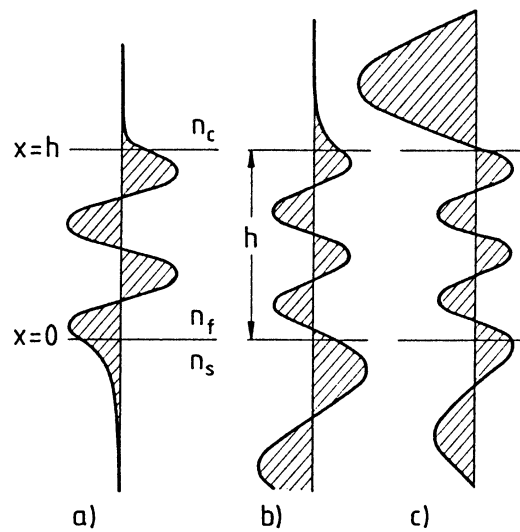


Fig.3.21: Modenprofile bei (a) einer Filmwelle (geführte Wellenausbreitung), (b) einer Substratwelle (Abstrahlung ins Substrat) und (c) einer Raumwelle (beidseitige Abstrahlung).

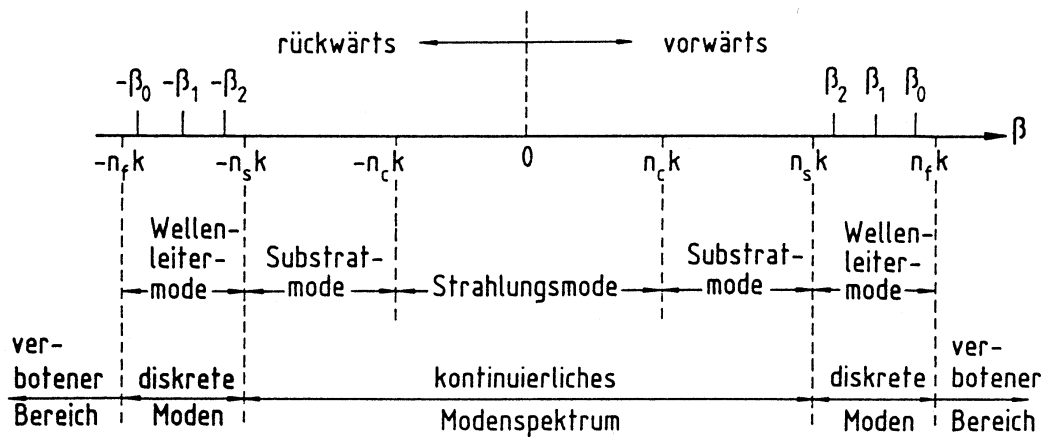


Fig.3.22: Kategorisierung der Ausbreitungskonstante bezüglich der verschiedenen Modentypen des Filmwellenleiters.

tungsrichtung entspräche. Wir öffnen unsere «Schere» weiter, d.h.  $k$  zeigt nun etwas mehr in  $\pm x$ -Richtung und es entstehen gemäss (3.113) wachsende  $k_T$ -Anteile sowohl im Film als auch in den beiden umgebenden Materialien. Die Drehung führt gleichzeitig zu einer entsprechenden Verkürzung von  $\beta$ , doch um «stabile» Betriebsbedingungen der Wellenausbreitung zu erzielen, müssen die in den vorhergehenden Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 hergeleiteten Eigenwertgleichungen erfüllt sein: Die «wahren» Lösungen sind *diskret* und heissen *geführte Modi*. Wir haben sie als  $\beta_0, \beta_1$  und  $\beta_2$  in die Fig.3.22 eingetragen und eines ihrer Modenprofile könnte z.B. entsprechend der Fig.3.21a) verlaufen. In diesem Fall ist  $k_{Ti}$  für  $i=f$  reell und  $k_{Ti}$  für  $i=c, s$  rein imaginär, womit letztere den abklingenden Feldverlauf im Aussenmaterial bewirkt. Wir öffnen die «Schere» weiter, bis  $k_{Ts}$  plötzlich reelle Werte annimmt. Jetzt wird ein Teil der Leistung über eine propagierende Strahlungswelle ins Substrat abgeführt (siehe Fig.3.21b), was im optischen Strahlenbild der Aufhebung der Totalreflexion an dieser

Materialgrenze entspricht. Durch die Ankopplung des *Strahlungskontinuums*<sup>24</sup> auf der Substratseite, werden die *resonanten* Eigenzustände im Film aufgehoben und es resultiert ein kontinuierliches Eigenwertspektrum für den resultierenden Gesamtzustand des Wellenfeldes. Wir fassen dieses Szenario unter dem Begriff *Substratmode* zusammen. Mit der einseitigen Abstrahlung tritt erstmals ein völlig unterschiedlicher Wellentyp – die *Strahlungsmode* – in Erscheinung. In reiner Form liegt sie erst dann vor, wenn wir  $\mathbf{k}$  noch weiter aus der optischen Achse in Richtung  $\pm x$  drehen, so dass auch  $k_{Tc}$  reell wird. Das Feld des Filmwellenleiters kann jetzt nur noch mit Hilfe von beidseitig abstrahlenden Raumwellen beschrieben werden, was gerade der Situation in Fig.3.21c) entspricht.

Ein weiterführendes Studium der Theorie besagt zudem, dass die *Strahlungsmodi* und die *geführten Wellenleitermodi* eine *orthogonale Basis*<sup>25</sup> bilden, mit der sich eine Vielzahl von Feldzuständen beschreiben lässt. Dies trifft bei den *leaky modes* übrigens nicht zu. Daher sind sie wahre Exoten und stellen auch keine richtigen Wellenleitermodi dar, sondern geben nur die Resonanzzustände ihres eigenen kontinuierlichen Spektrums wieder.

Ungeachtet der Vielfalt an Modi, dieses regelrechten «Zoos» von Wellentypen soll sich aber niemand über den Umstand hinwegtäuschen, dass es sich hier stets nur um die *formale Beschreibung* eines *physikalisch* realen Gebildes handelt: die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes mit Hilfe von *mathematisch zugänglichen* Wellentypen. Wie leicht vermutet werden kann, ist eine solche Beschreibung meistens *unvollständig*. Je nach Komplexität der Problemstellung wäre es durchaus denkbar, dass neue Wellentypen «entdeckt» und beigezogen werden müssten. Zwei gewichtige Tatsachen entkräften diesen Anspruch erheblich: 1. Genügen bei konkreten Beispiele aus der Praxis bereits Feldapproximationen, die lediglich einen bis zwei Wellentypen enthalten. 2. Ohne hier näher darauf eingehen zu wollen, gibt es in der Elektrodynamik eine noch viel fundamentalere Zerlegung des elektromagnetischen Feldes – die sogenannte *Multipolentwicklung* – welche dem Anspruch der Vollständigkeit gerecht wird.

Kehren wir noch einmal zurück zu unserem *Gedankenexperiment*. Wir hatten dort die Frequenz, bzw. den Betrag des Wellenvektors  $|\mathbf{k}|$  konstant belassen und  $\mathbf{k}$  lediglich in seiner Richtung gedreht. Dementsprechend betraten die unterschiedlichen Wellentypen die Arena unserer Betrachtung. Dürfen wir das überhaupt; einfach so drehen und dies bei konstanter Frequenz? Stellen sich nicht stets diejenigen Modi ein, welche von der Problemstellung eh schon vorgegeben sind? Unser Gedankenexperiment hatte lediglich zum Ziel, den formalen «Möglichkeitsraum» der Feldbeschreibung beim dielektrischen Filmwellenleiter auszuloten und hierfür war der «Winkelsweep» des  $\mathbf{k}$ -Vektors durchaus statthaft. Die Existenzfrage, – d.h. Fragen vom Typ «Welche Mode existieren denn überhaupt in der betrachteten Wellenleiterstruktur?» – adressieren das sogenannte *homogene Problem* der Struktur. «Welche Modi sind *potentiell* ausbreitungsfähig?» ist genau eine solche Frage und wir beantworten sie, indem wir das *Eigenwertproblem* bezüglich der geführten Modi lösen. Fragen wir hingegen, welche Modi *in Wirklichkeit* angeregt werden, dann müssen wir den Blick weiten und auch *Inhomogenitäten*, wie die *Anregung* oder allfällige *Störungen* in das Wellenleiterproblem mit einbeziehen. Die reale Zusammensetzung des Feldes richtet sich daher stets nach dem *Gesamtbild* der Problemstellung. Bildlich gesprochen sind die *Inhomogenitäten* die «Scharnierstellen», wo die unterschiedlichen formalen Feldbeschreibungen (Modi) miteinander verschränkt sind bzw. miteinander verkoppelt werden. Interessanterweise ist bereits die einzelne, Wellenleiterstörung potentiell in der Lage, diese Zerlegung des Feldes in die entsprechenden Modi vorzunehmen. Allgemein betrachtet ist eigentlich jede Art von *Inhomogenität* dazu imstande, diese Zerlegung auszulösen: sei es eine *Inhomogenität* von räumlicher Natur, wie es z.B. die eben beschriebene Wellenleiterstörung, oder auch eine sehr lokale Feldquelle im Wellenleiter darstellt; oder sei es eine von zeitlicher Natur, welche z.B. durch den einfachen Einschaltvorgang einer beliebigen

<sup>24</sup> Die *Strahlungsmodi* im umgebenden Aussenraum können jeden Ausbreitungszustand annehmen, d.h. ihr Eigenwertspektrum ist *kontinuierlich*.

<sup>25</sup> Strenggenommen darf nur im verlustlosen Fall von *Mode* gesprochen werden. In diesem Sinne stellen *Leckwellen* und die *Substratmodi* eine *Komplikation* dar, was die Ausbreitungszustände im dielektrischen Wellenleiter anbelangen.

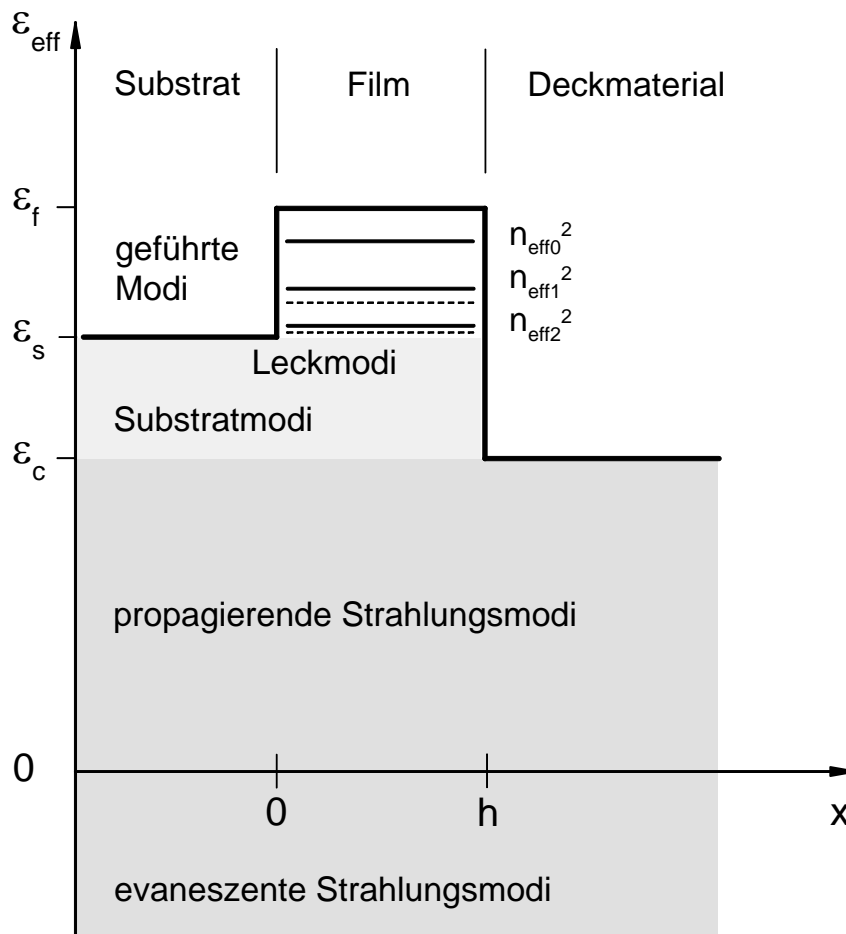


Fig.3.23: Die unterschiedlichen Eigenmodi des Filmwellenleiters.

Feldquelle wiedergegeben wird. Die «abrupte», un stetige Qualität der *Inhomogenität* ist somit für die spezifische Artenvielfalt innerhalb der Feldzerlegung verantwortlich, dieser Umstand wird in der *Photonik* übrigens oft für praktische Zwecke ausgenutzt.

Abschliessend soll noch auf eine formale Verwandtschaft zwischen dem *quantenmechanischen Potentialproblem* und dem *dielektrischen Wellenleiterproblem* hingewiesen werden. Beim *quantenmechanischen Potentialproblem* gilt es jeweils die Elektronenzustände in einem vorgegebenen Potentialprofil (z.B. ein Potentialtopf) durch Ansetzen der *stationären Schrödingergleichung* auszurechnen. Das *quantenmechanische Analogon* am dielektrischen Wellenleiter besteht nun darin, die Modi explizit als *Ausbreitungszustände* bezüglich eines vorliegenden dielektrischen (Potential-) Profils aufzufassen. Dadurch wird einerseits eine tiefe Affinität zwischen der *Helmholtzgleichung* und der *stationären Schrödingergleichung* unterstrichen, und andererseits wird das dielektrische Wellenleiterprofil einfach als (umgekippter) Potentialtopf betrachtet (vergleiche hierzu Fig.3.23). In dieser Lesart entsprechen gebundene Elektronenenergiezustände den *gebundenen* Ausbreitungszuständen – d.h. den *geführten Modi* – des Wellenleiters. Wir haben sie, ähnlich den Energieeigenwerten im quantenmechanischen Potentialtopf, als *effektive Dielektrizitätszahlen* ( $n_{\text{eff}i}^2$ ) im entsprechenden dielektrischen Profil eingetragen. Langsame Elektronen, deren Energie zudem kleiner als die Topfbarrieren sind, können oftmals gar nicht in den Potentialtopf «fallen», weil ihre *de Broglie-Wellenlänge* nicht mit der Topfbreite kommensurabel ist. Solche Zustände heissen *Transmissionsresonanzen*, sie sind instabil und konstituieren sogenannte *virtuell gebundene Zustände* deren Wellenfunktionen, da sie nicht mit der Topfbreite übereinstimmen müssen, sehr ausgedehnt sein können. Die

*virtuell* gebundenen Zustände liegen energetisch jeweils leicht oberhalb der *gebundenen* Zustände, was im Fall unserer angesprochenen Analogie genau in das Bild der *leaky modes* beim dielektrischen Wellenleiterproblem passt. Diese «Resonanzen» sind in *Fig.3.23* gestrichelt eingetragen. Tritt nun  $\varepsilon_{\text{eff}} = \beta^2/k_0^2$  unter den Wert der Dielektrizitätszahl  $\varepsilon_s = n_s^2$  des Substrats, dann werden die resultierenden Ausbreitungszustände – ganz analog zu den ungebundenen Elektronen – *ungebunden*, d.h. wir erhalten zuerst die Situation der nach links wegpropagierenden *Substratmodi* und später, bei weiterer Verringerung von  $\varepsilon_{\text{eff}} < n_c^2$ , die *Strahlungsmodi* als vollständige Feldbeschreibung<sup>26</sup>. Mit dieser allgemeinen Betrachtung soll unsere Untersuchung des Filmwellenleiters nun abgeschlossen werden.

**Beispiel:** Gegeben sei ein Filmwellenleiter mit der Filmdicke  $h = 0.5 \mu\text{m}$ , und der Brechzahl 3.0. Die Brechzahl des Deckmaterials beträgt 1 (Luft) und diejenige des Substratmaterials 2. Berechne den effektiven Brechungsindex bei einer Wellenlänge von  $1.50 \mu\text{m}$  sowohl für die TE als auch für die TM Polarisation.<sup>27</sup>

**Lernkontrolle:** Was ist die Rolle des Strukturparameters  $V$ ? Welchen qualitativen Unterschied weist der symmetrische Filmwellenleiter gegenüber der unsymmetrischen Struktur auf? In welche Modi kann das elektromagnetische Feld des Filmwellenleiters zerlegt werden? Warum sind die Leckwellen als «Exoten»? zu betrachten und wie unterscheiden sie sich z.B. von den Substratmodi? Gegeben sei ein Filmwellenleiter. Gelingt es mir mit Hilfe einer externen ebenen Welle (z.B. von schräg oben einfallend), Leistung in den Film einzukoppeln? Anders gefragt: Kann ich mittels extern einfallender Strahlung eine geführte Mode im Film anregen? Die Antwort kann über mindestens zwei unterschiedliche Argumentationslinien erfolgen.

## Literatur

- [10] Werner Bächtold. *Lineare Elemente der Höchsthfrequenztechnik*. Zürich: vdf – Verlag der Fachvereine, 2. Auflage, 1998.
- [11] Charles Vassallo. *Optical Waveguide Concepts*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1991.
- [12] Theodor Tamir. *Guided-Wave Optoelectronics*. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [13] Robert E. Collins. *Field Theory of Guided Waves*. New York: IEEE Press, 2. Edition, 1991.

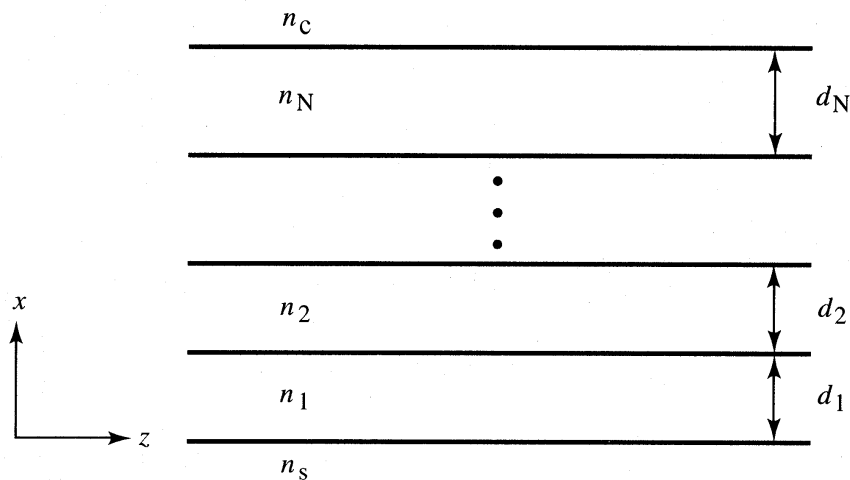
<sup>26</sup> Der etwas spezielle Zustand mit  $\varepsilon_{\text{eff}} < 0$  entspricht z.B. Wellenausbreitung in endlich leitfähigen Metallen.

<sup>27</sup> Lösung:  $n_{\text{eff,TE1}} = 2.800944$ ,  $n_{\text{eff,TE2}} = 2.185550$ ,  $n_{\text{eff,TM1}} = 2.693176$ ,  $n_{\text{eff,TM2}} = 2.002866$ .



### 3.5 Der dielektrische planare Mehrschichtwellenleiter

Die im letzten *Abschnitt 3.4* erarbeitete Theorie zum Filmwellenleiter lässt sich auf einfache Weise für den *Mehrschichtwellenleiter* verallgemeinern. Dadurch erlangen wir einerseits Kenntnisse über einen weiteren optischen Wellenleitertyp und andererseits können beliebige Wellenleiterprofile  $n(x)$  mit Hilfe der Diskretisierung  $n(x) \sim \sum_i^N n_i(d_i)$  aus  $N$  dünnen Schichten  $n_i$  der Dicke  $d_i$  angenähert werden. Zu dieser Problemstellung existiert eine Vielzahl von Repräsentationen mit den zugehörigen Lösungsvorschlägen, doch werden wir im kommenden Abschnitt lediglich auf eine einfache, sukzessive Methode eingehen, welche sich formal sehr gut an die bisherigen Erläuterungen anschließt. Als Ausgangspunkt sei die Mehrschichtstruktur aus *Fig.3.24* gegeben.



*Fig.3.24: Schematische Darstellung der dielektrischen Mehrschichtwellenleiterstruktur. Die Grösse  $n_s$  steht für den Brechungsindex des Substratmaterials und  $n_c$  entsprechend für das Deckmaterial. Die Wellenausbreitung erfolgt in  $z$ -Richtung.*

Damit die geführte Wellenausbreitung überhaupt möglich ist, muss  $\max(n_s, n_c) < \max(n_i)$  gelten. Wie wir in *Abschnitt 3.3* erkannt haben, werden für die Ermittlung der Lösungsfunktionen zuerst die  $z$ -Komponenten des Felds angesetzt, und zwar  $H_z$  im Fall von *TE*-Modi und  $E_z$  bei den *TM*-Modi. Die Lösungsfunktionen sind nur von den transversalen Raumkoordinaten abhängig, da beim unendlichen, in der  $yz$ -Ebene ausgedehnten Film des «Schichtwellenleiters»  $\partial/\partial y \rightarrow 0$  gilt. Ausgehend von der *Helmholtzgleichung* (3.47)-(3.48) ergeben sich für die Felder  $H_z(x)$  bzw.  $E_z(x)$  im *Mehrschichtwellenleiter* nach Erzwingung der Randbedingungen Lösungsfunktionen vom Typ  $e^{\pm ik_T x}$ . Wie wir bereits wissen, können die *transversalen* Feldkomponenten dann nachträglich gemäss (3.45)-(3.46) aus den *longitudinalen* Komponenten berechnet werden. Soweit alles wie gehabt! Ohne Einbusse der Allgemeinheit soll jetzt aber ein anderer Weg eingeschlagen werden. Betrachten wir die Divergenzbeziehungen (3.43)-(3.44) der *Maxwellgleichungen*, dann ist die Stetigkeit von  $H_z$  an der Materialgrenze äquivalent zur Stetigkeit von  $\partial E_y/\partial x$ . Analog dazu, kann die Stetigkeitsbedingung für  $E_z$  auch direkt für  $(1/n_i^2) \cdot \partial H_y/\partial x$  angegeben werden. Wir definieren die folgende *Profilfunktion*:

$$f(x) = \begin{cases} E_y(x) & TE - \text{Modi} \\ H_y(x) & TM - \text{Modi} \end{cases} \quad (3.114).$$

Warum wird plötzlich mit den *transversalen*, d.h. den  $y$ -Komponenten des Feldes begonnen? Hierzu zwei Betrachtungen: 1. Setzen wir die *transversalen* Komponenten mit  $f(x)$  an, dann ist  $\mathcal{A}/\partial x$  sicher proportional zu der longitudinalen Komponente, wie z.B.  $H_z(x)$  und da die Randbedingungen (RB) sowohl für  $f$ , als auch für  $\mathcal{A}/\partial x$  formuliert werden, spielt es eigentlich keine Rolle, welche der angesetzten Feldkomponente nun zur *Profilfunktion* «gekürt» wird. 2. Gemäss den Divergenzbeziehungen (3.43)-(3.44) ist z.B.  $H_z$  proportional zu  $\partial E_y/\partial x$ . In Anbetracht von (3.45) ist  $E_y$  hingegen proportional zu  $\partial H_z/\partial x$ . Somit ist  $\partial^2 H_z/\partial x^2$  proportional zu  $H_z$ , was gerade die *Helmholtzgleichung* wiedergibt. Ob wir nun mit der *Helmholtzgleichung* für die  $z$ -Komponenten beginnen oder die *transversalen* Komponenten als *Profilfunktion* ansetzen, in den Randbedingungen sind beide gleichsam präsent.

Eigentlich haben wir hier lediglich zwei Lösungsstrategien ausgeführt, die beide zum *gleichen*, korrekten Ergebnis führen müssen: Wir nennen diese die « $z \rightarrow T$ -Strategie» und die « $(RB)_z \Leftrightarrow (RB)_y$ -Strategie», wobei uns erstere den Ansatz der *longitudinalen*  $z$ -Komponenten vorschlägt und die letztere bei den *transversalen*  $y$ -Komponenten beginnt. Bei Mehrschichtwellenleiterstrukturen, die eine kontinuierliche Indexverteilung  $n(x)$  approximieren, sind prinzipiell kleine Indexsprünge  $n_i - n_{i+1}$  zu erwarten, was bei der Lösung wiederum zu kleinen  $z$ -Komponenten führen wird. Aus diesem Grund ist es angezeigt, die zweite Lösungsstrategie zu wählen<sup>28</sup>. Wir fassen zusammen:

- TE:  $H_z \neq 0$ ,  $E_z \equiv 0$ , die Randbedingungen gelten für  $H_z$  und gemäss (3.43) auch für  $\partial E_y/\partial x$ ,
- TM:  $E_z \neq 0$ ,  $H_z \equiv 0$ , die Randbedingungen müssen für  $E_z$  und laut (3.44) für  $(1/n_i^2) \cdot \partial H_y/\partial x$  erfüllt sein.

In allen  $N$  Schichten des *Mehrschichtwellenleiters* setzen wir die *Profilfunktion* (3.114) für das betrachtete Feld im Sinne von z.B. (3.97)-(3.99) und entsprechend der Brechzahl  $n_i$  an. Wir schreiben

$$f_i(x) = A_i \cdot e^{i g_i \cdot x} + B_i \cdot e^{-i g_i \cdot x} \quad (3.115),$$

mit  $i = s, 1, 2, \dots, k, \dots, N, c$  und der *transversalen* Wellenzahl

$$g_i \equiv k_{Ti} = \sqrt{k_i^2 - \beta^2} = k_0 \cdot \sqrt{n_i^2 - n_{eff}^2} \quad (3.116)$$

im entsprechenden Medium. Die *Profilfunktion*  $f_i(x)$  gilt jeweils für den Bereich  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  d.h. in der Schicht  $d_i = x_{i+1} - x_i$ . Die Grösse  $g_i$  kann reelle oder imaginäre Werte annehmen. Ihre neue Schreibweise wurde lediglich aus Gründen der Einfachheit und Klarheit gewählt und hat demnach nichts Weiteres zu bedeuten. Die nächsten Schritte bestehen nun darin, die *Eigenwertgleichung* der Mehrschichtstruktur zu ermitteln, indem die Randbedingungen bezüglich der Profilkfunktionen *sukzessive* für alle involvierten Materialgrenzen  $\partial M_{i,i+1}$  erzwungen werden. Wir beginnen beim Substratmedium  $n_s$  und schreiben (3.115) unter Kenntnis des nach aussen hin abfallenden Feldverlaufs in der Form<sup>29</sup>

$$f_s(x) = B_s \cdot e^{-i g_s \cdot x} = e^{k_0 \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_s^2} \cdot x} \quad (3.117),$$

wobei für den Vorfaktor, ohne Einbusse der Allgemeingültigkeit  $B_s = 1$  gewählt wurde. An der Grenzfläche zur ersten Schicht des Wellenleiters ( $x=0$ ) heissen die Randbedingungen demnach

<sup>28</sup> Beim Ansatz von  $E_y$  (mit  $H_z$ ) bzw.  $H_y$  (mit  $E_z$ ) berechnen sich die restlichen Transversalkomponenten aus (3.41)-(3.42).

<sup>29</sup> Beim Wellenleiter muss das Feld für  $x \rightarrow \pm \infty$  nach Null streben, daher ist  $A_s = 0$  und  $B_s \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 f: \quad 1 &= A_1 + B_1 \\
 \frac{d}{dx} f: \quad k_0 \cdot \sqrt{n_i^2 - n_{eff}^2} &= \alpha_{s,1} \cdot i g_1 \cdot (A_1 - B_1)
 \end{aligned} \tag{3.118},$$

mit dem modenabhängigen Vorfaktor  $\alpha_{i,i+1}$  gemäss

$$\alpha_{i,i+1} = \begin{cases} 1 & \text{TE} \\ \frac{n_i^2}{n_{i+1}^2} & \text{TM} \end{cases} \tag{3.119}.$$

Für die Randbedingungen an der Materialgrenze  $\partial M_{k,k+1}$ , d.h. an der Position  $x_k$ , ergeben sich analog zu (3.118) die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
 f: \quad A_k \cdot e^{i g_k \cdot x_k} + B_k \cdot e^{-i g_k \cdot x_k} &= A_{k+1} \cdot e^{i g_{k+1} \cdot x_k} + B_{k+1} \cdot e^{-i g_{k+1} \cdot x_k} \\
 \frac{d}{dx} f: \quad i g_k \cdot (A_k \cdot e^{i g_k \cdot x_k} - B_k \cdot e^{-i g_k \cdot x_k}) &= \alpha_{k,k+1} \cdot i g_{k+1} \cdot (A_{k+1} \cdot e^{i g_{k+1} \cdot x_k} - B_{k+1} \cdot e^{-i g_{k+1} \cdot x_k})
 \end{aligned} \tag{3.120}.$$

Die beiden Ausdrücke aus (3.120) stellen ein Gleichungssystem dar, bei dem die unbekanntenen Konstanten  $A_{k+1}$  und  $B_{k+1}$  aus den bereits bekannten Konstanten  $A_k$  und  $B_k$  berechnet werden können. Durch *sukzessives* Lösen von (3.120) für den zunehmenden Index  $k = 1 \dots N-1$ , d.h. ausgehend von der ersten Schicht bis zur Schicht  $N$ , gelangen wir schliesslich zur Position  $x_N = \sum_i^N d_i$ , wo die Randbedingungen bezüglich des Deckmaterials  $n_c$  erfüllt werden müssen. Wie in (3.117) wird auch beim Deckmaterial eine abfallende *Profilmfunktion* angenommen

$$f_c(x) = (A_N \cdot e^{i g_N \cdot x_N} + B_N \cdot e^{-i g_N \cdot x_N}) \cdot e^{-k_0 \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2} \cdot (x - x_N)} = A_c \cdot e^{-k_0 \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2} \cdot x} \tag{3.121}.$$

Es bleibt also nur noch eine einzige Randbedingung zu erfüllen, nämlich diejenige für  $\partial f / \partial x$  an der Stelle  $x = x_N$ . Diese Randbedingung wird nur erfüllt, wenn  $n_{eff}$  auch wirklich den Eigenwert für die geführte Mode im Mehrschichtwellenleiter darstellt. Durch Differenzieren von (3.115) nach  $x$  und ebensolchem Differenzieren von (3.121) ergibt sich am Ort  $x = x_N$ , unter Berücksichtigung der zweiten Relation in (3.120) die *Eigenwertgleichung* der Mehrschichtstruktur

$$i g_N \cdot \frac{A_N \cdot e^{i g_N \cdot x_N} - B_N \cdot e^{-i g_N \cdot x_N}}{A_N \cdot e^{i g_N \cdot x_N} + B_N \cdot e^{-i g_N \cdot x_N}} + \alpha_{N,c} \cdot k_0 \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2} = 0 \tag{3.122}.$$

Dabei ist zu beachten, dass  $A_N$  und  $B_N$  bereits beim Schritt  $k = N-1$  berechnet wurden. Vergleicht man diese *transzendente* Gleichung mit (3.67) so ist eine starke Ähnlichkeit auszumachen, d.h. (3.122) ist von der Art  $-\xi \tan(\xi) + \eta = 0$  – und muss nun für  $n_{eff}$  gelöst werden.

Man kann den eben beschriebenen Formalismus noch verständlicher gestalten, indem man im Ansatz (3.115)  $B_i$  und  $A_i$  als Amplituden einer *transversalen, hin- und rücklaufenden* Welle auffasst<sup>30</sup>. In diesem Sinne lässt sich (3.120) als Matrixgleichung für die Amplituden  $B_{k+1}$  und  $A_{k+1}$  anschreiben

$$\begin{bmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^k & T_{12}^k \\ T_{21}^k & T_{22}^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Der obere Ausdruck erweckt den Anschein, als ob die beiden Amplituden  $A_k$  und  $B_k$ , (ausgehend von der Grenzschicht bei  $x = x_k$ ) über die Distanz der Schichtdicke  $d_k = x_{k+1} - x_k$  propagiert wären. Man nennt die Matrix  $[T^k]$  aus diesem Grund auch *Transfer-Matrix* und erhält dafür, gemäss (3.120)

$$\boxed{[T^k] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_k}{\alpha_{k,k+1} g_{k+1}} \right) \cdot e^{i(g_k - g_{k+1}) \cdot x_k} & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_k}{\alpha_{k,k+1} g_{k+1}} \right) \cdot e^{-i(g_k + g_{k+1}) \cdot x_k} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_k}{\alpha_{k,k+1} g_{k+1}} \right) \cdot e^{i(g_k + g_{k+1}) \cdot x_k} & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_k}{\alpha_{k,k+1} g_{k+1}} \right) \cdot e^{-i(g_k - g_{k+1}) \cdot x_k} \end{bmatrix}} \quad (3.124).$$

Das *sukzessive* Lösen von (3.120) bei zunehmendem Index  $k = 1 \dots N-1$  kann in dieser Schreibweise sehr einfach erfolgen, indem man die berechneten Amplituden  $A_{k+1}$  und  $B_{k+1}$  als Amplituden  $A_k$  und  $B_k$  der nächstfolgenden Schicht interpretiert und entsprechend einsetzt. Für die Mehrschichtstruktur bedeutet das

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = [T^{N-1}] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad (3.125),$$

wobei die *Transfer-Matrix* all dieser Schichten aus

$$\boxed{[T^{N-1}] = [T^{N-2}] \cdot \dots \cdot [T^2] \cdot [T^1] = \prod_{k=1}^{N-1} [T^k]} \quad (3.126)$$

erfolgt. In dieser Schreibweise bedeutet der Operator  $\Pi$  das *linksseitige* Anmultiplizieren der einzelnen Matrizen  $[T^k]$ . Für die *Substratseite* kann die Beziehung (3.118) unter Berücksichtigung der Matrixdarstellung (3.124) und bezüglich des Ortes  $x = 0$  wie folgt angeschrieben werden

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_s}{\alpha_{s,1} g_1} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_s}{\alpha_{s,1} g_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_s}{\alpha_{s,1} g_1} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_s}{\alpha_{s,1} g_1} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.127).$$

<sup>30</sup> Vergleiche hierzu die *Vorzeichenkonvention* aus Fussnote <sup>12</sup>.

Es gilt, gemäss Lösungsansatz (3.117),  $g_s = i \cdot k_0 \sqrt{(n_{\text{eff}}^2 - n_s^2)}$ . Wir bezeichnen die obenstehende Systemmatrix entsprechend mit  $[T^s]$ . Bei der Grenze zum Deckmaterial  $n_c$  ergibt sich analog dazu

$$\begin{bmatrix} A_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_N}{\alpha_{N,c} g_c} \right) \cdot e^{i(g_N - g_c) \cdot x_N} & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_N}{\alpha_{N,c} g_c} \right) \cdot e^{-i(g_N + g_c) \cdot x_N} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_N}{\alpha_{N,c} g_c} \right) \cdot e^{i(g_N + g_c) \cdot x_N} & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_N}{\alpha_{N,c} g_c} \right) \cdot e^{-i(g_N - g_c) \cdot x_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} \quad (3.128),$$

wobei  $g_c = i \cdot k_0 \sqrt{(n_{\text{eff}}^2 - n_c^2)}$  ist und die Systemmatrix hier entsprechend  $[T^c]$  heisst. Die *Eigenwertgleichung* (3.122) wird durch den *homogenen* Teil des Gleichungssystems (3.128) repräsentiert. Der *inhomogene* Teil von (3.128) lässt sich hingegen nach der Amplitude  $A_c$  auflösen und wir erhalten den gleichen Wert, wie im Ausdruck (3.121). In Bezug auf das Matrix-System für den gesamten Wellenleiterquerschnitt erhalten wir

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_c \\ 0 \end{bmatrix} = [T^{\text{tot}}] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [T^{\text{tot}}] = [T^c] \cdot \left\{ \prod_{k=1}^{N-1} [T^k] \right\} \cdot [T^s]} \quad (3.129)-(3.130),$$

und identifizieren die *Eigenwertgleichung der geführten Modi* als den *homogenen* Teil dieser Matrixbeziehungen. Es ergibt sich ein erstaunlich einfacher Ausdruck:

$$\boxed{T_{22}^{\text{tot}}(n_{\text{eff}}) = 0} \quad (3.131).$$

Die Nullstellen von (3.131) sind somit gerade die gesuchten *Eigenwerte*  $n_{\text{eff}} = \beta/k_0$ , bzw. die gesuchten Ausbreitungskonstanten  $\beta$  der geführten Modi im Mehrschichtwellenleiter!

### a) Probe

Wir machen die Probe aufs Exempel und überprüfen den zugegebenermassen etwas abstrakten Matrixformalismus am einfachen *symmetrischen Filmwellenleiter*. Die Dicke des Films werde hier als  $h$  angenommen, die Brechzahl des Films sei  $n_l$  und diejenige des Aussenmediums entsprechend  $n_c$ . Somit gilt auch  $g_s = g_c$ . Die Systemmatrix  $[T^{\text{tot}}]$  wird, gemäss (3.130), nur noch aus dem Produkt  $[T^c] \cdot [T^s]$  bestehen und wir schreiben dies, unter Berücksichtigung von (3.127) und (3.128),

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_l}{\alpha_{l,c} g_c} \right) \cdot e^{i(g_l - g_c) \cdot h} & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_l}{\alpha_{l,c} g_c} \right) \cdot e^{-i(g_l + g_c) \cdot h} \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_l}{\alpha_{l,c} g_c} \right) \cdot e^{i(g_l + g_c) \cdot h} & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_l}{\alpha_{l,c} g_c} \right) \cdot e^{-i(g_l - g_c) \cdot h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_c}{\alpha_{c,l} g_l} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_c}{\alpha_{c,l} g_l} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{g_c}{\alpha_{c,l} g_l} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{g_c}{\alpha_{c,l} g_l} \right) \end{bmatrix} \quad (3.132).$$

Wir setzen  $\alpha_{l,c}$  den Wert für die *TM*-Polarisation ein (der *TE*-Fall ist trivial) und substituieren

$$\alpha_{1,c} = \frac{1}{\alpha_{c,1}} = \frac{n_1^2}{n_c^2} = \alpha \quad S_c = \frac{g_1}{\alpha \cdot g_c} = \frac{1}{S_1} \quad (3.133),$$

wodurch  $T_{22}^{tot} = 0$  wie folgt angeschrieben werden kann

$$[1 - S_1] \cdot (1 - S_c) \cdot e^{i \cdot g_1 \cdot h} + [1 + S_1] \cdot (1 + S_c) \cdot e^{-i \cdot g_1 \cdot h} = 0 \quad (3.134),$$

was umgeformt, wiederum einen ähnlichen Ausdruck wie in (3.122) ergibt

$$g_1 \cdot \frac{[1 - S_1] \cdot e^{i \cdot g_1 \cdot h} - [1 + S_1] \cdot e^{-i \cdot g_1 \cdot h}}{[1 - S_1] \cdot e^{i \cdot g_1 \cdot h} + [1 + S_1] \cdot e^{-i \cdot g_1 \cdot h}} - \alpha \cdot g_c = 0 \quad (3.135).$$

Nun gilt es zu beachten, dass  $g_c = i \cdot k_0 \sqrt{(n_{eff}^2 - n_c^2)}$  rein *imaginär* ist, wodurch sich die eckigen Klammern konjugiert-komplex zueinander verhalten. Aus (3.135) entsteht nun der folgende Term

$$g_1 \cdot h \cdot \tan(g_1 h + \psi) = \alpha \cdot k_0 h \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2} \quad (3.136).$$

Eine weitere Vereinfachung erzielt man mit  $\xi = g_1 \cdot h$  und  $\eta = k_0 \cdot h \sqrt{(n_{eff}^2 - n_c^2)}$ , was den Ausdruck (3.137) in die Form

$$\xi \cdot \tan(\xi + \psi) = \alpha \cdot \eta \quad (3.137).$$

überführt. Die Phase  $\psi$  rührt daher, dass wir den Filmwellenleiter, im Vergleich zur Darstellung in Fig.3.14 nicht symmetrisch vermasst haben, d.h. der Film erstreckt sich hier zwischen 0 und  $h$  in  $x$ -Richtung. Dieser Phasenterm berechnet sich gemäss

$$\psi = \arg\{1 - S_1\} = -\text{Arctan}\left(\frac{\alpha \cdot k_0 \cdot \sqrt{n_{eff}^2 - n_c^2}}{g_1}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{\alpha \cdot \eta}{\xi}\right) \quad (3.138)$$

Wir setzen nun (3.138) in (3.137) ein und setzen die *Arcustangens*-Funktion an

$$\xi - \text{Arctan}\left(\alpha \cdot \frac{\eta}{\xi}\right) = \text{Arctan}\left(\alpha \cdot \frac{\eta}{\xi}\right) \quad (3.139),$$

was nach wenigen Umformungen sofort

$$\xi \cdot \tan\left(\frac{\xi}{2}\right) = \alpha \cdot \eta \tag{3.140}$$

ergibt. Wir sind nun praktisch am Ende unserer Ausführungen angelangt. Es gilt lediglich noch hervorzuheben, dass die gesamte Filmdicke als  $h$  angenommen wurde, wodurch das hiesige  $\xi$  doppelt so gross wie beim symmetrischen Fall (3.65) ist. Wir normieren (3.140) mit  $\xi \rightarrow 2 \xi_{sym}$  und  $\eta \rightarrow 2 \eta_{sym}$  auf den symmetrischen Fall um, und erhalten den gesuchten Ausdruck

$$\xi_{sym} \cdot \tan\left(\xi_{sym}\right) = \alpha \cdot \eta_{sym} \tag{3.141}.$$

Es wurde somit gezeigt, dass die Eigenwertgleichung  $T_{22}^{tot} = 0$  aus (3.131) tatsächlich mit der bestens bekannten Eigenwertgleichung  $\xi \tan(\xi) = \eta$  übereinstimmt. Die Konstante  $\alpha$  wird, gemäss (3.119), für  $TE$ -Modi den Wert 1 annehmen und bei  $TM$ -Modi entsprechend  $n_i^2/n_c^2$ .

### b) Beispiel

Gegeben sei der in Fig.3.25 abgebildete 3-Schichtwellenleiter, wobei die normierten Dicken der inneren drei Schichten  $d_1=0.6 \cdot \lambda_0$ ,  $d_2=0.08 \cdot \lambda_0$ , und  $d_3=0.6 \cdot \lambda_0$  betragen. Die zugehörigen Brechzahlen sind  $n_1=3.6$ ,  $n_2=3.3$ , und  $n_3=3.6$ ; für das Substrat gilt  $n_s=3.4$  und das Deckmaterial ist Luft ( $n_c=1$ ). Die in (3.123)-(3.131) beschriebene Methode ergibt die folgenden effektiven Indices  $n_{eff,M}$ :

- TE:      3.562735 ( $M=0$ )      3.533395 ( $M=1$ )      3.432478 ( $M=2$ )
- TM:      3.558554 ( $M=0$ )      3.525413 ( $M=1$ )      3.424114 ( $M=2$ ).

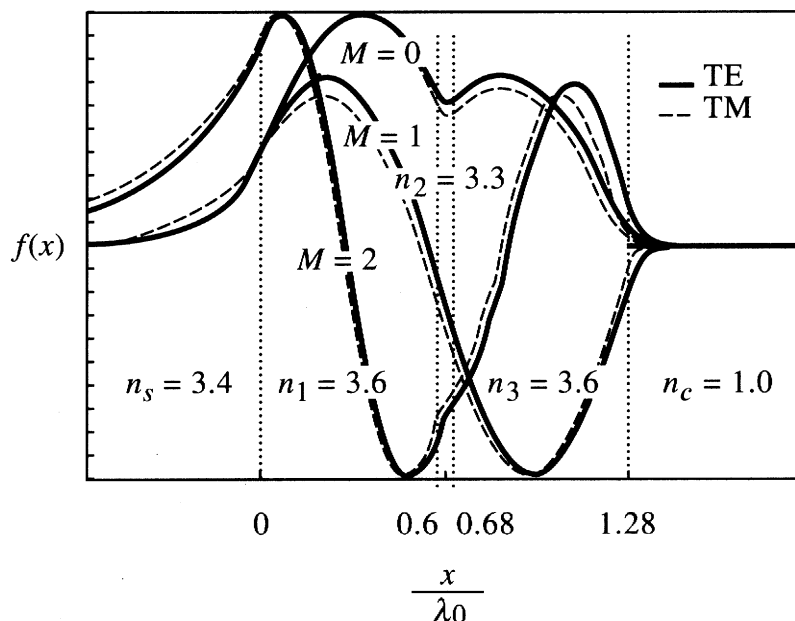


Fig.3.25: Dielektrische 3-Schichtstruktur. Profilmfunktion  $f(x)$  für  $TE$ -Modi (fette Linie) und  $TM$ -Modi (gestrichelte Linie). Für jede Polarisation sind die ersten 3 Modi dargestellt ( $M$  entspricht dem Nullstellenindex und somit der Modennummer dieser Struktur).

Mit dem in (3.123)-(3.131) beschriebenen *Matrixformalismus*<sup>31</sup> haben wir ein leistungsfähiges Werkzeug zur Hand, welches uns erlaubt den *allgemeinsten Fall* des planaren dielektrischen Wellenleiters – d.h. einen Wellenleiter mit Indexprofil  $n(x)$  – berechnen zu können. Zu diesem Zweck muss die Wellenleiterstruktur  $n(x)$  in eine Mehrschichtrepräsentation  $\Sigma_i^N n_i(d_i)$  überführt werden, was gegebenenfalls eine grosse Anzahl  $N$  von Schichten involviert. Mit den Basisformeln (3.124), (3.126) und (3.130) liegt ein algorithmisches Verfahren vor, welches sozusagen «blind» ausgeführt werden kann: Es gilt lediglich die Nullstellen  $n_{eff}$  von  $T_{22}^{tot}$  im Intervall  $[\max(n_s, n_c), \max(n_i)]$  zu finden! So einfach das Verfahren auch scheinen mag, aus  $T_{22}^{tot}$  kann bereits bei wenig Schichten ein ziemlich komplizierter Ausdruck entstehen. Die unangefochtene Stärke der *Transfer-Matrix*-Methode liegt daher in der Anschaulichkeit und der einfachen Programmierbarkeit! Die Schwäche hingegen besteht in der komplizierten Gestalt von  $T_{22}^{tot}$ , welche sich aus den entsprechenden Matrixmultiplikationen herausgebildet hat. Der Eigenwert  $n_{eff}$  hängt somit in kritischer Weise von der Genauigkeit der einzelnen Matrixelemente  $T_{ij}^k$  und ihrer numerischen Repräsentation ab. Zur Problematik der vielfachen Matrixprodukte sind einige Ausgleichsverfahren bekannt, auf die wir aber nicht näher eingehen wollen.

Eine Schlussbemerkung zum planaren dielektrischen Wellenleiter: Wir sind bei allen unseren Betrachtungen zum planaren Film- bzw. Mehrschichtwellenleiter entweder von *TE*- oder von *TM*-Modi ausgegangen. Wie steht es mit den *hybriden* Modi? Sind sie überhaupt ausbreitungsfähig oder haben wir sie einfach vergessen? Ist das Eigenwertproblem z.B. für eine *TE*-Mode (oder *TM*-Mode) gelöst, dann können die *hybriden* Modi durch einfache Überlagerung zweier solcher Modi konstruiert werden. Hierzu setzt man die *TE*-Lösung (mit zugehörigem Eigenwert  $\beta$ ) gemäss Fig.3.26 zweifach an. Die resultierende *hybride* Mode ist wegen der Projektion  $\beta'' > 0$  periodisch in  $y$  ( $\partial/\partial y \neq 0$ ) und besitzt, wegen des kontinuierlich wählbaren Drehwinkels, ein *kontinuierliches* Eigenwertspektrum.

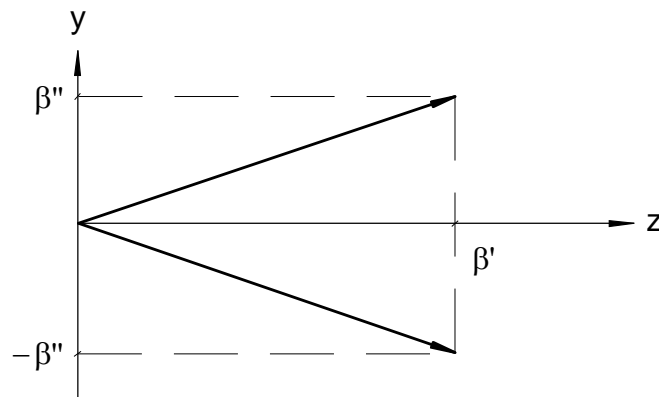


Fig.3.26: Überlagerung zweier *TE*- bzw. *TM*-Modi zu einer *hybriden* Mode. Zu diesem Zweck werden zwei *TE*- oder zwei *TM*-Lösungen symmetrisch gegeneinander in der Filmebene «verdreht».

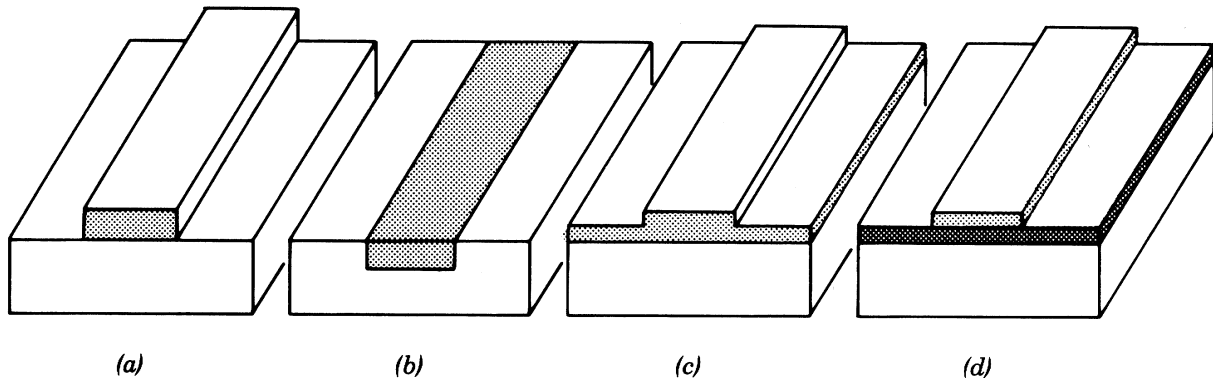
**Lernkontrolle:** Warum wird bei der Eigenwertberechnung von Mehrschichtwellenleitern mit den transversalen Feldkomponenten begonnen? Gegeben sei eine  $2N+1$ -Schichtwellenleiterstruktur, die aus alternierenden Schichten der Brechzahl  $n_a$  bzw.  $n_b$  besteht (die Struktur enthält total  $N+1$  Schichten vom Typ A und  $N$  Schichten vom Typ B). Welche Gestalt hat die Transfer-Matrix der gesamten Struktur? Welche Vereinfachungen können dabei getroffen werden?

<sup>31</sup> Die vorgeschlagene *Transfer-Matrix*-Repräsentation ist lediglich eine unter vielen Darstellungen des Mehrschichtwellenleiterproblems. Es existieren zahlreiche Alternativen, die sich aber mit Hilfe linearer Abbildungen stets ineinander überführen lassen.



### 3.6 Der Rippenwellenleiter

Integrierte optische Wellenleiterstrukturen, welche für die Signalführung in photonischen Chips zur Anwendung kommen, dürfen das Licht nicht nur in einer einzigen, vertikalen Richtung bündeln, sie müssen das Wellenfeld auch bezüglich einer *zweiten* Dimension des Wellenleiterquerschnitts führen, damit die Signaltrennung auf dem Chip auch garantiert ist. Wir werden in diesem Abschnitt, ganz im Gegensatz zum Film- oder Mehrschichtwellenleiter, zweidimensionale Wellenleiterquerschnitte betrachten. Eine Auswahl möglicher Ausführungen ist in *Fig.3.27* abgebildet.



*Fig.3.27: Verschiedene Realisierungen von zweidimensionalen, dielektrischen Wellenleiterstrukturen. (a) Streifenleiter (strip), (b) eingebetteter Streifenleiter (embedded strip), (c) Rippenwellenleiter (rib oder ridge), (d) aufliegender Streifenleiter (loaded strip). Legende: Je schwärzer die Schraffur, umso grösser der Brechungsindex.*

Die Analyse solcher realen Wellenleiter ist in der Regel analytisch nicht mehr durchführbar. Das Eigenwertproblem muss also numerisch gelöst werden. Daher rührt auch, dass ein sehr grosser Anteil der Literatur auf dem Gebiet der *Photonik* sich praktisch ausschliesslich mit der Berechnung geführter Wellenfelder beschäftigt. Wir werden anders vorgehen! Zu diesem Zweck greifen wir uns mit dem *Rippenwellenleiter* einen interessanten Kandidaten heraus und explizieren an dieser Struktur eine einfache Näherungsmethode, welche, vom Vorgehen her, auf die meisten planaren Wellenleiterquerschnitte angewendet werden kann.

Die praktische Realisierung des *Rippenwellenleiters* ist in *Fig.3.28* dargestellt. Die angesprochene Näherungsmethode beruht auf der Separation der zweidimensionalen Querschnittsgeometrie in zwei orthogonal zueinander orientierte, eindimensionale Mehrschichtwellenleiterprobleme. Implizit wird dabei auch eine Separation des zweidimensionalen Modenprofils  $\phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  nach zwei eindimensionalen Eigenlösungen  $X$  und  $Y$  vorweggenommen. Wenn wir nun die Querschnittsgeometrie gemäss *Fig.3.29* formalisieren, dann wird anhand der Rippenstruktur in der  $xy$ -Ebene ein Filmwellenleiter entlang  $y$  abgeleitet, welcher durch die Materialgebiete I, II und III wiedergegeben ist. Diese Abbildung erfolgt über die Ermittlung der *effektiven Indices* des jeweils äquivalenten Filmwellenleiterproblems in  $x$ -Richtung für jedes der Gebiete I, II und III. Nun drehen wir unsere Blickrichtung um  $90^\circ$  und lösen das Eigenwertproblem bezüglich der Schichten I, II und III entlang von  $y$ . Als Ergebnis ergibt sich der *effektive Index* der Gesamtstruktur. Wir werden diese Berechnungsschritte später noch sorgfältiger ausführen. Trotzdem haben wir etwas gelernt: 1. Wir können den Analyseapparat des eindimensionalen Film- oder Mehrschichtwellenleiters auch auf zweidimensionale Wellenleiterquerschnitte ausdehnen. 2. Der *effektive Index* wird zu einer Art

«Abbildungsvorschrift», deshalb heisst das angesprochene Näherungsverfahren auch *Effektiv-Index-Methode*. Bevor wir mit den konkreten Schritten beginnen, noch eine Bemerkung zum Geltungsbereich der *Effektiv-Index-Methode*. Ausgehend von der schematischen Darstellung des *Rippenwellenleiters* in Fig.3.29, definieren wir die notwendigen Auflagen an die Wellenleiterstruktur:

- Das Verhältnis  $d/W$  muss *klein* sein.
- Die resultierenden *effektiven Indices* in I, II und III dürfen nicht stark voneinander abweichen.

Obwohl hier gewisse Einschränkungen vorliegen, werden diese Auflagen von den meisten, in der Praxis verwendeten Wellenleitertypen erfüllt, wenn die hinreichende Relation gilt

$$\sqrt{\varepsilon_g - \max(\varepsilon_s, \varepsilon_c)} \approx 0.1 \dots 1 \quad (3.142).$$

Hier stellt  $\varepsilon_g$  die Dielektrizitätszahl des Wellenleiterkerns dar und  $\varepsilon_s$  bzw.  $\varepsilon_c$  stehen für die Brechzahl des Hintergrundmaterials, namentlich des Substrats bzw. des Deckmaterials<sup>32</sup>. Diese Relation ist nicht «vom Himmel gefallen», sondern orientiert sich an ganz pragmatischen Gesichtspunkten:

1. Die Relation (3.142) stellt eine Bedingung für den gewünschten Einmodenbetrieb dar. 2. Um eine möglichst effiziente Ankopplung an die Glasfasermode erreichen zu können, müssen beide Modenprofile in etwa übereinstimmen, was sich in der unteren Grenze (von 0.1) ausdrückt. 3. Die Materialien, welche die stärkste Lichtführung erlauben (z.B. SiON/SiO<sub>2</sub>-Glaswellenleiter oder Halbleiterrealisierungen in InP) definieren hingegen die obere Grenze (von 1). 4. Ein möglichst runder Strahlfleck (zweidimensionales Modenprofil) resultiert meistens dann, wenn die Wellenleiterbreite  $W$  nicht mehr als doppelt so gross ist wie die kleinste relevante Wellenleiterabmessung (meistens die Wellenleiterdicke). Mit der Beziehung (3.142) und den formulierten Auflagen haben wir nun den Geltungs- und Arbeitsbereich der *Effektiv-Index-Näherung* für praktisch realisierbare Wellenleiter vollständig eingegrenzt.

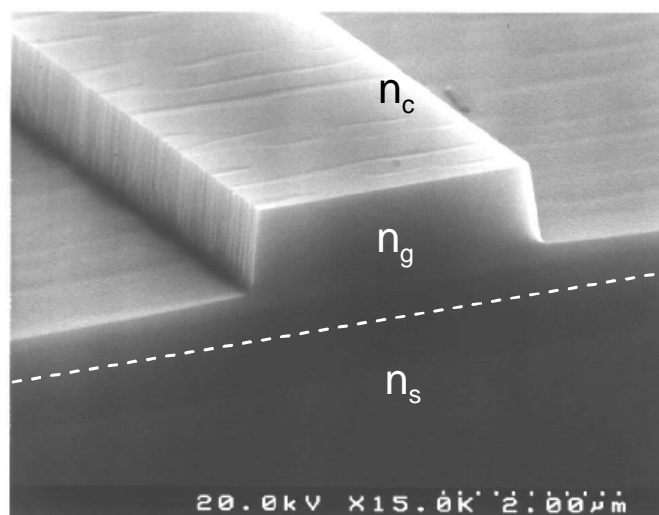


Fig.3.28: Elektronenmikroskopaufnahme eines real existierenden Rippenwellenleiterquerschnitts bestehend aus den Halbleitermaterialien GaAs (Substrat) und AlGaAs (Kernmedium). Als Deckmaterial kommt Luft oder Polyimid in Frage. Die Rippenbreite ist  $W = 2 \mu\text{m}$  und die Rippenhöhe beträgt ungefähr  $1 \mu\text{m}$ .

<sup>32</sup> Diese Betrachtung orientiert sich am Filmwellenleiter und ist deshalb auf *beide* eindimensionalen Separationsansätze anzuwenden (namentlich auf den Filmwellenleiter in x-Richtung und den resultierenden Filmwellenleiter in y-Richtung).

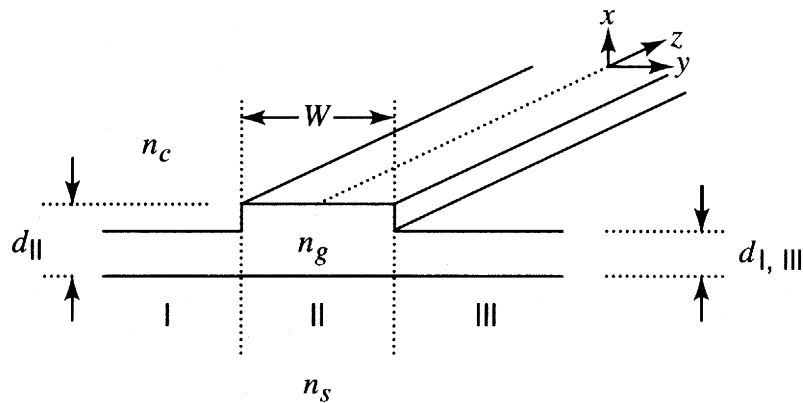


Fig.3.29: Schematische Darstellung des Rippenwellenleiters. In der Logik der Effektiv-Index-Methode wird aus der Rippenstruktur in der  $xy$ -Ebene ein Filmwellenleiter entlang  $y$  abgeleitet, welcher durch die Materialgebiete I, II und III wiedergegeben ist.

Die konkrete Vorgehensweise bei der *Effektiv-Index-Methode* soll sich der Klarheit halber an einer *algorithmischen* Schreibweise orientieren. Hierzu betrachten wir einen Schichtwellenleiter, mit den Schichtdicken  $d_i$ , dessen «Schichtung» in Richtung  $r$  verläuft und definieren eine dem Problem angepasste Funktion/Programmroutine:

$$\{ N_{eff}, R(r) \} = \text{neff} (n_c, n_i, n_s, d_i, \lambda_0, m_R, P_R) \tag{3.143}.$$

$N_{eff}$  und  $R(r)$  sind die Resultate der Funktion  $\text{neff}(\cdot)$ , d.h. die effektive Brechzahl und das Modenprofil  $R$  der untersuchten Feldkomponente entlang der Richtung  $r$  des eindimensionalen Schichtwellenleiterproblems. Wir gehen davon aus, dass sich die resultierende Feldverteilung der betrachteten Komponente gemäss  $\phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  separieren lässt, d.h.  $R(r) = X(x)$  bzw.  $Y(y)$ . Als Eingabegrößen haben wir den Substratindex  $n_s$ , den Index des Deckmaterials  $n_c$  und die einzelnen Schichtindices  $n_i$  der Kernstruktur. Beim *Rippenwellenleiter* besteht der Kern lediglich aus einem einzigen Material und wir schreiben bis auf Widerruf  $n_i = n_g$ . Als weitere Grösse müssen die einzelnen Schichtdicken  $d_i$  (in Richtung  $r$ ) angegeben werden, wobei für den Filmwellenleiter  $d_i = d$  gilt. Nun folgen die Eingabeparameter des Feldes.  $\lambda_0$  gibt die Wellenlänge vor und  $m_R$  steht für die Nummer der berechneten Mode (des Schichtwellenleiterproblems in Richtung  $r$ ). Mit dem letzten Eingabeparameter  $P_R$  wird die Relation der Feldkomponente  $\phi$  zur Richtung  $r$  wiedergegeben, d.h. wir spezifizieren die Polarisation des Modenfelds  $\phi$  entweder als *TE* oder *TM*.

Angewendet auf den in Fig.3.29 skizzierten *Rippenwellenleiter* kann der Algorithmus der *Effektiv-Index-Methode* folgendermassen angeschrieben werden:

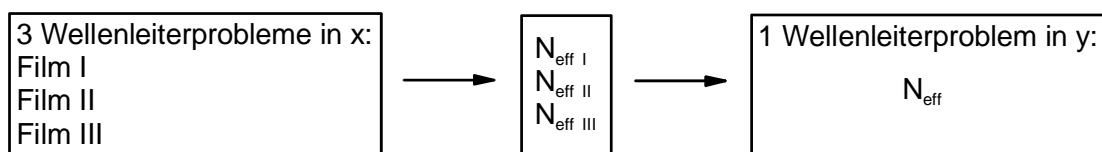


Fig.3.30: Methodisches Vorgehen bei der Effektiv-Index-Methode.

1. Schritt: Löse das Filmwellenleiterproblem bezüglich der Schichten in  $x$ -Richtung in jedem Gebiet I, II und III unter Einbezug der vorgegebenen Wellenlänge  $\lambda_0$  und der Polarisation  $P_X$ .

$$\begin{aligned} \{N_I, X_I(x)\} &= \text{neff}(n_c, n_g, n_s, d_I, \lambda_0, m_X, P_X) \\ \{N_{II}, X_{II}(x)\} &= \text{neff}(n_c, n_g, n_s, d_{II}, \lambda_0, m_X, P_X) \\ \{N_{III}, X_{III}(x)\} &= \text{neff}(n_c, n_g, n_s, d_{III}, \lambda_0, m_X, P_X) \end{aligned} \quad (3.144),$$

2. Schritt: Löse das Filmwellenleiterproblem in  $y$ -Richtung für die soeben ermittelten *effektiven Indices* der Schichten I, II und III unter Einbezug der gleichen Wellenlänge  $\lambda_0$ , aber nun mit der entsprechend korrigierten Polarisation  $P_Y$

$$\{N_{\text{eff}}, Y(y)\} = \text{neff}(N_I, N_{II}, N_{III}, W, \lambda_0, m_Y, P_Y) \quad (3.145).$$

Die Lösung des Eigenwertproblems für den *Rippenwellenleiter* besteht einerseits aus dem Eigenwert  $N_{\text{eff}}$  und andererseits aus dem zweidimensionalen Modenprofil  $\phi$  der analysierten Feldkomponente

$$\phi_{m_x, m_y}(x, y) = \{X_I(x) + X_{II}(x) + X_{III}(x)\} \cdot Y(y) \quad (3.146),$$

wobei jede der Funktionen  $X_I$ ,  $X_{II}$  und  $X_{III}$  nur im zugehörigen Gebiet I, II bzw. III gültig ist. Wie aus (3.146) ersichtlich ist, werden zweidimensionale Modenfelder mit *zwei* Modenzählern – nämlich  $m_x$  und  $m_y$  – charakterisiert. Trotz der Einfachheit der dargestellten Lösungsschritte müssen wir uns stets vor Augen halten, dass bereits ein einziges Versagen von *neff(.)* zum Kollaps des gesamten Näherungsverfahrens führt. Daraus schliessen wir: 1. Die analysierte Mode kann durch den betrachteten *Rippenwellenleiter* möglicherweise gar nicht geführt werden. 2. Diese kritische Lösung ist mit der *Effektiv-Index-Methode* mit Sicherheit nicht berechenbar.

Eine Frage bleibt noch zu beantworten: Von welchem Typ ist die resultierende Mode  $\phi_{m_x, m_y}$ ? Wir können auch fragen: Welche Polarisation hat die resultierende Mode im *Rippenwellenleiter*? Die allgemeinste Aussage hierzu lautet sicher, dass der *Rippenwellenleiter* *hybride Modi* führen wird. Die Überlegungen zu Fig. 3.26 im *Abschnitt 3.5*, wo wir nach den *hybriden Modi* des eindimensionalen Mehrschichtwellenleiters gefragt haben, bestätigen diese Annahme: Das *kontinuierliche* Eigenwertspektrum der (in der Filmebene «verdrehen») *hybriden* Lösungsansätze im Filmwellenleiter wird durch die Existenz der Gebietsgrenzen I–II und II–III im *Rippenwellenleiter* eingeschränkt und *diskret*. Somit sind die *resultierenden* Eigenwerte des *Rippenwellenleiters* immer *hybriden Modi* zuzuordnen!

Bei der praktischen Durchführung der *Effektiv-Index-Methode* am *Rippenwellenleiter* werden wir feststellen, dass die Brechzahlunterschiede ( $n_s, n_g, n_c$ ) der *vertikalen* Filmwellenleiteranordnung im jeweiligen Gebiet I, II bzw. III *sehr viel grösser* sind als im resultierenden *horizontalen* Filmwellenleiter, bestehend aus den *effektiven* Brechzahlen  $N_{\text{effI}}$ ,  $N_{\text{effII}}$  und  $N_{\text{effIII}}$ . Die Differenzen zwischen diesen *effektiven Brechungsindices* sind in der Tat *äusserst klein*! Aus diesem Grund bestimmt vor allem der *vertikale Aufbau* des *Rippenwellenleiters* über die Existenzform der *longitudinalen* Feldkomponenten. Geben wir für das vertikale Filmwellenleiterproblem (im jeweiligen Gebiet I, II und III)

z.B. die  $TE$ -Polarisation vor, so resultiert für den *Rippenwellenleiter* zwar eine *hybride Mode*, welche aber « $TE$ -artig» ist. Zur Orientierung: Entspricht  $X(x)$  im Separationsansatz gerade der  $E_y$ -Komponente, dann nennt man den zugehörigen Feldzustand des *Rippenwellenleiters* entsprechend  $TE$ -Mode. Stimmt  $X(x)$  hingegen mit der  $H_y$ -Komponente überein, dann sprechen wir von der  $TM$ -Mode des *Rippenwellenleiters*.

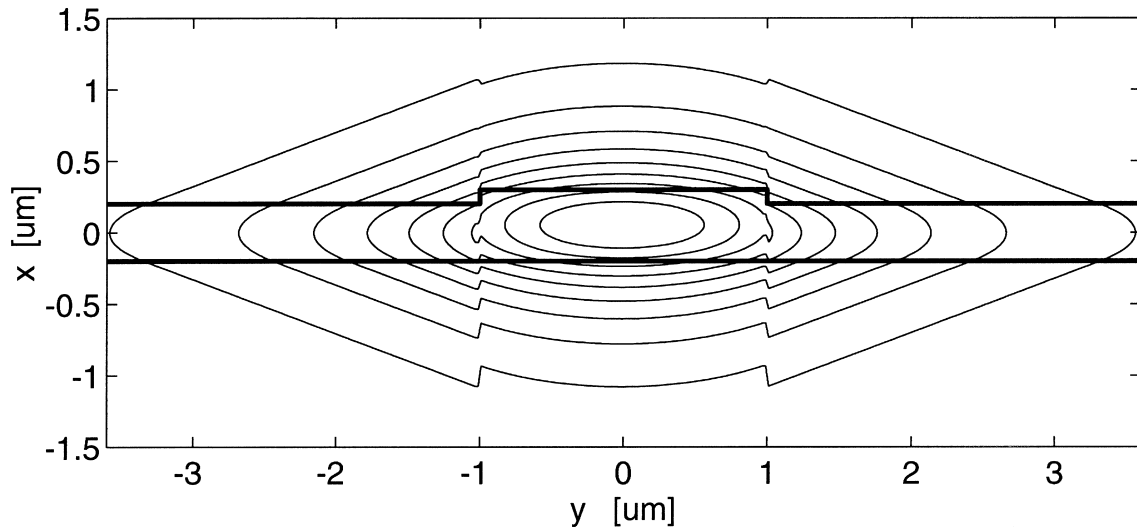


Fig.3.31: Effektiv-Index-Simulation der  $TE_{11}$ -Grundmode: Profil der  $E_y$ -Komponente. Der Rippenwellenleiter besteht aus:  $n_g = 1.5$ ,  $n_c = n_s = 1.3$ ,  $d_{II} = 0.5 \mu\text{m}$ ,  $d_I = d_{III} = 0.4 \mu\text{m}$  und  $W = 2 \mu\text{m}$ . Der effektive Index bei  $\lambda_0 = 1.3 \mu\text{m}$  ist  $N_{\text{eff}} = 1.3758256$ .

Die Feldverteilung eines, mit der *Effektiv-Index-Methode* gerechneten Rippenwellenleiters ist in Fig.3.31 dargestellt. An den Orten  $y = \pm W/2$  weist das  $E_y$ -Profil der  $TE_{11}$ -Grundmode deutlich sichtbare Unstetigkeiten auf. Dieses Phänomen ist *unphysikalisch*<sup>33</sup>, doch *charakteristisch* für die *Effektiv-Index-Methode* – es ist ein Artefakt des zugrundeliegenden Separationsansatzes. Das Phänomen tritt u.a. auch deshalb auf, weil der resultierende Filmwellenleiter in  $y$ -Richtung für die  $TM$ -Polarisation betrieben wird, wo das  $\mathbf{E}$ -Feld senkrecht zur (fiktiven) Materialgrenze steht und wegen der Randbedingung (C.8) eine Unstetigkeit aufweisen muss. Besonders deutlich tritt dieses Artefakt für  $x < 0$  in Erscheinung, wobei der unreale Charakter der Felddiskontinuitäten mit abnehmenden  $x$  eher noch verstärkt wird. Die hierbei aufscheinenden Gebietsgrenzen sind also rein virtuell! Vergleichen wir hingegen den effektiven Index  $N_{\text{eff}}$ , mit demjenigen einer entsprechenden numerischen Simulation, so würde man eine erstaunlich gute Übereinstimmung feststellen<sup>34</sup>. Die *Effektiv-Index-Simulation* wird umso genauer, je besser die beim Ausdruck (3.142) diskutierten Auflagen erfüllt sind. Wir können daraus eine nützliche *Faustregel* ableiten: *Feldbilder* reagieren stets «empfindlicher» auf Störungen und Ungenauigkeiten, als ihre zugehörigen aggregierten Grössen wie der Eigenwert, der *effektive Index*, die Reflexion oder Transmission...

Wir haben in diesem Abschnitt lediglich die einfachste Variante der *Effektiv-Index-Methode* behandelt. Zahlreiche Modifikationen wurden im Verlauf der Zeit bereits vorgenommen. Es ist leicht nachvollziehbar, dass die Separation  $\phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$  strenggenommen nur eine Feldapproximation

<sup>33</sup> *Unphysikalisch*: Vor allem auch, weil die Randbedingungen eigentlich nur an wenigen, ganz speziellen Orten auf den Gebietsgrenzen des Rippenwellenleiters erfüllt werden und das Feld an allen anderen Orten als *Skalar* behandelt wird.

<sup>34</sup> Eine Vergleichsrechnung mit dem kommerziellen, numerischen *Finite-Differenzen-Modenlöser* (Selene™, Alcatel Optronics Netherlands) ergab für die  $TE_{11}$ -Grundmode den Wert  $N_{\text{eff}} = 1.3758264$ .

für das Kerngebiet darstellen kann. Im Aussengebiet hingegen, gibt es Zonen, wo sogenannte «Feldschatten» auftreten können, die mit der Separation nur ungenau oder gar nicht erreichbar sind. Am anschaulichsten lässt sich dieser Tatbestand beim rechteckförmigen Wellenleiterkern vergegenwärtigen. Erste Modifikationen beschäftigten sich aus diesem Grund mit der Kompensation des Einflusses solcher «Feldschatten», damit diese bei der Problembearbeitung ignoriert werden können. Die resultierende Methode heisst *Marcatili-Methode* oder sinnigerweise auch *Feldschattenmethode*. Weitere Verbesserungen lassen sich mit *vektoriellen Störansätzen* erzielen, deren Korrekturterme zum Eigenwert  $\beta$  aus *Variationsformalismen* hervorgehen. Auch *iterative* Lösungsschemata wurden bereits diskutiert. Bei diesen Methoden wird die Struktur zuerst im Sinne der besprochenen *Effektiv-Index-Methode* gelöst. Dann wird der Querschnitt um  $90^\circ$  gedreht und erneut dem *Effektiv-Index-Ansatz* unterzogen. Die Abweichung zwischen den resultierenden Eigenwerten dient dabei als Monitorgrösse, die es zu minimieren gilt. Innerhalb der Sequenz solcher Berechnungsschritte können die resultierenden effektiven Brechzahlen, bei den unterschiedlichsten Gelegenheiten in die Struktur der jeweils «verdrehten» Problemstellung zurückgeschrieben werden, was sich auch in einer Vielzahl von Programmierungsvorschlägen bezüglich *iterativer* Lösungsschemata niedergeschlagen hat.

Wir wollen diese Evolution der *Effektiv-Index-Methode* nicht mehr weiter verfolgen. Die Analyse des gleichen Rippenwellenleiters, nun für die  $TM_{11}$ -Grundmode, ergibt eine effektive Brechzahl von  $N_{eff} = 1.3584266$ . Dieser Wert weicht natürlich vom äquivalenten *TE*-Wert aus *Fig.3.31* ab. Für *yz*-symmetrische Wellenleiter hängt diese Abweichung der *effektiven Brechungsindices* von den Abmessungen des Wellenleiterquerschnitts ab: Beim rein quadratischen Wellenleiterkern würde kein Unterschied bezüglich *TE*- und *TM*-Polarisation auftreten, entspricht die Kerengeometrie hingegen einem Rechteck, dann ist eine solche *effektive Brechzahldifferenz* präsent. Man nennt diese Formabhängigkeit auch *Formdoppelbrechung* (*form birefringence, shape birefringence*).

Mit der *Effektiv-Index-Methode* haben wir uns ein äusserst taugliches Lösungsschema erarbeitet. Erweitern wir die Methode im Sinne der *Mehrschichtwellenleiterstrukturen* aus *Abschnitt 3.5*, dann liegen *prinzipiell alle* Wellenleiterquerschnitte mit  $n(x, y)$  in Reichweite unserer Analysemöglichkeiten. Zu diesem Zweck können wir den Lösungsvorgang aus *Fig.3.30* erweitern und in die untenstehenden Arbeitsschritte aufteilen:

$$n(x, y) \xrightarrow{\text{Diskretisierung}} \sum_j^M \sum_i^N n_{i,j}(x_i, y_j) \xrightarrow[\text{in } x \text{ lösen}]{M \text{ } N\text{-Schichtprobleme}} \sum_j^M N_{eff,j}(y_j) \xrightarrow[\text{in } y \text{ lösen}]{1 \text{ } M\text{-Schichtproblem}} \boxed{N_{eff}}$$

Bei aller Kritik: Die *Effektiv-Index-Methode* gehört zu den schnellsten Modensuchverfahren, die es gibt!

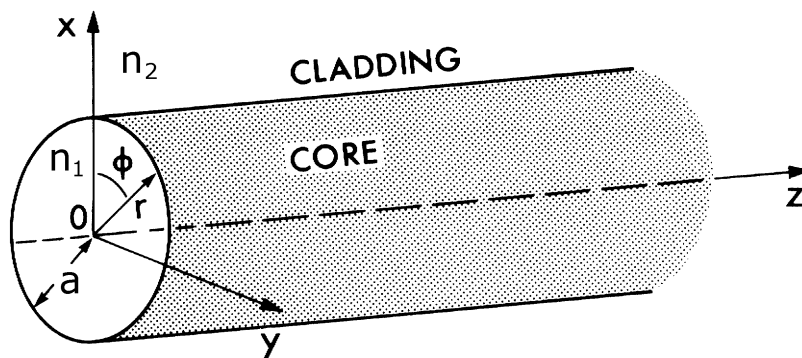
**Lernkontrolle:** Welche offensichtlichen Vorteile weist die Effektiv-Index-Methode auf? Welche geometrischen Konsequenzen bewirken die Geltungsaufgaben der Methode im Hinblick auf den Querschnitt des Rippenwellenleiters? Welcher Modentyp ist im Allgemeinen ausbreitungsfähig und wie wird dieser approximiert? Wo liegen die prinzipiellen Mängel der Effektiv-Index-Methode? Gegeben sei eine gaussförmige Indexverteilung  $n(x, y)$ . Skizzieren Sie einen möglichen Lösungsvorgang für die Berechnung von  $N_{eff}$ . Bei welchen Schritten werden ganz spezifische Probleme auftreten?

## Literatur

[14] A. Bruce Buckman. *Guided-Wave Photonics*. Fort Worth: Saunders College Publishing, 1992.

### 3.7 Die optische Glasfaser

In diesem Abschnitt soll nun die «Hauptdarstellerin» der optischen Telekommunikation zum Zug kommen: die *optische Glasfaser*. Der *Abschnitt 3.4* hatte (unter anderem) den symmetrischen Filmwellenleiter untersucht. Der naheliegende Schritt besteht jetzt darin, zum zylindrischen dielektrischen Wellenleiter mit Stufenprofil überzugehen. Wir sind derartigen Strukturen bereits an mehreren Orten – so in *Fig.3.1*, *Fig.3.2*, *Fig.3.9* und *Fig.3.10* – begegnet. Der Vollständigkeit halber sei der schematische Aufbau der Stufenindexfaser in *Fig.3.32* nochmals wiedergegeben. Wir werden uns im laufenden Abschnitt des Öfteren auf diese Darstellung beziehen.



*Fig.3.32: Schematische Darstellung einer Stufenindexfaser im zylindrischen Koordinatensystem  $(r, \varphi, z)$ .*

Bevor wir jedoch auf die technisch relevanten Repräsentationen der Glasfaser und ihre system-spezifischen Charakteristika eingehen, beginnen wir mit einer exakten Analyse der *Stufenindexfaser*. Diese soll ganz im Sinne unseres Lösungsvorschlags für allgemeine, zylindrische Wellenleiterprobleme erfolgen, d.h. unter Ansetzen der *longitudinalen* Feldkomponenten hin zu einer vollständigen Feldbeschreibung der ausbreitungsfähigen Modi. Wie sich bald zeigen wird, sind derartige Feldbilder kompliziert und in der Praxis entsprechend schwer handhabbar. Wir werden aus diesem Grund eine äusserst praktikable Näherung vorschlagen: Die *LP-Modi* für schwach führende Glasfasern. Davon ausgehend können dann die wichtigsten Systemrelationen, wie z.B. das *Dispersionsverhalten* charakterisiert werden.

#### 3.7.1 Vektorielle Lösung der Stufenindexfaser

In Übereinstimmung mit dem bisherigen Vorgehen formulieren wir die *Helmholtzgleichung* für die *longitudinalen* Feldkomponenten, nun aber in der Notation für das zylindrische Koordinatensystem  $(r, \varphi, z)$ , indem man den *transversalen Laplace-Operator* gemäss (G.5) ansetzt. Wir erhalten

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_T^2 \right) E_z = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_T^2 \right) H_z = 0$$

(3.147)-(3.148),

wobei die *transversale* Wellenzahl  $k_T$  aus der bereits bekannten Beziehung (3.30) hervorgeht

$$k_T^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon(\vec{r}_T) - \beta^2 \tag{3.149}.$$

Die Lösung der *Helmholtzgleichung* erzielt man vorerst einmal durch Ansetzen von geeignet separierbaren Funktionen. Wir wählen deshalb

$$\left. \begin{matrix} E_z(r, \varphi) \\ H_z(r, \varphi) \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \cdot R(r) \cdot \phi(\varphi) \tag{3.150}.$$

Eingesetzt in (3.147)-(3.148) ergeben sich für die *azimutale*  $\phi(\varphi)$  Abhängigkeit eine *harmonische* Differentialgleichung für die *radiale* Abhängigkeit  $R(r)$  entsprechend die *Besselsche* Differentialgleichung. Der Lösungsumfang der Letzteren wird in der folgenden Tabelle *Tab.3.1* zusammengefasst.

Funktion	physikalische Interpretation	kartesische Entsprechung
$k_T$ : reell $R(r) = J_m(k_T r)$ Zylinderfunktion 1. Art $\rightarrow J_m$ : <i>Besselfunktion</i>	stehende Zylinderwelle	$\cos(k_x x)$
$R(r) = N_m(k_T r)$ Zylinderfunktion 2. Art $\rightarrow N_m$ : <i>Neumannfunktion</i>		$\sin(k_x x)$
$R(r) = H_m^{(1)}(k_T r) = J_m(k_T r) + i N_m(k_T r)$ $R(r) = H_m^{(2)}(k_T r) = J_m(k_T r) - i N_m(k_T r)$ Zylinderfunktion 3. Art $\rightarrow H_m^{(1,2)}$ : <i>Hankelfunktionen</i>	propagierende Zylinderwelle	$e^{+ik_x \cdot x}$ $e^{-ik_x \cdot x}$
$k_T \rightarrow -i \cdot k'_T$ : imaginär $R(r) = I_m(k'_T r) = i^m \cdot J_m(-i k'_T r)$ $\rightarrow I_m$ : <i>modifizierte Besselfunktionen</i>	anklingende Zylinderwelle	$e^{k_x \cdot x}$
$R(r) = K_m(k'_T r) = \frac{\pi}{2} (-i)^{m+1} \cdot H_m^{(2)}(-i k'_T r)$ $\rightarrow K_m$ : <i>modifizierte Hankelfunktionen</i>	abklingende Zylinderwelle	$e^{-k_x \cdot x}$

*Tab.3.1: Lösungen der Besselschen Differentialgleichung und ihre kartesischen Entsprechungen.*



Die Separation von (3.147) bzw. (3.148) in die zwei besagten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + k_T^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + m^2 \right) \phi(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.151)-(3.152)$$

erfolgte mit Hilfe der Separationskonstante  $m^2$  und wir denken die *transversale* Wellenzahl  $k_{Ti}^2 = k_i^2 - \beta^2$  als dem entsprechenden *Medium*  $i$  zugehörig. Wir können auch hier festhalten, dass der Eigenwert  $\beta$  aus physikalischen Gründen nur Werte *zwischen*  $k_2 = k_0 \cdot n_2$  und  $k_1 = k_0 \cdot n_1$  einnehmen kann. Die vollständige Lösung von (3.151)-(3.152) für die longitudinalen Komponenten  $E_z$  und  $H_z$  hat die Form

$$\begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} \cdot Z_0(k_T r) + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_1^m \\ B_1^m \end{Bmatrix} \cdot Z_m(k_T r) \cdot \cos(m\varphi) + \begin{Bmatrix} A_2^m \\ B_2^m \end{Bmatrix} \cdot Z_m(k_T r) \cdot \sin(m\varphi) \quad (3.153),$$

wobei  $Z_m(\cdot)$ , je nach Gebiet und Argument, für eine der Zylinderfunktionen aus der *Tab.3.1* steht. Die Erzwingung der *Randbedingungen* an der Materialgrenze  $r=a$  für alle  $\varphi=0 \dots 2\pi$  erfordert die zusätzliche Kenntnis der *transversalen* Feldkomponenten  $E_r, E_\varphi, H_r$  und  $H_\varphi$ , welche man wiederum über die Beziehungen (3.45)-(3.46) erhält. In Zylinderkoordinaten schreiben sich (3.45)-(3.46) gemäss:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ \beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} E_z + \omega\mu \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z \right\} \\ E_\varphi &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ \beta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z - \omega\mu \cdot \frac{\partial}{\partial r} H_z \right\} \\ H_r &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ \beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} H_z - \omega\varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right\} \\ H_\varphi &= \frac{1}{ik_T^2} \left\{ \beta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z + \omega\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial r} E_z \right\} \end{aligned} \quad (3.154).$$

Die *Randbedingungen* bezüglich der *tangentialen* Felder aus (3.153)-(3.154) erzeugen ein *unendlich grosses* Gleichungssystem für die unbekannt Parameter  $A_0, B_0, A_1^m, A_2^m, B_1^m$  und  $B_2^m$ , was natürlich jeder praktischen Berechnung zuwiderläuft. Glücklicherweise kann dieses Gleichungssystem im Fall der Glasfaser aus *Fig.3.32* dramatisch reduziert werden! Da der Faserkern homogen ist, sind nur *drehinvariante* Lösungen erlaubt, welche zusätzlich noch gewisse *Spiegelsymmetrien* enthalten können. Dieses *gruppentheoretische* Argument ermöglicht Projektionen des vollständigen Lösungsansatzes auf  $2\pi \cdot m$ -periodische Testfunktionen wie  $\sin(m \cdot \varphi)$  und  $\cos(m \cdot \varphi)$  und reduziert diesen auf ein praktisch gut handhabbares Mass. Somit ergeben sich für die *longitudinalen* Komponenten  $E_z$  und  $H_z$

die folgenden (praktikablen) Lösungsansätze ( $A_i$  und  $B_i$  sind beliebige Konstanten):

- Gebiet ①:  $n = n_1, k_1 > \beta, r < a$

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi) &= A_1 \cdot J_m(k_T r) \cdot \cos(m\varphi + \varphi_0) \\ H_z(r, \varphi) &= B_1 \cdot J_m(k_T r) \cdot \sin(m\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.155)-(3.156);$$

- Gebiet ②:  $n = n_2, k_2 < \beta, r > a$

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi) &= A_2 \cdot K_m(k'_T r) \cdot \cos(m\varphi + \varphi_0) \\ H_z(r, \varphi) &= B_2 \cdot K_m(k'_T r) \cdot \sin(m\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.157)-(3.158).$$

So rührt der Ansatz  $E_z \propto \cos(\cdot)$ ,  $H_z \propto \sin(\cdot)$  von Symmetrieüberlegungen her, denn beide Feldprofile müssen bezüglich der Beiträge z.B. gegenüber der transversalen Komponente  $E_\varphi$  zur gleichen azimutale Symmetrie beitragen. Die Konstante  $\varphi_0$  kann als beliebig wählbar vorausgesetzt werden, zumal sie lediglich die «Voreinstellung» der Polarisationsrichtung wiedergibt. Ähnlich, wie beim Filmwellenleiter, besteht die transversale Feldverteilung im Faserkern (Gebiet ①) mit  $J_m(\cdot)$  aus einer *Stehwelle*, im Mantelgebiet ② klingt das Feld hingegen im Sinn von  $K_m(\cdot)$  *evaneszent* ab. Die *evaneszente* Mantelösung garantiert zudem, dass die Strahlungsbedingung (C.10) für den unendlich fernen Rand  $r \rightarrow \infty$  erfüllt bleibt. Um die *Eigenwertgleichung* der Stufenindexfaser herleiten zu können, genügt auch hier die Erzwingung der *Randbedingungen* bezüglich der (zur Grenzschicht) *tangentialen* Feldkomponenten  $E_z, E_\varphi, H_z$  und  $H_\varphi$ . Zu diesem Zweck werden die Ansätze (3.155)-(3.156) und (3.157)-(3.158) in (3.154) eingesetzt und am Rand  $r=a$  für alle  $\varphi=0 \dots 2\pi$  entsprechend ausgewertet. Ausgehend von diesen *Randbedingungen* (C.9) an der Grenze zwischen Kern- und Mantelmedium  $\partial M_{12}$

$$\begin{aligned} E_{z1} - E_{z2} &= 0 & H_{z1} - H_{z2} &= 0 \\ E_{\varphi1} - E_{\varphi2} &= 0 & H_{\varphi1} - H_{\varphi2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

und mit der Substitution

$$\xi = a \cdot k_T = a \cdot \sqrt{k_1^2 - \beta^2} \quad \eta = a \cdot k'_T = a \cdot \sqrt{\beta^2 - k_2^2} \quad (3.160)$$

ergibt sich (ohne Herleitung) das Gleichungssystem für die unbekanntenen Konstanten  $A_1, A_2, B_1$  und  $B_2$

$$\begin{bmatrix} J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) & 0 \\ 0 & J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) \\ \frac{\pm\beta \cdot m}{\xi^2} J_m(\xi) & \frac{\omega \cdot \mu_1}{\xi} J'_m(\xi) & \frac{\pm\beta \cdot m}{\eta^2} K_m(\eta) & \frac{\omega \cdot \mu_2}{\eta} K'_m(\eta) \\ \frac{\omega \cdot \varepsilon_1}{\xi} J'_m(\xi) & \frac{\pm\beta \cdot m}{\xi^2} J_m(\xi) & \frac{\omega \cdot \varepsilon_2}{\eta} K'_m(\eta) & \frac{\pm\beta \cdot m}{\eta^2} K_m(\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.161).$$

Die Ableitung der jeweiligen Zylinderfunktion  $Z(\cdot)$  nach dem entsprechenden Argument  $\xi$  oder  $\eta$  ist durch die Schreibweise  $Z'(\cdot)$  gekennzeichnet. Das Vorzeichen  $\pm$  korrespondiert mit dem *Cosinus-* ( $\varphi_0=0$ ) bzw. dem *Sinus-*Ansatz ( $\varphi_0=\pm\pi/2$ ) für  $E_z$ , wie er in (3.155) vorgegeben wird. Die *homogenen* Gleichungen aus (3.161) haben nur dann nichttriviale Lösungen, wenn das Gleichungssystem *singulär* wird, d.h. die Determinante

$$\begin{vmatrix} J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) & 0 \\ 0 & J_m(\xi) & 0 & -K_m(\eta) \\ \frac{\pm\beta\cdot m}{\xi^2} J_m(\xi) & \frac{\omega\mu_1}{\xi} J'_m(\xi) & \frac{\pm\beta\cdot m}{\eta^2} K_m(\eta) & \frac{\omega\mu_2}{\eta} K'_m(\eta) \\ \frac{\omega\varepsilon_1}{\xi} J'_m(\xi) & \frac{\pm\beta\cdot m}{\xi^2} J_m(\xi) & \frac{\omega\varepsilon_2}{\eta} K'_m(\eta) & \frac{\pm\beta\cdot m}{\eta^2} K_m(\eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.162)$$

Null ist. Diese Bedingung stellt die (hochgradig transzendente) *Eigenwertgleichung* der Stufenindexfaser dar, zumal beide Grössen  $\xi$  und  $\eta$  laut (3.160) ja selbst vom Eigenwert  $\beta$  abhängen. Da die Matrix relativ viele Nullelemente enthält, fällt die zugehörige *charakteristische Gleichung* entsprechend einfach aus:

$$\boxed{\left\{ k_1^2 \cdot \tilde{J}_m(\xi) + k_2^2 \cdot \tilde{K}_m(\eta) \right\} \cdot \left\{ \tilde{J}_m(\xi) + \tilde{K}_m(\eta) \right\} - m^2 \beta^2 \cdot \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right)^2 = 0} \quad (3.163),$$

wenn wir die Substitutionen gemäss

$$\tilde{J}_m(\xi) = \frac{J'_m(\xi)}{\xi \cdot J_m(\xi)} \quad \tilde{K}_m(\eta) = \frac{K'_m(\eta)}{\eta \cdot K_m(\eta)} \quad (3.164)$$

vornehmen. Wir können hier entweder direkt nach den *Nullstellen*  $\beta_p$  der *Determinante* (3.162) oder der *charakteristischen Gleichung* (3.163) suchen oder dann mit Hilfe des *Strukturparameters*  $V$  (hier auch *Faserparameter*<sup>35</sup> genannt)

$$V = a \cdot \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = a \cdot k_0 \cdot \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = a \cdot k_0 \cdot NA = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (3.165)$$

die Variable  $\eta$  eliminieren um so zu den *Nullstellen*  $\xi_p$  zu gelangen. Für ein gegebenes  $m$  können entsprechend  $p$  Nullstellen abgezählt werden, welche wir den Modi  $X_{mp}$  zuordnen wollen, wobei  $X$ , je nach Wellentyp für *HE*, *EH*, *TE* oder *TM* steht<sup>36</sup>. Man beachte zudem: Im Fall von dielektrischen Wellenleitern gilt immer  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Bei genauerer Betrachtung der Determinante (3.162) stellt man zudem fest, dass sich diese für die Werte  $m=0$  bzw.  $\beta=0$  in *zwei entkoppelte*  $2 \times 2$ -Subdeterminanten zerlegen lässt. Bei der Herleitung der  $4 \times 4$ -Determinante hatten wir keinerlei Einschränkungen vor-

<sup>35</sup> Vergleiche hierzu auch die Definition der *numerischen Apertur*  $NA$  aus (3.3).

<sup>36</sup> Genaueres zur Abzählbarkeit der Modi wird am Ende dieses *Abschnitts* 3.71 erläutert. Bei  $X_{mp}$  bedeutet  $m$  die *azimutale* Periodenzahl der  $r$ -,  $\varphi$ - und  $z$ -Komponenten (Anzahl Feldextrema-Paare bezüglich  $\varphi = 0 \dots 2\pi$ ) und  $p$  benennt die Anzahl der Feldextrema in  $r$ -Richtung.

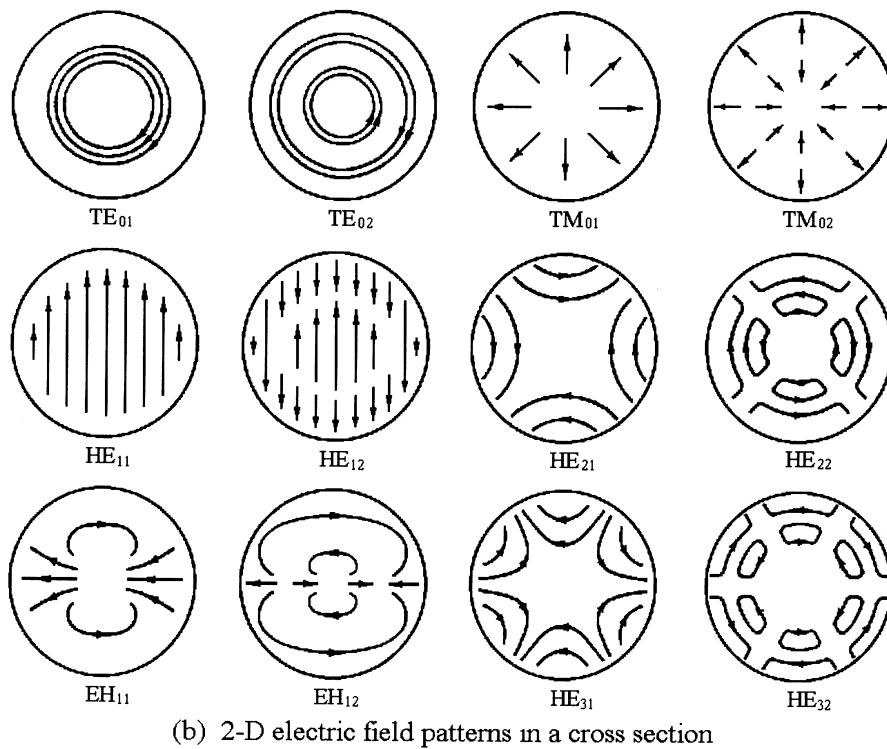
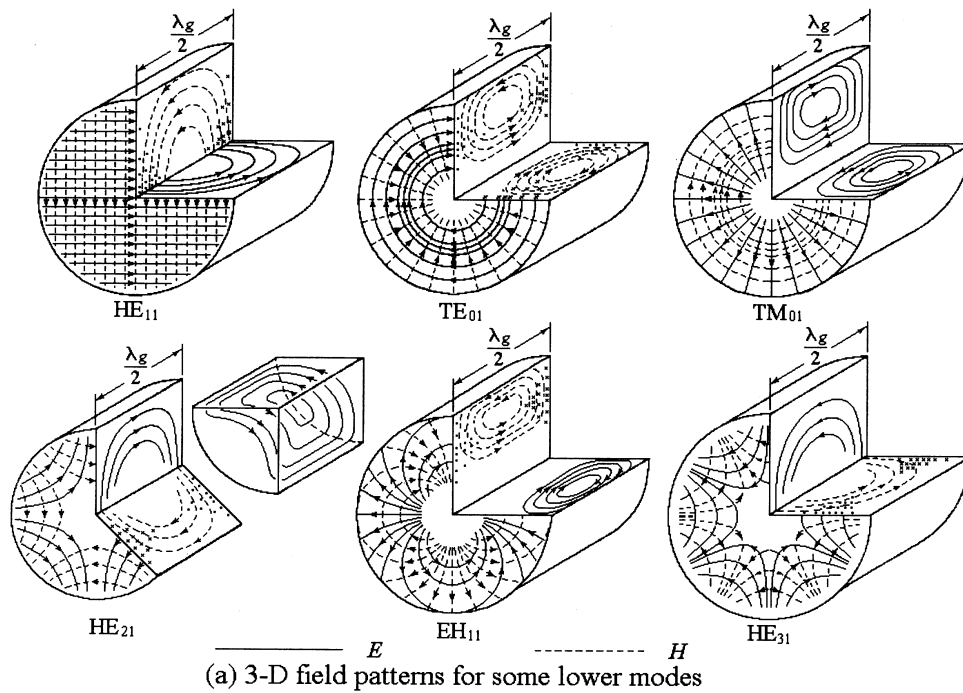


Fig.3.33: Feldbilder von geführten Modi für den Kernquerschnitt der Stufenindexfaser.

genommen (es wurden sowohl die  $E_z$ - als auch die  $H_z$ -Komponenten angesetzt). In diesem Sinn stellt sie die Eigenwertgleichung für die allgemeinen, *hybriden*  $EH$ - bzw.  $HE$ -Modi dar (siehe Fig.3.33). Die beiden *entkoppelten*  $2 \times 2$ -Subdeterminanten charakterisieren zwei unabhängig voneinander existierende Spezialfälle: Der eine bezieht sich auf zwei Gleichungen, alleine für die Unbekannten  $A_1$  und  $A_2$ , der andere entsprechend auf zwei Gleichungen, nur für  $B_1$  und  $B_2$ . Wir können die beiden

Spezialfälle sofort benennen: Es sind dies die *TE*-Modi ( $E_z=0, E_r=0, H_\phi=0,$ ) und die *TM*-Modi ( $H_z=0, H_r=0, E_\phi=0,$ ). Aus  $m=0$  schliessen wir, dass sowohl *TE*- als auch *TM*-Modi keine *azimutale* Abhängigkeit aufweisen und somit *rotationssymmetrisch* sind, was übrigens auch aus Fig.3.33 hervorgeht. Die Situation  $\beta=0$  scheint etwas exotisch, zumal mit  $\beta=0$  keinerlei Wellenausbreitung mehr in  $z$ -Richtung angezeigt wird. Dieser Betriebszustand wird nur von der Grundmode – der «berühmten»<sup>37</sup>  $HE_{11}$ -Mode, wie wir später sehen werden – eingenommen, die bis zur Frequenz Null ausbreitungsfähig bleibt. Interessanterweise ist *allen hybriden Modi* in allen Wellenleiterstrukturen gemein, dass sie bei  $\beta=0$  höchstens *drei* von Null verschiedene Feldkomponenten aufweisen und zu *TE*- oder *TM*-Modi entarten. Wie wir soeben gezeigt haben, ist dies bei der Stufenindexfaser sogar für *Cutoff*-Bedingungen  $\beta>0$  (aber mit  $m=0$ ) der Fall.

Analog zur allgemeinen charakteristischen Gleichung (3.163) erhalten wir aus den beiden  $2 \times 2$ -Subdeterminanten je eine *charakteristische Gleichung* für die  $TE_{0p}$ -Modi (mit  $m=0$ )

$$\tilde{J}_m(\xi) + \tilde{K}_m(\eta) = 0 \tag{3.166},$$

wobei wir diese Gleichung mit (3.164) und unter Berücksichtigung der entsprechenden mathematischen Relationen für die *Besselfunktionen* (und ihre Modifikationen)  $J_0'(\xi) = -J_1(\xi)$  und  $K_0'(\eta) = -K_1(\eta)$  vereinfacht ausschreiben können (vergleiche hierzu auch Fussnote<sup>37</sup>)

$$\boxed{\frac{J_1(\xi)}{\xi \cdot J_0(\xi)} + \frac{K_1(\eta)}{\eta \cdot K_0(\eta)} = 0} \tag{3.167}.$$

Entsprechend dazu die spezifische *charakteristische Gleichung* der  $TM_{0p}$ -Modi (mit  $m=0$ )

$$k_1^2 \cdot \tilde{J}_m(\xi) + k_2^2 \cdot \tilde{K}_m(\eta) = 0 \tag{3.168},$$

die sich zu

$$\boxed{\frac{k_1^2 \cdot J_1(\xi)}{\xi \cdot J_0(\xi)} + \frac{k_2^2 \cdot K_1(\eta)}{\eta \cdot K_0(\eta)} = 0} \tag{3.169}$$

vereinfachen lässt. Die *charakteristischen Gleichungen* (3.163), (3.167) und (3.169) genügen eigentlich vollauf um sowohl das *Dispersionsverhalten* als auch die *Cutoff*-Bedingungen der Stufenindexfaser bestimmen zu können. Die analytische Struktur der *charakteristischen Gleichungen* erlaubt hingegen einen weiteren, direkten Zugang, wenn es um die Bestimmung der *Cutoff*-Bedingungen geht. Die *Cutoff*-Bedingung für die betrachtete Mode zeichnet sich u.a. dadurch aus, dass deren Feldverlauf im Mantelgebiet nicht mehr abfallend ist. Wir können daher die Beziehung (3.163) für  $\eta^2 \rightarrow 0$  auswerten

<sup>37</sup> Charles Kao und George Hockham haben 1966 dank ihrer erstmaligen Berechnung der  $HE_{11}$ -Mode viel Überzeugungsarbeit für eine verlustarme Glasfaserübertragung leisten können.

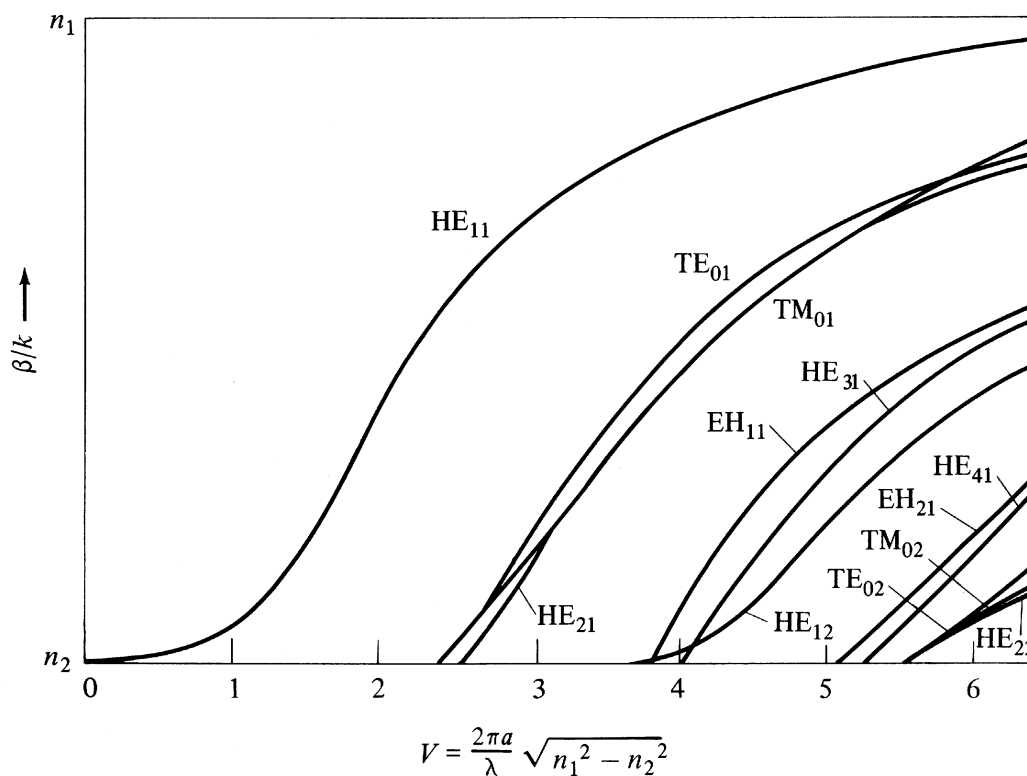


Fig.3.34: Das Dispersionsverhalten des effektiven Indexes in bezug auf die zugehörigen Modi der Stufenindexfaser. Der Cutoff der entsprechenden Mode wird erreicht, wenn  $\beta/k \rightarrow n_2$  bzw.  $\eta \rightarrow 0$ .

und erhalten – nach einigen komplizierten Grenzwertbetrachtungen und daher auch ohne Herleitung – die Cutoff-Bedingungen für den Eigenwert  $\xi_p$  der Stufenindexfaser:

- $m=0$ :  $TE_{0p}, TM_{0p}$

$$J_0(\xi) = 0 \quad (3.170)$$

- $m=1$ :  $EH_{1p}, HE_{1p}$

$$J_1(\xi) = 0 \quad (3.171)$$

- $m>1$ :  $EH_{mp}$

$$J_m(\xi) = 0 \quad (3.172)$$

- $m>1$ :  $HE_{mp}$

$$\left( \frac{n_1^2}{n_2^2} + 1 \right) \cdot J_{m-1}(\xi) = \frac{\xi}{m-1} \cdot J_m(\xi) \quad (3.173)$$

Wie man auch aus Fig.3.34 sieht, sind die  $TE_{0p}$ - und  $TM_{0p}$ -Modi im Cutoff entartet!

Eine Frage bleibt noch zu beantworten: Wenn wir das Dispersionsverhalten aus *Fig. 3.34* anhand der *charakteristischen Gleichung* (3.163) berechnen können, wie gelingt uns dann die korrekte Zuordnung der Modenbezeichnung zur zugehörigen Dispersionskurve? Wie können die geführten Modi der Stufenindexfaser entsprechend ihrer Bezeichnung *korrekt abgezählt* werden?

Um auf diese Frage eingehen zu können, müssen wir zuerst einmal klären, worin genau der Unterschied zwischen den *hybriden HE-* und *EH-Modi* besteht. Generell lässt sich sagen, dass *hybride Modi* weder *TE-* noch *TM-Modi* sind, aber durchaus gewisse Ähnlichkeiten mit ihnen aufweisen können. Ein Unterscheidungskriterium lässt sich mit Hilfe des *Faserparameters V* (3.165) angeben

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{cases} 0 & EH \\ \infty & HE \end{cases} \quad (3.174),$$

dadurch wird die *EH-Mode* – wie wir bereits in Abschnitt 3.3.2 bereits vorweggenommen haben – «*TE-artig*» ( $H_z$ -Komponente dominiert) und die *HE-Mode* entsprechend «*TM-artig*» ( $E_z$ -Komponente dominiert). Diese Klassifikation stimmt übrigens auch mit unserer Zerlegung der Determinante überein, wo wir für  $m=0$  bereits zu den Entartungen

$$\begin{aligned} EH_{0p} &\equiv TE_{0p} \\ HE_{0p} &\equiv TM_{0p} \end{aligned} \quad (3.175)$$

gelangt sind. Um die Frage der Abzählbarkeit in der korrekten Reihenfolge beantworten zu können, müssen wir die allgemeine *charakteristische Gleichung* (3.163) der *hybriden Modi* für den Sonderfall der *schwach* führenden Faser untersuchen: Unter derartigen Bedingungen gilt näherungsweise  $(n_1 - n_2) \rightarrow 0$  bzw.  $\beta \approx k_1 \approx k_2$  und (3.163) «verkommt» zu

$$\left\{ \tilde{J}_m(\xi) + \tilde{K}_m(\eta) \right\} \mp m \cdot \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) = 0 \quad (3.176).$$

Mit Hilfe der mathematischen Rekursionsrelationen für die *Besselfunktionen* (und ihren Modifikationen)<sup>38</sup> ergeben sich aus (3.176) die angenäherten *Eigenwertgleichungen* entsprechend der Vorzeichenwahl

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{J_{m-1}(\xi)}{\xi \cdot J_m(\xi)} - \frac{K_{m-1}(\eta)}{\eta \cdot K_m(\eta)} &\simeq 0 \rightarrow HE_{mp} \\ \frac{J_{m+1}(\xi)}{\xi \cdot J_m(\xi)} + \frac{K_{m+1}(\eta)}{\eta \cdot K_m(\eta)} &\simeq 0 \rightarrow EH_{mp} \end{aligned}} \quad (3.177),$$

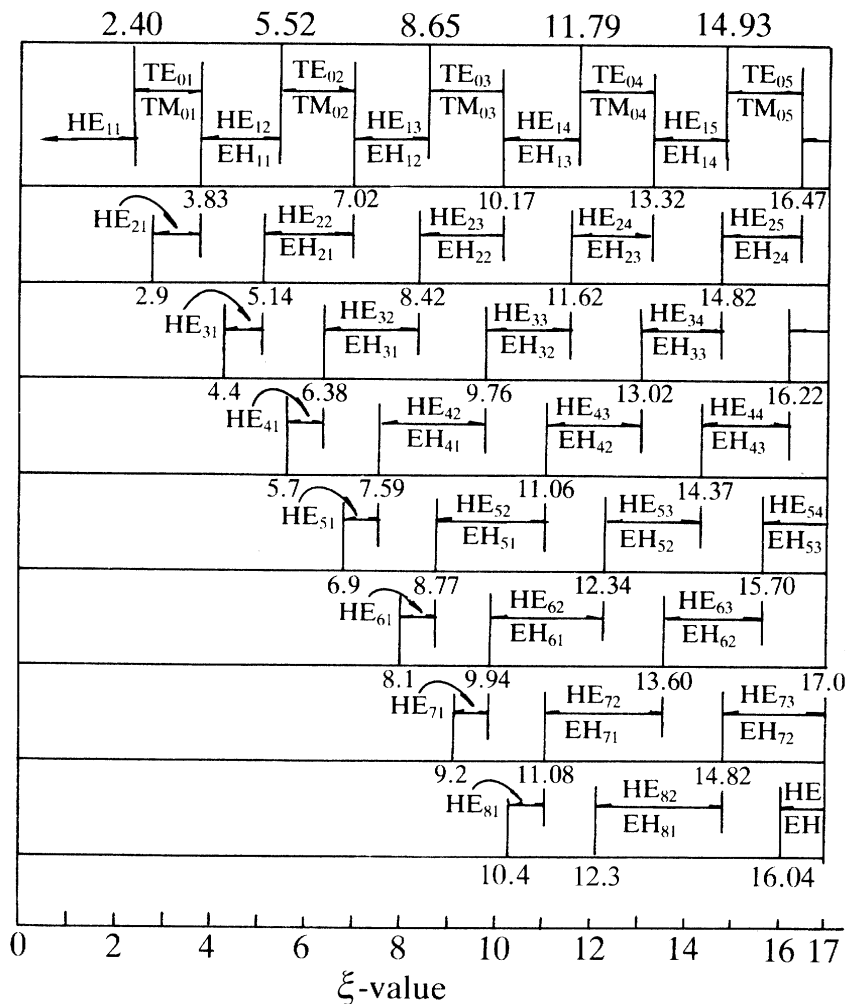
wobei die Zuordnung der Modenbezeichnung (gemäss den Vorzeichen: «+» für  $EH_{mp}$ ; «-» für  $HE_{mp}$ )

<sup>38</sup>  $J'_m(\xi) = -J_{m+1}(\xi) + \frac{m}{\xi} \cdot J_m(\xi) = J_{m-1}(\xi) - \frac{m}{\xi} \cdot J_m(\xi)$       $K'_m(\eta) = -K_{m+1}(\eta) + \frac{m}{\eta} \cdot K_m(\eta) = -K_{m-1}(\eta) - \frac{m}{\eta} \cdot K_m(\eta)$

aus der vergleichenden Betrachtung der *longitudinalen* Komponenten erfolgt, indem man die *longitudinalen* Komponenten der Mode (linke Seite)

$$\left| \frac{A_1}{B_1} \right|_{Mode} \xrightarrow[\text{führend}]{\text{schwach}} \frac{1}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (3.178)$$

mit denjenigen der schwachführenden Faser<sup>39</sup> vergleicht (rechte Seite) und bei *grösseren* Werten auf *HE*-Modi bzw. bei *kleineren* Werten auf *EH*-Modi schliesst. Diese Kontrollrechnung folgt eng der Argumentation zum Unterscheidungskriterium aus (3.174) und erlaubt endlich eine *eindeutige Kategorisierung* der gefundenen Eigenwerte  $\xi_p$  von (3.163), welche in (3.172)-(3.173) und (3.177) bereits vorweggenommen wurde. Zusammenfassend stellen wir diese Kategorisierung in den folgenden zwei Abbildungen *Fig.3.35* und *Fig.3.36* nochmals schematisch dar.



*Fig.3.35: Modenplan der ausbreitungsfähigen Modi als Funktion von  $\xi$ . Die angegebenen Grenzwerte für  $\xi$  entsprechen gerade den Cutoff-Werten  $V$  für die betrachtete Mode der Stufenindexfaser.*

<sup>39</sup> Wie wir später noch sehen werden, entspricht das Verhältnis der *longitudinalen* Komponenten bei schwach führenden Fasern gerade der *Feldwellenimpedanz* des Kernmaterials.



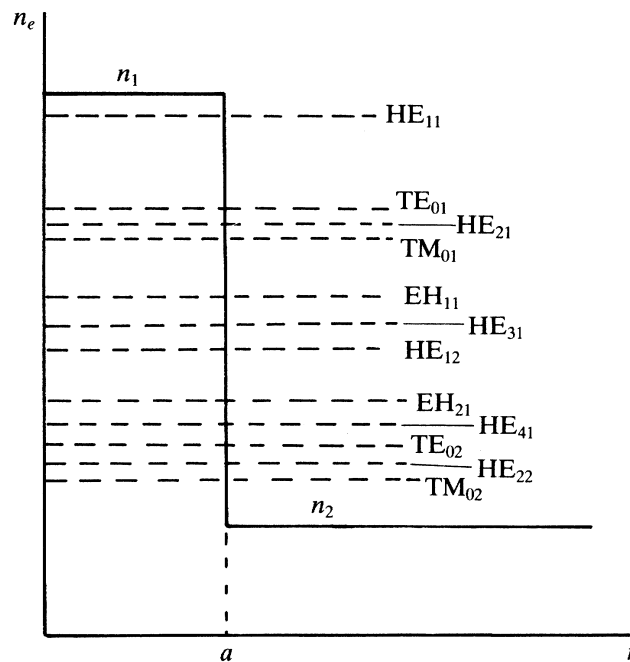


Fig.3.36: Effektiver Index der unterschiedlichen Eigenmodi in einer gegebenen Stufenindexfaser. Diese «umgekehrte Potentialtopf-Darstellung» folgt der Diskussion im Zusammenhang mit der Fig.3.23.

Mit zunehmendem *Faserparameter*  $V$  (wird oft auch *normierte Frequenz* genannt), d.h. mit steigender Frequenz, mit zunehmender Brechzahldifferenz oder mit grösser werdendem Kerndurchmesser, steigt auch die Anzahl der Modi in der Stufenindexfaser an. Ein Blick auf den Modenplan in Fig.3.35 zeigt beispielsweise, dass in Fasern mit Werten  $V < 2.405$  nur eine  $HE_{11}$ -Mode ausbreitungsfähig ist (eigentlich sind es zwei Wellen, weil die  $HE_{11}$ -Mode bezüglich zweier orthogonalen Polarisationsrichtungen *entartet* ist). Dies ist der Betriebszustand der in Fig.3.2 bereits angesprochenen *Single-Mode-Faser*<sup>40</sup>. Damit eine vernünftige Feldkonzentration in der Faser erreicht wird, schränkt man den Arbeitsbereich der Faser von unten her noch zusätzlich ein und definiert  $2 < V < 2.405$ .

Die Ermittlung der *Modenanzahl*  $N$  bei gegebenem *Faserparameter*  $V$  ist schwierig und eigentlich nur anhand der konkreten Nullstellenlagen  $\xi_p$  möglich. Eine Abschätzung der *Modenanzahl*  $N$  kann jedoch unter Berücksichtigung verschiedener Gesichtspunkte erfolgen. So beruht eine davon auf der Periodizität der Besselfunktionen in (3.170)-(3.173) für grosse Argumente  $\xi_p$ . Wie aus Fig.3.35 hervorgeht, bedeutet eine Zunahme von  $V = (n-1)\cdot\pi \rightarrow V = n\cdot\pi$  jeweils einen Zuwachs der *Modenanzahl*  $N$  um 2 *transversale* Modi  $TE_{0p}$  und  $TM_{0p}$ , um 2 *hybride* Modi  $EH_{1p}$  und  $HE_{1p}$  und um  $4\cdot(n-1)$  *hybride* Modi  $EH_{mp}$  und  $HE_{mp}$ , was durch Vergleich der «vertikalen» Summen in Fig.3.35 wiederum bestätigt werden kann. Die «horizontale» Summation  $\sum_n \{4(n-1)+2\} = 2\cdot n^2$  ergibt somit eine erste Approximation der Anzahl der *hybriden* Modi für den Faserparameter  $V = n\cdot\pi$ . Die *transversalen* Modi mit  $m=0$  sind *rotationssymmetrisch* und daher nicht entartet. Bei den *hybriden* Modi  $EH_{mp}$  und  $HE_{mp}$  lässt sich hingegen jedes Modenfeld aus den beiden Felddarstellungen mit den *azimutalen* Basen  $\cos\{n\cdot\varphi\}$  und  $\cos\{n\cdot[\varphi-\pi/(2n)]\}$  durch Superposition erzeugen. Dadurch sind *hybride* Modi jeweils *zweifach entartet*. Unter Berücksichtigung der *transversalen* Modi erhält man für die *Modenanzahl*  $N$  bei  $V = n\cdot\pi$

$$N \approx 4n^2 + 2n = 2n \cdot (2n + 1) \tag{3.179}.$$

<sup>40</sup> Die einwellige Faser bezeichnet man auch als *Monomodefaser*.

Ein alternativer Zugang zur *Modenzahl*  $N$  ergibt sich mit Hilfe einer strahlenoptischen Modellierung der Strahleinkopplung bei schwach führenden Stufenindexfasern. Unter diesen Bedingungen ist  $NA \approx (n_1^2 - n_2^2)$  und für den Akzeptanz-Raumwinkel gilt  $\Omega = \pi \varphi_a^2 \approx \pi \cdot NA^2$ . Nimmt man zudem an, dass die Anzahl der Modi per Raumwinkel  $\Omega$ , die von einer strahlenden Fläche  $A$  bei der Wellenlänge  $\lambda_0$  abgestrahlt werden  $2A/\lambda_0^2$  beträgt (der Faktor zwei steht für die Entartung bezüglich der zwei orthogonalen Polarisierungen), dann gilt für die *Modenzahl*  $N$  die Näherung

$$N \approx \frac{2A}{\lambda_0^2} \cdot \Omega = \frac{2 \cdot a^2 \pi^2}{\lambda_0^2} \cdot NA^2 = \frac{V^2}{2} \quad (3.180).$$

Der Ausdruck (3.180) überschätzt die *Modenzahl*  $N$ , zumal alle Modi als *zweifach entartet* angenommen werden. In den meisten Anwendungen ist jedoch nur der einwellige Betrieb der Stufenindexfaser von Relevanz.

### 3.7.2 Skalare Lösung – Näherung durch LP-Modi

Wie man sieht, gestaltet sich die exakte Analyse von Stufenindexfasern kompliziert und stellenweise gar unübersichtlich. Trotzdem lassen sich für die Praxis Näherungen angeben, die sehr einfach handhabbar sind: die Näherung durch *LP-Modi*. Das Kürzel «LP» steht für *linear polarisiert* und betont den Umstand, dass für Fasern mit kleinen Brechzahlunterschieden, bei welchen die Bedingung

$$\frac{\lambda_0}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial r} \ll 1 \quad (3.181)$$

erfüllt ist, keine  $z$ -Komponenten mehr im Modenfeld zu erwarten sind. Wir sprechen hier von einer *Quasi-TEM*-Situation und die resultierenden Näherungen werden der bereits angesprochenen *weak guidance approximation* zugeordnet. Wenn statt einem abrupten Indexsprung, der (3.181) eigentlich nicht erfüllen würde, ein Übergang von  $n_1 = 1.5$  auf einen um 1% tieferen Wert über eine Distanz von  $\lambda_0/10$  stattfinden würde, dann ergibt die linke Seite von (3.181) etwa 0.1 und die Bedingung (3.181) wäre immer noch hinreichend erfüllt. Wir werden die *Quasi-TEM-Approximation* bis auf Widerruf auch auf die Stufenindexfaser anwenden. Auch ohne Vernachlässigung der  $z$ -Komponenten gilt für «verschwindend» kleine Indexsprünge  $(n_1 - n_2) \rightarrow 0$  bzw.  $\beta \approx k_1 \approx k_2$  und wir werden im Verlauf dieses Abschnitts zeigen, dass *LP-Modi* «ganz natürlich» aus der Superposition von *quasi-entarteten hybriden* Modi hervorgehen können. Was geschieht also, wenn  $\beta \approx k_1 \approx k_2$  annähernd erfüllt wird?

#### a) Erzeugung der LP-Modi

Die Antwort ergibt sich anhand eines einfachen Gedankenexperiments: Betrachtet man das Dispersionsverhalten aus Fig.3.34 oder die effektiven Indices in Fig.3.36 der ausbreitungsfähigen Modi, dann können im vornherein Modengruppen wie z.B.  $\{HE_{11}\}$ ,  $\{TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}\}$ ,  $\{HE_{31}, EH_{11}\}$ ,  $\{HE_{12}\}$ ,  $\{HE_{41}, EH_{21}\}$  oder  $\{TE_{02}, TM_{02}, HE_{22}\}$ , ... identifiziert werden, die bei stetig abnehmender Brechzahldifferenz  $(n_1 - n_2)$  immer näher zueinander rücken bis jede der Gruppen in sich quasi entartet sind. Wir formalisieren diese Ähnlichkeit und schreiben

$$\begin{aligned}
 HE_{m+1,p} &\approx EH_{m-1,p} \\
 TE_{0,p} &\approx TM_{0,p} \approx HE_{2,p}
 \end{aligned}
 \tag{3.182}$$

Für verschwindende Brechzahldifferenz  $(n_1 - n_2) \rightarrow 0$  «verklumpen» die angegebenen Modengruppen je zu *einer einzigen* Mode, und in den entsprechend überlagerten Feldprofilen sind nur noch zwei *linear polarisierte* Komponenten präsent, welche wir in kartesischer Schreibweise äusserst einfach als  $(E_x, H_y)$  bzw.  $(E_y, H_x)$  ausdrücken können. Unter diesen Umständen lässt sich z.B.  $E_x$  als *Skalar* auffassen (und berechnen), das zugehörige  $\mathbf{H}$ -Feld ergibt sich – ganz dem *Quasi-TEM*-Ansatz verpflichtet – aus  $H_y = n_{\text{eff}}/\eta \cdot E_x$ , wobei  $\eta/n_{\text{eff}}$  für die Feldwellenimpedanz im Glas steht. Ausgehend von (3.182) und unter Berücksichtigung der erwähnten Modengruppen lautet das Bildungsgesetz der  $LP_{mp}$ -Modi demnach

$$\begin{aligned}
 LP_{0p} &\hat{=} HE_{1,p} \\
 LP_{mp}^y &\hat{=} EH_{m-1,p} + HE_{m+1,p} \\
 LP_{mp}^x &\hat{=} EH_{m-1,p} - HE_{m+1,p}
 \end{aligned}
 \tag{3.183}$$

und umgekehrt gilt natürlich auch

$$\begin{aligned}
 EH_{m-1,p} &\hat{=} LP_{mp}^y + LP_{mp}^x \\
 HE_{m+1,p} &\hat{=} LP_{mp}^y - LP_{mp}^x
 \end{aligned}
 \tag{3.184}$$

Für den Fall  $m=1$ , wo  $EH_{0p}$  auftritt gilt es sowohl (3.175) als auch (3.182) zu berücksichtigen; zudem ist zu beachten, dass sich die Modi  $LP_{mp}^x$  und  $LP_{mp}^y$  einzig durch ihre Polarisationsrichtung voneinander unterscheiden. Mit Blick auf Fig.3.37 bedeutet  $m$  in  $LP_{mp}$  die Anzahl Feldextrema- bzw. Intensitätsmaxima-Paare in  $\varphi = 0 \dots 2\pi$  und  $p$  benennt die Anzahl der Feldextrema bzw. Intensitäts-

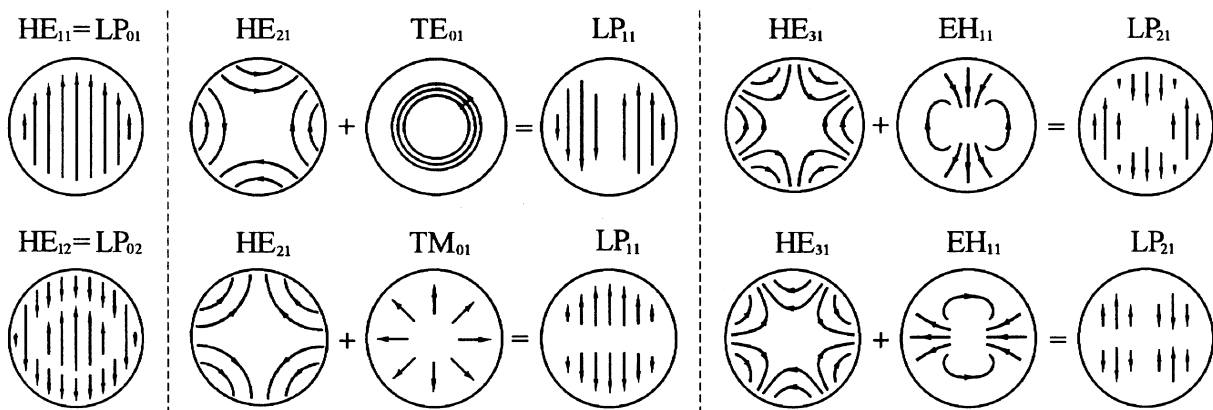


Fig.3.37: Beispiele der Zusammensetzung von LP-Modi aus hybriden Modi bei kleinen Brechzahlunterschieden. Bei den höheren LP-Modi sind nur die typischen Entartungsfälle dargestellt.

maxima in  $r$ -Richtung<sup>41</sup>. Wie in der Diskussion um die Modenzahl  $N$  aus (3.179) bereits erwähnt wurde, sind alle *hybriden* Modi zweifach entartet. Dadurch gehen alle *hybriden* Modi jeweils doppelt in (3.183) ein und die resultierenden  $LP_{mp}$ -Modi treten für  $m=0$  paarweise, und für  $m \geq 1$  jeweils als Quartett auf. In Fig.3.37 würde z.B. zu jedem angezeigten Feldbild der  $LP_{11}$  noch eine orthogonal polarisierte (d.h. um  $\pi/2$  gedrehte) Variante dazukommen. Gehen wir davon aus, dass in der Praxis die Entartung der  $HE_{m+1,p}$  und  $EH_{m-1,p}$  nicht ideal vorliegt, dann zerfällt die resultierende  $LP_{mp}$ -Mode bei genügend grosser Übertragungsdistanz immer in zwei  $90^\circ$  zueinander polarisierten  $LP_{mp}$ -Varianten. Dieser «Polarisationszerfall» in Multimodefasern entsteht also nicht allein durch Modenkopplung an Glasfaserstörungen, sondern teilweise schon in der *idealen* Faser.

## b) Skalare Rechnung mit LP-Modi

Will man zur *charakteristischen Gleichung* der  $LP_{mp}$ -Modi gelangen, dann muss die allgemeine *charakteristische Gleichung* (3.163) der *hybriden* Modi für den Sonderfall der *schwach* führenden Faser untersucht werden. Unter derartigen Bedingungen «verkommt» (3.163) zur vereinfachten Darstellung aus (3.176) oder vielmehr zu den Gleichungen (3.177). Diese Ausdrücke lassen sich unter Berücksichtigung der Relationen aus Fussnote<sup>37</sup> und durch Inversion in die folgende einprägsame Form bringen

$$\boxed{\frac{\xi \cdot J_{\ell-1}(\xi)}{J_\ell(\xi)} = -\frac{\eta \cdot K_{\ell-1}(\eta)}{K_\ell(\eta)} \quad \forall \ell = \begin{cases} 1 & TE, TM \\ m+1 & EH \\ m-1 & HE \end{cases}} \quad (3.185),$$

wobei (3.176) drei Zugänge zur obenstehenden *Eigenwertgleichung* geliefert hat: Es sind dies die Eigenwertgleichungen der *transversalen* und der *hybriden* Modi (links angegeben), welche im Entartungsfall zu einer einzigen Eigenwertgleichung zusammenfallen. In diesem Sinne ist (3.185) die *Eigenwertgleichung* der  $LP_{\ell p}$ -Modi (Merke:  $J_{-m} = (-1)^m \cdot J_m$  und  $K_{-m} = K_m$ ). In der Feldkonfiguration  $(E_x, H_y)$  bzw.  $(E_y, H_x)$  der  $LP_{\ell p}$ -Modi wird z.B.  $E_x$  als *skalares Modenprofil* aufgefasst:

- Gebiet ①:  $n = n_1, k_1 > \beta, r < a$

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi) &= A_l \cdot J_\ell\left(\frac{\xi}{a}r\right) \cdot \cos(\ell\varphi + \varphi_0) \\ H_y(r, \varphi) &\approx E_x(r, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_{eff}}{\mu_0}} \end{aligned} \quad (3.186),$$

- Gebiet ②:  $n = n_2, k_2 < \beta, r > a$

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi) &= A_l \cdot \frac{J_\ell(\xi)}{K_\ell(\eta)} \cdot K_\ell\left(\frac{\eta}{a}r\right) \cdot \cos(\ell\varphi + \varphi_0) \\ H_y(r, \varphi) &\approx E_x(r, \varphi) \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_{eff}}{\mu_0}} \end{aligned} \quad (3.187).$$

<sup>41</sup> Dies gilt definitionsgemäss für die *transversalen* Feldkomponenten. Das *azimutale* Verhalten der verschwindenden *longitudinalen* Komponenten entspricht hingegen demjenigen der gemäss (3.183) *involvierten* hybriden Modi.

Beim Ansetzen von  $E_x$  kann  $\varphi_0=0$  angenommen werden, wird hingegen von  $E_y$  ausgegangen, dann gilt  $\varphi_0=-\pi/2$  und der Ausdruck für  $H_x$  erfährt noch einen Vorzeichenwechsel, damit sich  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  entlang der  $z$ -Richtung ausbreitet. Beispiele von  $LP_{\ell p}$ -Modi sind den folgenden Figuren zu entnehmen.

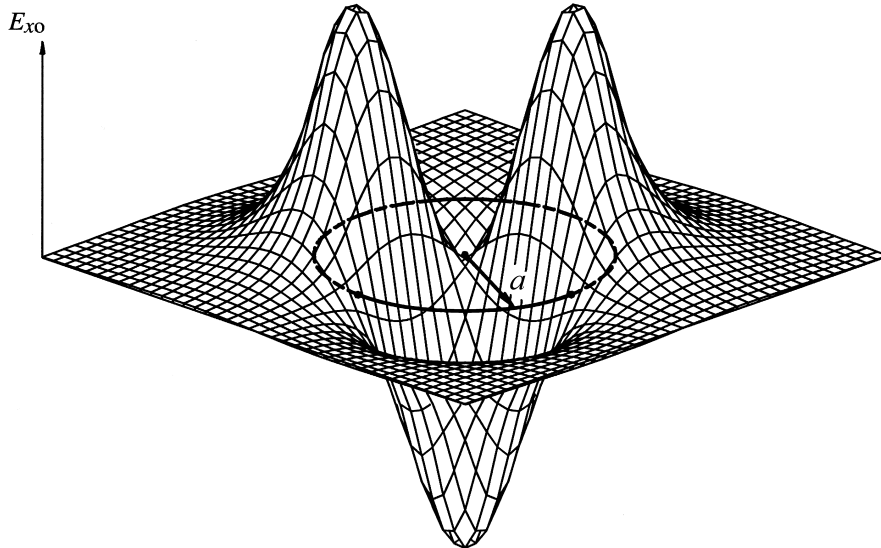


Fig.3.38: Modenprofil  $E_x(r, \varphi)$  der  $LP_{21}$ -Mode in einer Stufenindexfaser mit Kernradius  $a$ .

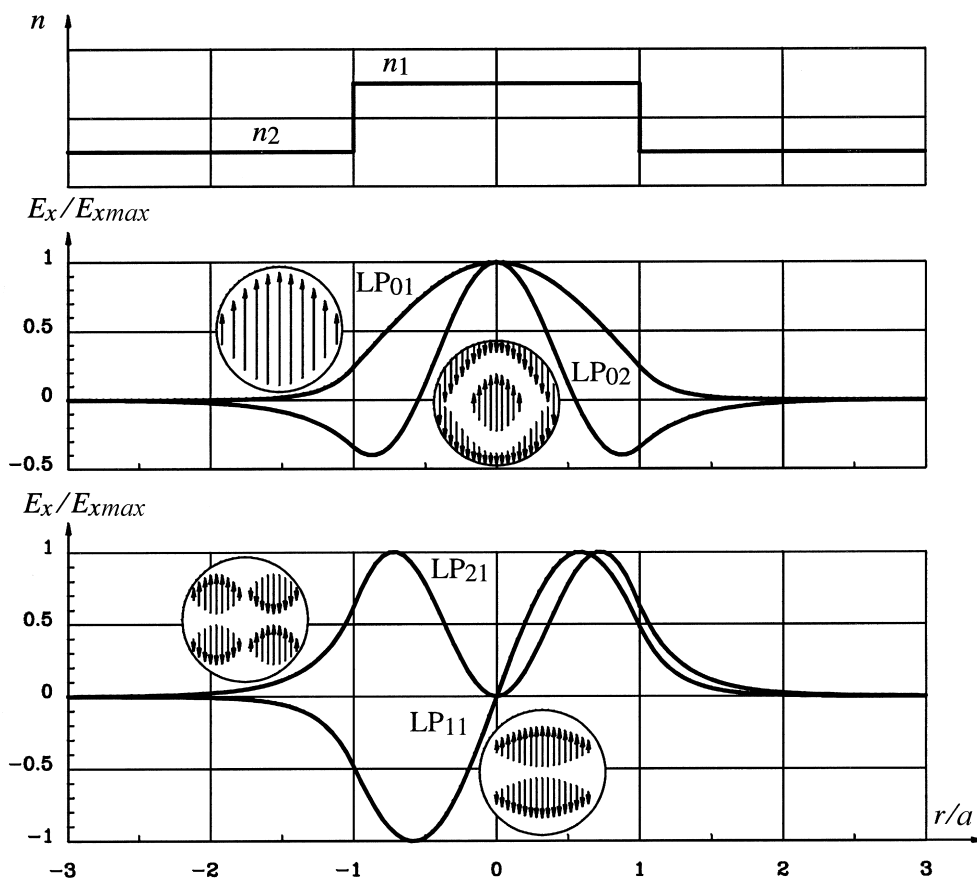


Fig.3.39: Typischer Verlauf der transversalen elektrischen Feldstärke  $E_x(r, \varphi)$  für eine Stufenindexfaser mit Faserparameter  $V=5$ . Es sind die ersten vier LP-Modi dargestellt.

Einen scheinbaren Widerspruch gilt es noch zu klären. Um die *hybriden EH-* bzw. *HE-* Modi voneinander unterscheiden zu können, mussten wir uns der schwachen Wellenführung bedienen und gelangten so zu einer *algebraischen* Unterscheidbarkeit, die sich z.B. im Ausdruck (3.177) widerspiegelt. Wie wir aber bei der Herleitung der *LP-* Modi gesehen haben, treten unter diesen Bedingungen zahlreiche Entartungen eben dieser Modi auf. *Trennschärfe* zum einen, *Entartung* zum anderen – dieses Widerspruchpaar ist keines, denn es entarten *hybride* Modi unterschiedlicher Ordnung, was gerade in der rechten Seite von (3.185) programmatisch zum Ausdruck kommt.

Wie man am Modenprofil aus der *Fig.3.38* herauslesen kann, befindet sich ein relativ grosser Anteil des Feldes im Mantelgebiet. Für die *Single-Mode-Faser* ist der Anteil der Leistung  $\Gamma_{Mantel}$ , welche im Fasermantel mitgeführt wird erstaunlich gross. Um diesen Anteil bestimmen zu können, muss der Leistungsfluss in *z*-Richtung, d.h. die *z*-Komponenten des zeitgemittelten *Poyntingfeldes*  $S$

$$S_z = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\} \cdot \vec{e}_z \propto (E_x \cdot H_y) \quad (3.188)$$

über das Kerngebiet integriert, und mit der Gesamtleistung verglichen werden. Für eine  $LP_{\ell p}$ -Mode ergibt sich, nach Einsetzen von (3.186) bzw. (3.187) in (3.188) und entsprechender Integration eine Approximation, deren Genauigkeit von der Ordnung der Brechzahldifferenz ist

$$\Gamma_{Kern} = \frac{P_{Kern}}{P_{tot}} = \left( 1 - \frac{\xi_p^2}{V^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{J_\ell(\xi_p)^2}{J_{\ell+1}(\xi_p) \cdot J_{\ell-1}(\xi_p)} \right) \quad (3.189)-(3.190)$$

$$\Gamma_{Mantel} = \frac{P_{Mantel}}{P_{tot}} = 1 - \frac{P_{Kern}}{P_{tot}}$$

Die erste Klammer in (3.189) ist übrigens äquivalent zum Term  $\eta^2/V^2$ . Für sehr grosse *Modenanzahl*  $N$ , d.h. wenn  $V$  sehr gross ist, erhält man für die totale Leistung im Mantelgebiet

$$\Gamma_{Mantel} = \frac{P_{Mantel}}{P_{tot}} \Bigg|_{total} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{N}} \quad (3.191)$$

Gemäss (3.179) oder (3.180) ist  $N \propto V^2$  und dadurch sinkt der Leistungsanteil im Mantelgebiet  $\Gamma_{Mantel}$  bei Multimodefasern umgekehrt proportional zum Anstieg von  $V$ .

**Lernkontrolle:** Anhand welcher formalen Kriterien lassen sich die Modenlösungen der Stufenindexfaser kategorisieren? Wie erreicht man eine korrekte «Nummerierung» der Modi im Dispersionsdiagramm? Es gibt mindestens zwei Zugänge – einen intuitiven und einen formalen – um die LP-Modi begründen zu können. Welche sind es? Welchem Wellentyp gleichen die LP-Modi und was macht diese Näherung eigentlich so attraktiv? Wie heisst die «Königin» der Glasfasermodi in Wirklichkeit und als Näherung? Welchen Umstand verhalf ihr zu Ruhm und Ehre?

### 3.7.3 Dispersion schwachführender Glasfasern

Die *Dispersion* (Zerstreuung) der propagierenden optischen Signalleistung auf der Glasfaser definiert, neben der Signaldämpfung, die Hauptbegrenzung der optischen Datenübertragung. Die Dispersion wird dadurch zur wichtigen Bestimmungsgrösse des *Bitrate-Längen-Produkts*  $BL$ . So ist z.B. das Glasmaterial selbst wellenlängenabhängig. Die, durch die Brechzahlvariation  $n_i(\lambda)$  beeinflusste Wellenlängenabhängigkeit des Eigenwerts  $\beta$  nennt man daher *Materialdispersion* oder *chromatische Dispersion* des Glasmaterials.

Wie man aus *Fig.3.34* sofort nachvollziehen kann, ist der Eigenwert  $\beta$  – d.h. die Mode selbst – auch bei konstanten Brechzahlen der Glasfaser stark wellenlängenabhängig. Diese, durch die Gestalt des Wellenleiters (bzw. durch das gestellte Eigenwertproblem) verursachte Dispersion heisst sinn- gemäss *Wellenleiterdispersion*.

Ist die Faser so dimensioniert, dass mehrere Modi ausbreitungsfähig sind, dann kann sich die Signalleistung auf verschiedene Modi aufteilen, deren unterschiedliche Laufzeiten am anderen Ende der Faser eine sehr starke Signalverzerrung bewirken können. Ein optisches Signal wird dann durch die *modale Dispersion* (*Modendispersion* oder *Intermodendispersion*) verzerrt. Weitere Verzerrungsmechanismen wurden bereits in *Abschnitt 3.6* angedeutet: Auch unterschiedlich polarisierte Wellen können sich verschieden schnell entlang der Faser ausbreiten und leisten mit der sogenannten *Polarisationsdispersion* (oder *polarization mode dispersion PMD*) einen weiteren Beitrag zur Gesamtdispersion.

Im folgenden sollen nun die wesentlichsten Dispersionsmechanismen an der *schwachführenden* Glasfaser untersucht werden. Bevor wir jedoch mit der Analyse der verschiedenen Dispersionsbeiträge beginnen, gilt es noch die in der Literatur üblichen *normierten Parameter* anzugeben. Einigen davon sind wir bereits begegnet, so z.B. der *normierten Brechzahldifferenz*  $\Delta$

$$n_2 = n_1 \cdot (1 - \Delta) \quad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \quad (3.192),$$

oder der *normierten Frequenz*  $V$ , wobei im Zusammenhang mit  $NA$  die Näherung

$$V = k_0 a \cdot NA \approx k_1 a \cdot \sqrt{2\Delta} \approx k_2 a \cdot \sqrt{2\Delta} \quad (3.193),$$

$n_1^2 - n_2^2 \approx n_1^2 \cdot 2\Delta \approx n_2^2 \cdot 2\Delta$  zur Anwendung kommt. Die *normierten Parameter* haben den Vorteil, dass sich die Vergleichsbetrachtungen zwischen unterschiedlichen Glasfasertypen sehr einfach gestalten. Aus diesem Grund finden wir *normierte Parameter* oft in Datenblätter wieder. Die bisher aufgezählten *normierten Parameter* haben sich auf «äussere Umstände» des Eigenwertproblems bezogen. Der Eigenwert  $\beta$  aus der charakteristischen Gleichung  $C(\beta, \omega) = 0$  lässt sich als *normierte Phase* angeben, indem der Wertebereich von  $\beta \in [k_2, k_1]$  auf das Einheitsintervall der *normierten Phase*  $B \in [0, 1]$  abgebildet wird und wir deshalb für die *normierte Phase*  $B$  schreiben

$$B = \frac{\beta^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} = 1 - \frac{\xi^2}{V^2} = \frac{\eta^2}{V^2} \approx \frac{\beta - k_2}{k_1 - k_2} \quad (3.194).$$

Das Dispersionsverhalten der geführten Modi, wie es z.B. in *Fig.3.34* dargestellt wird, lässt sich dank der *normierten Parameter* in dimensionslose  $B$ - $V$ -Diagramme abbilden, welche nun einer verallgemeinerten

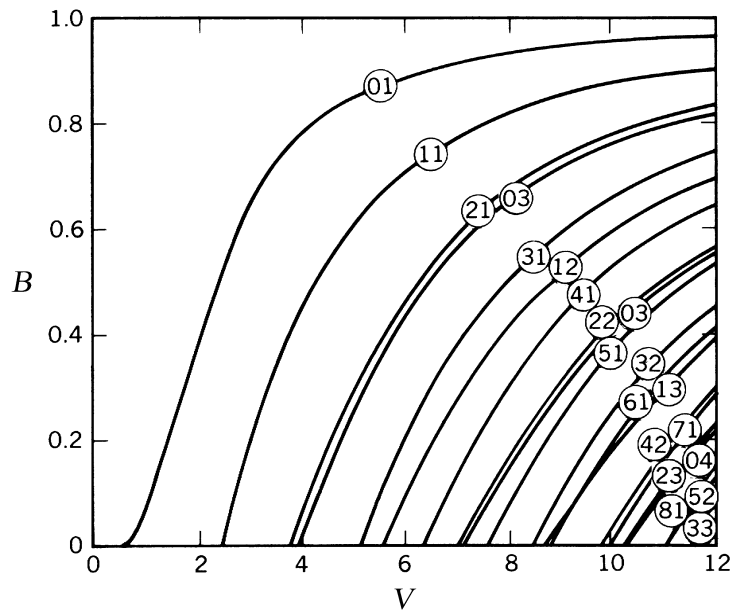


Fig.3.40: Normiertes Dispersionsverhalten der  $LP_{\ell p}$ -Modi.

Betrachtung zur Verfügung stehen. Für die  $LP_{\ell p}$ -Modi ist dieses Diagramm in Fig.3.40 abgebildet. Signalverzerrungen durch Wellenlängendispersion richten sich demnach nach dem *spektralen Gehalt* des eingekoppelten optischen Signals. Um den *spektralen Gehalt* optischer Signale auf einfache Weise charakterisieren zu können, werden im Zeitbereich *gaussförmige Pulsenveloppen* (Pulsbreite  $\sigma_t$ ) zum Lichtträger bei  $\lambda_0$  angenommen. Ein solches optisches Zeitsignal besitzt umgekehrt auch ein *gaussförmiges Spektrum* dessen spektrale Breite  $\sigma_\omega = 1/\sigma_t$  beträgt, was sich bezüglich der Wellenlänge als  $\sigma_\lambda = \{\lambda_0^2/(2\pi \cdot c_0)\} \cdot 1/\sigma_t$  anschreiben lässt<sup>42</sup>. Hierbei wurde ein idealer Lichtträger angenommen, dessen optische Bandbreite im Idealfall als Null vorausgesetzt wird. Reale Lichtquellen wie z.B. Laser haben in der Regel eine nicht vernachlässigbare Bandbreite  $\sigma'_\lambda$  von bis zu einem nm, was frequenzmässig ausgedrückt einigen Hz bis einigen GHz entspricht. Der *spektrale Gehalt* des optischen Signals kann also von der Quelle dominiert werden, oder er wird andernfalls durch das Spektrum des optischen Hochgeschwindigkeits-Datensignals bestimmt. Im Fall von *Single-Mode-Fasern* (bzw. wenn man die *Intermodendispersion* für einmal ausser Acht lässt) beeinflusst der *spektrale Gehalt* die *Intramodendispersion*, d.h. alle Laufzeiteffekte die vom Dispersionsverhalten einer einzigen Mode herrühren. Die zentrale Grösse dieser Betrachtung ist die sogenannte *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$ , d.h. die Laufzeit, die ein optisches Signal von bestimmtem *spektralen Gehalt* braucht, um entlang einer Glasfaser der *Länge L* zu propagieren. Da wir uns für die Streuungen dieser Laufzeiten interessieren ist das Objekt unserer Analyse die sogenannte *Gruppenlaufzeitdispersion* (*group velocity dispersion GVD*).

Die akkumulierte Phase einer Mode, welche sich mit  $e^{i\{\omega_1 t - \phi_1(z)\}}$  über eine Faserlänge  $L$  ausbreitet beträgt  $\phi_1 = \beta(\omega_1) \cdot L$ , wobei  $\phi_1(\omega_1)$  auch als Phasengang interpretiert werden kann, wenn man die Faser als Zweitor auffasst. Wird ein zweites, nahestehendes Eingangssignal  $e^{i\{\omega_2 t - \phi_2(z)\}}$  dazugekoppelt, dessen Frequenz  $\omega_2$  beträgt und demzufolge eine Ausgangsphase von  $\phi_2(\omega_2)$  ergibt, dann kann nach wenigen Umrechnungen ein Schwebungssignal der Form  $Re\{e^{i\{\omega_1 t - \beta_1 z\}} + e^{i\{\omega_2 t - \beta_2 z\}}\}$  angegeben werden. Durch trigonometrisches Umformen ergibt sich  $2 \cdot \cos(\frac{1}{2} \cdot \delta\omega \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \delta\beta \cdot z) \cdot \cos(\langle\omega\rangle \cdot t - \langle\beta\rangle \cdot z)$  was offensichtlich aus einer langsam variierenden Enveloppe mit  $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  bzw.  $\delta\beta = \beta_2 - \beta_1$  und einem Trägersignal mit  $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 + \omega_1)$  bzw.  $\langle\beta\rangle = \frac{1}{2} \cdot (\beta_2 + \beta_1)$  besteht. Der Einfachheit halber sei  $\langle\omega\rangle \rightarrow \omega$  und  $\langle\beta\rangle \rightarrow \beta$ . Indem wir nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit des *Trägers* oder der *Enveloppe* fragen, setzen wir das totale

<sup>42</sup> Die *technischen* Puls- oder Bandbreitemasse (wie z.B. *full width 45.6%-maximum*, *full width half maximum FWHM*,...) lassen sich aus den entsprechenden Standardabweichungen gemäss  $\Delta X_{45.6\%} = \sqrt{(2\pi)} \cdot \sigma_X$  berechnen, wobei für  $X = t, f, \omega, \lambda$  stehen kann.



Differential des entsprechenden Wellenarguments  $d\{\omega \cdot t - \beta \cdot z\}$  bzw.  $d\{1/2 \cdot \delta\omega \cdot t - 1/2 \cdot \delta\beta \cdot z\}$  gleich Null und erhalten für das *Trägersignal* die *Phasengeschwindigkeit*  $v_p = \omega / \beta$  und für die *Envelope* die *Gruppengeschwindigkeit*  $v_g = \delta\omega / \delta\beta$ . In der optischen Telekommunikation hat man es meistens mit der Ausbreitung von *enveloppenartigen* Signalen zu tun, welche in einem der *ITU*-Bänder übertragen werden. Wir interessieren uns somit für die Propagationszeit der Signalleistung, was sich entsprechend mit der *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  ausdrücken lässt (mit der charakteristischen Gleichung  $C(\beta, \omega) = 0$ )

$$\tau_g = \frac{L}{v_g} = -L \cdot \frac{\partial C}{\partial \omega} \bigg/ \frac{\partial C}{\partial \beta} = L \cdot \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{L}{c_0} \cdot \frac{d\beta}{dk_0} = -\frac{L}{c_0} \cdot \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{d\beta}{d\lambda} \quad (3.195).$$

Die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  beschreibt die Variation der Gruppenlaufzeit entsprechend des *spektralen Gehalts*  $\delta\lambda$  (entspricht  $\sigma_\lambda$ ) bzw.  $\delta\omega$  des übertragenen Signals bei einer Trägerwellenlänge von  $\lambda_0$ . Aus (3.195) können folgende Varianten von  $\delta\tau_g$  angeschrieben werden

$$\begin{aligned} \delta\tau_g &= \frac{d\tau_g}{d\lambda} \cdot \delta\lambda = -\frac{L}{2\pi c_0} \cdot \left\{ 2\lambda_0 \cdot \frac{d\beta}{d\lambda} + \lambda_0^2 \cdot \frac{d^2\beta}{d\lambda^2} \right\} \cdot \delta\lambda \\ \delta\tau_g &= \frac{d\tau_g}{d\omega} \cdot \delta\omega = \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{L}{v_g} \right\} \cdot \delta\omega = L \cdot \left\{ \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right\} \cdot \delta\omega \end{aligned} \quad (3.196)-(3.197).$$

Man bezeichnet  $\beta_2 = d^2\beta/d\omega^2 = d(1/v_g)/d\omega$  oft als den *GVD-Parameter* und die daraus abgeleitete Grösse

$$D = \frac{1}{L} \cdot \frac{d\tau_g}{d\lambda} = -\frac{2\pi \cdot c_0}{\lambda_0^2} \cdot \beta_2 \quad (3.198)$$

wird entsprechend *Dispersionsparameter*  $D^{43}$  genannt. Dadurch erhält die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  die einprägsame Form

$$\boxed{\delta\tau_g = |D| \cdot L \cdot \delta\lambda} \quad (3.199),$$

mit  $[D] = ps/(nm \cdot km)$ . Im folgenden sollen nun die unterschiedlichen Beiträge zur Gesamtdispersion der schwachführenden Glasfaser genauer vorgestellt werden.

## a) Materialdispersion

Wir haben im *Abschnitt 3.1.1* den Dämpfungsverlust in Glasfasern mit den Molekülresonanzen im Infrarot und elektronischen Resonanzen im Ultraviolett erklärt. Solche Resonanzen begründen nicht nur die besprochenen Verlustmechanismen, vielmehr tragen sie – aus Kausalitätsgründen des Materials – auch massgeblich zur Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl  $n(\lambda)$  bei. Für die Ausbreitung von

<sup>43</sup> In der Literatur ist für den *Dispersionsparameter* auch die Schreibweise  $M = \pm D$  gebräuchlich.

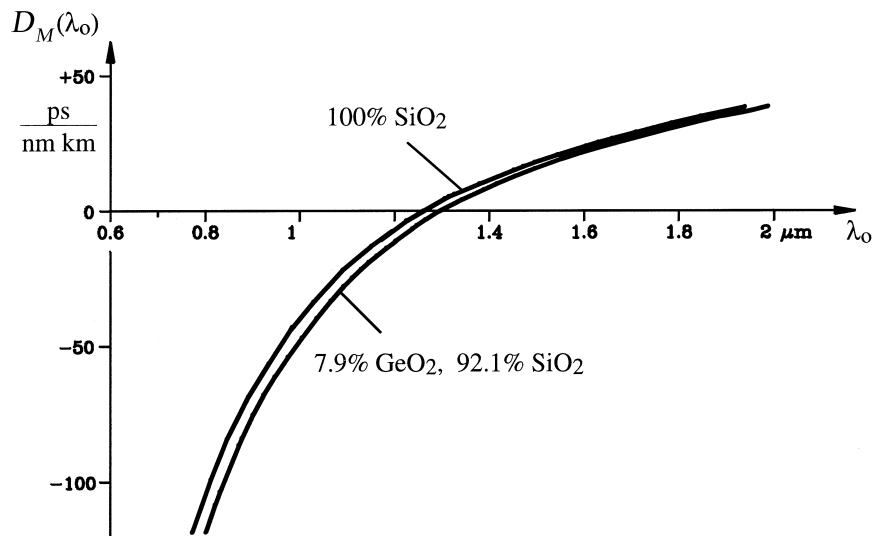


Fig.3.41: Materialdispersionsparameter  $D_M(\lambda_0)$  für die beiden Gläser  $\text{SiO}_2$  und  $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$ .

ebenen Wellen im homogenen Medium der Brechzahl  $n(\lambda)$  ergibt die Berechnung der *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  nach (3.195), wenn man für  $\beta \rightarrow k_0 \cdot n(\lambda)$  annimmt

$$\tau_g = -\frac{L}{c_0} \cdot \frac{\lambda_0^2}{2\pi} \cdot \frac{d(k_0 \cdot n(\lambda))}{d\lambda} = \frac{L}{c_0} \cdot \left( n - \lambda_0 \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right) = \frac{L}{c_0} \cdot N(\lambda) \quad (3.200).$$

Hierin ist  $N(\lambda)$  die wichtige *Gruppenbrechzahl*, die angibt, wie viel langsamer als im freien Raum sich die Leistung der Welle im (dispersiven) Glas ausbreitet

$$N = n + \omega_0 \cdot \frac{dn}{d\omega} = n - \lambda_0 \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (3.201).$$

Diese Grösse darf nicht mit dem *effektiven Brechungsindex*  $n_{\text{eff}}$  verwechselt werden. Gemäss (3.196) ergibt sich schliesslich für die gesuchte *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$

$$\delta\tau_g = \frac{d\tau_g}{d\lambda} \cdot \delta\lambda = \frac{L}{c_0} \cdot \frac{dN}{d\lambda} \cdot \delta\lambda = \frac{L}{c_0} \cdot \left( -\lambda_0 \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) \cdot \delta\lambda = D_M \cdot L \cdot \delta\lambda \quad (3.202)$$

worin man sofort den *Materialdispersionsparameter*  $D_M$  erkennen kann (siehe hierzu auch Fig.3.41)

$$D_M(\lambda_0) = \frac{1}{c_0} \cdot \frac{dN}{d\lambda} = -\frac{\lambda_0}{c_0} \cdot \frac{d^2n}{d\lambda^2} \quad (3.203).$$

## b) Wellenleiterdispersion

Wie aus *Fig.3.34* offensichtlich hervorgeht, ist der Eigenwert  $\beta$ , – d.h. die Mode selbst – auch bei konstanten Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  der Glasfaser stark wellenlängenabhängig. Diese, durch die Gestalt des Wellenleiters (bzw. durch das gestellte Eigenwertproblem) verursachte *Wellenleiterdispersion* soll im folgenden Abschnitt genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck drückt man  $\beta$  mit Hilfe der *normierten Phase B* aus und erhält unter Berücksichtigung von (3.194)

$$B \approx \frac{\beta - k_2}{k_1 - k_2} \quad \rightarrow \quad \beta \approx k_2 + B \cdot (k_1 - k_2) \approx k_2 \cdot (1 + B \cdot \Delta) \quad (3.204).$$

Ganz im Sinne der bisherigen Vorgehensweise charakterisieren wir die *Wellenleiterdispersion* auch hier in der Form der *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$ , was als ersten Schritt die Berechnung der *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  notwendig macht. Die *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  erhält man über die allgemeine Beziehung (3.195), wobei man für den Eigenwert  $\beta$  die Näherung (3.204) einsetzt

$$\tau_g = \frac{L}{c_0} \cdot \frac{d\beta}{dk_0} \approx \frac{L}{c_0} \cdot \frac{d}{dk_0} \{ k_2 + B \cdot (k_1 - k_2) \} \quad (3.205).$$

Um die Ableitung der geschweiften Klammer auf einfache Art berechnen zu können, müssen die folgenden Näherungen eingesetzt werden

$$\begin{aligned} \frac{dk_i}{dk_0} &= \frac{d(k_0 \cdot n_i)}{dk_0} = n_i + k_0 \cdot \frac{dn_i}{dk_0} = N_i \\ \frac{dB}{dk_0} &= \frac{dB}{dV} \cdot \frac{dV}{dk_0} \approx \frac{dB}{dV} \cdot \frac{V}{k_0} \\ \frac{d}{dk_0} \{ B \cdot (k_1 - k_2) \} &= \frac{dB}{dV} \cdot \frac{V}{k_0} \cdot (k_1 - k_2) + B \cdot (N_1 - N_2) \approx (N_1 - N_2) \cdot \frac{d(VB)}{dV} \end{aligned} \quad (3.206).$$

Der erste Ausdruck verweist lediglich auf eine andere Schreibweise der *Gruppenbrechzahl* aus (3.201), beim zweiten Ausdruck wird wegen  $dV/dk_0 \approx V/k_0$  die Wellenlängenabhängigkeit der *numerischen Apertur NA* vernachlässigt, und die dritte Näherung verweist auf die gute Übereinstimmung der Differenzen  $N_1 - N_2 \approx n_1 - n_2$ . Unter diesen Gesichtspunkten ergibt sich für die *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$

$$\tau_g \approx \frac{L}{c_0} \cdot \left\{ N_2 + (N_1 - N_2) \cdot \frac{d(VB)}{dV} \right\} \approx \frac{L \cdot n_2}{c_0} \cdot \left\{ 1 + \Delta \cdot \frac{d(VB)}{dV} \right\} \quad (3.207),$$

wobei im zweiten Term von (3.207) die *normierte Brechzahldifferenz*  $\Delta$  gemäss  $N_1 - N_2 \approx n_1 - n_2 \approx n_2 \cdot \Delta$  eingebracht wurde. Die einzige «eigenwertspezifische» Grösse im Ausdruck (3.207) für die *Gruppen-*

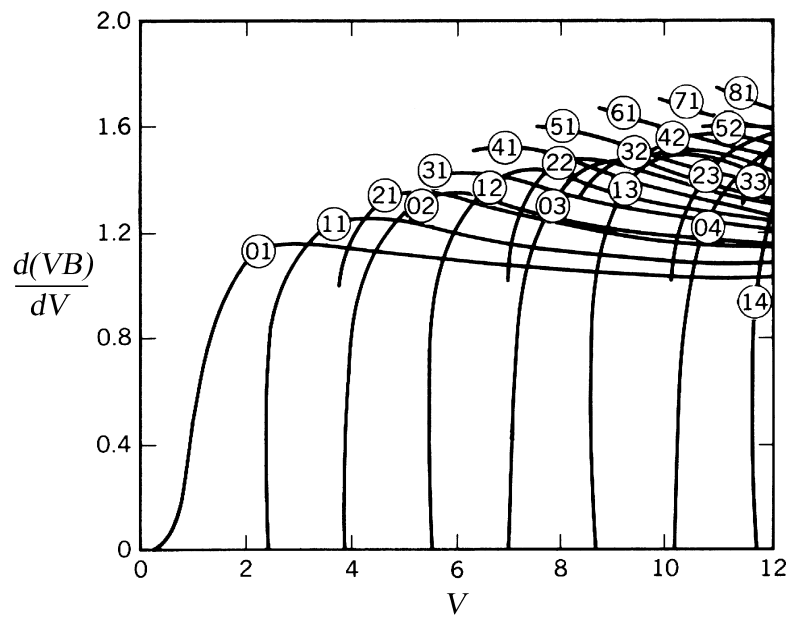


Fig.3.42: Das Verhalten von  $d(VB)/dV$  wurde anhand der normierten Dispersion der  $LP_{\ell p}$ -Modi aus Fig.3.40 für die schwachführende Stufenindexfaser berechnet.

laufzeit  $\tau_g$  ist  $d(VB)/dV$ . Die Grösse  $d(VB)/dV$  wird auch als *Modenlaufzeitfaktor* der Wellenleiterdispersion bezeichnet. Im Fall von  $LP_{\ell p}$ -Modi lässt sich der *Modenlaufzeitfaktor* auch analytisch angeben und wir schreiben (ohne Herleitung)<sup>44</sup>

$$\frac{d(VB)}{dV} = B \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot J_{\ell}(\xi_p)^2}{J_{\ell+1}(\xi_p) \cdot J_{\ell-1}(\xi_p)} \right) = 1 - \frac{\xi_p^2}{V^2} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot K_{\ell}(\eta_p)^2}{K_{\ell+1}(\eta_p) \cdot K_{\ell-1}(\eta_p)} \right) \quad (3.208).$$

Was hier sofort auffällt, ist die enge Verwandtschaft zum *confinement factor*  $\Gamma_{Kern}$  aus (3.189). Diese ist nicht zufällig und folgt auch einem intuitiv gut zugänglichen Argument: Wir können den *effektiven Brechungsindex* auch als gemittelten Index auffassen, indem wir das Modenprofil als «Verteilungsfunktion» betrachten, welche die Leistung der Welle entsprechend auf den Kern- und Mantelindex gewichtet aufteilt. Diese Betrachtung finden wir bestätigt, wenn wir nach alternativen Beziehungen zur Dispersion des Eigenwerts  $\beta$  suchen, wie z.B.

$$\frac{\beta}{k_0} \cdot \frac{d\beta}{dk_0} = n_1^2 \cdot \Gamma_{Kern} + n_2^2 \cdot \Gamma_{Mantel} \quad (3.209).$$

So wird in anderen Publikationen die *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  aus (3.209) hergeleitet, anstatt dem Vorgehen aus Fussnote<sup>43</sup> zu folgen. Das Verhalten des *Modenlaufzeitfaktors*  $d(VB)/dV$  ist in Fig.3.42 als Funktion der *normierten Frequenz*  $V$  abgebildet. Beim *Cutoff-Wert* von  $V$  für eine entsprechende  $LP_{\ell p}$ -Mode

<sup>44</sup> Die Herleitung berücksichtigt zum einen die *normierte Phase* (3.194) und den Ausdruck (3.165) in der Form von  $V^2 = \xi^2 + \eta^2$ , wobei die anfallende Ableitung  $d\xi/dV$  anhand der *charakteristischen Gleichung* (3.185) ermittelt wird. Die Herleitung erfordert einigen algebraischen Aufwand und wird daher weggelassen (nicht nur hier!).

ist  $d(VB)/dV = 0$  falls  $\ell = 0, 1$  gilt. Diese Wellen beginnen beim *Cutoff* somit als achsenparallele ebene Wellen, deren *minimale Gruppenlaufzeit*  $\tau_{gmin}$  gerade der Laufzeit im Mantelmedium entspricht. Bei *Cutoff*-Grenzwerten für  $\ell \geq 2$  gilt hingegen der Zusammenhang  $d(VB)/dV = 2 \cdot (1 - 1/\ell)$ , was übrigens auch in der Fig.3.42 zu sehen ist. Solche Wellen sind an der *Cutoff*-Grenze (strahlenoptisch gesprochen: wegen ihrer spiralförmigen Ausbreitung) immer langsamer und haben ungefähr ab  $\ell \geq 5$  dort ihre längste Laufzeit. Bei Werten von  $V$  weit oberhalb des *Cutoff* konvergiert  $d(VB)/dV \rightarrow 1$ , d.h. die *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g = (L/c_0) \cdot N_1$  wird lediglich noch durch den *Gruppenindex* des Kernmediums bestimmt. Die *maximale Gruppenlaufzeit*  $\tau_{gmax}$  für hohe Modenordnungen entspricht (ab  $\ell \geq 5$ ) gerade dem Fall der längsten Laufzeit und kann anhand von (3.207) abgeschätzt werden, indem man die entsprechenden *Cutoff*-Werte einsetzt. Es ergibt sich hierfür  $\tau_{gmax} = N_2 \cdot (L/c_0) \cdot \{1 + 2\Delta \cdot (1 - 1/\ell)\}$ .

Die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  erhält man laut (3.196) ganz einfach durch nochmaliges Ableiten der *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  aus (3.207)

$$\delta\tau_g = \frac{d\tau_g}{d\lambda} \cdot \delta\lambda = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{L}{c_0} \cdot \left\{ N_2 + (N_1 - N_2) \cdot \frac{d(VB)}{dV} \right\} \right) \cdot \delta\lambda \quad (3.210).$$

Die entsprechende Ableitung der geschweiften Klammer erfolgt unter Berücksichtigung zweier Näherungsschritte. Zum einen wird mit  $dV/d\lambda \approx -V/\lambda$  die Wellenlängenabhängigkeit der numerischen *Apertur*  $NA$  vernachlässigt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left\{ (N_1 - N_2) \cdot \frac{d(VB)}{dV} \right\} &= \frac{d}{d\lambda} (N_1 - N_2) \cdot \frac{d(VB)}{dV} + (N_1 - N_2) \cdot \frac{d^2(VB)}{dV^2} \cdot \frac{dV}{d\lambda} \approx \\ &\approx -(N_1 - N_2) \cdot \frac{d^2(VB)}{dV^2} \cdot \frac{V}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (3.211)$$

und zum anderen nehmen wir an, dass sich Kern und Mantel nicht nur in der Brechzahl wenig unterscheiden, sondern sich auch in ihrer Materialdispersion ähneln. Somit wird die Differenz der *Gruppenbrechzahlen* eine Konstante, was wir mit  $d\{N_1 - N_2\}/d\lambda \rightarrow 0$  berücksichtigen. Die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  lautet dann

$$\delta\tau_g = \frac{d\tau_g}{d\lambda} \cdot \delta\lambda = L \cdot \left\{ \frac{1}{c_0} \cdot \frac{dN_2}{d\lambda} - \frac{N_1 - N_2}{c_0 \cdot \lambda_0} \cdot V \cdot \frac{d^2(VB)}{dV^2} \right\} \cdot \delta\lambda = (D_M + D_W) \cdot L \cdot \delta\lambda \quad (3.212),$$

worin man sowohl einen Parameter für die Materialdispersion  $D_M$ , als auch den Ausdruck der *Wellenleiterdispersion* wiedererkennt, deren Parameter  $D_W$  wir abschliessend nochmals ausschreiben:

$$D_W = - \frac{N_1 - N_2}{c_0 \cdot \lambda_0} \cdot V \cdot \frac{d^2(VB)}{dV^2} \approx - \frac{n_2 \cdot \Delta}{c_0 \cdot \lambda_0} \cdot V \cdot \frac{d^2(VB)}{dV^2} \quad (3.213).$$

Wie unschwer aus Fig.3.43 zu erkennen ist, sind die Signalverzerrungen durch die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  für *LP-Modi* knapp oberhalb des *Cutoff* am grössten. Für die *LP<sub>01</sub>*-Mode gilt der Bereich  $2 < V < 2.405$  daher als optimal. In einer früheren Argumentationsweise<sup>45</sup> hatten wir diesen Arbeitsbereich mit der optimalen (stationären) Feldkonzentration im Kernmedium begründet. Über den alternativen Zugang (3.209) zur Dispersion des Eigenwerts  $\beta$  können die beiden Betrachtungsweisen nun ineinander übergeführt werden.

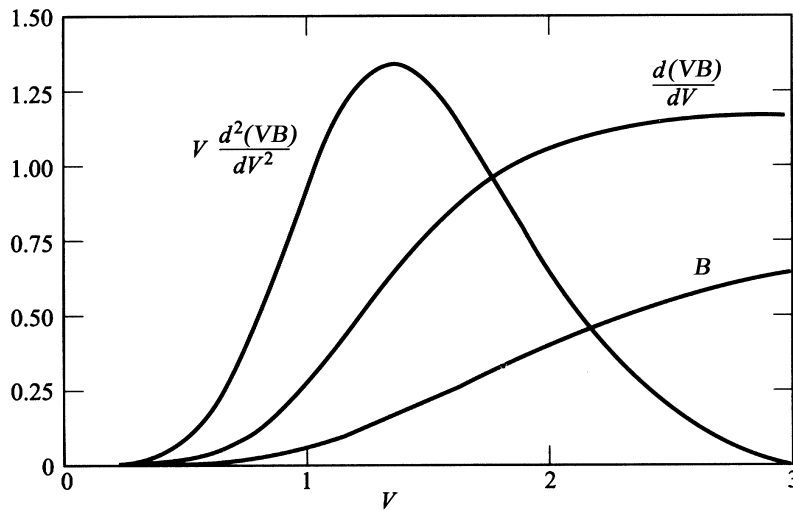


Fig.3.43: Darstellung der relevanten Dispersionsparameter  $V \cdot d^2(VB)/dV^2$ ,  $d(VB)/dV$  und  $B$  als Funktion der normierten Frequenz  $V$  für die *LP<sub>01</sub>*-Mode.

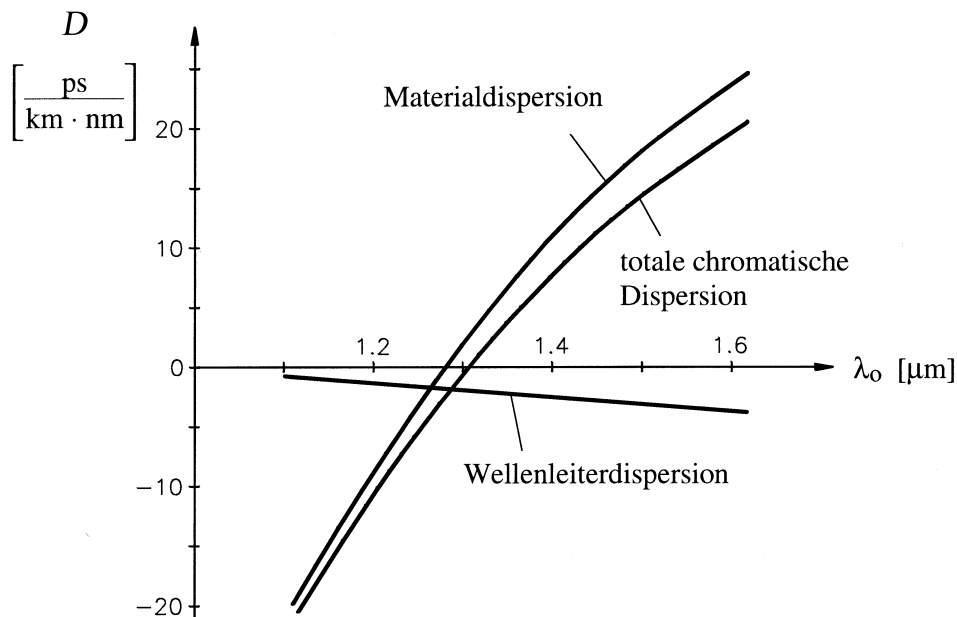
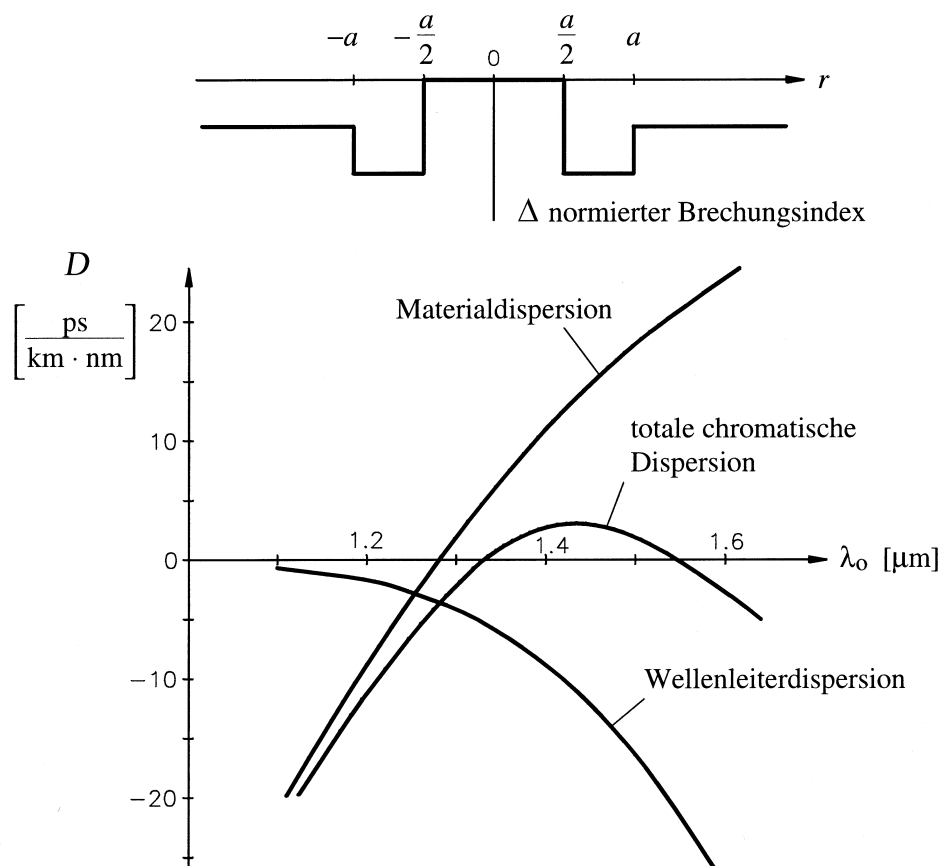


Fig.3.44: Die Anteile zum totalen Dispersionsparameter der Stufenindexfaser im Vergleich. In dieser Darstellung sind die Dispersionsparameter gemäss der Definition aus Fussnote<sup>42</sup> eingetragen:  $D \rightarrow -D$ .

<sup>45</sup> Siehe Abschnitt 3.7.2 im Text unterhalb Fig.3.36.

Der für die *Wellenleiterdispersion* relevante Parameter  $V \cdot d^2(VB)/dV^2$  heisst *Dispersionsfaktor* und weist übrigens um  $V \approx 3$  eine Nullstelle auf, um nach einem negativen Extremum bei  $V \approx 4.95$  von der negativen Seite her dann asymptotisch gegen 0 zu konvergieren. Dieses Verschwinden des *Dispersionsfaktors* weit oberhalb des *Cutoff*-Werts von  $V$  lässt auch hier erkennen, dass die Laufzeitdispersion der Mode dann nur noch von der *Materialdispersion* bestimmt wird.

Die Darstellung aus *Fig.3.44* zeigt deutlich, dass der Anteil der *Materialdispersion* denjenigen der *Wellenleiterdispersion* stark dominiert. Bei einer Wellenlänge knapp oberhalb von  $\lambda_0 = 1300$  nm löschen sich beide Dispersionsmechanismen gegenseitig aus und der so kompensierte *Dispersionsparameter* weist dort eine entsprechende Nullstelle auf. Leider liegt das Dämpfungsminimum bei den verwendeten Gläsern, wie in *Fig.3.3* des einleitenden *Abschnitts 3.3.1* gezeigt wurde, um  $\lambda_0 = 1550$  nm. Gewünscht wäre somit eine Faser, deren Dispersionsnullstelle und Dämpfungsminimum entweder zusammenfallen, oder deren Dispersionsverhalten über weite Strecken zwischen 1300 nm und 1600 nm flach oder möglichst konstant Null verläuft. Der bereits angedeutete Kompensationsmechanismus kann bei Stufenindexfasern durch geeignete Wahl der *normierten Brechzahldifferenz*  $\Delta$  derart beeinflusst werden, dass die Dispersionsnullstelle mit dem Dämpfungsminimum in die gewünschte Übereinstimmung gerät. Man spricht dann von *dispersionskompensierten Fasern*, bzw. von *dispersion shifted fibers*. Bei solchen Fasern sind jedoch grosse Brechzahldifferenzen  $\Delta$  bei kleinen Radien  $a$  notwendig, woraus hohe Zusatzverluste resultieren, offensichtlich auch infolge mechanischer Spannungen. Das Einbringen einer weiteren Mantelschicht bei einwelligen Stufenindexfasern bewirkt eine starke Zunahme der Wellenleiterdispersion, was wiederum in einer zweiten Nullstelle im *Dispersionsparameter*  $D$  führt. Die *Fig.3.45* beschreibt eine derartige Situation.



3.45: Faserquerschnitt (oben) und resultierender Dispersionsparameter  $D$  (unten) einer speziellen Single-Mode-Faser mit breitbandiger Dispersionskompensation (dispersion flattened fiber).

Die zweite Nullstelle im spektralen Verlauf von  $D$  stellt ein erster Schritt in Richtung breitbandiger Dispersionskompensation dar. Weitere Schritte sind in Fig.3.46 angedeutet. Unter diesen Gesichtspunkten ähnelt das Vorgehen aus Fig.3.46 übrigens stark einem (optischen) Filterentwurf, wo mittels abgestuften Brechzahl- oder Impedanzsektionen ein spektrales Verhalten «geformt» werden soll. Abgesehen von dieser Strukturierung des Mantelmediums kann Dispersionskompensation aber auch *extern*, d.h. mit Hilfe zwischengeschalteter Bauelemente – sogenannter *Dispersionskompensatoren* – erfolgen, was wiederum auf einen (optischen) Filterentwurf für einen vorgegebenen Phasengang hinaus läuft.

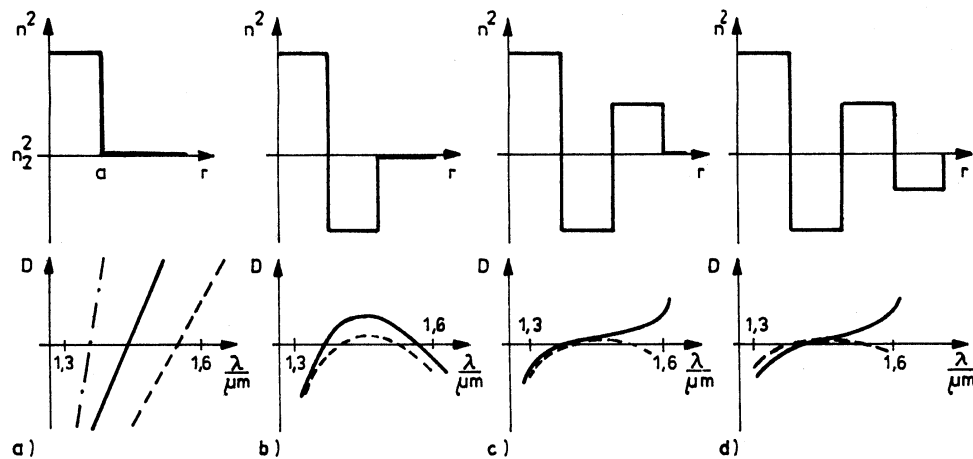


Fig.3.46: Möglichkeiten zur Verbesserung des Dispersionsverhaltens von Single-Mode-Fasern durch breitbandige Dispersionskompensation: (a) dispersion shifted fiber, Stufenindexprofil (b) dispersion flattened fiber, W-Profil, (c) Dreifachmantelprofil, (d) Vierfachmantelprofil oder Quadrupelprofil. Die strichpunktierte Linie steht für die Materialdispersion, die fett ausgezogene Linie für einen realistischen Fall und die gestrichelte Linie markiert das durch die gegebenen Materialverhältnisse maximal erreichbare Dispersionsverhalten.

### c) Polarisationsdispersion

Unterschiedlich polarisierte Wellen können sich verschieden schnell entlang der Faser ausbreiten und leisten mit der sogenannten *Polarisationsdispersion* bzw. der *polarization mode dispersion (PMD)* einen weiteren Beitrag zur Faserdispersion. Dieser limitierende Effekt tritt vor allem bei sehr schneller optischer Datenübertragung über lange Distanzen in Erscheinung. *Polarisationsdispersion* kann einerseits durch die in Abschnitt 3.6 angesprochenen *Formdoppelbrechung* hervorgerufen werden, andererseits liefern auch mechanische *Verspannungen* und *Dichteveränderungen* im Faserquerschnitt einen wesentlichen Beitrag zur Doppelbrechung und damit zur polarisationsselektiven Wellenausbreitung. Letztere können bereits bei leichter Verdrehung der Glasfaser entstehen, woraus wir schließen müssen, dass *variierende Doppelbrechung* entlang jeder Faserstrecke auftritt. Im Gegensatz zur *chromatischen Dispersion* der Faser, die aus den stationären Mechanismen, wie der *Wellenleiter-* und *Materialdispersion* besteht, ist die *Polarisationsdispersion* ein *stochastisches* Phänomen, welches sich an zufälligen (und oft auch zeitlich wechselnden) Orten der Faser manifestiert. Mögliche Einflüsse auf den Feldzustand der Mode sind in Fig.3.47 zusammengefasst. Wir können die *PMD* anhand des Polarisationszustands der Mode beschreiben, indem wir die Dispersion bezüglich zweier *orthogonalen* Polarisationsrichtungen analysieren. Die *Laufzeitdifferenz*  $\delta\tau_{pol}$ , die wir unter solchen Bedingungen entlang einer Faser der *Länge*  $L$  feststellen, ist somit ein Mass für die *Polarisations-*



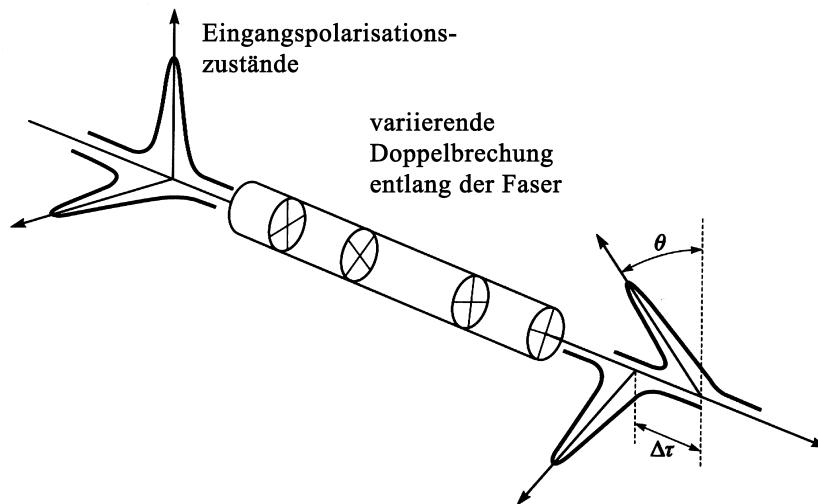


Fig.3.47: Schematische Darstellung der Doppelbrechungseffekte als Beiträge zur PMD.

dispersion (PMD) und wir schreiben die entsprechende Gruppenlaufzeitvariation  $\delta\tau_{pol}$  gemäss

$$\delta\tau_{pol} = L \cdot \left| \frac{1}{v_{gx}} - \frac{1}{v_{gy}} \right| \tag{3.214}$$

Um dem stochastischen Charakter der PMD gerecht zu werden, analysiert man vorzugsweise den Erwartungswert einer solchen Gruppenlaufzeitvariation  $\langle \delta\tau_{pol} \rangle$ , was wir mit dem Ausdruck

$$\langle \delta\tau_{pol} \rangle = D_{PMD} \cdot \sqrt{L} \tag{3.215}$$

angeben. Der Polarisationsdispersionsparameter  $D_{PMD}$  ist ein Durchschnittswert und liegt in der Grössenordnung von 0.1...1 ps/ $\sqrt{\text{km}}$ . Abhilfe gegen die Polarisationsdispersion schaffen die sogenannten polarisationserhaltenden Fasern. Typische Querschnitte sind in Fig.3.48 abgebildet.

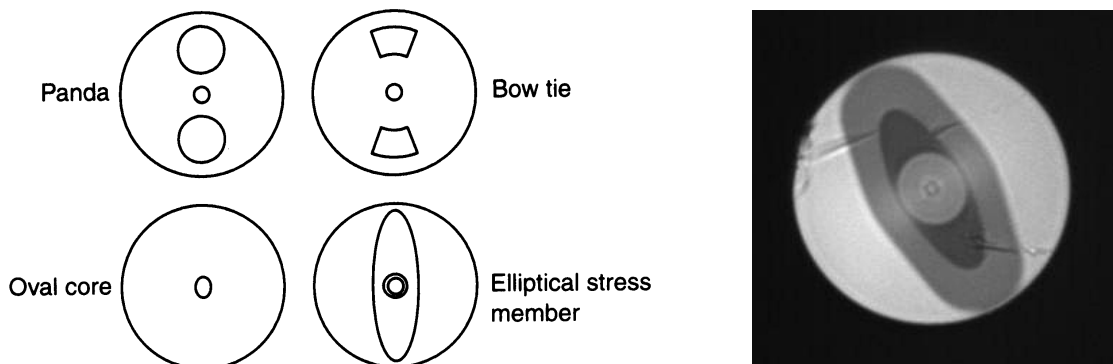


Fig.3.48: Diverse polarisationserhaltende Faserquerschnitte mit ausgeprägter Polarisationsachse.

Bei *polarisationserhaltenden Fasern* sind grundsätzlich zwei Ausführungen denkbar. Die eine versucht die *Isotropie* der Gruppengeschwindigkeit bezüglich allen Polarisationsrichtungen herbeizuführen, was den Ausdruck (3.214) für  $\delta\tau_{pol}$  auf Null bringen soll. Solche Fasern heissen *low birefringence fibers*. Der andere Ansatz macht das Gegenteil, indem der Faserquerschnitt eine bereits ausgeprägte Polarisationsrichtung aufweist. Diese Fasertypen (*high birefringence fibers*) entsprechen gerade denjenigen aus Fig.3.48. Durch den stark *anisotropen*<sup>46</sup> Faserquerschnitt wird  $\delta\tau_{pol}$  zwar relativ gross, doch wird gleichzeitig auch angenommen, dass die Modenfelder bezüglich den beiden orthogonalen Polarisationsachsen unterschiedliche Verlustdämpfungen hervorrufen, was auf das Gesamtsystem bezogen ein «weiches» Modenselektionskriterium darstellt.

#### d) Profildispersion

In unseren bisherigen Analysen zur Wellenleiterdispersion haben wir die Wellenlängenabhängigkeit des Brechzahlprofils jeweils vernachlässigt. Mit der *Profildispersion* adressieren wir den Umstand, dass das Brechzahlprofil  $n(\mathbf{r}, \phi)$  der Faser eigentlich selbst von der Wellenlänge abhängt und man dafür besser das Profil der Gruppenbrechzahl  $N(\mathbf{r}, \phi)$  in Betracht ziehen müsste. Vereinfacht ausgedrückt gilt

$$n(\vec{r}, \phi) \rightarrow N(\vec{r}, \phi) \Rightarrow \Delta \rightarrow \Delta(\lambda_0) \Rightarrow NA \rightarrow NA(\lambda_0) \quad (3.216).$$

Wegen des wellenlängenabhängigen Brechzahlprofils  $N(\mathbf{r}, \phi)$  sind die *Randbedingungen* des Eigenwertproblems somit auch wellenlängenabhängig und fügen dem gesamten Eigenwertproblem einen weiteren Grad an Nichtlinearität zu. Die Wirkung auf den resultierenden Eigenwert  $\beta$  ordnen wir der *Profildispersion* zu. *Profildispersion* tritt vor allem bei mehrwelligen Gradientenfasern in Erscheinung.

#### e) Modale Dispersion

Sind Fasern so dimensioniert, dass bei gegebener Wellenlänge  $\lambda_0$  gleich mehrere Modi existieren können, dann wird sich die Signalleistung mit grosser Wahrscheinlichkeit auf diese verschiedenen Modi aufteilen. Ein Blick auf das Diagramm in Fig.3.42 genügt um festzustellen, dass für ein fixes  $V$  entsprechend viele *Modenlaufzeitfaktoren* abgelesen werden können, ein jeder steht für die individuelle *Gruppenlaufzeit*  $\tau_g$  der einzelnen Mode. Derart unterschiedliche Laufzeiten werden am anderen Ende der Faser eine sehr starke Signalverzerrung bewirken. Die *modale Dispersion* (bzw. *Modendispersion* oder *Intermodendispersion*) richtet sich in der Regel nach dem Laufzeitunterschied zwischen der schnellsten (Grundwelle) und der langsamsten Welle (höchste Modenordnung), was sich auch durch

$$\delta\tau_{modal} = \max(\{\tau_{g,i}\}) - \min(\{\tau_{g,i}\}) \approx \tau_g(\max(p)) - \tau_g(\min(p)) \quad (3.217)$$

ausdrücken lässt. Die linke Seite bezieht sich auf die Menge aller Gruppenlaufzeiten  $\{\tau_{g,i}\}$  und gilt allgemein. Die rechte Seite gilt strenggenommen nur für  $LP_{0p}$ -Modi.

<sup>46</sup> Die *Anisotropie* des Faserquerschnitts wird in der Regel durch verspannte Domänen im Kerngebiet hervorgerufen. Damit die Faser überhaupt polarisationserhaltend arbeiten kann, muss die resultierende Form- bzw. Spannungsdoppelbrechung stärker sein als die statistisch entlang der Faser auftretenden Doppelbrechungseffekte.

f) Abschliessende Übersicht zur Dispersion

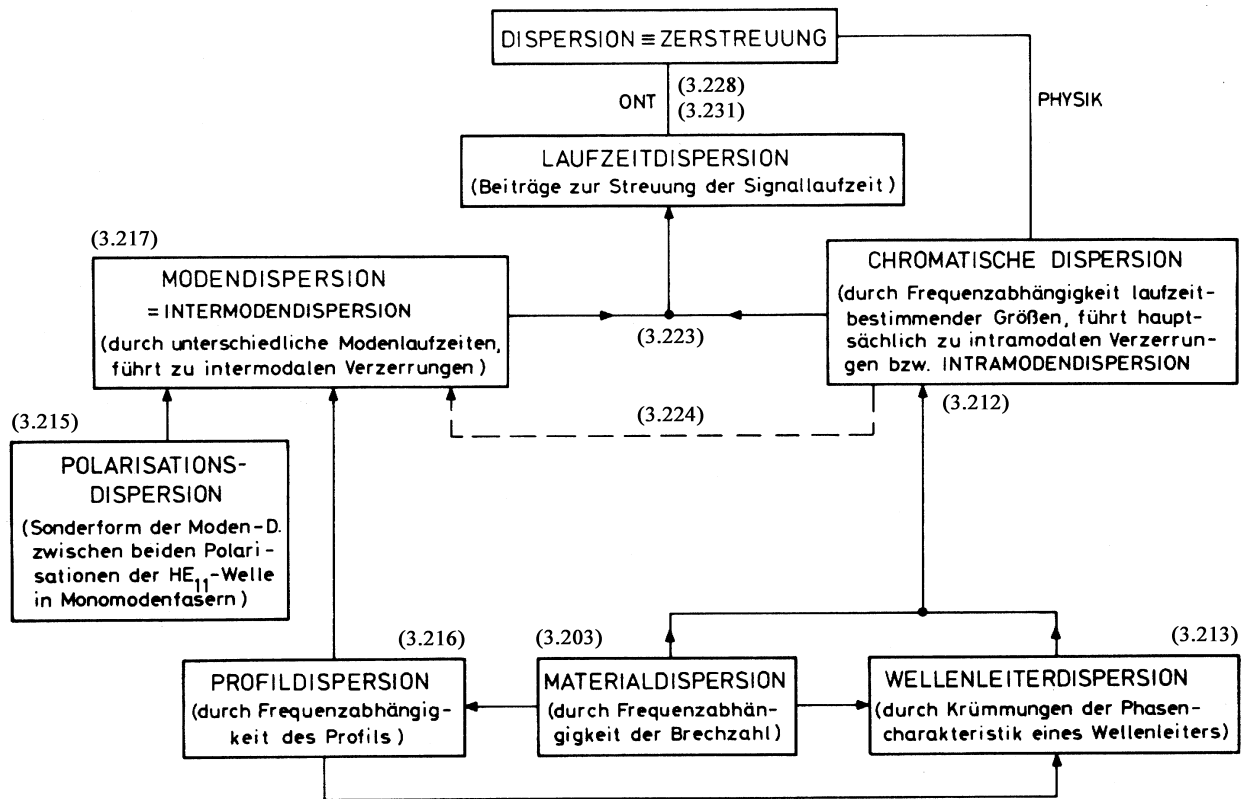


Fig.3.49: Übersicht der Dispersionsmechanismen in Glasfasern und optischen Wellenleiterstrukturen. Bei der physikalischen Betrachtung interessieren vor allem die strukturspezifischen Dispersionsbeiträge, wohingegen in der optischen Nachrichtentechnik (ONT) sowohl physikalische als auch systemspezifische Dispersionsmechanismen analysiert werden.

3.7.4 Systemimplikationen der Dispersion

Im vorhergehenden *Abschnitt 3.7.3* wurden die wesentlichsten Beiträge zur *Dispersion* zusammengetragen und erläutert. Die Systematik unserer Betrachtungen sei in *Fig.3.49* als Übersicht nochmals zusammengefasst. Allen Dispersionsanteilen gemeinsam ist die Darstellung der resultierenden Signalverzerrung in der Form einer *Laufzeitvariation*  $\delta\tau$ , welche bei der chromatischen Dispersion gerade durch die *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  wiedergegeben wird. Der nächste Schritt besteht nun darin, die Auswirkungen der *Laufzeitvariation*  $\delta\tau$  auf das Systemverhalten einer optischen Datenübertragungsstrecke abzuschätzen, indem wir die einzelnen Beiträge zur *Laufzeitvariation*  $\delta\tau$  in korrekter Weise zu einem gesamten Verzerrungseffekt verrechnen. Sind die zu  $\delta\tau$  beitragenden Mechanismen statistisch unabhängig voneinander (was jeweils im Einzelfall zu prüfen ist!), dann gilt für den Erwartungswert der *Laufzeitvariation*  $\delta\tau$  (dies ist eine effektive Systemgrösse!) die allgemeine Beziehung

$$\langle \delta\tau \rangle^2 = \sum_i \langle \delta\tau_i \rangle^2 \tag{3.218},$$

wobei der Laufindex  $i$  über alle in Frage kommenden (d.h. die statistisch unabhängigen) Verbreiterungsmechanismen läuft. Gerade bei der *chromatischen Dispersion*, wo die zutragenden Mechanismen, namentlich die *Wellenleiter-* und *Materialdispersion*, beide vom gleichen *spektralen Gehalt*  $\delta\lambda$  des optischen Quellensignals abhängen, gilt die Annahme der statistischen Unabhängigkeit nicht. Aus diesem Grund dürfen sie nur als einen einzigen Verzerrungsmechanismus – nämlich als die *chromatische Dispersion*, wie es in (3.212) mit  $D = D_M + D_W$  bereits vorweggenommen ist – behandelt werden. Eine erste Abschätzung des maximalen *Bitraten-Längen-Produkts*  $BL$  kann bereits anhand von  $\langle \delta\tau \rangle$  erfolgen, was sich bei der «einfachen» *chromatischen Dispersion* der Faser in der Bedingung

$$B \cdot \langle \delta\tau \rangle = BL \cdot |D| \cdot \delta\lambda < 1 \quad (3.219)$$

anschreiben lässt. Der *spektrale Gehalt*  $\delta\lambda$  beinhaltet sowohl die Bandbreite des Lichtträgers als auch den Anteil der Modulationsbandbreite des optischen Datensignals. Wir haben die *chromatische Dispersion* in diesem Fall als «einfachen» Effekt benannt. Für ein gegebenes Eigenwertspektrum  $\beta(\omega)$  lässt sich dieses für kleine optische Bandbreiten  $\delta\omega$  an der Stelle  $\omega_0$  als Taylorreihe entwickeln

$$\beta(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \cdot (\omega - \omega_0)^n \approx \beta_0 + \beta_1 \cdot \delta\omega + \frac{1}{2} \beta_2 \cdot \delta\omega^2 + \frac{1}{6} \beta_3 \cdot \delta\omega^3 + \dots \quad (3.220),$$

worin wir gemäss (3.195)  $\beta_1 = 1/v_g$ , laut (3.197)  $\beta_2$  als *GVD-Parameter* (group velocity dispersion parameter) und die weiteren  $\beta_n$  ( $n > 2$ ) als Dispersionsbeiträge *höherer Ordnung* identifizieren können. Im Fall von *dispersionskompensierten Fasern* tragen demnach nur die höheren Ordnungen zur *chromatischen Dispersion* bei. Man definiert für diesen Fall einen neuen systemrelevanten Parameter: die *Dispersionssteilheit*  $S = dD/d\lambda$

$$S = \beta_3 \cdot \left( \frac{2\pi c_0}{\lambda_0^2} \right)^2 + \beta_2 \cdot \frac{4\pi c_0}{\lambda_0^3} = \beta_3 \cdot \left( \frac{2\pi c_0}{\lambda_0^2} \right)^2 - \frac{2 \cdot D}{\lambda_0} \quad (3.221).$$

In der Literatur wird  $S$  auch *differentieller Dispersionsparameter* oder *2.-Ordnungs-Dispersionsparameter* genannt. Die Grösse  $S$  ist viel kleiner als  $D$  und beträgt typischerweise  $0.05 \text{ ps}/(\text{km} \cdot \text{nm}^2)$ . Für das *Bitraten-Längen-Produkts*  $BL$  ergibt sich, analog zu (3.219)

$$BL \cdot |S| \cdot \delta\lambda^2 < 1 \quad (3.222),$$

da  $S \cdot \delta\lambda$  vom Typ *Dispersionsparameter*  $D$  ist. Die allgemeine Behandlung der Signalverzerrungen durch *chromatische* und die *modale Dispersion* erfolgt auf der Ebene der *Impulsverzerrung* von *gaussförmig* idealisierten Enveloppensignalen. Für die Umrechnung zwischen *technischen* Puls- und Bandbreitemasse in die entsprechenden *Standardabweichungen* sei nochmals auf die Fussnote<sup>41</sup> verwiesen. Ganz im Sinne von (3.218) beträgt die Standardabweichung der Impulsverbreiterung  $\sigma_t$

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_{t, \text{intermodal}}^2 + \sigma_{t, \text{intramodal}}^2} \quad (3.223).$$

Im Fall der *intermodalen Dispersion*<sup>47</sup> lassen sich die Beiträge zur Impulsverbreiterung, z.B. bei mehrwelligen Fasern wo viele Modi angeregt werden, anhand einer allgemeineren Beziehung angeben, wie wir es in (3.217) getan haben. Die Begründung liegt darin, dass die mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten propagierenden *gaussförmigen* Signalenveloppen sich am Ende der Faser zu einem Signal überlagern werden, welches unter Umständen keinen *gaussförmigen* Zeitverlauf mehr aufweisen wird, was einer einfachen Definition der Impulsbreite zuwiderläuft. In Bezug auf die Menge aller Modenlaufzeiten  $\{\tau_{g,i}\}$  schreibt man daher

$$\sigma_{t,intermodal} = \sqrt{\langle \tau_g^2 \rangle - \langle \tau_g \rangle^2} \quad (3.224).$$

Die beiden Erwartungswerte berechnen sich bei solchen mehrwelligen Fasern gemäss

$$\langle \tau_g^2 \rangle = \sum_{\ell,p} \frac{P_{\ell,p} \cdot \tau_g^2(\ell,p)}{N} \quad \langle \tau_g \rangle = \sum_{\ell,p} \frac{P_{\ell,p} \cdot \tau_g(\ell,p)}{N} \quad (3.225),$$

mit  $P_{\ell,p}$  für die Leistung in der geführten  $LP_{\ell p}$ -Mode und  $N$  für die Modenanzahl. Die *intramodalen* Dispersionsbeiträge entsprechen

$$\sigma_{t,intramodal} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \langle \delta\tau \rangle \quad (3.226),$$

wobei  $\langle \delta\tau \rangle$  unter Berücksichtigung von (3.218) aus den *intramodalen Laufzeitvariationen*  $\delta\tau$  berechnet wird<sup>48</sup>.

## a) Die Glasfaser als lineares Übertragungssystem

Bis anhin haben wir uns vor allem mit den ursächlichen *Mechanismen* von dispersiven Signalverzerrungen auseinandergesetzt und die Glasfaser wohl eher in der Rolle einer «Täterin» beurteilt. In den folgenden Abschnitten wechseln wir den Blickwinkel und konzentrieren uns vermehrt auf die «Opfer», d.h. auf die übertragenen optischen Signale. Die Glasfaser der Länge  $L$  wird in diesem Kontext lediglich noch als lineares Übertragungssystem aufgefasst, dessen *Übertragungsfunktion*  $H(\omega)$  mit Hilfe der Beziehung (3.220) für  $\beta(\omega)$  wie folgt angegeben werden kann

$$H(\omega) = e^{-i\beta(\omega)L} \simeq e^{-i(\beta_0 + \beta_1 \cdot \delta\omega + \frac{1}{2}\beta_2 \cdot \delta\omega^2 + \frac{1}{6}\beta_3 \cdot \delta\omega^3 + \dots) \cdot L} \quad (3.227).$$

Die Grösse  $\delta\omega$  bezeichnet hier die Abweichung von der Trägerfrequenz  $\omega - \omega_0$ . Wie bereits erörtert

<sup>47</sup> *Intermodale Dispersion* heisst auch *modale Dispersion* oder einfach *Modendispersion*.

<sup>48</sup> Diese Schreibweise impliziert eine Berechnung von  $\langle \delta\tau \rangle$  unter Verwendung der *technischen* Bandbreite  $\delta\lambda$ . Andernfalls ist der Vorfaktor  $(2\pi)^{-1/2}$  in (3.226) wegzulassen.

wurde, begrenzt man die Analyse der linearen Signalverzerrung auf die Dispersionsbeiträge zweiter Ordnung (im Fall von *dispersionskompensierten Fasern* werden noch Beiträge dritter Ordnung hinzugezogen). Unter diesem Gesichtspunkt besitzen Glasfasern eine «gaussähnliche» Übertragungsphase<sup>49</sup>, was wiederum unserer Signalanalyse mittels *gaussförmigen* Signalenveloppen  $a(t)$  wesentlich entgegenkommt. Bei der Systembetrachtung befassen wir uns also mit intensitätsmodulierten Enveloppensignalen und im speziellen mit *gaussförmig* amplitudemodulierten optischen Impulsen der Form

$$\begin{aligned}
 s_1(t) &= s_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}} \cdot e^{i\omega_0 t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} S_1(\omega) = s_0 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t \cdot e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_{\omega S}^2}} \\
 s_1(t) &= a(t) \cdot e^{i\omega_0 t} \xrightleftharpoons[F^{-1}]{F} S_1(\omega) = A(\omega - \omega_0)
 \end{aligned}
 \tag{3.227}$$

woraus wir nach Ausführung der *Fourier-Transformation* sehen, dass  $\sigma_{\omega S} = 1/\sigma_t$  gelten muss. In dieser Darstellung wird mit  $e^{i\omega_0 t}$  ein idealer, harmonischer Träger angenommen, dessen Spektrum  $2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$  beträgt. In Realität weisen (Licht-)Träger  $S_0(\omega - \omega_0)$  aber meistens eine endliche Bandbreite  $\sigma_{\omega 0}$  auf. Wie bereits früher gesagt wurde hängt das *Ausgangssignal* einer Glasfaser stark vom *spektralen Gehalt*  $\sigma_\lambda$  des modulierten Eingangssignals ab. Aus Gründen der «Kompatibilität» wird der *spektrale Gehalt* bis auf Widerruf sowohl für den Träger als auch für das Signal auf der Basis von  $\sigma_\omega$  berechnet, was mit Hilfe der Relation  $\sigma_\omega = \{(2\pi \cdot c_0)/\lambda_0^2\} \cdot \sigma_\lambda$  auf einfache Art geschehen kann. Für die weitere Analyse der (wellenlängen- bzw. frequenzdispersiv) verzerrten Signalübertragung betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle: 1) *Schmalbandiger* Lichtträger, d.h.  $\sigma_{\omega 0} \ll \sigma_{\omega S}$ , wobei der Träger gegebenenfalls als *kohärent* (d.h. als harmonische Welle) aufgefasst werden kann; 2) *Breitbandiger* Lichtträger, d.h.  $\sigma_{\omega 0} \gg \sigma_{\omega S}$ , wobei  $\sigma_{\omega 0}$  die Bandbreite des *inkohärenten* bzw. *teilweise kohärenten* Lichtträgers darstellt und  $\sigma_{\omega S}$  für die Bandbreite des Modulationssignals steht.

### b) Schmalbandiger (kohärenter) Lichtträger

Hier gilt die Bedingung  $\sigma_{\omega 0} \ll \sigma_{\omega S}$ , d.h. der *spektrale Gehalt* des optischen Signals ist vor allem durch die Signalbandbreite  $\sigma_{\omega S}$  bestimmt. Der trägermodulierte Eingangsimpuls  $s_1(t)$  hat somit eine zeitliche Standardabweichung (Pulsdauer) von  $\sigma_t = 1/\sigma_{\omega S}$ . Anhand des Ausgangssignals  $S_2(\omega) = S_1(\omega) \cdot H(\omega)$  erkennen wir sofort (und bei genauerer Betrachtung der Herleitung aus *Anhang H*), dass dieses ebenfalls *gaussförmig* ist, nun aber eine gegenüber  $\sigma_t$  zeitlich gedehnte Pulsdauer  $\sigma'_t$  aufweist

$$\boxed{\sigma'_t = \sqrt{\sigma_t^2 + \left(\frac{L}{\sigma_t} \cdot \beta_2\right)^2} = \sqrt{\sigma_t^2 + \left(\frac{L}{\sigma_t} \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2}\right)^2}}
 \tag{3.228}$$

Die Impulsverbreiterung bei der optischen Übertragung hängt, einerseits vom spektralen Gehalt des Eingangsimpulses ab (denn es gilt ja  $\sigma_t = 1/\sigma_{\omega S}$ ) und andererseits von der Länge der Faser und von der «Nichtlinearität» des Phasenbelag-Spektrums  $\beta(\omega)$ . Beim Ausgangsimpuls wird die Impulshöhe um  $\sigma_t/\sigma'_t$  reduziert und die zugehörige Bandbreite beträgt  $\sigma'_\omega = (\sigma_t \cdot \sigma_{\omega S})/\sigma'_t$ . In der Praxis sind die wenigsten Lichtträger kohärent. Die in *Anhang H* vorgestellte Herleitung muss daher entsprechend modifiziert werden.

<sup>49</sup> Das Prädikat «gaussähnlich» bezieht sich lediglich auf die Form der relevanten  $\omega$ -Abhängigkeit von  $\arg\{H(\omega)\}$ .

### c) Breitbandiger (inkohärenter) Lichtträger

Lichtquellen weisen schon im unmodulierten Zustand relativ breite Spektren auf, so hat z.B. ein preisgünstiger Halbleiterlaser bei 1300 nm eine Linienbreite von ungefähr 5 nm, was einer Bandbreite von 890 GHz entspricht. Wir schreiben deshalb  $\sigma_{\omega 0} \gg \sigma_{\omega S}$ , wobei  $\sigma_{\omega 0}$  bzw.  $\sigma_{\lambda 0}$  die Bandbreite des *inkohärenten* Lichtträgers darstellt. Unter diesen Bedingungen wäre die modulationsbedingte Verbreiterung des optischen Spektrums verschwindend klein, d.h. der spektrale Gehalt des optischen Signals wird alleine durch die Linienbreite  $\sigma_{\omega 0}$  des Lichtträgers bestimmt. Es sei  $\sigma_{t,coh}$  die Kohärenzzeit des Lichtträgers – dies entspricht der Zeit, innerhalb derer die Quelle eine phasenstarke harmonische Schwingung auszusenden in der Lage ist – dann bestimmt die Ungleichung  $\sigma_{t,coh} \ll \sigma_t \ll (\beta_2 \cdot L) / \sigma_{t,coh}$  unter welchen Bedingungen der Träger nicht mehr als harmonische Schwingung angenommen werden kann, sondern nur noch als *Leistungsdichtespektrum*  $P(\lambda)$  in die Rechnung eingehen darf. In solchen Fällen sprechen wir von *intensitätsmodulierten Signalen* an Stelle der *gaussförmig* amplitudenmodulierten optischen Impulsen, was den in *Anhang H* vorgestellten Rechenweg strenggenommen ausser Kraft setzt. Die Spektren der zur Verfügung stehenden Lichtquellen (LED, Laser) lassen sich aber mit genügender Genauigkeit durch ein *gaussförmiges Intensitätsspektrum* bzw. *Leistungsdichtespektrum*  $P(\lambda)$  annähern. Wir nehmen wiederum ein Eingangssignal der Form  $s_1(t) = a(t) \cdot a_0(t)$  an, wobei  $a_0(t)$  für die Amplitude des teilweise kohärenten Trägersignals  $s_0(t)$  steht, und da wir die Intensität modulieren, sei die Information im Signal  $s(t) = |a(t)|^2$  eingeschrieben. Nach dem *Wiener-Kintchine-Theorem* gilt z.B. für das Trägersignal

$$AKF\{s_0(t)\} \xleftrightarrow[\underset{F^{-1}}{F}]{F} P_{s_0}(\omega) \tag{3.229},$$

d.h. die *Autokorrelationsfunktion*  $AKF\{s_0(t)\}$  und das Leistungsdichtespektrum  $P_{s_0}(\omega)$  um die Mittenfrequenz  $\omega_0$  bilden ein *Fourier-Paar*. Dank dieser Feststellung sind wir mit *Anhang H* «wieder im Geschäft» indem man die Signalanalyse an der Autokorrelationsfunktion des dominierenden, nur *partiell kohärenten* Lichtträgers anknüpft: Die Annahme eines *gaussförmigen Leistungsdichtespektrums* impliziert demnach eine *gaussförmige AKF*. Die Verbreiterung des eingangsseitigen Intensitätsimpulses durch die *Inkohärenz* des Lichtträgers ist mit der Beziehung  $\sqrt{(\sigma_t^2 + \sigma_{t,coh}^2)}$  gegeben und findet nicht statt, wenn die vorhin erläuterte Ungleichung zutrifft. Der Erwartungswert der Ausgangsintensität  $\langle s_2(t) \rangle$  ergibt sich aus dem Spektrum Intensitätsmodulationsfunktion  $A(\omega)$ , dem Leistungsdichtespektrum des Lichtträgers  $P_{s_0}(\omega)$  und der Übertragungscharakteristik der Glasfaser, welche anhand von (3.227) beschrieben wird. Ohne näher auf die Berechnung einzugehen (siehe hierzu [25]), kann für den Erwartungswert des Ausgangssignals ein Ausdruck der Art

$$\langle s_2(t) \rangle \propto \left\langle P_{s_0}(\delta\omega') \cdot \hat{F}^{-1} \left\{ |A(\delta\omega) \cdot H(\delta\omega)|^2 \right\}_{\delta\omega = \omega - \omega'} \right\rangle_{\delta\omega' = \omega' - \omega_0} \tag{3.230}$$

gefunden werden, aus dem sich die Impulsverbreiterung – zumal die  $\omega$ -Schreibweise auch hier leicht in eine  $\lambda$ -Schreibweise übergeführt werden kann – gerade als *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  herauslesen lässt. Man erhält unter Beachtung von (3.198) den wichtigen Ausdruck

$$\boxed{\sigma'_t = \sqrt{\sigma_t^2 + (D \cdot L \cdot \sigma_{\lambda 0})^2}} \tag{3.231}.$$

Im Vergleich zum Fall b) des schmalbandigen Lichtträgers (3.228) ist die Impulsverbreiterung nicht von der Impulsdauer  $\sigma_t$  des Eingangssignals abhängig, sondern wird ausschliesslich durch die Linienbreite  $\sigma_{\lambda 0}$  der Trägerquelle bestimmt. Und doch: Die beiden Beziehungen (3.228) und (3.231) für die Impulsverbreiterung sind trotz der unterschiedlichen Annahmen und des entsprechend verschieden gearteten Analyseverfahrens von identischer Struktur. In beiden Fällen wird die Impulsverbreiterung durch die entsprechende Schreibweise der *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  wiedergegeben und es gilt deshalb (unter Beachtung der Fussnote<sup>47</sup>) der allgemeine Zusammenhang  $\sigma_t' = \sqrt{(\sigma_t^2 + \delta\tau_g^2)}$ . Die Impulsverbreiterung trägt, wie schon im Kontext von (3.219) gezeigt wurde, massgeblich zur Begrenzung des *Bitraten-Längen-Produkts*  $BL$  bei. Bei *gaussischen* Pulsenveloppen ist eine Pulstrennung bei der Detektion z.B. dann möglich, wenn sich mindestens 95% der Pulsenergie im Zeitschlitz  $T_B = 1/B$  des einzelnen Bits konzentriert, d.h. wenn (bei relativ kurzen Eingangsimpulsen  $\sigma_t$ ) die Relation  $\sigma_t' \leq \frac{1}{4} T_B = 1/(4 \cdot B)$  erfüllt ist. Hieraus kann die Ungleichung (3.219) noch spezifischer angeschrieben werden

$$BL \cdot |D| \cdot \sigma_{\lambda 0} \leq \frac{1}{4} \quad (3.232).$$

Im Fall c) des teilweise kohärenten Lichtträgers wird hier oft auch von *Fiberbandbreite* gesprochen. Dieses Konzept macht von der Eigenschaft Gebrauch, dass die Glasfaser bezüglich Eingangs- und Ausgangsleistung ein lineares System darstellt. In Bezug auf die *Modulationsfrequenz*  $f$  gilt demnach für die Faser (ohne Herleitung) die folgende (*Modulations-*)*Übertragungsfunktion*  $H(f)$

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + i \cdot \left(\frac{f}{f_2}\right)}} \cdot e^{-i \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}{1 + i \cdot \left(\frac{f}{f_2}\right)}} \quad (3.233).$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \tau_g} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot L \cdot |D| \cdot \sigma_{\lambda 0}} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi \cdot L \cdot \left(S + \frac{2D}{\lambda_0}\right) \cdot \sigma_{\lambda 0}^2}$$

Bei Glasfasern, die weit von der Dispersionsnullstelle betrieben werden (d.h. es gilt  $f_1 \ll f_2$ ), erhält man für die *3dB-Grenzfrequenz*

$$f_{3dB} = \sqrt{2 \cdot \ln(2)} \cdot f_1 \approx \frac{0.188}{L \cdot |D| \cdot \sigma_{\lambda 0}} \quad (3.234).$$

Hier entspricht der Nenner gerade der *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$  woraus sich nach wenigen Umrechnungen die Beziehung  $f_{3dB} \cdot \delta\tau_g \approx 0.188$  angeben lässt. Berücksichtigen wir zudem, dass für die verzerrungsfreie Übertragung  $\sigma_t' \leq \frac{1}{4} T_B = 1/(4 \cdot B)$  gelten muss, dann ergibt sich  $B \leq 1.33 \cdot f_{3dB}$ , was wiederum eine Beschreibung für die maximal übertragbare *Bitrate*  $B$  darstellt, ganz analog z.B. zum Ausdruck (3.232). Die optische Signalübertragung, die bei einer Modulationsfrequenz oberhalb von  $f_1$  bzw.  $f_{3dB}$  betrieben werden, heisst demnach *dispersionslimitiert*. Setzt man zudem die folgende Leistungsbilanz  $P_{Quelle[dB]} - \alpha L = P_{Empfänger[dB]}$  für die Faserübertragungstrecke an und berücksichtigt, dass die empfangene Leistung proportional zur *Bitrate*  $B$  mal der Anzahl der detektierbaren Photonen pro Bit ist, dann kann daraus eine Grenzbedingung der Form  $L = L_0 - (10/\alpha) \cdot \log(B)$  abgeleitet werden. Die



optische Übertragung, welche ausserhalb dieser Grenze betrieben wird, gilt als *verlustlimitiert*. Beide Mechanismen formulieren ein «Betriebsverhalten», das in Fig.3.50 abgebildet ist.

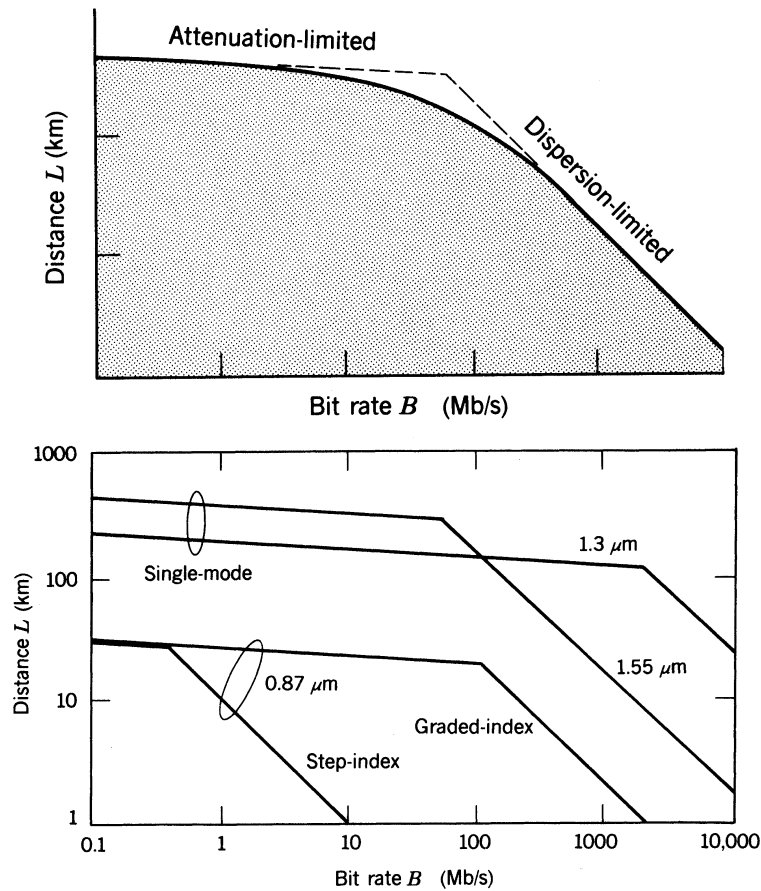


Fig.3.50: Grenzen der optischen Übertragung. Oben: Grauzone bedeutet sichere Übertragung, die Dispersionslimite ist durch das  $BL$ -Produkt gegeben, die Verlustlimite durch die Empfängerempfindlichkeit. Unten: Darstellung der Grenzbedingungen für unterschiedliche Glasfasertypen.

Bis anhin haben wir impulsförmige Enveloppensignale betrachtet. Häufig ist man auch an der Verzerrung von Impulsflanken interessiert. Eine Zusammenstellung des entsprechenden Zeit- bzw. Frequenzverhaltens solcher Signale kann in *Anhang I* eingesehen werden.

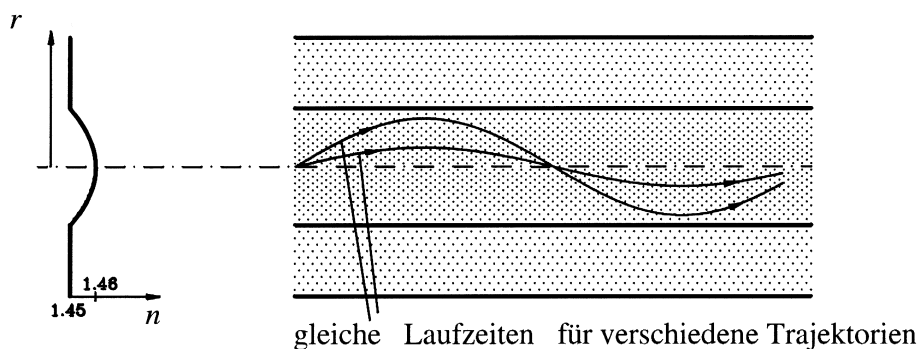
**Lernkontrolle:** Welches ist die resultierende Grösse einer jeden Dispersionsbetrachtung? Wie unterscheiden sich die Materialdispersion und die Wellenleiterdispersion qualitativ und quantitativ? Wie lässt sich das Verhalten des Dispersionsfaktors am Mechanismus der Feldkonzentration im Kern/Mantel erläutern? Welche Massnahmen werden ergriffen um eine möglichst dispersionsfreie Faser bei 1500 nm zu erhalten? Welche Probleme können dabei auftreten? Betrachten wir Fig.3.49: In welcher Form trägt die Materialdispersion zur Profildispersion bei? Bei welchen Profilen ist der Ausdruck «Profildispersion» besonders gerechtfertigt? Welchen Einfluss hat des Dispersionsverhalten auf die Impulsausbreitung? Unter welchen Gesichtspunkten werden Impulsverzerrungen analysiert? Aus Ihren Dispersionsanalysen resultiere ein Erwartungswert für die Laufzeitvariation  $\langle \delta\tau \rangle$ . Schätzen sie daraus eine maximale Bitrate ab. Beschreiben Sie die limitierenden Faktoren einer optischen Glasfaserübertragungsstrecke. Welche Massnahmen führen zu einer Erweiterung des Arbeitsbereichs?

### 3.7.5 Zur mehrwelligen Gradientenindexfaser

Das optimale Betriebsverhalten der *Single-Mode Faser* wurde im *Abschnitt 3.7.3* einerseits mit der optimalen (stationären) Feldkonzentration im Kernmedium begründet und andererseits mit Hilfe des in *Fig.3.43* dargestellten spektralen Wirkungsbereichs der *Gruppenlaufzeitdispersion*  $\delta\tau_g$ . Beide Randbedingungen führen, unter den gegebenen Materialverhältnissen ( $\Delta \approx 1\%$ ) zu Abmessungen des Faserkerns von  $2a = 5\text{-}10\ \mu\text{m}$ . Derart kleine Kerndurchmesser  $2a$  verlangen sehr präzise Stecker und Ein- und Auskopplungen auf der Sender- bzw. Empfängerseite. Die kleine numerische Apertur bewirkt zudem, dass nur ein Bruchteil der Quellenleistung eingekoppelt werden kann, was den Einsatz von leistungsstarken (und teuren) Laserdioden gegenüber den billigen LEDs notwendig macht. Fasern mit grossen Kerndurchmessern  $2a$  würden das Stecker- und Einkopplungsproblem zwar dramatisch vereinfachen (und dadurch verbilligen), die resultierende *modale Dispersion* wäre bei einer Realisierung als einfache Stufenindexfaser aber derart dominant, dass eine vernünftige Datenübertragung unmöglich wird. Setzt man nun an Stelle der stufenförmigen Indexvariation ein *parabolisches Indexprofil* ( $g = 2$ )

$$n(r) = \begin{cases} n_1 \cdot \sqrt{1 - 2\Delta \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^g} & r < a \\ n_1 \cdot \sqrt{1 - 2\Delta} & r > a \end{cases} \quad (3.235)$$

ein, dann kann die modale Dispersion, auch bei grossem Faserkern, dramatisch reduziert werden. Die Abbildung *Fig.3.51* zeigt schematisch den Strahlengang in der Gradientenindexfaser. Bei parabolischem Indexverlauf ist die Lösung des Eigenwertproblems sowohl im Bild der Strahlenoptik als auch in der feldtheoretischen Beschreibung analytisch zugänglich. Ohne Herleitung und mit Verweis auf *Fig.3.51* kann gezeigt werden, dass Modi höherer Ordnung einer äusseren Strahltrajektorie zuzuordnen sind und dadurch einen grösseren Weg durchlaufen, als Modi tieferer Ordnung. Das parabolische Profil sorgt nun dafür, dass z.B. der äussere Weg im optisch dünneren Medium verläuft und vom Licht daher entsprechend schneller durchheilt wird als der innere Weg im entsprechend dichteren Medium. Mit dem «richtigen» quadratischen Indexprofil wird zudem erreicht, dass alle Wege gerade die gleiche Laufzeit aufweisen, wodurch die *modale Dispersion* im Idealfall verschwindet.



*Fig.3.51: Parabolisches Indexprofil und Strahlengang in der Gradientenindexfaser. Der parabolische Indexverlauf bewirkt ausgeglichene Laufzeiten für Modi mit unterschiedlichen Trajektorien.*

Der Laufzeitkompensationsmechanismus in der Gradientenindexfaser erlaubt somit eine massive Ausdehnung des Faserkerns. Unter solchen Bedingungen werden sehr viele Modi zur Signalübertragung beitragen. Eine Näherung für die Modenanzahl lautet (ohne Herleitung)

$$N \approx \left( \frac{g}{g+2} \right) \cdot \frac{V^2}{2} \quad (3.236),$$

wobei  $V$  auch in diesem Fall entsprechend der Beziehung (3.193) berechnet werden kann. Wie auch der Fig.3.2 zu entnehmen ist, haben typische Gradientenindexfasern demnach Kerndurchmesser von  $2a = 50 \dots 100 \mu\text{m}$ .

**Beispiel:** Kerndurchmesser der Gradientenindexfaser sei  $2a = 50 \mu\text{m}$ . Das Kernmedium habe eine Brechzahl von  $n_1 = 1.5$  und eine normierte Brechzahldifferenz von  $\Delta = 0.9 \%$ . Daraus ergibt sich eine numerische Apertur von  $NA = 0.2$ . Die Modenanzahl  $N$  der Gradientenindexfaser ist:

$N = 342$	$\lambda_0 = 850 \text{ nm}$	$V = 37$
$N = 144$	$\lambda_0 = 1300 \text{ nm}$	$V = 24$

## Literatur

- [15] Charles Tsao. *Optical Fibre Waveguide Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [16] Allan W. Snyder, John D. Love. *Optical Waveguide Theory*. London: Chapman & Hall, 1991,
- [17] N. S. Kapany, J. J. Burke. *Optical Waveguides*. New York: Academic Press, 1972.
- [18] A. Safaai-Jazi, G. L. Yip, «Classification of hybrid modes in cylindrical dielectric optical waveguides,» *Radio Science*, Vol. 12, No. 4, pp. 603-609, July-Aug. 1977.
- [19] Erhard Grimm, Walter Nowak. *Lichtwellenleitertechnik*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1988.
- [20] Gerd Keiser. *Optical Fiber Communications*. Boston: McGraw-Hill, Series in Electrical and Computer Engineering, 3<sup>rd</sup> Edition, 2000.
- [21] D. Gloge, «Weakly guiding fibers,» *Applied Optics*, Vol. 10, No. 11, pp. 2252-2258, Nov. 1971.
- [22] D. Gloge, «Dispersion in weakly guiding fibers,» *Applied Optics*, Vol. 10, No. 11, pp. 2442-2445, Nov. 1971.
- [23] D. Gloge, «Propagation effects in optical fibers,» *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique*, Vol. 23, No. 1, pp. 106-120, Jan. 1975.
- [24] Max Ming-Kang Liu. *Principles and Applications of Optical Communications*. Chicago: Irwin, 1996.
- [25] H.-G. Unger. *Optische Nachrichtentechnik – Teil I: Optische Wellenleitertechnik*. Heidelberg: Hüthig, 1984.