FRANCZIA TAMÁS

A KVANTUMMECHANIKAI IMPULZUS ELTOLÁSI SZIMMETRIÁVAL TÖRTÉNŐ BEVEZETÉSÉRŐL II.

Abstract: In this paper we continue building up the system of the axioms, theorems and definitions necessary to introduce the quantum-mechanical momentum with the method of moving symmetry. As the theorems given in this paper are well-known from the literature their verifications are omitted and the reader is referred to the corresponding literature. We introduce the wave-function the norm of which is equal to the Dirac-delta function with a new, axiomatic method.

Ez a dolgozat egy tanulmány második része*, mely tanulmány célja egy lehetséges módszert adni a kvantummechanikai impulzusnak a címben jelzett úton történő bevezetéséhez az egyetemi oktatás szemináriumai számára.

* Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetésről I. Tudományos Közlemények, Eger, 1985.

A fizikai mennyiségek szimmetriákkal történő bevezetésekor a kvantummechanikai axiómák, tételek és definíciók sorrendje valamelyest el kell, hogy térjen az egyetemi oktatásban megszokottól, esetenként új axiómákat, tételeket és definíciókat kell alkotnunk, a hagyományos felépítés néhány axiómája pedig tétellé válik. (Pl.: A Heisenberg-féle felcserélési relációk). Bizonyos axiómák kimondását pedig éppen a szimmetriák motiválják.

A tanulmány első részében a kvantummechanikai impulzus szimmetriával való bevezetéséhez szükséges axióma-, definíció- és tételrendszer első részét közöltük, az alábbiakban folytatjuk a szükséges axiómák, tételek és definíciók megadását.

A tanulmány első részében bevezettük az 1-re normált ψ - függvényt, melyet a továbbiakban állapotfüggvénynek nevezünk, és ennek birtokában az (1) egyenletet, melyet állapotegyenletnek, másképpen időtől függő Schrödinger-egyenletnek hívunk. Jelen munkában viszont az (1) egyenlet segítségével adjuk meg az 1-re nem normálható ψ-függvény fogalmát. Ehhez előrebocsátjuk az első rész néhány következményét.

Ha a III. axiómában létezőnek posztulált részhalmazok közül kiválasztunk egy tetszőleges részhalmazt, akkor teljesül az, hogy a részhalmaz minden egyes elemének tetszőleges konfigurációs térbeli ponthoz, tetszőleges időpillanathoz tartozó megtalálási valószínűsége egyenlő az adott részhalmazhoz a III. axióma alapján rendelt ψ-függvényből képzett $\psi^{*}\psi\, dv_{konf.}$ kifejezésnek a tetszőlegesen választott konfigurációs térbeli pontban és a tetszőlegesen választott időpontban felvett értékével. Ha most a részhalmazon belüli elemek megtalálási valószínűségeit az egyes elemekhez, azaz magukhoz a kvantummechanikai rendszerekhez rendelt ψ_k -függvényekkel akarjuk kifejezni, ez megtehető, ha a ψ_k -k csak egy-egy egységnyi abszolut értékű komplex szorzótényezővel különböznek a részhalmazhoz rendelt ψ -től, és így egymástól is. Mivel a $\psi^*\psi$ és így a $\psi_k^* \psi_k$ kifejezések valószínűségi sűrűségfüggvények, határozatlan konstansokat, határozatlan függvényeket a tetszőleges egységnyi abszolut értékű komplex szorzótényezőtől eltekintve nem tartalmazhatnak. Mivel a IV. axióma következtében ki kell, hogy elégítsék az (1) egyenletet, ezen egyenlet egy tetszőleges egységnyi abszolut értékű szorzótényezőt tartalmazó, folytonos és egyértékű, valamint egységre normált megoldásainak tekinthetők. A pusztán egységnyi abszolut értékű szorzótényezőben való eltérés miatt az (1) egyenletet ugyanazzal a

$$V\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t\right)$$

függvénnyel elégíti ki mindegyikük, hiszen egy tetszőleges, valós φ -t tartalmazó $e^{i\varphi}\psi$ alakú megoldásban foglalhatók össze, mely megoldás az unicitási tétel következtében nem lehet folytonos, egyértékű és egyre normált megoldása egy másik V függvényt tartalmazó, egyébként (1)-alakú egyenletnek. Mindezek miatt az (1) egyenlet bal oldalán lévő operátor nemcsak a részhalmazhoz, hanem annak minden egyes eleméhez is változtatás nélkül, ugyanazzal a $V\left(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t\right)$ függvénnyel hozzárendelhető. Ennek következtében nevezhettük az (1) egyenlet bal oldalán lévő operátort egyetlen rendszer Hamilton-operátorának az 5. definícióban.

Ezután hasonlítsuk össze a különböző részhalmazokhoz tartozó 1-re normált állapotfüggvényű rendszerek Hamilton-operátorait. Két különböző részhalmazból származó rendszer Hamilton-operátorai lehetnek megegyezőek, hiszen egy Hamilton-operátorhoz a parciális differenciálegyenletek elmélete szerint az (1) egyenletnek végtelen sok folytonos, egyértékű és egyre normálható megoldása tartozik. Ugyanakkor a két Hamilton-operátor lehet különböző is, ami triviális. Mivel a II. axióma rendszerei részecsketípusonként egyenlő számú részecskét tartalmaznak, a II. axióma halmazainak Hamilton-operátoraiban egyforma a parciális deriváltakat tartalmazó operátorösszeg és a részecskék közötti kölcsönhatás következtében fellépő $V_I\left[x_i-x_k,\ y_i-y_k,\ z_i-z_k\right]$ tag. $(i,k = 1,2,\ldots N;$ és $i \neq k)$.

A különbözőséget a külső erőtér hatása miatt fellépő $V_j\left[x_j, y_j, z_j, t\right]$ tagok különbözősége okozhatja csak.

V. axióma: A II. axióma szerint létező halmaznak meghatározott feltétel teljesülése esetén vannak olyan valódi részhalmazai is, melyek elemeinek létezik ugyan egyértelműen meghatározott megtalálási valószínűsége a konfigurációs tér minden egyes pontjában bármelyik időpillanatban, azonban ez a valószínűség nem adható meg $\psi^*\psi\, dv$ alakban. A meghatározott feltétel a következő. Ha a részecskék mágneses momentumától, mint az eddigiekben, továbbra is eltekintünk -- így egy rendszer részecskéi csak elektromos töltésük következtében vannak kölcsönhatásban egymással, illetve külső erőterekkel -- s ennek megfelelően megadjuk a halmaz minden egyes egymástól különböző, az egyes rendszerekre vonatkozó klasszikus mechanikai potenciális energiafüggvényét, majd ezt az (1) egyenlet $V\left[x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t\right]$ függvényének helyébe téve meghatározzuk az (1) egyenlet megoldáshalmazát, e megoldáshalmaznak tartalmaznia kell olyan egymástól lineárisan független függvényeket, melyekre $\int_{\infty} \psi^{*}_{k'} \psi_{k} dv$ $= \delta(k'-k)$, ahol $\delta(k'-k)$ a Dirac-féle deltafüggvény.

7. definíció: Az (1) egyenlet fenti tulajdonságú megoldásait Dirac-deltára normált megoldásoknak nevezzük.

VI. axióma: Az V. axióma Dirac-deltára normált függvényei egyenként hozzárendelhetők az V. axiómában létezőnek posztulált speciális tulajdonságú részhalmazok közül egy-egy részhalmazhoz. A hozzárendelés módja a következő. Valamely részhalmazhoz hozzárendelt, Dirac-deltára normált ψ függvényből képzett $\psi^{*}\psi\, dv$ kifejezés arányos annak valószínűségével, hogy az adott részhalmaz tetszőlegesen kiválasztott eleme az adott időpillanatban megtalálható a konfigurációs tér adott pontjában. A Dirac-deltára normált és valamely részhalmazhoz a fenti módon hozzárendelt ψ -függvényt az illető részhalmazon belüli rendszerek állapotfüggvényének nevezzük.

8. definíció: Ugyanazon konfigurációs téren értelmezett két állapotfüggvény skaláris szorzatának nevezzük az $\int_{\infty} \psi_1^{*} \psi_2 dv \equiv \left(\psi_1, \psi_2\right)$ integrált.

A skaláris szorzás tulajdonságaira nézve ld. [1] old.

1. tétel: A négyzetesen integrálható állapotfüggvények halmaza megszámlálhatóan végtelen dimenziójú Hilbert-teret alkot. [2]

VII. axióma: Egy N részecskéből álló rendszer egészét jellemző bármilyen fizikai mennyiség lehetséges értékei fizikai mennyiségenként egy-egy meghatározott, a 3N-dimenziójú konfigurációs téren és az időn értelmezett állapotfüggvények halmazának elemeire ható lineáris hermitikus operátor sajátértékeivel egyeznek meg.

9. definíció: Az $\hat{O}$ operátor "k_n" sajátértékét (f_n-1)-szeresen elfajultnak (degeneráltnak) nevezzük, ha e sajátértékhez f_n számú, egymástól lineárisan független sajátfüggvény tartozik.

2. tétel: (Riesz-Fischer-tétel) A megszámlálhatóan végtelen dimenziójú Hilbert-teret kifeszítő függvényeken értelmezett, tisztán diszkrét sajátértéksorozattal rendelkező lineáris hermitikus operátorok sajátfüggvényei teljes rendszert alkotnak, ami azt jelenti, hogy a Hilbert térbe tartozó bármilyen állapotfüggvény felírható e sajátfüggvények lineáris kombinációjaként. Tehát ha $\psi \in$ Hilbert-tér, akkor $\psi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{f_n} c_{nk} \varphi_{nk}$

ahol φ_{nk} az illető operátor n-edik, (f_n-1)-szeresen elfajult sajátértékéhez tartozó k-adik sajátfüggvénye. A kifejtésben szereplő φ_{nk} függvények egymástól lineárisan függetlenek.

3. tétel: Egy csak diszkrét sajátértéksorozattal rendelkező lineáris her-

mitikus operátor sajátfüggvényei, melyek értelmezési tartományául a konfigurációs teret, vagy ezenkívül még az időt tekintjük, kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\left(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}\right) = \text{véges.}$$

$$\left(\varphi_{ij}, \varphi_{kl}\right) = 0, \text{ ha } i \neq k.$$

Itt i és k az i-edik, illetve a k-adik sajátértéket jelöli, j és l pedig azt, hogy ezen sajátértékekhez tartozó melyik sajátfüggvényről van szó.

10. definíció: A $\left(\varphi_{ij}, \varphi_{kl}\right) = 0$, ha $i \neq k$ egyenletet kielégítő függvényeket, azaz a két skalárisan összeszorzott függvényt egymásra ortogonálisnak nevezzük, a $\left(\varphi_{ij}, \varphi_{ij}\right) = 1$ egyenletet kielégítő függvényeket pedig 1-re normáltnak.

4. tétel: A lineáris hermitikus operátorok bármely elfajult sajátértékéhez tartozó, egymástól lineárisan független sajátfüggvények páronként nem feltétlenül ortogonálisak egymásra. (Az egyes sajátfüggvények viszont normáltak, alkalmas szorzótényezővel speciálisan egyre is normálhatók.) [1] , [2]

5. tétel: Tetszőlegesen adott, $\left(f_n - 1\right)$ -szeresen degenerált sajátértékhez tartozó lineárisan független sajátfüggvények összességéből előállítható

pontosan f_n számú olyan lineáris kombináció, mely lineáris kombinációk egymásra páronként ortogonálisak. (Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás) [1] 86. o.

6. tétel: Az 1. tételben felírt sorfejtés c_{mk} együtthatóinak értéke abban az esetben, ha a sorfejtéshez olyan sajátfüggvényrendszert használunk, amelyik ortonormált: *

$$c_{mk} = (\varphi_{mk}, \psi),$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{f_n} (\varphi_{nk}, \psi)\, \varphi_{nk}.$$

A tétel igazolásához $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{f_n} c_{nk}\, \varphi_{nk}$ mindkét oldalát balról skalárisan szorozzuk φ_{mk}-val, majd figyelembe vesszük a φ_{nk} -függvények ortonormáltságát.

7. tétel: Ha ψ 1-re normált eleme a Hilbert-térnek, akkor a fenti sorfejtés felhasználásával bebizonyítható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{f_n} |c_{nk}|^2 = 1, \quad \text{vagy}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{f_n} |(\varphi_{nk}, \psi)|^2 = 1. \tag{2}$$

* Az egy-, illetve kétindexes -függvények a továbbiakban is mindenütt ortogonálisak egymásra. (Schmidt-módszer)

Az említett eredmények egyszerűen specializálhatók arra az esetre, amikor az operátorok sajátértékei között nincs elfajult sajátérték.

VIII. axióma: Annak valószínűsége, hogy egy mérés előtt négyzetesen integrálható állapotfüggvényű rendszeren elvégzett mérés az illető fizikai mennyiség értékére a k_n értéket adja, abban az esetben, amikor a fizikai mennyiséghez tartozó operátor sajátértékei diszkrét sorozatot alkotnak, továbbá a k_n sajátérték $(f_n - 1)$-szeresen degenerált, a következő:

$$\sum_{k=1}^{f_n} |c_{nk}|^2 = \sum_{k=1}^{f_n} \left|(\varphi_{nk}, \psi)\right|^2 .$$

Mivel az egyes sajátértékek mérési eredményként való fellépte egymást kizáró események teljes eseményrendszerét alkotja, ezen események összegének bekövetkezési valószínűsége 1. A (2) egyenlet éppen ezt fejezi ki.

Következmény: (A 7. tételé és a VIII. axiómáé) Ha $\hat{O}\,\psi = k_n \psi$, akkor $\psi \in \{\varphi_{nk}\}$, ahol n a k_n sajátérték sorszáma. Mivel az egyes φ_{nk} függvények ortonormáltak, a (2) összegben csak egy tag lesz zérustól különböző, az melyben $\psi = \varphi_{nk}$. Így az adódik, hogy $\left|(\varphi_{nk}, \psi)\right| = 1$ Ezt összevetve a VIII. axiómával, az adódik, hogy $\hat{O}\,\psi = k_n \psi$ esetén k_n mérési valószínűsége 1.

8. tétel: Ha valamely fizikai mennyiség lehetséges értékei egy diszkrét sajátértéksorozatú, elfajult sajátértékkel is, vagy csak azokkal rendelkező lineáris hermitikus operátor sajátértékei, akkor e fizikai mennyiség várható értéke feltéve, hogy a mérés előtti rendszerek állapotfüggvénye olyan ψ, mely eleme a Hilbert-térnek, a következő: $\bar{O} = \left(\psi, \hat{O}\,\psi\right)$, ahol $\hat{O}$ a fizikai mennyiséget leíró operátor.

Bizonyítás: $\hat{O}$ sajátértékeit jelöljük k_n-nel, a k_n sajátérték mérési valószínűségét $W(k_n)$-nel.

A valószínűségszámítás szerint:

$$\bar{O} = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\, W\left(k_n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sum_{m=1}^{f_n} \left|c_{nm}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sum_{m=1}^{f_n} c_{nm}\, c_{nm}^{*} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sum_{m=1}^{f_n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{f_l} c_{nm}\, c_{ls}^{*} \left(\varphi_{ls}, \varphi_{nm}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{f_n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{f_l} k_n\, c_{nm}\, c_{ls}^{*} \left(\varphi_{ls}, \varphi_{nm}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{f_n} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{f_l} \left(c_{ls}\, \varphi_{ls}, k_n\, c_{nm}\, \varphi_{nm}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{f_n} \sum_{s=1}^{f_l} \left(c_{ls}\, \varphi_{ls}, \hat{O}\, c_{nm}\, \varphi_{nm} \right) =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{f_l} c_{lm}\, \varphi_{lm}, \hat{O} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{f_n} c_{nm}\, \varphi_{nm} \right) = \left(\psi, \hat{O}\psi \right),$$

q.e.d..

Itt a második sorban felhasználtuk a

$$c^*_{nm} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{f_l} \delta_{ln}\, \delta_{sm}\, c^*_{ls}$$

egyenlőséget, ahol $\delta_{ln}\, \delta_{sm} = \left(\varphi_{ls}, \varphi_{nm} \right)$.

9. tétel: Legyen $\hat{O}$ a 3N dimenziós konfigurációs téren és az időn értelmezett állapotfüggvényekre ható, folytonos sajátértékkészletű, lineáris hermitikus operátor. Egy ilyen operátor sajátfüggvényei a következő egyenletet elégítik ki:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(\bar{R})\, \varphi_{a'}(\bar{R})\, d^3\bar{R} = \delta(a-a'),$$

ahol a és a' két sajátérték, $\varphi_a(\bar{R})$ és $\varphi_{a'}(\bar{R})$ az ezeknek megfelelő egy-egy sajátfüggvény, $\bar{R}$ a konfigurációs tér szám 3N-ese, δ a Dirac-féle deltafüggvény. [1],[2]

10. tétel: A 9. tételben szereplő függvények kielégítik a következő

egyenletet is:

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi_a(\bar{R})\ \varphi_a^*(\bar{R}')\ da = \delta(\bar{R}-\bar{R}'),$$

ahol a_1, illetve a_2 a folytonos értékkészletű fizikai mennyiség legkisebb, illetve legnagyobb értéke $\left[a_1 \le a \le a_2\right]$ "a" a fizikai mennyiség egyik értéke, φ_a a hozzátartozó sajátfüggvény. $\bar{R}$ és $\bar{R}'$ a konfigurációs tér pontjai, melyek speciálisan meg is egyezhetnek, δ a Dirac-féle deltafüggvény. [1],[2]

11. tétel: Levezethető, hogy egy tetszőleges állapotfüggvény előállítható az alábbi alakban:

$$\psi = \int_{a_1}^{a_2} \left[\sum_{k=1}^{f_a} c_k(a)\ \varphi_{ak}\right] da \quad ,$$

ahol φ_{ak} a ψ-hez tartozó konfigurációs térrel azonos konfigurációs téren értelmezett, folytonos sajátértékkészletű, elfajult spektrumú operátornak az "a", (f_a-1)-szeresen elfajult sajátértékéhez tartozó k-adik sajátfüggvénye, és $a_1 \le a \le a_2$.

Nem elfajult spektrum esetén következik, hogy $\psi = \int_{a_1}^{a_2} c(a)\ \varphi_a\ da$, ami megtalálható: [1] 222-223. o.. $c_k(a) = \left(\varphi_{ak}, \psi\right)$,

illetve nem elfajult spektrum esetén

$$c(a) = \left(\varphi_a, \psi\right).$$

12. tétel: Ha ψ négyzetesen integrálható állapotfüggvény, akkor a 11. tételben felirt sorfejtés együtthatói az alábbi összefüggést elégítik ki:

$$\int_{a_1}^{a_2} \sum_{k=1}^{f_a} \left|c_k(a)\right|^2 da = 1 ,$$

ill. nem elfajult sajátérték sorozat esetén

$$\int_{a_1}^{a_2} \left|c(a)\right|^2 da = 1 .$$

Itt már feltettük, hogy a $c_k(a)$-kban szereplő φ_{ak} -k a Dirac-deltára vannak normálva. [1],[2]

IX. axióma: Ha egy négyzetesen integrálható állapotfüggvényű kvantummechanikai rendszeren egy folytonos értékkészletű fizikai mennyiség mérése zajlik le, (ψ a mérés előtti állapotfüggvény) akkor annak a valószínűsége, hogy a mérés eredménye az a' és a'' lehetséges értékek által meghatározott zárt intervallumba essék:

$$W(a',a'') = \int_{a'}^{a''} \sum_{k=1}^{f_a} \left| \left(\varphi_{ak}, \psi \right) \right|^2 da \ ,$$

ahol φ_{ak} a 11. tételben szereplő φ_{ak} -val azonos.

Nem elfajult spektrum esetén következik:

$$W(a',a'') = \int_{a'}^{a''} \left| \left(\varphi_a, \psi \right) \right|^2 da \ .$$

Itt is már feltételezzük, hogy a φ_{ak} illetve φ_a függvények a Dirac-deltára vannak normálva. [1],[2]

X. axióma: Az $\hat{O}$ lineáris hermitikus, folytonos sajátértékkészletű operátorral reprezentált fizikai mennyiség várható értéke egy a mérés előtt ψ állapotfüggvényű rendszeren:

$$\bar{O} = (\psi, \hat{O}\psi).$$

Következmény: (a X. axiómáé) Ha $(\psi,\psi)=1$, akkor

$$\bar{\bar{R}} = \int_{\infty} \psi^{*}\bar{R}\ \psi \ dv_{\text{konf.}} ,$$

ahol $\bar{R}$ a rendszer konfigurációs térbeli pontjába mutató 3N dimenziós vektor. Mivel a X. axióma szerint $\bar{\bar{R}} = \int_{\infty} \psi^{*}\hat{\bar{R}}\ \psi \ dv_{\text{konf.}}$

ezt összehasonlítva $\bar{R} = \int_{\infty} \psi^{*}\bar{R}\,\psi\, dv_{konf.}$ -vel kapjuk, hogy $\hat{\bar{R}} = \bar{R}$.

Következmény: $\hat{\bar{R}}$ sajátfüggvénye a Dirac-féle deltafüggvény: $\delta(\bar{R}-\bar{R}')$.

[1], 221. o., amely ugyan csak 1 dimenzióra bizonyít, de a gondolatmenete lényegileg megegyezik a jelen esetben alkalmazandó gondolatmenettel.

11. definíció: Az $\hat{O}$ operátorral jellemzett fizikai mennyiség szórása a mérés előtt ψ állapotú rendszereken végrehajtott szimultán mérés során:

$$\sigma_{\hat{O}} = \sqrt{\left(\psi, \left[\hat{O}-\bar{O}\right]^{2}\psi\right)}.$$

13. tétel: Egy adott fizikai mennyiség valamely ψ állapothoz tartozó szórása akkor és csak akkor nulla, ha ψ (amely a mérés előtti állapotfüggvény) sajátfüggvénye az illető fizikai mennyiség operátorának.

Bizonyítás: $\sigma^{2}_{\hat{O}} = \left(\psi, \left[\hat{O}-\bar{O}\right]^{2}\psi\right) = \left(\left[\hat{O}-\bar{O}\right]\psi, \left[\hat{O}-\bar{O}\right]\psi\right) = 0,$

akkor és csak akkor, ha $\left[\hat{O}-\bar{O}\right]\psi=0$, mivel egy függvény abszolut értéke négyzetének határozott integrálja véges nem nullmértékű integrációs tartományra akkor és csak akkor nulla, ha maga a függvény azonosan nulla. A bizonyítás második egyenlőségjele után felhasználtuk azt a tényt, hogy

$\hat{O} - \bar{O}$ önadjungált operátor. $\left[\hat{O} - \bar{O}\right]\psi = 0$ miatt $\hat{O}\psi = \bar{O}\psi$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy ha a szórás nulla, akkor a rendszer mérés előtti állapotfüggvénye sajátfüggvénye a mért fizikai mennyiség operátorának.

A továbbiakban azt kell bizonyítanunk, hogy $\hat{O}\psi = k\psi$ fennállása esetén $\sigma_{\hat{O}} = 0$.

$$\sigma^2_{\hat{O}} = \left(\psi, \left[\hat{O}-\bar{O}\right]^2\psi\right) = \left(\left[\hat{O}-\bar{O}\right]\psi, \left[\hat{O}-\bar{O}\right]\psi\right) = \left(\left[k-\bar{O}\right]\psi, \left[k-\bar{O}\right]\psi\right),$$

ahol k $\hat{O}$-nak az adott ψ sajátfüggvényhez tartozó sajátértéke. Mivel a VIII. axióma és ennek, valamint a 7. tételnek a következménye miatt $\hat{O}\psi = k\psi$ esetén k mérési valószínűsége 1*, $\bar{O}$ szükségképpen egyenlő k-val, s így a fenti skaláris szorzat az azonosan zérus függvény önmagával való skaláris szorzata, ami zérus. q. e. d.

* Figyelembe véve, hogy az egyes sajátértékek mérési eredményként való fellépte -- az összes sajátértékre -- egymást kizáró események teljes rendszere.

IRODALOMJEGYZÉK a II. részhez

1. Marx György: Kvantummechanika, Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1971.

2. Kapuy Ede - Török Ferenc: Az atomok és molekulák kvantumelmélete, Akadémiai Kiadó, Bp.

3. Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetéséről, Tudományos Közlemények, Eger, 1984.