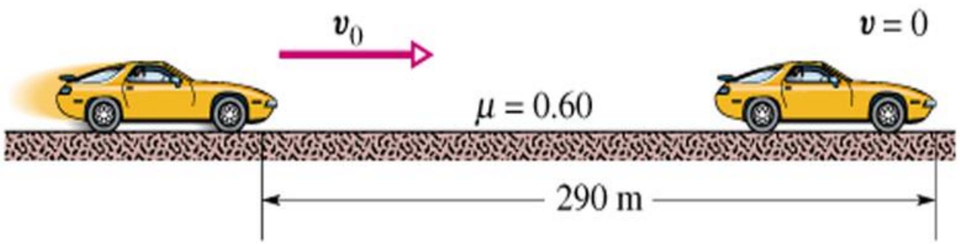
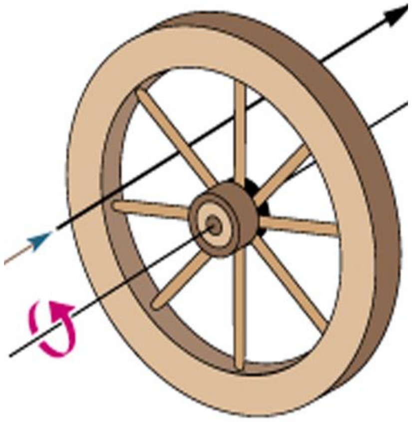
Moto Rotatorio: Cinetica



Moto Traslatorio

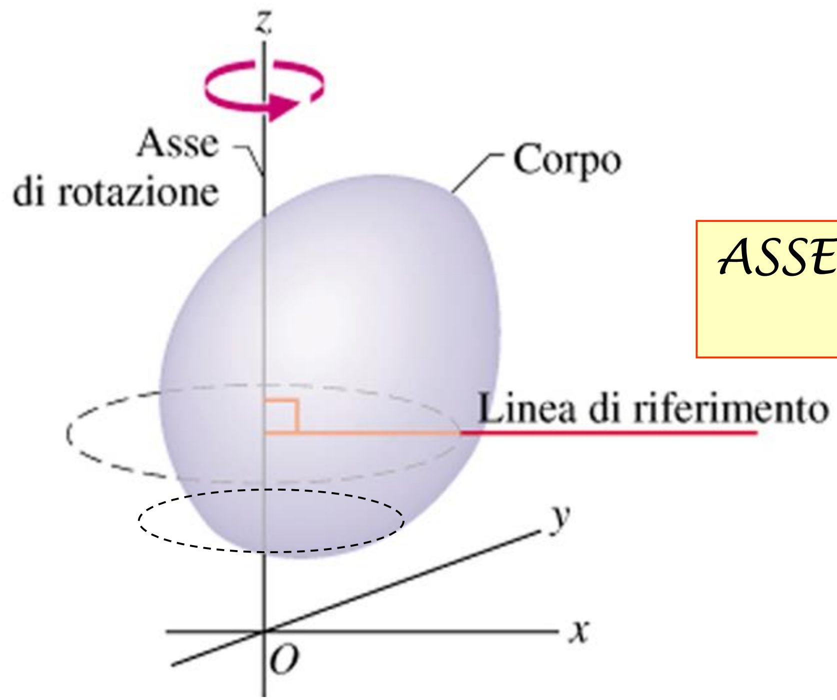


Moto Rotatorio

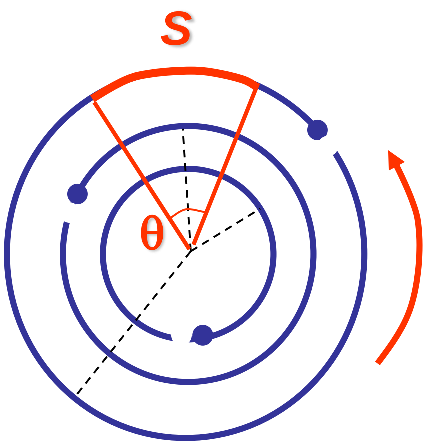
Traiettoria dello stesso tipo (*circonferenza*) per tutti i punti del corpo
Centro della traiettoria uguale per tutti i punti

Rem: CORPO RIGIDO: Insieme di particelle elementari (*dm*) pensati come puntiformi
Le distanze reciproche tra i vari punti non variano

Asse di rotazione Fisso



ASSE: Luogo dei punti equidistanti dalle circonferenze



Ogni traiettoria è circolare: variabile curvilinea S

L'angolo θ si misura come: $\boxed{\vartheta = \dfrac{S}{r}}$

Verso Antiorario ⇒ $\vartheta > 0$

In **RADIANTI** ⇒ $1\,rad = 57{,}3°$ $\quad \pi\ rad = 180°$

Energia Cinetica

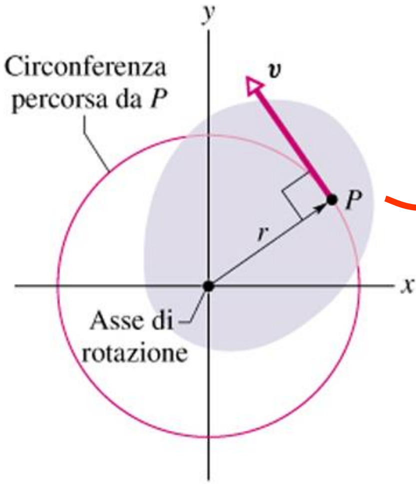
Traslazionale

$$v \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 \quad : \frac{[m][l]^2}{[t]^2}$$

Rotazionale

$$\omega \rightarrow \frac{1}{2}\,?\,\omega^2 \quad : [?]\frac{[1]}{[t]^2}$$

$$[?] = [m]\cdot[l^2]$$



P: m_P; $v_P = \omega r$

$K_P = ½\, m_P v^2_P$

Considerando tutte le particelle

$$E_K = ½\, m_1 v^2_1 + ½\, m_2 v^2_2 + \ldots\ldots\ldots + ½\, m_N v^2_N$$

ma per ciascuna $v_i = \omega \cdot r_i$

La STESSA !!

Quindi

$$E_K = \frac{1}{2}\left\{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots\ldots + m_N r_N^2\right\}\cdot \omega^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right\}\cdot \omega^2$$

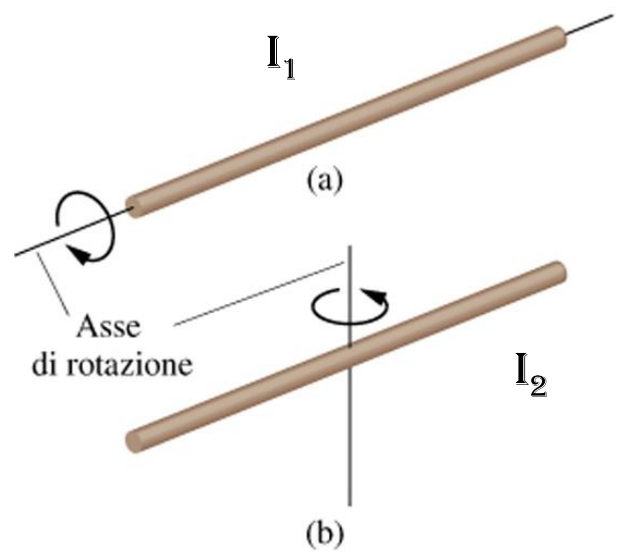
Possiamo allora introdurre il

Inerzia di un corpo a variazione del suo stato di rotazione

Domanda d'esame !

MOMENTO DI INERZIA

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 \cdot dm}$$



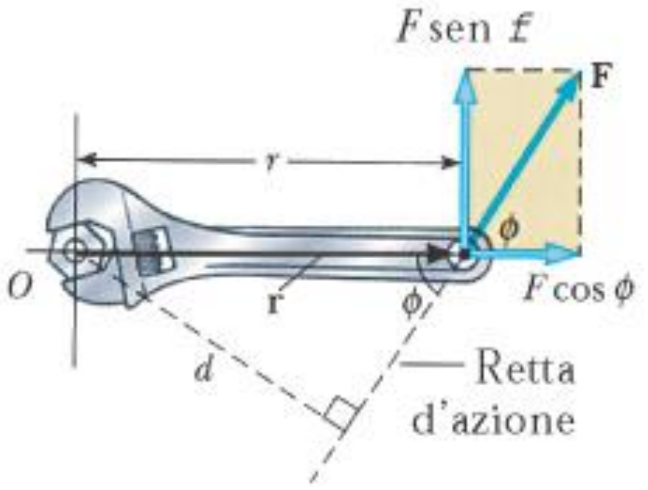
$$E_K = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

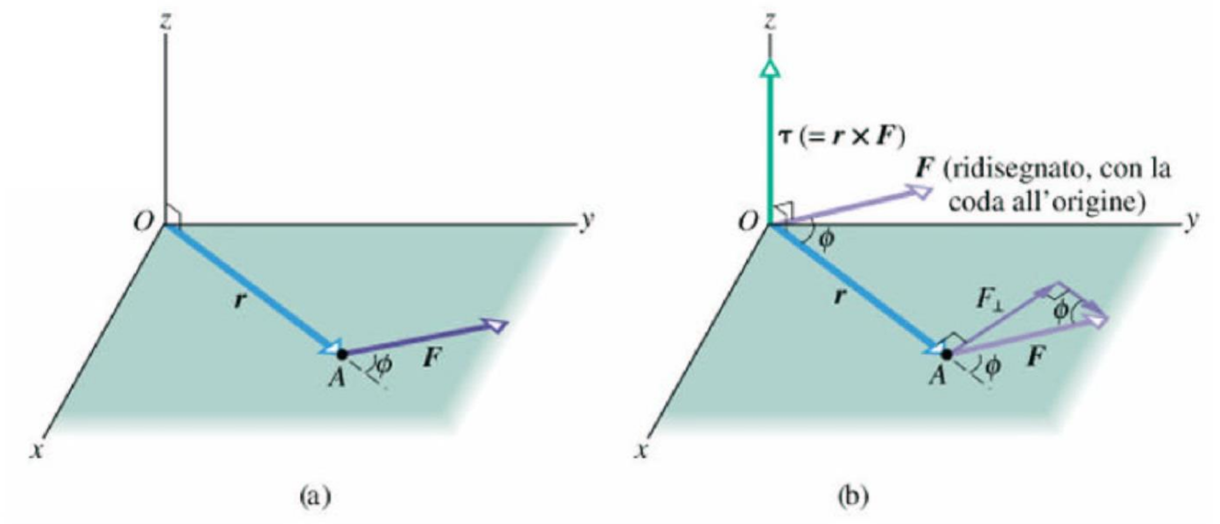
$$\left\{ per\ \ traslazioni: \quad E_K = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \right\}$$

Massa e Geometria

$$\boxed{I_1 < I_2}$$

Momento di una Forza





Perché si causi una ***rotazione***, non solo è necessaria una forza, ma anche che sia *applicata* in un punto conveniente. *Definiamo* il **momento della forza** la grandezza:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

il modulo è $\tau = rF \sin\Phi$, direzione normale al piano di **r** e **F** .

Condizione perché un corpo venga messo in rotazione, è che vi sia un momento della forza non nullo.

Si può anche scrivere che in modulo:

$$\tau = F_\perp \cdot r$$

II° Legge di Newton per il Moto Rotatorio

Domanda d'esame

$$\sum \tau = I \cdot \alpha \qquad \sum F = m \cdot a$$

acceleraziome

Risultante Dei Momenti

Momento di Inerzia

accelerazione angolare

Opposizione alla variazione dello stato di moto traslazionale

Sappiamo che: $\boxed{\tau = F_\perp \cdot r}$ Dalla 2° Legge di newton ⇨ $F_\perp = m \cdot a_\perp$

e nella cinematica rotazionale valeva: $a_\perp = \alpha \cdot r$ (qui $a_\perp$ vuol dire tangente alla traiettoria)

Dunque $\boxed{\tau = F_\perp \cdot r = m \cdot (\alpha \cdot r) \cdot r = mr^2 \cdot \alpha}$ I

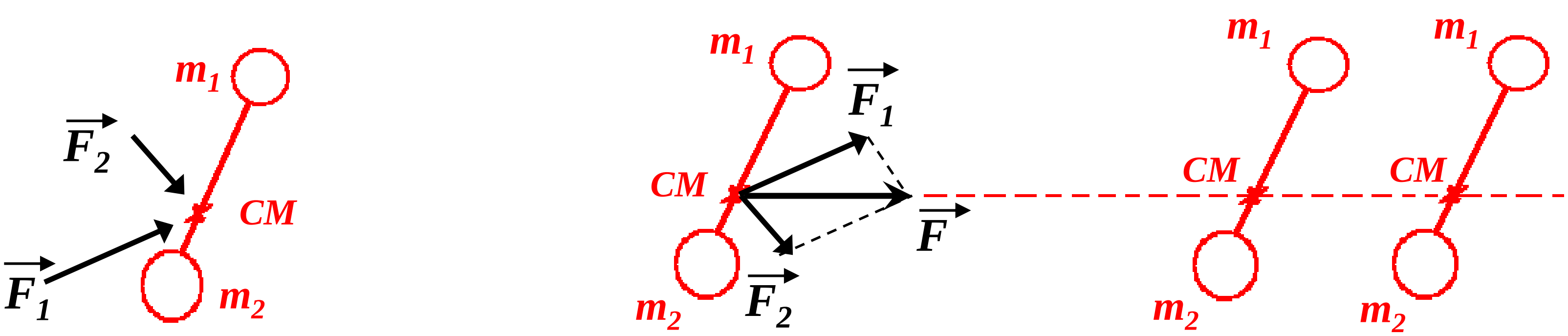
Se ci sono più forze ⇨ $\sum \tau_i = \left(\sum F_i \cdot r_i\right) = \left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \alpha = I \cdot \alpha$

Corpo rigido ⇨ $\sum \tau_i = \left(\int r^2 \cdot dm\right) \cdot \alpha = I \cdot \alpha$

Moto di traslazione

Le forze sono applicate al applicate al CM

Il moto è caratterizzato dalla forza esterna $\sum \vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{CM}$ (1)



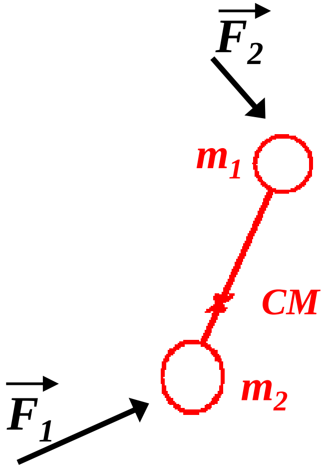
$$\vec{P}_{tot} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

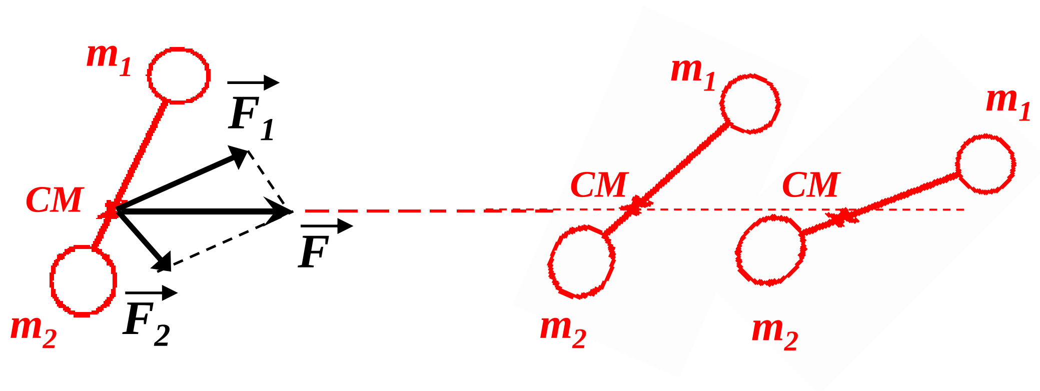
$$E_K = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2$$

Dalla (1) si determina $\vec{a}_{CM}$!

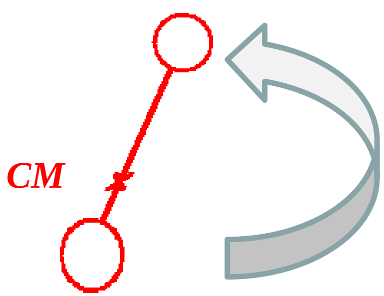
Moto di rototraslazione

Le forze NON sono applicate al applicate al CM, ma il moto del CM resta uguale $\sum \vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{CM}$ (1)





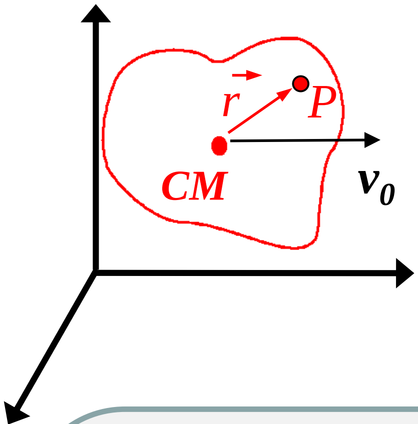
Inoltre nel sistema del CM, moto di pura rotazione



Si può determinate la velocità di rotazione intorno al CM

Moto di rototraslazione

Il moto del CM descrive completamente la traslazione

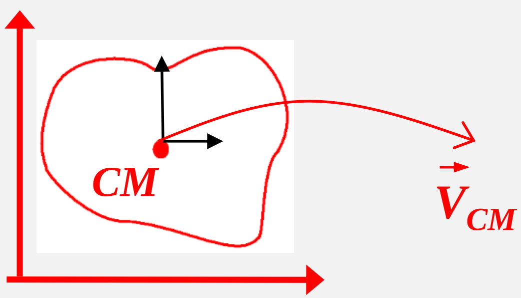


Per il punto P $\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

Velocità di traslazione

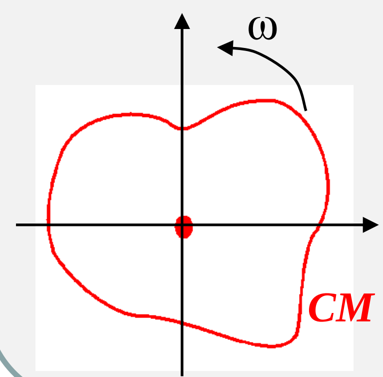
Velocità di rotazione del sistema CM

Traslazione del CM



$$\sum \vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

Rotazione intorno al CM

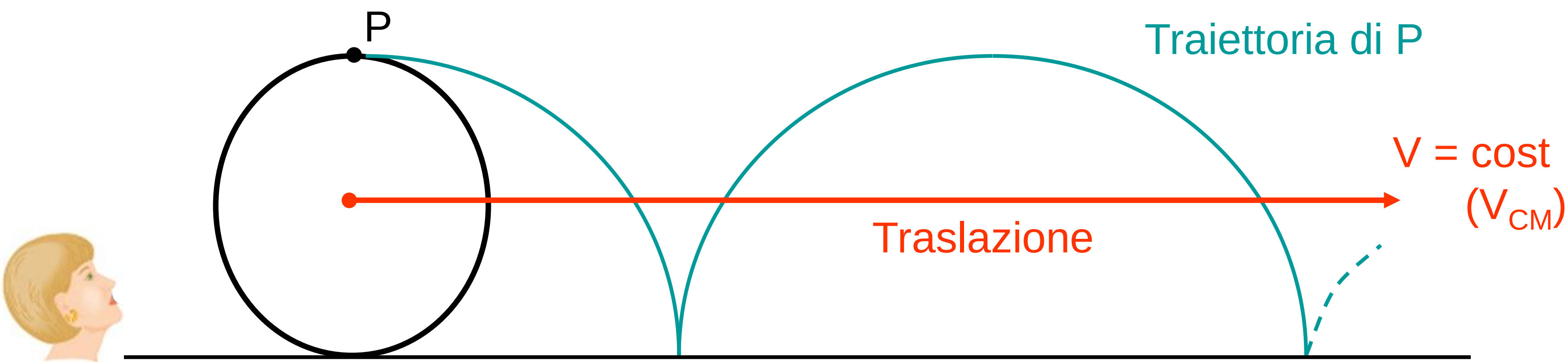


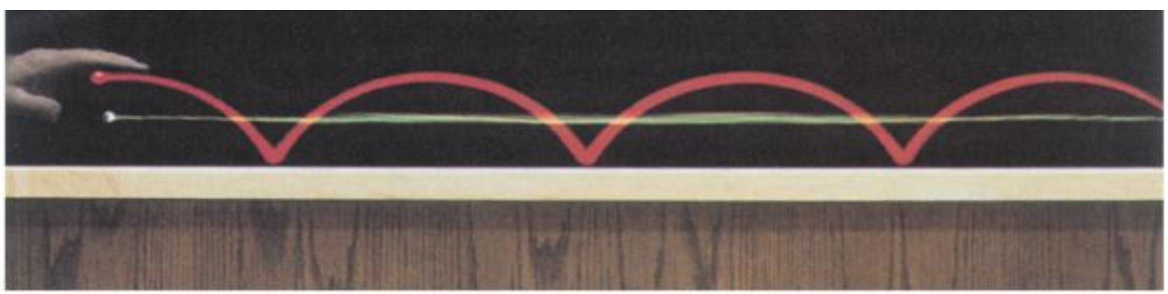
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Moto di Rotolamento

[Senza strisciamento]

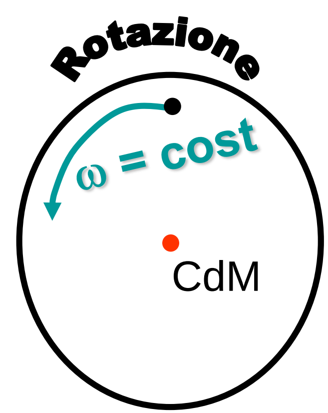
Per un osservatore fisso

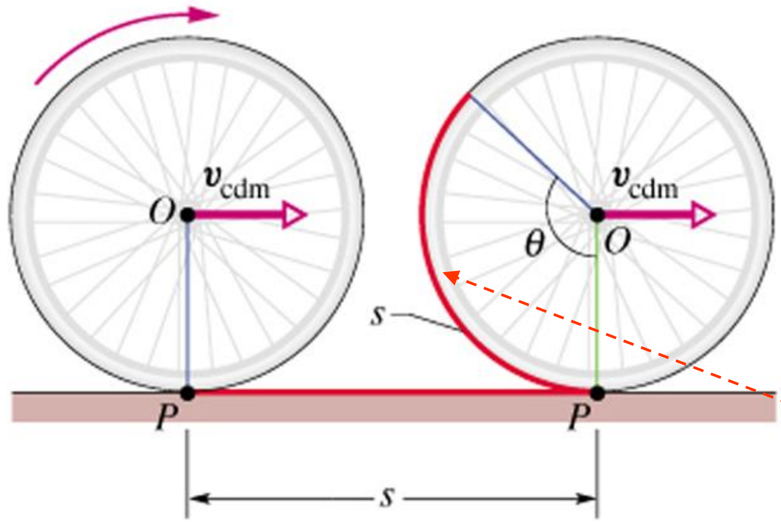




Un osservatore sulla bicicletta

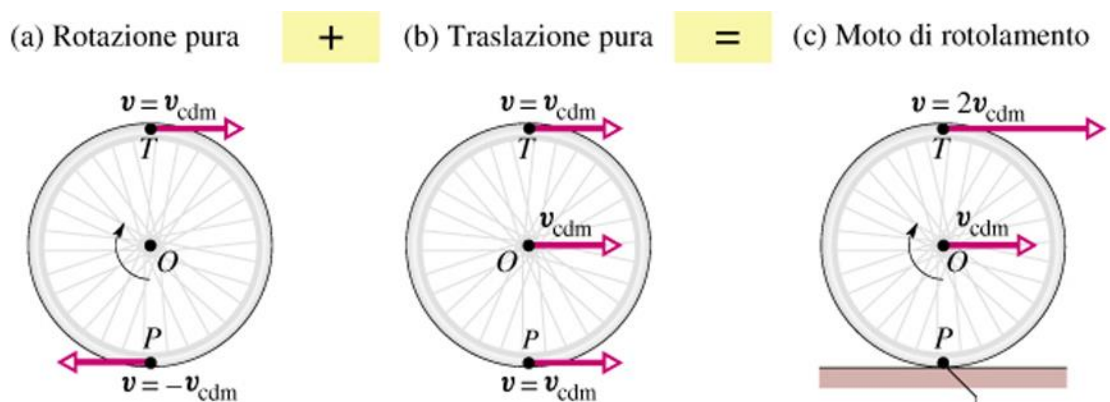
Vede un moto di pura rotazione





L'arco di circonferenza che ha avuto contatto con il suolo vale: $S = \mathcal{R} \cdot \theta$

Si può vedere come il moto di <u>Rotolamento Senza Strisciamento</u> è la composizione di moto di rotazione puro + moto di traslazione pura



$$\boxed{V_{CM} = \frac{dS}{dt} = R\frac{d\vartheta}{dt} = \omega \cdot R}$$

La ruota non striscia

Ed in questo caso :

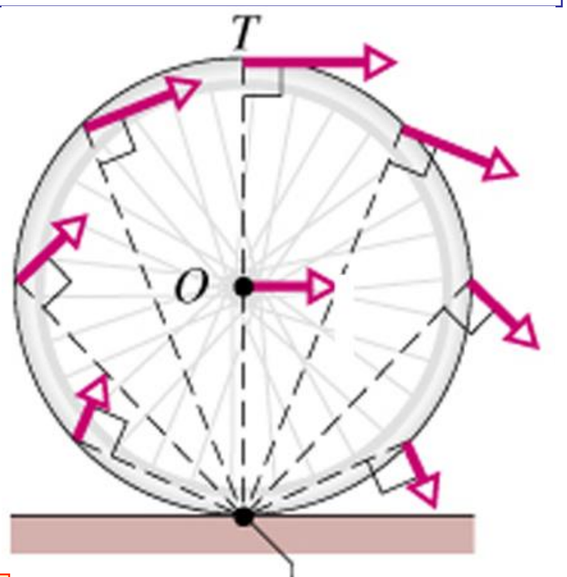
$$E_K = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \frac{v_{CM}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) \cdot v_{CM}^2$$

Oppure :

$$E_K = \frac{1}{2} M \cdot \omega^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(I + MR^2\right)}_{\text{Momento di Inerzia di un corpo il cui asse di rotazione è stato traslato di una distanza R}} \cdot \omega^2$$

Momento di Inerzia di un corpo il cui asse di rotazione è stato traslato di una distanza R

Infatti posso pensare al R.S.S. come un moto di pura rotazione (istantaneamente) attorno ad un asse passante nel punto di contatto al suolo (che cambia istante per istante)



Asse di rotazione in P

$$E_K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad \omega = \frac{v_{CM}}{R}$$

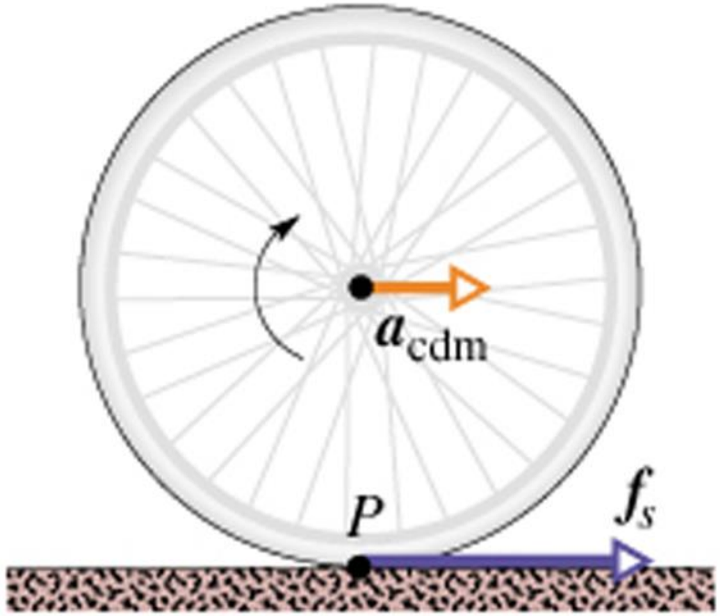
Teorema di Steiner

$$I_P = I_{CM} + M \cdot R^2$$

Dunque:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + M \cdot R^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Quindi perché sia possibile il Rotolamento Senza Strisciamento deve esistere attrito col suolo [ad. es. le ruote scivolano sul ghiaccio]



Siccome il punto di contatto col suolo nel Rotolamento Senza Strisciamento è fermo, l'attrito rilevante è quello statico

da $$\boxed{v_{CM} = \omega \cdot R \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \alpha \cdot R}$$

Esempio Capitolo 12 Par. 3

Considero le leggi di Newton per le forze ed i momenti

$$\begin{cases} f_s - mg\sin\vartheta = ma_{CM} \\ f_s \cdot R - mg \cdot 0 = I_{CM}\,\alpha \end{cases}$$

Se il corpo scende ($a_{CM} < 0$), ruota in senso antiorario ⇨ $\alpha > 0$

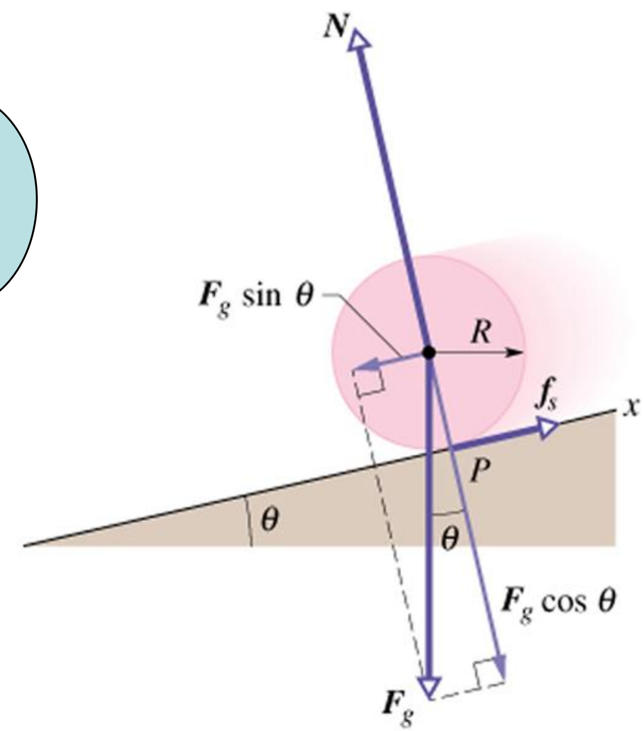
Quindi

$$\boxed{a_{CM} = -\alpha \cdot R}$$

$$f_s = -I_{CM}\frac{a_{CM}}{R^2}$$

e sostituendo

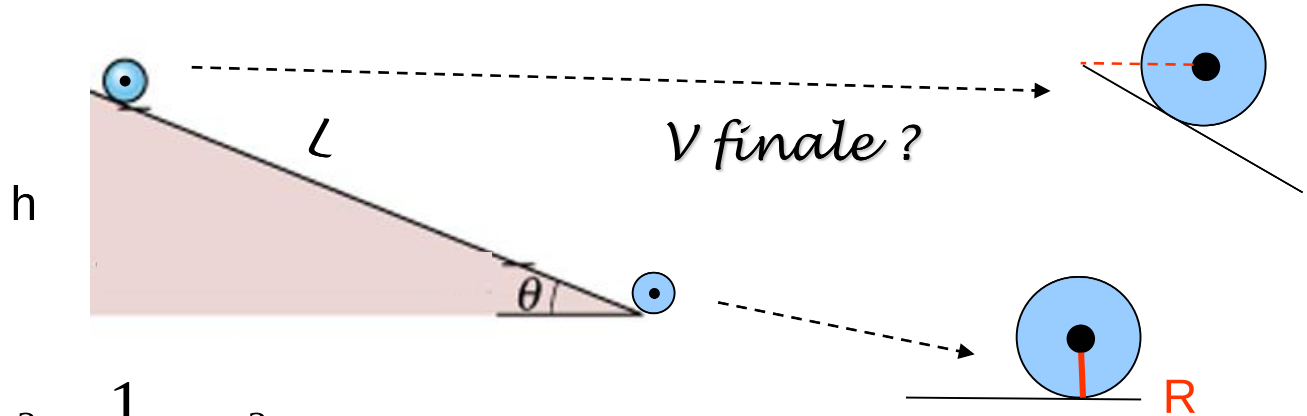
$$\boxed{a_{CM} = \frac{-g\sin\vartheta}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}}$$



E' ancora possibile conservare l'energia meccanica nel caso di un sistema di CORPI RIGIDI

Le Energie potenziali vengono attribuite relativamente alla posizione del Centro di Massa del corpo

ESEMPIO



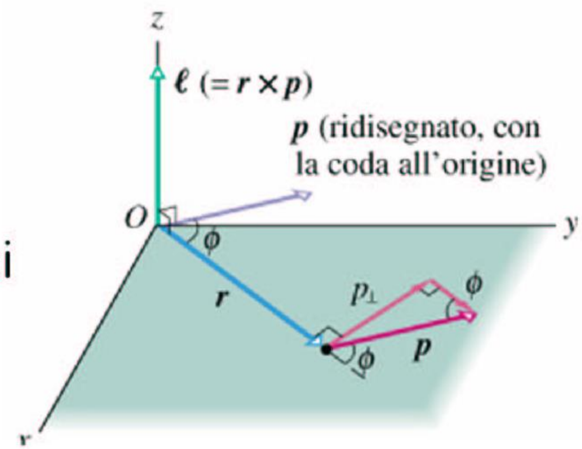
$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + MgR$$

$$Mg(h-R) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$2g(h-R) = \frac{v_{CM}^2}{2} + v_{CM}^2 = \frac{3}{2}v_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}g(h-R)}$$

Momento angolare



Il concetto di quantità di moto, e la sua conservazione, ci consentono di ***prevedere*** gli effetti di una collisione, senza conoscerne la *dinamica* in dettaglio. La nuova grandezza che introduciamo (il momento angolare) è soggetto ad una analoga legge di conservazione.

Consideriamo una particella con quantità di moto **p=mv**. Possiamo definire il momento angolare (o momento di p):

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \qquad \boxed{l = m \cdot v \cdot r_\perp = m \cdot v_\perp \cdot r = p_\perp \cdot r}$$

Vettore ortogonale al piano di **p** e **r**, e di modulo **pr** senΦ

Momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \ldots \vec{l}_n = \sum_{i=1,N} \vec{l}_i$$

Relazione tra $\bar{\tau}$ e $\bar{l}$

Tra momento della forza e momento angolare, esiste una relazione analoga alla II legge di Newton **F** =d**p**/dt

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Dimostrazione:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = m(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{a} + 0) =$$

$$= (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{\tau} \qquad c.v.d.$$

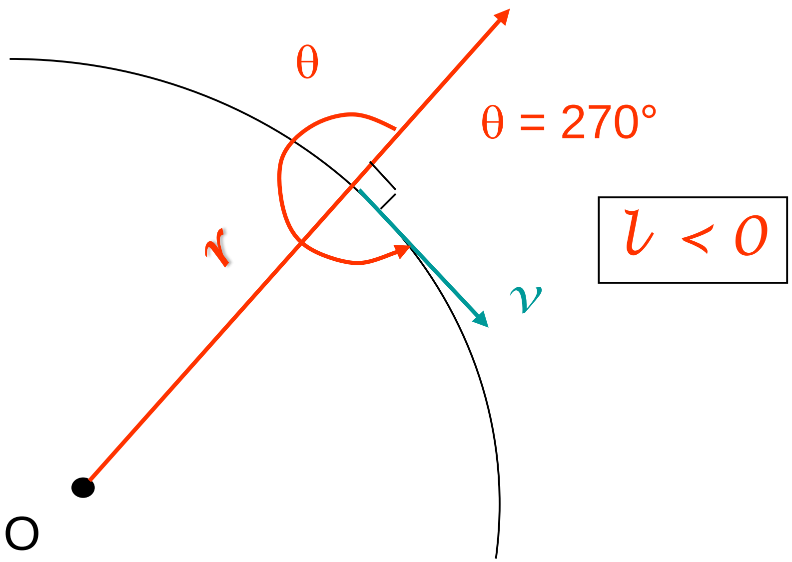
ossia, una variazione del momento angolare induce un momento della forza, che provoca una rotazione di un oggetto (sistema)

Un caso importante e' *quando la forza e' di tipo centrale* **F=F(r)**
In tal caso infatti, il momento τ della forza e' nullo, e quindi:

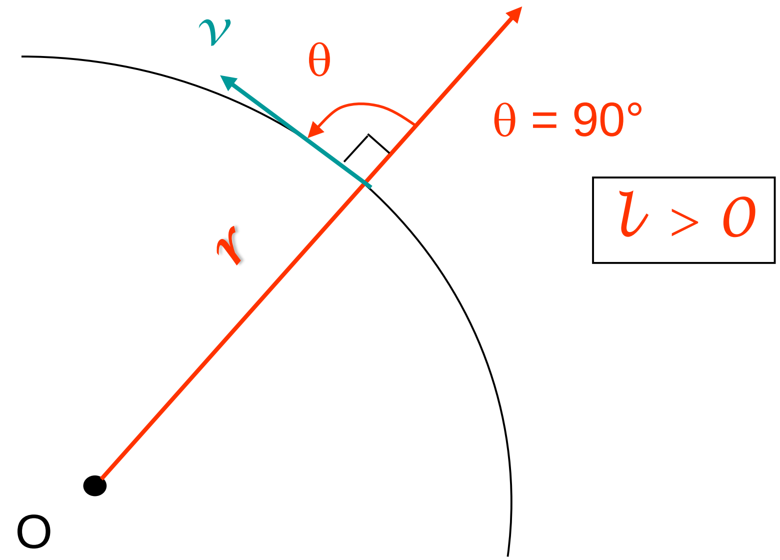
$$\frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{l} = \text{cost}$$

Il momento della quantità di moto e' **costante** in *intensità, direzione e verso.*

Nota: $l = r\,v\,\sin\theta$ ← *Angolo tra* $\mathbf{r}$ *e* $\mathbf{v}$ (*non viceversa*)



Orario



Antiorario

Momento Angolare Totale

vale

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\sum \vec{\tau}\right)^{esterne}}$$

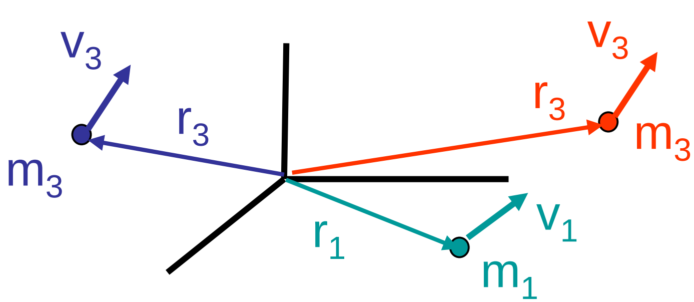
Così come avevamo

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = M\frac{dv_{CM}}{dt} = ma_{CM} = \sum F_i^{\,ext}}$$

Momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \dots \vec{l}_n = \sum_{i=1,N} \vec{l}_i$$

Nota: *L'origine rispetto a cui calcolare i momenti deve essere la stessa* $\forall\ i$



Momento Angolare di un CORPO RIGIDO intorno ad un asse fisso

Rem. $$I = \int r^2 dm$$

$$r_\perp = r \cdot \sin \vartheta$$

Raggio della circonferenza descritta da Δm

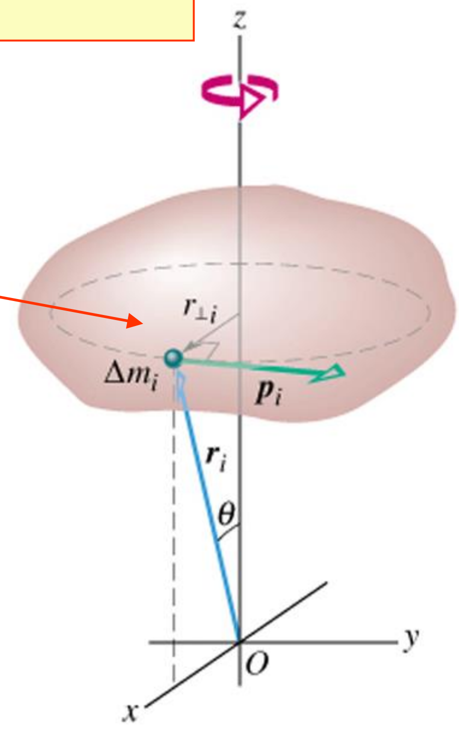
$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = r \cdot \overrightarrow{p \cdot \sin 90}^\circ$$

$$\boxed{l_Z = l \cdot \sin \vartheta = r \cdot p \cdot \sin \vartheta = \Delta m \cdot v \cdot r_\perp}$$

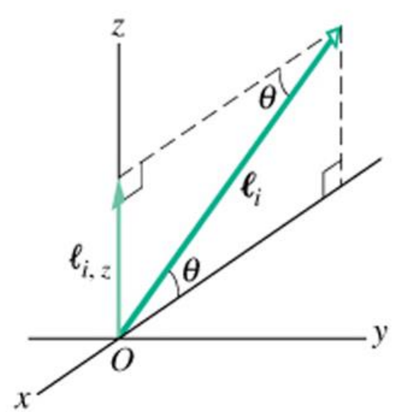
Inoltre se il moto è di rotazione $\boxed{v = \omega \cdot r_\perp}$ n.b.

Quindi

$$L_Z = \sum_i l_{z,i} = \sum_i r_{\perp i} v_i dm_i = \sum_i r_{\perp i} \left(\omega \cdot r_{\perp i} \right) dm_i$$



(a)



$$L_Z = \sum_i l_{z,i} = \sum_i r_{\perp i} v_i dm_i = \sum_i r_{\perp i} \left(\omega \cdot r_{\perp i} \right) dm_i$$

$\boxed{\omega \text{ è lo stesso per ogni } dm}$

$$L_Z = \sum_i dm_i \cdot \omega \cdot r_{\perp i}^2 = \omega \cdot \sum_i dm_i \cdot r_{\perp i}^2 = \omega \cdot \int r^2 dm$$

$$\boxed{L_Z = I \cdot \omega}$$

Momento di Inerzia rispetto all'asse di rotazione ***z***

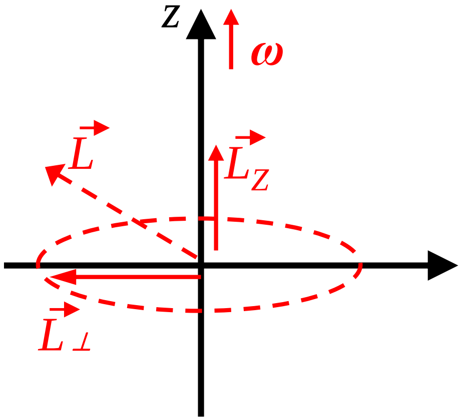
Componente ***z*** *di* **L**

Altre corrispondenze fra espressioni relative a moti di traslazione e di rotazione[a]

Traslazione		Rotazione	
Forza	$\boldsymbol{F}$	Momento della forza	$\boldsymbol{\tau}\ (= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F})$
Quantità di moto	$\boldsymbol{p}$	Momento angolare	$\boldsymbol{\ell}\ (= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$
Quantità di moto[b]	$\boldsymbol{P}\ (= \sum \boldsymbol{p}_i)$	Momento angolare[b]	$\boldsymbol{L}\ (= \sum \boldsymbol{\ell}_i)$
Quantità di moto[b]	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_{\mathrm{cdm}}$	Momento angolare[c]	$L = I\omega$
Seconda legge di Newton[b]	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{net}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$	Seconda legge di Newton[b]	$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{net}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
Legge di conservazione[d]	$\boldsymbol{P} = \text{constante}$	Legge di conservazione[d]	$\boldsymbol{L} = \text{constante}$

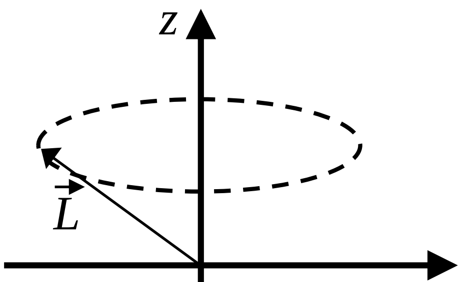
Per sistemi di particelle, corpi rigidi compresi.
Per un corpo rigido rotante intorno a un asse fisso, essendo L la componente lungo quest'asse.
Per un sistema chiuso e isolato.

Rotazioni attorno ad un asse fisso



$\boldsymbol{L_Z}$ *resta costante*

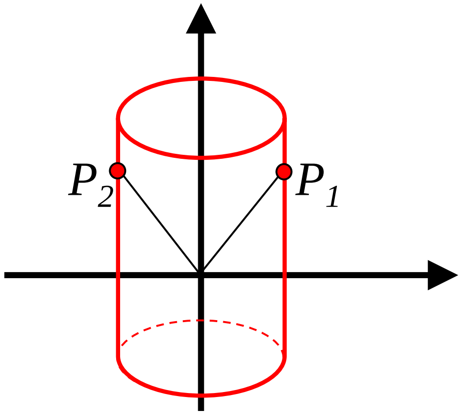
$\boldsymbol{L_\perp}$ *ruota*

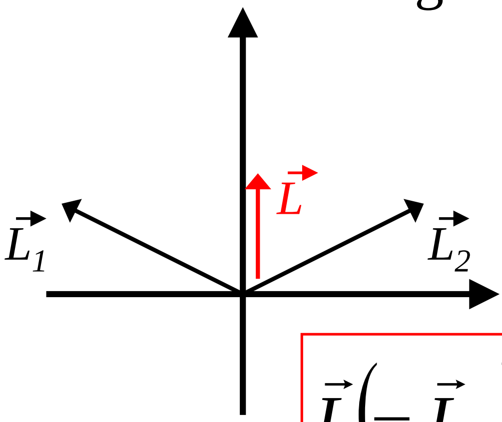


Moto di precessione

Se il corpo ruota intorno ad un asse di simmetria

Per ogni punto esiste un simmetrico





L *totale è lungo l'asse* ***z***

$$\boxed{\vec{L}\left(=\vec{L}_Z\right)= I\,\vec{\omega}}$$

$\boldsymbol{L_T} = 0$!

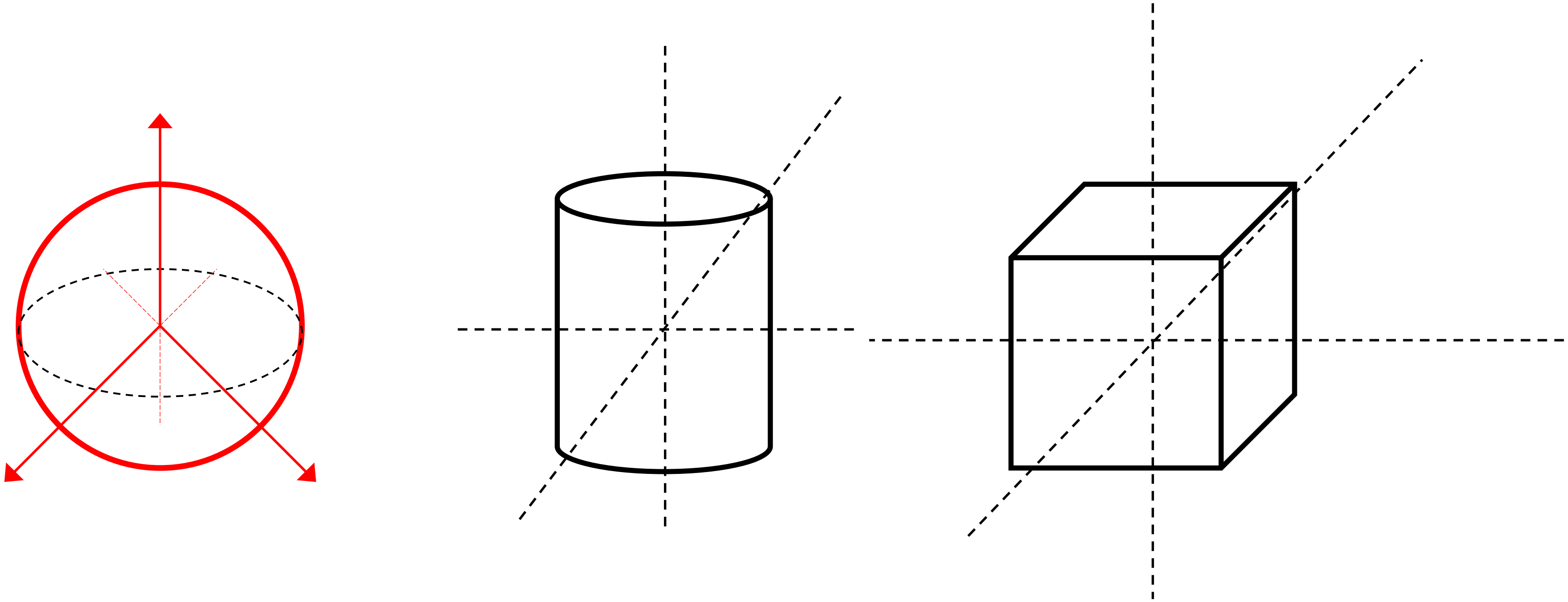
Rotazioni attorno ad un asse – Assi principali

Ogni corpo ha almeno tre assi ortogonali per cui :

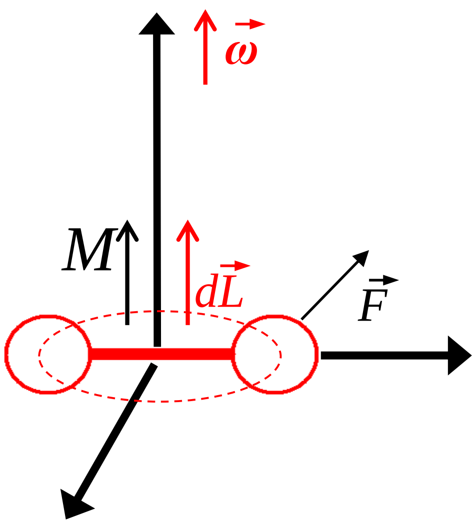
$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

Assi principali di inerzia

(ovviamente ***I*** è calcolato rispetto all'asse di rotazione)



Un caso semplice



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} \,//\, \vec{M} \quad \vec{M} \,//\, \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{M} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{L} = cost \\ \omega = cost \end{array}$$

$$\vec{M} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \vec{L} \neq cost \\ \alpha = \text{cost} \end{array}$$

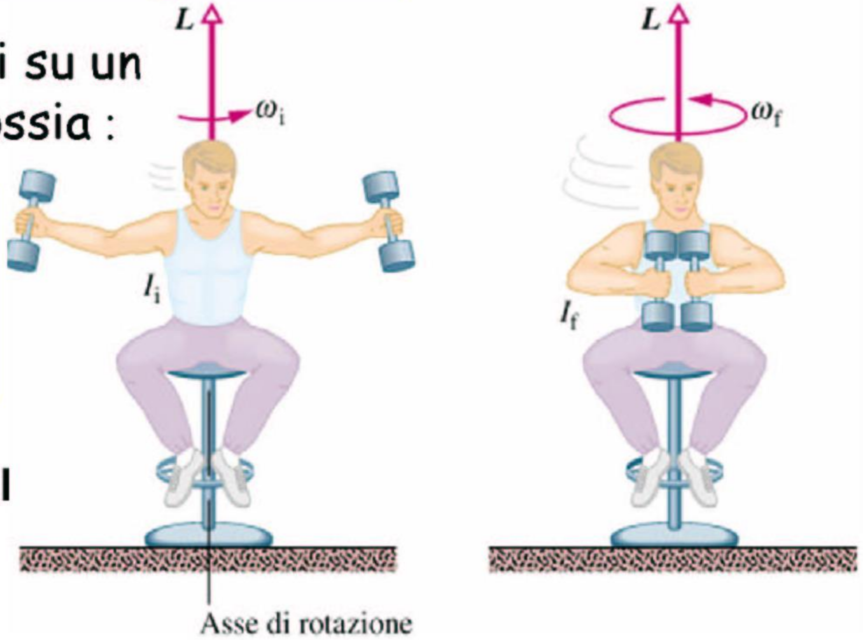
Conservazione del momento angolare

Domanda d'esame

Se il momento netto delle forze agenti su un sistema è nullo, allora si ha $d\mathbf{L}/dt = 0$, ossia :

L = costante (sistema isolato)
indipendentemente dai cambiamenti che intervengono all'interno del sistema.

Per la natura vettoriale di τ , se una componente e' nulla, allora la componente di l lungo quella direzione rimane costante, indipendentemente dalle altre.



Momento Forze Esterne nullo $\Rightarrow$ $\boxed{L = I \cdot \omega = \text{cost}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_i \cdot \omega_i = I_f \cdot \omega_f}$

Se $I_i \neq I_f$ $\Rightarrow$ *Varia la velocità di rotazione*

Variazione dovuto solo alle Forze Interne

Ridistribuzione delle masse

Se $\vec{L} // \vec{\omega}$:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I\vec{\alpha}$$

$$M = I\alpha$$

I è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione

Sia α, che L e $\vec{\omega}$ sono paralleli all'asse di rotazione

$$M = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}$$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

Determiniamo α, ϑ, ω in funzione del tempo

Se $\vec{L} \not\parallel \vec{\omega}$:

$$M_z = \frac{d}{dt} L_z = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha$$

$$M_z = I\alpha$$

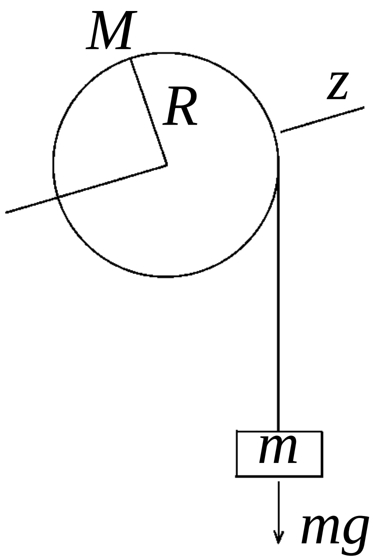
I momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione

Nella direzione parallela ad ω

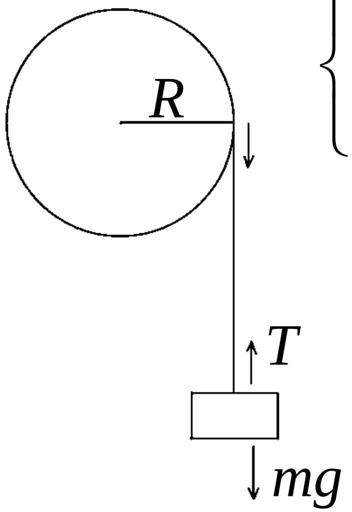
$$\alpha = \frac{M_z}{I} \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \int_0^t \omega \, dt$$

Un esempio



α ?



Supponiamo l'asse fisso

$$\begin{cases} mg - T = ma & \left(\sum F_{ex} = ma\right) \\ T\,R = I\alpha & \left(M = \mathrm{I}\alpha\right) \end{cases}$$

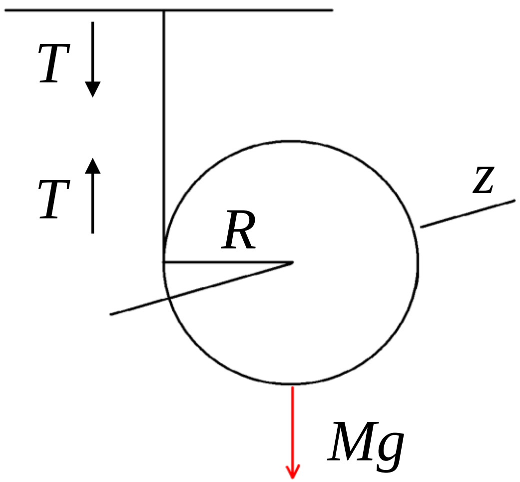
$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2}M\right)R}$$

inoltre

$$\left.\begin{aligned} a &= R\alpha \\ I &= \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad a = R\alpha = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$

La reazione vincolare produce momento nullo

Un altro esempio



Il moto del disco rispetto al CM è di pura rotazione

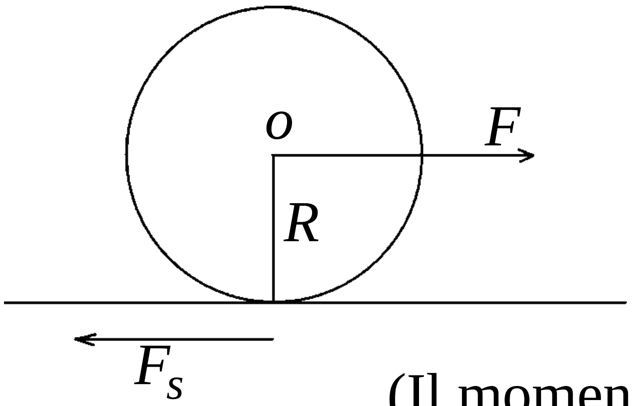
$$M = I\alpha$$

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}MR\alpha$$

Moto del CM (tutte le forze sono applicate al CM): $Mg - T = Ma_{CM}$

Dunque
$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}MR\alpha \\ Mg - T = Ma_{CM} \\ a_{CM} = \alpha R \quad \text{(condizione di puro rotolamento)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3}\frac{g}{R} \\ a_{CM} &= \frac{2}{3}g \end{aligned}}$$

Moto di puro rotolamento



① $$F - f_s = ma_{CM}$$

rispetto al polo o

② $$\tau = Rf_s = I\alpha$$

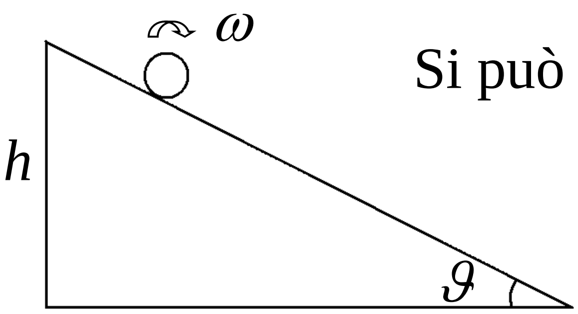
(Il momento della forza F è nullo!)

$$\begin{cases} F - f_s = ma_{CM} \\ Rf_s = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

⟵ condizione di puro rotolamento

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1 + \dfrac{I}{mR^2}\right)}; \qquad f_s = \frac{F}{1 + \dfrac{mR^2}{I}} \qquad \left(f_s \leq \mu_s mg!\right)$$

Moto di puro rotolamento



Si può risolvere come nel caso precedente con

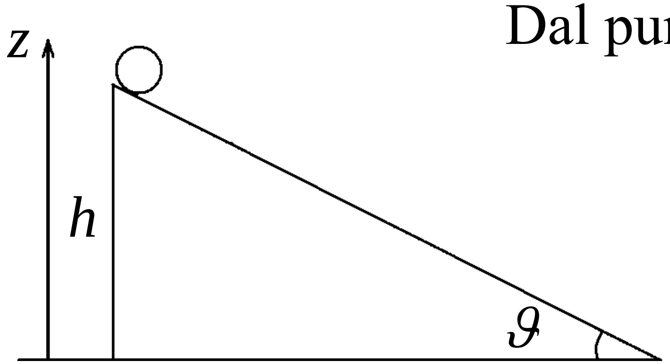
$$F = mg\sin\vartheta$$

Nel caso di un cilindro $I = \frac{1}{2}mR^2$

$$a_{CM} = \frac{F}{m\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{2}{3}\frac{mg\sin\vartheta}{m} = \frac{2}{3}g\sin\vartheta$$

Inoltre nel caso di una sfera $a_{CM} = \frac{5}{7}g\sin\vartheta$

Nel caso di puro scivolamento $a_{CM} = g\sin\vartheta$



Dal punto di vista dell'energia

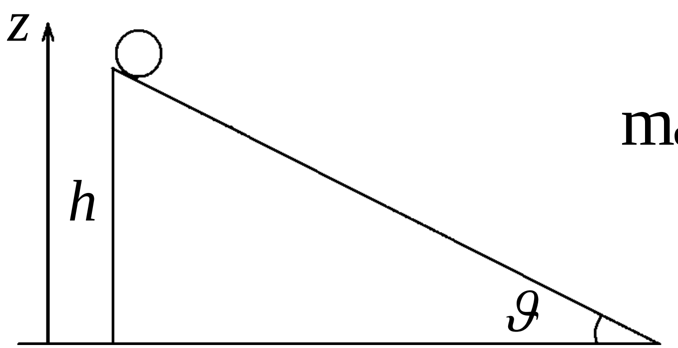
$U = mgh$ energia iniziale

$$E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgz$$

a $z = 0$ $\quad E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

Conservazione dell'energia $\quad \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh$

Moto di puro rotolamento

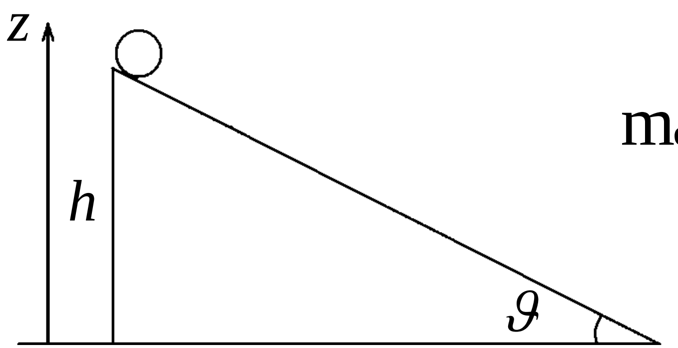


ma $v_{CM} = R\omega \Rightarrow v_{CM}^2 = \dfrac{2gh}{1+\dfrac{I}{mR^2}}$

cilindro *pieno* $\left(I = \frac{1}{2}mR^2\right) \Rightarrow v_{CM}^2 = \frac{4}{3}gh$

cilindro *vuoto* $\left(I = mR^2\right) \Rightarrow v_{CM}^2 = gh$

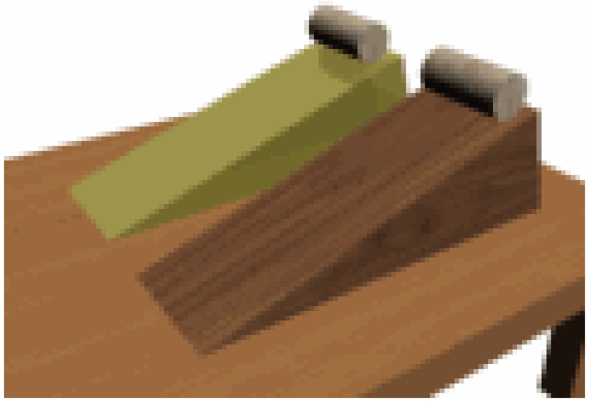
Moto di puro rotolamento



ma $\quad v_{CM} = R\omega \Rightarrow v_{CM}^2 = \dfrac{2gh}{1+\dfrac{I}{mR^2}}$

$$cilindro \qquad pieno \quad \left(I = \frac{1}{2}mR^2\right) \Rightarrow v_{CM}^2 = \frac{4}{3}gh$$

solo strisciamento $\quad v_{CM}^2 = 2gh$



Urto con corpi vincolati

- Se c'è un vincolo che tiene fermo un punto del corpo, durante l'urto si genera una forza vincolare impulsiva (esterna) e quindi la quantità di moto non si conserva
- Il vincolo agirà con una risultante di forze ***F*** e di momenti τ, i cui effetti, nell'intervallo di tempo dell'urto, sono l'impulso e l'impulso angolare

$$\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt \qquad \vec{H} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau} dt$$

Urto con corpi vincolati

- L'impulso è uguale alla variazione di quantità di moto

$$\vec{J} = \int_0^{\Delta t} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$$

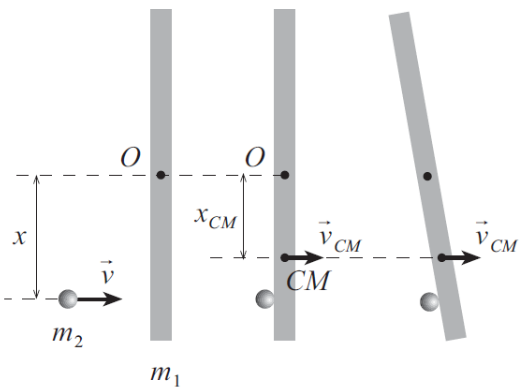
- L'impulso angolare è uguale alla variazione di momento angolare

$$\vec{H} = \int_0^{\Delta t} \vec{\tau} dt = \Delta \vec{L}$$

Momento angolare

- Se agiscono solo forze interne al sistema dei due corpi, il momento angolare si conserva
- Il momento angolare si conserva anche rispetto ad un polo fisso in un sistema inerziale o rispetto al CM se il momento delle forze esterne rispetto a quel polo è nullo

Esempio: Un'asta a riposo su un piano orizzontale, di massa m_1 e lunghezza l, è colpita da un proiettile di massa m_2 e velocità $\vec{v}$ perpendicolarmente all'asta a distanza x dal centro O, rimanendovi conficcato; stabiliamo la velocità lineare e angolare del sistema dopo l'urto. Siccome nell'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne, si conservano la quantità di moto e il momento angolare. Pertanto, dalla prima legge, segue:



$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_{CM},$$

da cui segue:

$$v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v,$$

dove la posizione del centro di massa rispetto al centro O è:

$$x_{CM} = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \tag{8.13}$$

e il centro di massa continua a muoversi dopo l'urto lungo la linea tratteggiata di figura. Assumendo quale polo per il calcolo del momento angolare il centro di massa del sistema, si ha:

$$I\omega = L = m_2 v (x - x_{CM}),$$

dove L è il momento angolare totale del sistema; il momento d'inerzia rispetto al centro O dell'asta è dato dalla (7.5) e vale $m_2 l^2 / 12$ e rispetto al centro di massa, per il teorema di Huygens-Steiner (7.7), vale $m_2 l^2 / 12 + m_2 x_{CM}$; per il proiettile il momento d'inerzia rispetto ad O vale $m_1 x^2$. Pertanto la relazione precedente si scrive:

$$x_{CM} = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \tag{8.13}$$

e il centro di massa continua a muoversi dopo l'urto lungo la linea tratteggiata di figura. Assumendo quale polo per il calcolo del momento angolare il centro di massa del sistema, si ha:

$$I\omega = L = m_2 v\left(x - x_{CM}\right),$$

dove L è il momento angolare totale del sistema; il momento d'inerzia rispetto al centro O dell'asta è dato dalla (7.5) e vale $m_2 l^2/12$ e rispetto al centro di massa, per il teorema di Huygens-Steiner (7.7), vale $m_2 l^2/12 + m_2 x_{CM}$; per il

Per il proiettile il momento di inerzia rispetto al CM vale $m_2 (x - X_{cm})^2$ pertanto

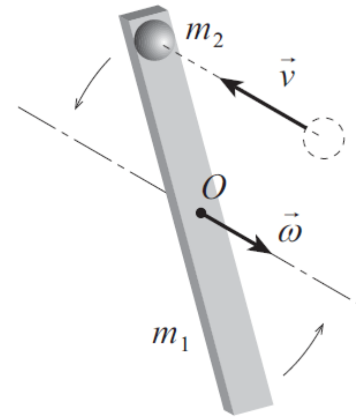
$$\left(\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 x_{CM}{}^2 + m_2 (x - X_{cm})^2\right)\omega = m_2 v\left(x - x_{CM}\right),$$

da cui, facendo uso della relazione (8.13) segue:

$$\omega = \frac{m_2 v\left(x - x_{CM}\right)}{\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 x_{CM}{}^2 + m_2 (x - X_{cm})^2}$$

e la rotazione avviene in senso antiorario. Si noti che ω dipende da x per cui colpendo l'asta in O, la velocità del centro di massa avrebbe lo stesso valore determinato, ma ω risulterebbe nulla.

Esempio: Un'asta di lunghezza l e massa m_1 ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, in verso antiorario, in un piano verticale attorno ad un asse fisso orizzontale. Una particella di massa m_2 e velocità $\vec{v}$ colpisce un estremo dell'asta e vi si conficca. Stabiliamo la velocità angolare dopo l'urto. Nell'urto non si conservano né la quantità di moto né l'energia cinetica ma si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione, non essendo presenti momenti esterni in tale direzione; invece la componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione, dovuta alla particella, viene annullata nell'urto dal momento esplicato dai supporti dell'asta che vincolano l'asse di rotazione. La componente del momento angolare lungo la direzione di rotazione L_i prima dell'urto, vale:



$$L_i = I\omega = \frac{1}{12} m_1 l^2 \omega,$$

essendo $I = (1/12) m_1 l^2$; mentre dopo l'urto:

$$L_f = \left[I + m_2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \omega_f = \left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{1}{4} m_2 l^2 \right) \omega_f = \frac{1}{12} (m_1 + 3m_2) l^2 \omega_f .$$

Siccome:

$$L_i = L_f ,$$

sostituendo si ha:

$$\omega_f = \frac{m_1}{m_1 - 3m_2} \omega .$$