CAPITULO 6 "DISTRIBUCIONES MUESTRALES"

MUESTRAS ALEATORIAS

PARA DEFINIR UNA MUESTRA ALEATORIA, SUPONGAMOS QUE x ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA $f(x)$. EL CONJUNTO DE n OBSERVACIONES x_1, x_2, ..., x_n, TOMANDO COMO BASE EN LA VARIABLE ALEATORIA x Y CON RESULTADOS NUMÉRICOS x_1, x_2, ..., x_n SE LLAMA MUESTRA ALEATORIA SI LAS OBSERVACIONES SE OBTIENEN OBSERVANDO x DE MANERA INDEPENDIENTE BAJO CONDICIONES INVARIABLES n VECES. SE APRECIA QUE LAS OBSERVACIONES x_1, x_2, ... , x_n EN UNA MUESTRA ALEATORIA SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON LA MISMA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA $f(x)$. ESTO ES, LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES DE x_1, x_2, ... , x_n SON $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$, RESPECTIVAMENTE, Y POR INDEPENDENCIA, LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA CONJUNTA DE LA MUESTRA ALEATORIA ES:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$$

DEFINICIÓN

x_1, x_2, ... , x_n ES UNA MUESTRA ALEATORIA DE TAMAÑO n SI:

a) **LAS x SON VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES, Y**
b) **CADA OBSERVACIÓN x_1 TIENE LA MISMA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.**

PARA ILUSTRAR ESTA DEFINICIÓN, SUPONGA QUE ESTAMOS INVESTIGANDO LA RESISTENCIA AL ESTALLAMIENTO DE BOTELLAS DE VIDRIO CON CAPACIDADA PARA UN LITRO, Y QUE DICHA RESISTENCIA SE DISTRIBUYE DE MANERA NORMAL EN LA POBLACIÓN DE BOTELLAS. ESPERARÍAMOS ENTONCES QUE CADA UNA DE LAS OBSERVACIONES DE RESISTENCIA AL ESTALLAMIENTO x_1, x_2, ... , x_n EN UNA MUESTRA ALEATORIA DE n BOTELLAS

FUERA UNA VARIABLE ALEATORIA INDEPENDIENTE CON EXACTAMENTE LA MISMA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

NO SIEMPRE ES FÁCIL OBTENER UNA MUESTRA ALEATORIA. ALGUNAS VECES PODEMOS UTILIZAR TABLAS DE NÚMEROS ALEATORIOS UNIFORMES. EN OTRAS OCASIONES EL INGENIERO O EL CIENTÍFICO ES INCAPAZ DE USAR FÁCILMENTE PROCEDIMIENTOS FORMALES PARA AYUDAR A ASEGURARA LA ALEATORIEDAD, ASÍ QUE TIENE QUE CONFIAR EN OTROS MÉTODOS DE SELECCIÓN. UNA MUESTRA DE JUICIO ES AQUELLA QUE SE ELIGE A PARTIR DE LA POBLACIÓN MEDIANTE EL CRITERIO OBJETIVO DE UN INDIVIDUO. PUESTO QUE NI EL COMPORTAMIENTO ESTADÍSTICO DE LAS MUESTRAS DE JUICIO PUEDEN DESCRIBIRSE, DEBE EVITARSE ESTE MECANISMO DE SELECCIÓN.

EJEMPLO:

SUPONGA QUE, A PARTIR DE 25 LOTES DE CIERTA MATERIA PRIMA, DESEAMOS TOMAR UNA MUESTRA ALEATORIA DE 5 LOTES. PODEMOS NUMERAR LOS LOTES CON LOS ENTEROS 1 A 25. DESPUÉS DE ESTO SE ELIGE ARBITRARIAMENTE DE UNA TABLA DE <u>NÚMEROS ALEATORIOS</u> UNA FILA Y UNA COLUMNA COMO PUNTO DE PARTIDA. SE LEE HACIA ABAJO LA COLUMNA ELEGIDA, PARA OBTENER 2 DÍGITOS CADA VEZ HASTA ENCONTRAR 5 NÚMEROS ACEPTABLES (UN NÚMERO ACEPTABLE ES AQUEL ENTRE 1 Y 25). COMO EJEMPLO, CONSIDERE QUE EL PROCESO ANTERIOR BRINDA ESTA SECUENCIA DE NÚMEROS: 37, 48, 55, <u>2</u>, <u>17</u>, 61, 70, 43, <u>21</u>, 82, 73, <u>13</u>, 60, <u>25</u>. LOS NÚMEROS SUBRAYADOS ESPECIFICAN QUÉ LOTES DE MATERIA PRIMA SE VAN A ELEGIR COMO MUESTRA ALEATORIA.

<u>ESTADÍSITICAS Y DISTRIBUCIONES MUESTRALES</u>

UNA ESTADÍSTICA ES CUALQUIER FUNCIÓN DE LAS OBSERVACIONES EN UNA MUESTRA ALEATORIA, QUE NO DEPENDE DE PARÁMETROS DESCONOCIDOS. EL PROCESO

DE EXTRAER CONCLUSIONES EN TORNO A POBLACIONES CON BASE EN DATOS MUESTRALES UTILIZA EN FORMA CONSIDERABLE LAS ESTADÍSTICAS. LOS PROCEDIMIENTOS REQUIEREN QUE ENTENDAMOS EL COMPORTAMIENTO PROBABILÍSTICO DE CIERTAS ESTADÍSTICAS. EN GENERAL, LLAMAMOS DISTRIBUCIÓN MUESTRAL A LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA DE UNA ESTADÍSTICA. HAY VARIAS DISTRIBUCIONES DE MUESTREO IMPORTANTES QUE SE UTILIZARÁN MUCHO.

FORMALMENTE, UNA ESTADÍSTICA SE DEFINE COMO UN VALOR DETERMINADO POR UNA FUNCIÓN DE LOS VALORES OBSERVADOS EN UNA MUESTRA. POR EJEMPLO, SI x_1, x_2, ... , x_n REPRESENTAN LOS VALORES OBSERVADOS EN UNA MUESTRA DE PROBABILIDAD DE TAMAÑO n DE UNA VARIABLE ALEATORIA SIMPLE x, $\bar{x}$ Y S^2, COMO SE DESCRIBIÓ EN LAS ECUACIONES ANTERIORES, SON ESTADÍSTICAS. ADEMÁS, LO MISMO ES VALIDO PARA LA MEDIANA, LA MODA, EL RANGO DE LA MUESTRA, LA MEDIDA DEL SESGO DE LA MUESTRA Y LA CURTOSIS DE LA MUESTRA. OBSERVE QUE LAS LETRAS MAYÚSCULAS QUE SE USAN HACEN REFERENCIA A LAS VARIABLES ALEATORIAS, NO A RESULTADOS NUMÉRICOS ESPECÍFICOS.

MUESTREO ALEATORIO SIMPLE DE UN UNIVERSO FINITO

CUANDO SE EXTRAE UNA MUESTRA DE n OBJETOS SIN REEMPLAZO DE UN UNIVERSO DE TAMAÑO N, HAY $\binom{N}{n}$ POSIBLES MUESTRAS, SI LAS PROBABILIDADES DE QUE SE SELECCIONEN SON $\pi_k = 1/\binom{N}{n}$ PARA k = 1, 2, ..., $\binom{N}{n}$, SIGNIFICA QUE ESTE ES UN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE. OBSERVE QUE CADA UNIDADA DEL UNIVERSO APARECE EN EXACTAMENTE $\binom{N-1}{n-1}$ DE LAS MUESTRA POSIBLES, ASÍ QUE CADA UNIDAD TIENE UNA PROBABILIDAD DE $\binom{N-1}{n-1}/\binom{N}{n}$ = n/N DE SER INCLUIDA.

COMO VEREMOS PARA ESTIMAR LA MEDIA O EL TOTAL DE LA POBLACIÓN FINITA, ES MÁS "EFICIENTE" EL MUESTREO

SIN REEMPLAZO QUE EL MUESTREO CON REEMPLAZO; SIN EMBARGO, ANALIZAREMOS BREVEMENTE EL MUESTREO ALEATORIO SIMPLE CON REEMPLAZO PARA TENER UNA BASE DE COMPARACIÓN. EN ESTE CASO HAY N^n MUESTRAS POSIBLES Y CADA UNA TIENE UNA PROBABILIDAD $\pi_k = 1/N^n$, PARA $k = 1, 2, ..., N^n$ DE SER SELECCIONADA. EN ESTE CASO, LA UNIDAD DEL UNIVERSO PUEDE NO PERTENECER A MUESTRA ALGUNA, O ESTAR EN n MUESTRAS, ASÍ QUE EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD DE INCLUSIÓN PIERDE IMPORTANCIA; SIN EMBARGO, SI CONSIDERAMOS LA PROBABILIDADA DE QUE UNA UNIDAD ESPECÍFICA SE SELECCIONE AL MENOS UNA VEZ, LO QUE OBVIAMENTE ES IGUAL A $1 - (1 - (1/N))^n$, YA QUE PARA CADA UNIDAD LA PROBABILIDADA DE SER SELECCIONADA EN UNA OBSERVACIÓN DADA ES 1/N, QUE ES UNA CONSTANTE, Y LAS n SELECCIONES SON INDEPENDIENTES, ESTAS OBSERVACIONES PUEDEN CONSIDERARSE ENSAYOS DE BERNOULLI.

EJEMPLO:

CONSIDERE UN UNIVERSO QUE CONSISTE EN CINCO UNIDADES NUMERADAS 1,2 , 3, 4, 5. EN EL MUESTREO SIN REEMPLAZO EMPLEAMOS UNA MUESTRA DE TAMAÑO 2 Y ENUMERAMOS LAS MUESTRAS POSIBLES COMO (1,2), (1,3), (1,4),(1,5), (2,3),(2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)

OBSERVESE QUE HAY $\binom{5}{2}$ = 10 MUESTRAS POSIBLES. SI SELECCIONAMOS UNA DE ESTAS, Y CADA UNA TIENE ASIGNADA UNA PROBABILIDAD DE SELECCIÓN DE 0.1, ESTAMOS HACIENDO UN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE. CONSIDERE QUE ESTAS POSIBLES MUESTRAS ESTAN NUMERADAS COMO 1,2,..,0, DONDE 0 REPRESENTA AL NUMERO 10. AHORA VAYAMOS A LA TABLA DE NUMEROS ALEATORIOS, EN DONDE SE LISTAN LOS ENTEROS ALEATORIOS, Y ELIJA UNO AL AZAR. LEA EL PRIMER DIGITO DE LOS CINCO ENTEROS QUE SE PRESENTAN. SUPONGA QUE SE SELCCIONA EL ENTERO QU EL RENGLÓN 7 DE LA COLUMNA 4. EL PRIMER NÚMERO ES 6, ASÍ QUE LA

MUESTRA CONSISTE EN UNIDADES 2 Y 4. UNA ALTERNATIVA AL USAR LA TABLA, ES LANZAR UN DADO ICISAEDRO Y SELECCIONAR LA MUESTRA QUE SE SEÑALE EL RESULTADO. OBSERVESE TAMBIEN QUE CADA UNIDADA APARECE EXACTANMENTE EN CUATRO DE LAS MUESTRAS POSIBLES; POR LO TANTO, LA PROBABILIDADA DE QUE INCLUYA CADA NÚMERO ES DE 0.4, O SIMPLEMENTE $n/N = 2/5$.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL.

SI UNA VARIABLE ALEATORIA Y ES LA SUMA DE n VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES QUE SATISFACEN CIERTAS CONDICIONES GENERALES, PARA n SUFICIENTEMENTE GRANDE, Y SE ENCUENTRA APROXIMADAMENTE DISTRIBUIDA EN FORMA NORMAL. ENUNCIAMOS ESTO COMO UN TEOREMA, EL MÁS IMPORTANTE EN MATERÍA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA:

TEOREMA 1

SI $x_1, x_2, ..., x_n$ ES UNA SECUENCIA DE n VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES CON $E(x_I) = \mu_i$ Y $V(x_i) = \sigma_i^2$ (AMBAS FINITAS) Y $y = x_1, x_2, ..., x_n$, EN CIERTAS CONDICIONES GENERALES,

$$Z_n = \frac{y - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

TIENE UNA DISTRIBUCION N(0,1) APROXIMADA CONFORME n SE ACERCA A INFINITO. SI F_n ES LA FUNCION DE DISTRIBUCIÓN DE Z_n, ENTONCES:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n(z)}{\Phi(z)} = 1, \text{ PARA TODA } z.$$

LAS "CONDICIONES GENERALES" MENCIONADAS EN EL TEOREMA SE RESUMEN DE MANERA INFORMAL COMO SIGUE: LOS TÉRMINOS x_i, TOMADOS DE MODO INDIVIDUAL, CONTRIBUYEN CON UNA CANTIDADA INSIGNIFICANTE A LA VARIANCIA DE LA SUMA, Y ES IMPROBABLE QUE UN SOLO TERMINO CONTRIBUYA DE MANERA CONSIDERABLE A LA SUMA.

LA PRUEBA DE ESTE TEOREMA, ASÍ COMO UN ANALISIS RIGUROSO DE LAS SUPOSICIONES NECESARIAS, ESTÁN MÁS ALLÁ DEL ALCANCE. DEBEMOS HACER, SIN EMBARGO, VARIAS OBSERVACIONES. EL HECHO DE QUE y ESTÉ APROXIMADAMENTE DISTRIBUIDA EN FORMA NORMAL CUANDO LOS TERMINOS X_i PUEDEN TENER, EN ESENCIA, CUALQUIER DISTRIBUCION, ES LA RAZON FUNDAMENTAL POR LA QUE LA DISTRIBUCION NORMAL ES IMPORTANTE. EN NUMEROSAS APLICACIONES, LA VARIABLE ALEATORIA QUE SE ESTA CONSIDERENDO PUEDE REPRESENTARSE COMO LA SUMA DE n VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES, ALGUNAS DE LAS CUALES PUEDEN SER ERRORES DE MEDICIÓN, PUEDE DEBERSE A CONSIDERACIONES FISICAS, ETC., Y POR ELLO LA DISTRIBUCION NORMAL OFRECE UNA BUENA APROXIMACION.

UN CASO ESPECIAL DEL TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE SURGE CUANDO CADA UNA DE LAS COMPONENTES TIENEN LA MISMA DISTRIBUCIÓN.

TEOREMA 2

SI x_1, x_2, ..., x_n ES UNA SECUENCIA DE n VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES Y DISTRIBUIDAS IDENTICAMENTE CON $E(x_i) = \mu$ Y $V(x_i) = \sigma^2$, Y $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$, ENTONCES :

$$Z_n = \frac{y - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

TIENE UNA DISTRIBUCION APROXIMADA N(0,1) EN EL MISMO SENTIDO EN LA ECUACION ANTERIOR QUE HACE REFERENCIA AL LIMITE.

CON LA RESTRICCION DE QUE $M_X(t)$ EXISTE PARA t REAL, PUEDE PRESENTARSE UNA PRUEBA DIRECTA PARA ESTA FORMA DEL TEOREMA DEL LIMITE CENTRAL.

¿QUÉ TAN GRANDE DEBE SER n PARA OBTENER RESULTADOS RAZONABLES UTILIZANDO LA DISTRIBUCIÓN NORMAL PARA APROXIMAR LA DISTRIBUCION DE y?

PARA RESPONDER HAY QUE TOMAR EN CUENTA LAS CARACTERISTICAS DE LA DISTRIBUCION DE LOS TERMINOS DE x_i, ASÍ COMO DEL SIGNIFICADO DE "RESULTADOS RAZONABLES". DESDE UN PUNTO DE VISTA PRACTICO, ALGUNAS REGLAS EMPIRICAS IMPERFECTAS PUEDEN DARSE EN CASO DE QUE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS TERMINOS DE x_i ENTRE EN UNO DE LOS TRES GRUPOS SIGUIENTES, SELECCIONADOS DE MANERA ARBITRARIA:

1. **BUEN COMPORTAMIENTO. LA DISTRIBUCION DE x_i NO SE DESVIA DE MANERA RADICAL DE LA DISTRIBUCION NORMAL. HAY UNA DENSIDAD EN FORMA DE CAMPANA QUE ES CASI SIMETRICA. EN ESTE CASO, LOS PROFESIONALES DEL CONTROL DE CALIDAD Y OTRAS AREAS EN DONDE SE APLICA ESTE TEOREMA, HAN ENCONTRADO QUE n DEBE SER AL MENOS 4. ESTO ES, $n \geq 4$.**
2. **COMPORTAMIENTO MODERADO. La distribución de Xi NO TIENE UN MODO PROMINENETE Y SE PARECE MUCHO A UNA DENSIDAD UNIFORME. EN ESTE CASO, n>12 ES UNA REGLA GENERAL DE USO FRECUENTE.**
3. **COMPORTAMIENTO NOCIVO. LA DISTRIBUCIÓN TIENE LA MAYOR PARTE DE SU MEDIDA EN LOS EXTREMOS. EN**

ESTE CASO, ES MÁS DIFÍCIL ESTABLECER UN VALOR; SIN EMBARGO, EN MUCHAS APLICACIONES PRÁCTICAS n $\geq$ 100 DEBE SER SATISFACTORIO.

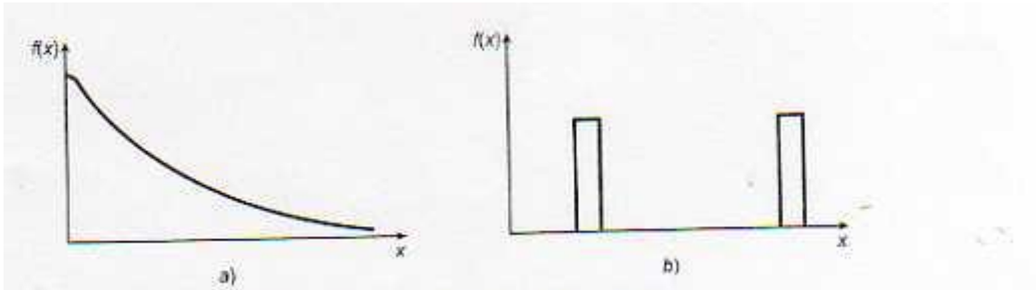


Figura 7-9 Distribuciones de comportamiento nocivo.

EJEMPLO

SE EMPACAN 250 PIEZAS PEQUEÑAS EN UNA CAJA. EL PESO DE CADA PIEZA ES UNA VARIABLE ALEATORIA INDEPENDIENTE CON MEDIA DE 0.5 LIBRAS Y DESVIACION ESTANDAR DE 0.10 LIBRAS. SE CARGAN 20 CAJAS EN UNA TARIMA. SUPONGA QUE DESEAMOS ENCONTRAR LA PROBABILIDADA DE QUE LAS PIEZAS EN LA TARIMA EXCEDAN 2510 LIBRAS DE PESO. (NO TOME EN CUENTA EL PESO DE LA TARIMA, NI EL DE LA CAJA).

DEJEMOS QUE:

$$Y = x_1, x_2, ..., x_{5000}$$

REPRESENTE EL PESO TOTAL DE LAS PIEZAS, POR LO QUE :

$$\mu_y = 5000(0.5) = 2500$$

$$\sigma_y^2 = 5000(0.01) = 50$$

Y

$$\sigma_y = \sqrt{50} = 7.071$$

POR LO TANTO

$$P\,(\,y > 2510\,) = P\left(z > \frac{2510-2500}{7.071}\right) = 1 - \Phi\ (1.41) = 0.08$$

OBSERVE QUE NO CONOCEMOS LA DISTRIBUCION DE LOS PESOS DE LAS PIEZAS INDIVIDUALES.

Ejemplo 2

EN UN PROYECTO DE CONSTRUCCIÓN SE HA ELABORADO UNA RED DE LAS ACTIVIDADES PRINCIPALES, DE MANERA QUE SIRVA COMO BASE PARA LA PLANIFICACIÓN Y PROGRAMACIÓN. UNA TRAYECTORIA CRITICA ESTA COMPUESTA POR 16 ACTIVIDADES. LAS MEDIAS Y LAS VARIANCIAS SE DAN EN LA SIGUIENTE TABLA:

AC	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	143	15	16
μ	2.7	3.2	4.6	2.1	3.6	5.2	7.1	1.5	3.1	4.2	3.6	0.5	2.1	1.5	1.2	2.8
σ^2	1	1.3	1	1.2	0.8	2.1	1.9	0.5	1.2	0.8	1.6	0.2	0.6	0.7	0.4	0.7

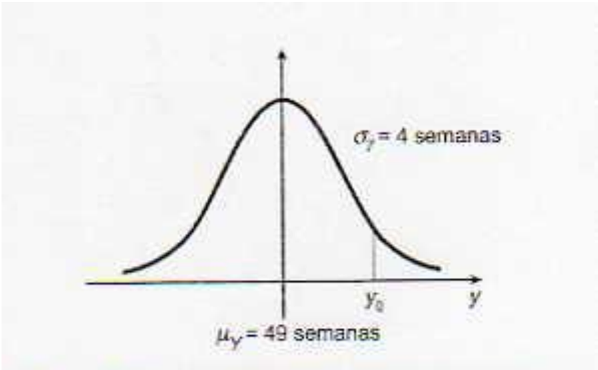


Figura 7-10 Distribución de tiempos de proyecto.

LOS TIEMPOS DE LAS ACTIVIDADES PUEDEN CONSIDERARSE INDEPENDIENTES, Y EL TIEMPO DEL PROYECTO ES LA SUMA DE LOS TIEMPOS DE LAS ACTIVIDADES EN LA TRAYECTORIA CRITICA, ESTO ES, Y = X1 + X2 + ... + X16, DONDE Y ES EL TIEMPO DEL PROYECTO, Y Xi ES EL TIEMPO CORRESPONDIENTE A LA ACTIVIDAD i-

ésima. AUNQUE SE DESCONOCEN LAS ACTIVIDADES DE Xi, LAS DISTRIBUCIONES TIENEN COMPORTAMIENTO DE MODERADO A BUENO. AL CONTRATISTA LE GUSTARIA SABER:

a) **EL TIEMPO DE FINALIZACION ESPERADO, Y**
b) **UN PROYECTO EN TIEMPO CORRESPONDIENTE A UNA PROBABILIDADA DE 0.90 DE TENER EL PROYECTO TERMINADO.**

AL CALCULAR μ_y Y σ_y^2, OBTENEMOS :

$$\mu_y = 49 \text{ SEMANAS}$$
$$\sigma_y^2 = 16 \text{ SEMANAS}$$

EL TIEMPO DE FINALIZACION ESPERADO PARA EL PROYECTO ES, EN CONSECUENCIA, DE 49 SEMANAS. PARA DETERMINAR EL TIEMPO y_0 TAL QUE LA PROBABILIDAD DE TERMINAR EL PROYECTO EN ESE TIEMPO SEA 0.9, LA FIGURA SIGUIENTE PUEDE SER UTIL

PODEMOS CALCULAR

$$P(Y < y_0) = 0.90$$

O

$$P\left(Z < \frac{Y_0 - 49}{4}\right) = 0.90$$

POR LO QUE

$$\frac{Y_0 - 49}{4} = 1.282 = \Phi^{-1}(0.90)$$

Y

$$Y_0 = 49 + 1.282(4) = 54.128 \text{ SEMANAS}$$

DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA

SEAN Z_1, Z_2, ..., Z_K VARIABLES ALEATORIAS DISTRIBUIDAS NORMAL E INDEPENDIENTEMENTE, CON MEDIA $\mu=0$ Y VARIANCIA $\sigma^2 = 1$. POR LO TANTO, LA VARIABLE ALEATORIA:

$$x^2 = z^2_1 + z^2_2 + \dots + z^2_k$$

TIENE LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

$$f(u) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} u^{(k/2)-1} e^{-u/2}, u > 0$$

$$= 0, \qquad \text{EN OTRO CASO}$$

Y SE DICE QUE SIGUE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA CON k GRADOS DE LIBERTAD, LO QUE ABREVIA COMO x^2_k.

LA MEDIA ES :

$$\mu = k$$

LA VARIANCIA ES :

$$\sigma^2 = 2k$$

EN LA SIGUIENTE FIGURA 1 SE MUESTRAN VARIAS DISTRIBUCIONES JI CUADRADA. OBSERVE QUE LA VARIABLE ALEATORIA JI CUADRADA ES NO NEGATIVA, Y QUE LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADA ES SESGADA HACIA LA DERECHA; SIN EMBARGO, A MEDIDA QUE k AUMENTA, LA DISTRIBUCIÓN SE VUELVE MÁS SIMÉTRICA. CUANDO k $\to \infty$

LA FORMA LIMITE DE LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA ES LA DISTRIBUCIÓN NORMAL.

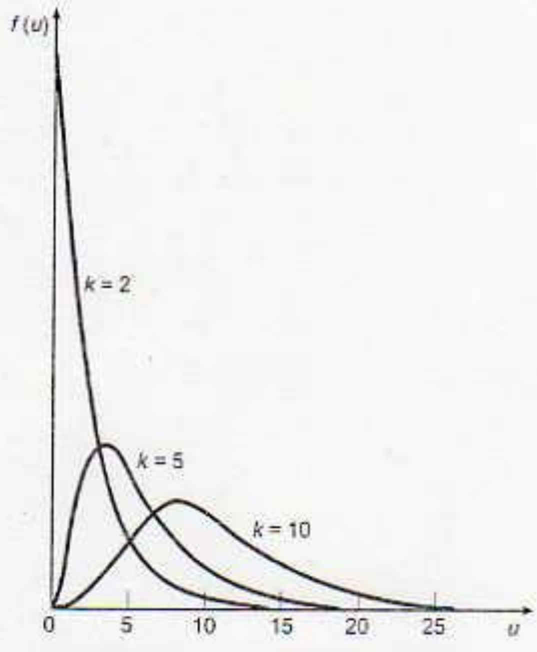


Figura 9-1 Varias distribuciones χ^2.

LOS PUNTOS PORCENTUALES DE LA DISTRIBUCIÓN x^2_k SE DAN EN LA TABLA. DEFINASE $x^2_{\alpha,k}$ COMO EL PUNTO PORCENTUAL O VALOR DE LA VARIABLE ALEATORIA JI CUADRAD CON k GRADOS DE LIBERTAD, TAL QUE LA PROBABILIDAD DE QUE x^2_k EXCEDA ESE VALOR ES α. ESTO ES :

$$P\left\{ x^2_k \geq x^2_{\alpha,k} \right\} = \int_{x2\alpha,k}^{\infty} f(u)du = \alpha$$

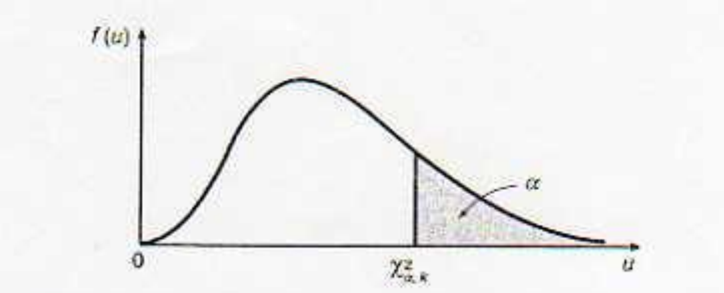


Figura 9-2 Punto porcentual $\chi^2_{\alpha,k}$ de la distribución ji cuadrada.

ESTA PROBABILIDADA SE MUESTRA COMO AREA SOMBREADA EN LA FIGURA 9-2.

PARA ILUSTRARA EL EMPLEO DEL EMPLEO DE LA TABLA, OBSERVE QUE:

$$P\left\{ x^2_{10} \geq x^2_{0.05,10} \right\} = P\left\{ x^2_{10} \geq 18.31 \right\} = 0.05$$

ESTO ES, EL PUNTO PORCENTUAL 5 DE LA DISTRIBUCION JI CUADRADA CON 10 GRADOS DE LIBERTAD ES $x^2_{0.05,10} = 18.31$

AL IGUAL QUE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL, LA DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA TIENE UNA PROPIEDAD REPRODUCTIVA.

DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

SI z ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTANDAR Y v ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN JI CUADRADA CON n GRADOS DE LIBERTAD, ENTONCES, SI z Y v SON INDEPENDIENTES :

$$t = \frac{z}{\sqrt{v/n}}$$

ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN :

$$\mathbf{f\,(t)} = \frac{\Gamma\,((n+1)/2)}{\Gamma\,(v/2)\,\sqrt{n\pi}}\;(1 + t^2/v)^{-((v+1)/2)}$$

CONOCIDA COMO DISTRIBUCIÓN t CON n GRADOS DE LIBERTAD.

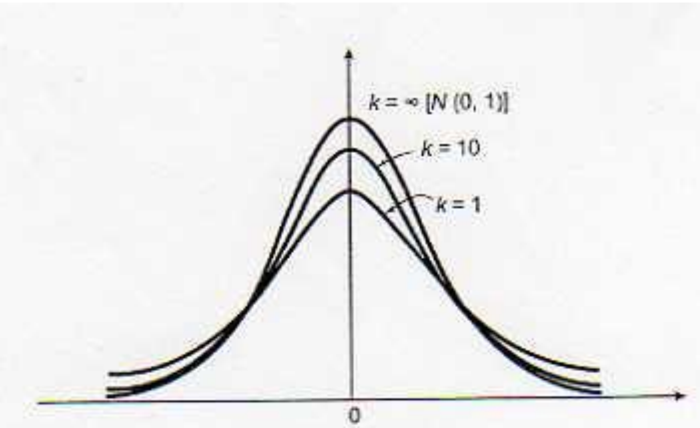


Figura 9-3 Varias distribuciones *t*.

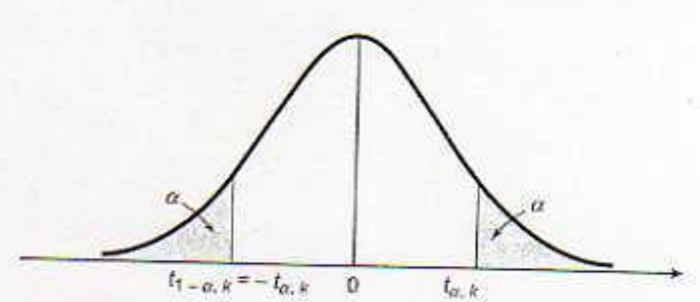


Figura 9-4 Puntos porcentuales de la distribución *t*.

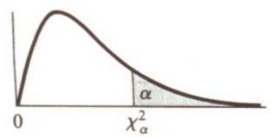
PARA ILUSTRAR EL EMPLEO DE LA TABLA:

$$P\left\{\,T \geq t_{0.05,10}\,\right\} = P\left\{\,T \geq 1.812\,\right\} = 0.05$$

POR LO TANTO, EL PUNTO PORCENTUAL 5 SUPERIOR DE LA DISTRIBUCION t CON 10 GRADOS DE LIBERTAD ES $t_{0.05,10}$ = 1.812. DE MODO SIMILAR, EL PUNTO DE LA COLA INFERIOR $t_{0.95,10}$ = -1.812.

TABLAS

Tabla 6. Puntos porcentuales de las distribuciones χ^2



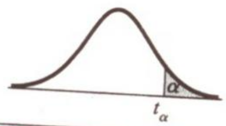
g.l.	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.990}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

Tabla 6. (*Continuación*)

$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$	g.l.
2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	1
4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	2
6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	3
7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	4
9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	5
10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	6
12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	7
13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	8
14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	9
15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	10
17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	11
18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	12
19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	13
21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	14
22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	15
23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	16
24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	17
25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	18
27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	19
28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	20
29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	21
30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	22
32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	23
33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	24
34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	25
35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	26
36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	27
37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	28
39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	29
40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	30
51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	40
63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	50
74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	60
85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	70
96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	80
107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	90
118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	100

Tomada de Catherine M. Thompson, "Tables of the Percentage Points of the χ^2-Distribution", *Biometrika*, vol. 32, 1941, pp. 188-189. Reproducida con la autorización del profesor E. S. Pearson.

Tabla 5. Puntos porcentuales de las distribuciones *t*



$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	g.l.
3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

Tomada de "Table of Percentage Points of the *t*-Distribution". Calculada por Maxine Merrington, *Biometrika*, vol. 32, 1941, p. 300. Reproducida con la autorización del profesor E. S. Pearson.