系统的时域分析

- 线性时不变系统的描述及特点
- 连续时间*LTI*系统的响应
- 连续时间系统的单位冲激响应
- 卷积积分及其性质
- 离散时间*LTI*系统的响应
- 离散时间系统的单位脉冲响应
- 卷积和及其性质
- 单位冲激响应表示的系统特性

线性时不变系统的描述及特点

- 连续时间系统用N阶常系数微分方程描述

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y(t)+a_0 y(t)$$
$$=b_m f^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 f(t)+b_0 f(t)$$

a_i、 b_i为常数。

- 离散时间系统用N阶常系数差分方程描述

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{j=0}^{m} b_j f[k-j]$$

a_i、 b_i为常数。

线性时不变系统的特点

LTI系统除具有**线性特性**和**时不变特性**外，还具有:

1）微分特性与差分特性：

若 $T\{f(t)\}=y(t)$ 则 $T\{\frac{\mathrm{d}f(t)}{dt}\}=\frac{\mathrm{d}y(t)}{dt}$

若 $T\{f[k]\}=y[k]$ 则 $T\{f[k]-f[k-1]\}=y[k]-y[k-1]$

2）积分特性与求和特性：

若 $T\{f(t)\}=y(t)$ 则 $T\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\}=\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\mathrm{d}\tau$

若 $T\{f[k]\}=y[k]$ 则 $T\{\sum_{n=-\infty}^{k} f[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{k} y[n]$

连续时间LTI系统的响应

- 经典时域分析方法
- 卷积法
- 零输入响应求解
- 零状态响应求解

系统响应求解方法

1. 经典时域分析方法:　　求解微分方程

2.卷积法:

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) = y_x(t) + f(t) * h(t)$$

•求解齐次微分方程得到零输入响应

•利用卷积积分可求出零状态响应

一、　经典时域分析方法

微分方程的全解即系统的完全响应, 由齐次解$y_h(t)$和特解$y_p(t)$组成

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

齐次解$y_h(t)$的形式由齐次方程的特征根确定

特解$y_p(t)$的形式由方程右边激励信号的形式确定

齐次解$y_h(t)$的形式

（1）特征根是不等实根$s_1, s_2, \ldots, s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots + K_n e^{s_n t}$$

（2）特征根是相等实根$s_1=s_2=\ldots=s_n$

$$y_h(t) = K_1 e^{st} + K_2 t e^{st} + \cdots + K_n t^{n-1} e^{st}$$

（3）特征根是成对共轭复根 $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$， $i = n/2$

$$y_h(t) = e^{\sigma_1 t}(K_1 \cos \omega_1 t + K_1 \sin \omega_1 t) + \cdots + e^{\sigma_i t}(K_i \cos \omega_i t + K_i \sin \omega_i t)$$

常用激励信号对应的特解形式

输入信号	特解
K	A
Kt	$A+Bt$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s\neq-a$)	$A\mathrm{e}^{-at}$
$K\mathrm{e}^{-at}$(特征根 $s=-a$)	$At\mathrm{e}^{-at}$
$K\sin\omega_0 t$ 或 $K\cos\omega_0 t$	$A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t$
$K\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t$ 或 $K\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$	$A\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t+B\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 t$

例1 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=f(t),t>0$$

初始条件$y(0)=1$, $y'(0)=2$, 输入信号$f(t)=e^{-t}u(t)$，求系统的完全响应$y(t)$。

解

(1)求齐次方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=0$的齐次解$y_h(t)$

特征方程为 $s^2+6s+8=0$

特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-4$

齐次解$y_h(t)$

$$y_h(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}$$

2) 求非齐次方程$y''(t)+6y'(t)+8y(t) = f(t)$的特解$y_p(t)$

由输入$f(t)$的形式，设方程的特解为

$$y_p(t)=Ce^{-t}$$

将特解带入原微分方程即可求得常数C=1/3。

3) 求方程的全解

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=Ae^{-2t}+Be^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t}$$

$$y(0)=A+B+\frac{1}{3}=1$$

解得 A=5/2，B= –11/6

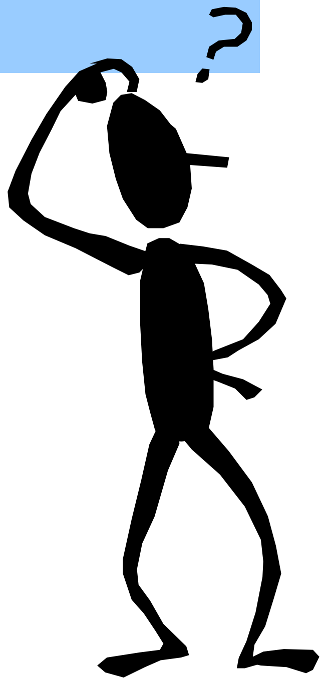
$$y'(0)=-2A-4B-\frac{1}{3}=2$$

$$y(t)=\frac{5}{2}e^{-2t}-\frac{11}{6}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{-t},\quad t\geq 0$$

讨论

1) 若初始条件不变，输入信号 $f(t) = \sin t\, u(t)$，则系统的完全响应$y(t) =$?

2) 若输入信号不变，初始条件$y(0)=0$, $y'(0)=1$, 则系统的完全响应$y(t)=$?



经典法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

二　卷积法

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

1. **系统的零输入响应**是输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的输出响应。

数学模型:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 y(t)+a_0 y(t)=0$$

求解方法:

•根据微分方程的特征根确定**零输入响应**的形式，

•再由初始条件确定待定系数。

例2 已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+6y(t)=4f(t)\qquad t>0$$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=3$，求系统的零输入响应$y_x(t)$。

[解] 系统的特征方程为 $s^2+5s+6=0$

系统的特征根为 $s_1=-2$，$s_2=-3$

$$y_x(t)=K_1e^{-2t}+K_2e^{-3t}$$

$y(0^-)=y_x(0^-)=K_1+K_2=1$

$y'(0^-)=y'_x(0^-)=-2K_1-3K_2=3$

解得 $K_1=6$，$K_2=-5$

$$y_x(t)=6e^{-2t}-5e^{-3t},t\geq 0$$

例3 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y(t)=2\frac{d\ f}{dt}+3f(t)$$

系统的初始状态为$y(0^-)=2$，$y'(0^-)=-1$，求系统的零输入响应$y_x(t)$。

[解] 系统的特征方程为 $s^2+4s+4=0$

系统的特征根为 $s_1=s_2=-2$ （两相等实根）

$$y_x(t)=K_1e^{-2t}+K_2te^{-2t}$$

$y(0^-)=y_x(0^-)=K_1=1$;

$y'(0^-)=y'_x(0^-)=-2K_1+K_2=3$

解得 $K_1=1$, $K_2=5$

$$y_x(t)=e^{-2t}+5te^{-2t},t\geq 0$$

例4 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+5y(t)=4\frac{d\ f}{dt}+3f(t)$$

系统的初始状态为$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=3$，求系统的零输入响应$y_x(t)$。

- [解] 系统的特征方程为 $s^2+2s+5=0$

系统的特征根为 $s_1=-1+2j$，$s_2=-1-2j$

$$y_x(t)=e^{-t}(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t)$$

$y(0^-)=y_x(0^-)=K_1=1$

$y'(0^-)=y'_x(0^-)=-K_1+2K_2=3$

解得 $K_1=1$，$K_2=2$

$$y_x(t)=e^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t),\quad t\geq 0$$

2、 系统的零状态响应

当系统的初始状态为零时，由系统的外部激励$f(t)$产生的响应称为系统的零状态响应，用$y_f(t)$表示。

- **求解系统的零状态响应$y_f(t)$方法：**
- 1) 直接求解初始状态为零的微分方程。
- 2) 卷积法：
- 利用信号分解和线性时不变系统的特性求解。

卷积法求解系统零状态响应$y_f(t)$的思路

- 1) 将任意信号分解为单位冲激信号的线性组合。
- 2) 求出单位冲激信号作用在系统上的零状态响应 — 单位冲激响应$h(t)$ 。
- 3) 利用线性时不变系统的特性，求出单位冲激信号线性组合作用在系统上的响应，即系统在任意信号$f(t)$激励下的零状态响应$y_f(t)$ 。

卷积法求解系统零状态响应$y_f(t)$推导

$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

由时不变特性 $\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$

由均匀特性 $f(\tau)\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)h(t-\tau)$

由积分特性

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau \Longrightarrow y_f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau$$

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = f(t)*h(t)$$

例5　已知某LTI系统的动态方程式为$y'(t)+3y(t)=2f(t)$，系统的冲激响应$h(t)=2\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，$f(t)=3u(t)$，试求系统的零状态响应$y_f(t)$。

[解] $y_f(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 3u(\tau) \cdot 2e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$= \begin{cases} \int_0^t 3 \cdot 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \mathrm{d}\tau & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(1-e^{-3t}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= 2(1-e^{-3t})u(t)$$

连续时间系统的单位冲激响应

- 连续时间系统单位冲激响应的定义
- 冲激平衡法求系统的单位冲激响应
- 连续时间系统的单位阶跃响应

连续时间系统单位冲激响应的定义

在系统初始状态为零的条件下，以单位冲激信号激励系统所产生的输出响应，称为系统的单位冲激响应，以符号$h(t)$表示。

N阶连续时间LTI系统的冲激响应$h(t)$满足

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

冲激平衡法求系统的单位冲激响应

由于t>0$^+$后，方程右端为零，故n>m时

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)$$

n≤m时, 为使方程两边平衡, $h(t)$应含有冲激及其高阶导数,即

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

将$h(t)$代入微分方程，使方程两边平衡,确定系数K_i， A_i

例1 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2f(t),\quad t>0$$

试求系统的单位冲激响应。

解： 当$f(t)=\delta(t)$时, $y(t)=h(t)$, 即

$$\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=2\delta(t)$$

动态方程式的特征根$s=-3$, 且$n>m$, 故$h(t)$的形式为

$$h(t)=Ae^{-3t}u(t)$$

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-3t}u(t)]+3Ae^{-3t}u(t)=2\delta(t)$$

解得$A=2$ $$h(t)=2e^{-3t}u(t)$$

例2 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=2f(t)+3f'(t),\quad t>0$$

试求系统的冲激响应。

解： 当$f(t)=\delta(t)$时，$y(t)=h(t)$，即

$$\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

动态方程式的特征根$s=-6$，且$n=m$，故$h(t)$的形式为

$$h(t)=Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)]+6[Ae^{-6t}u(t)+B\delta(t)]=2\delta(t)+3\delta'(t)$$

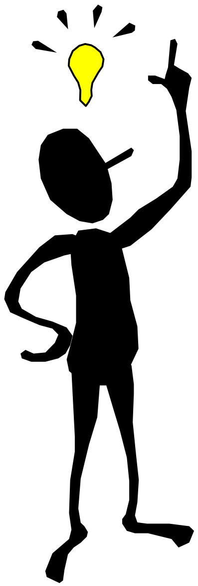
解得$A=-16$，$B=3$ $\qquad h(t)=3\delta(t)-16e^{-6t}u(t)$

冲激平衡法小结

$$h(t)=(\sum_{i=1}^{n}K_i e^{s_i t})u(t)+\sum_{j=0}^{m-n}A_j\delta^{(j)}(t)$$

1) 由系统的特征根来确定***u*(*t*)**前的指数形式.

2) 由动态方程右边$\boldsymbol{\delta(t)}$的最高阶导数与方程左边***h*(*t*)**的最高阶导数确定$\delta^{(j)}(t)$项.



连续系统的阶跃响应

$$g^{(n)}(t)+a_{n-1}g^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 g'(t)+a_0 g(t)$$
$$=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1 u'(t)+b_0 u(t)$$

求解方法:

1)求解微分方程

2)利用单位冲激响应与单位阶跃响应的关系

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

例3 求例1所述系统的单位阶跃响应$g(t)$。

解：

例1系统的单位冲激响应为

$$h(t)=2\mathrm{e}^{-3t}\,u(t)$$

利用单位冲激响应与单位阶跃响应的关系，可得

$$g(t)=\int_0^t 2e^{-3\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{2}{3}(1-e^{-3t})u(t)$$

卷积积分的计算和性质

- 卷积积分的计算
- 卷积积分的性质

交换律、分配律 、结合律、位移特性、展缩特性

- 奇异信号的卷积积分

延迟特性、微分特性、积分特性、等效特性

一 卷积积分的计算

•卷积的定义：

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

•卷积的计算步骤：

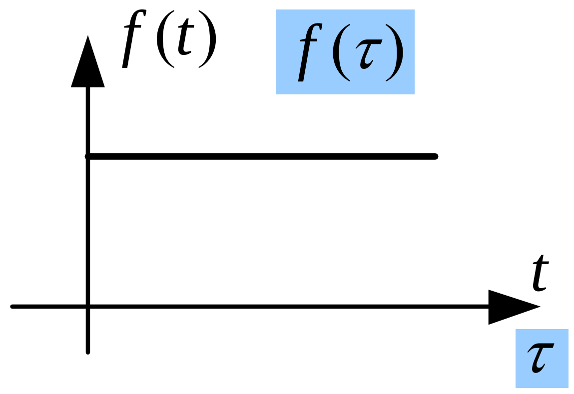
1）将$f(t)$和$h(t)$中的自变量由t改为τ，τ成为函数的自变量；

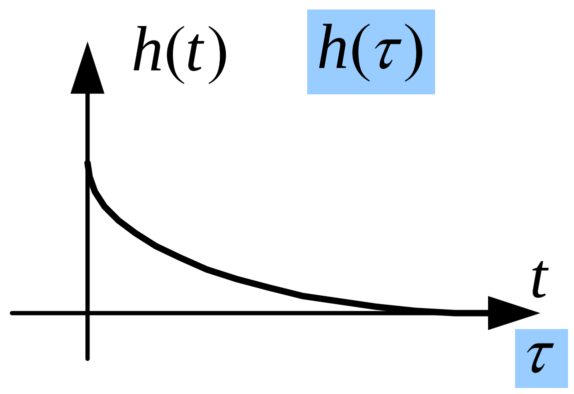
2）把其中一个信号翻转、平移；

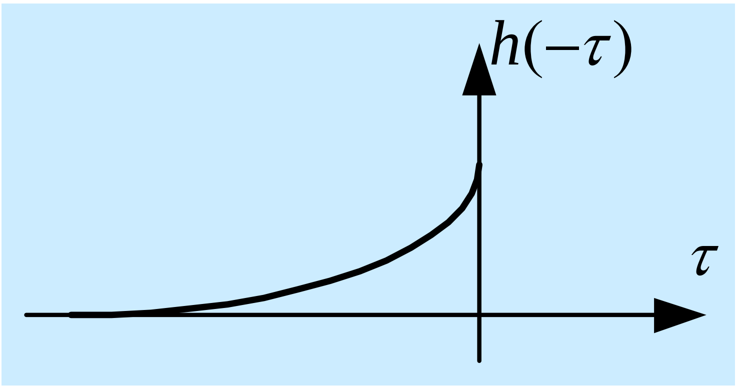
$$h(\tau) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-\tau) \xrightarrow{\text{平移}t} h(-(\tau-t)) = h(t-\tau)$$

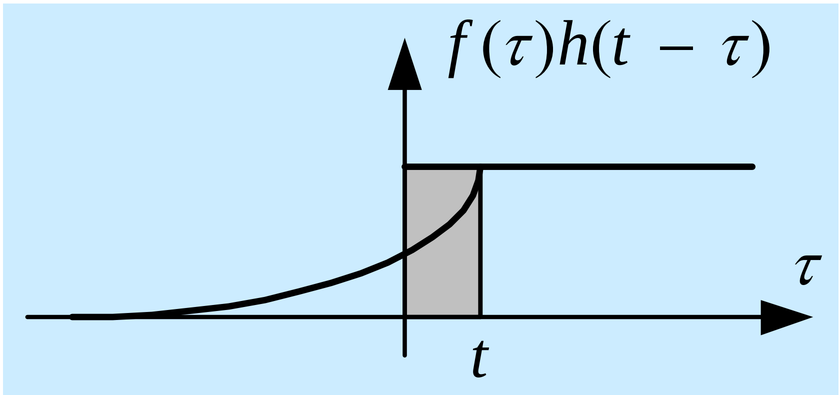
3）将$f(\tau)$ 与$h(\tau-t)$相乘；对乘积后的图形积分。

例1 计算$f(t) * h(t),\ f(t) = u(t),\ h(t) = e^{-t}u(t)$



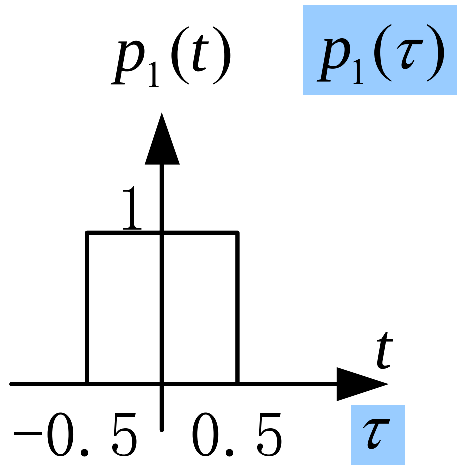


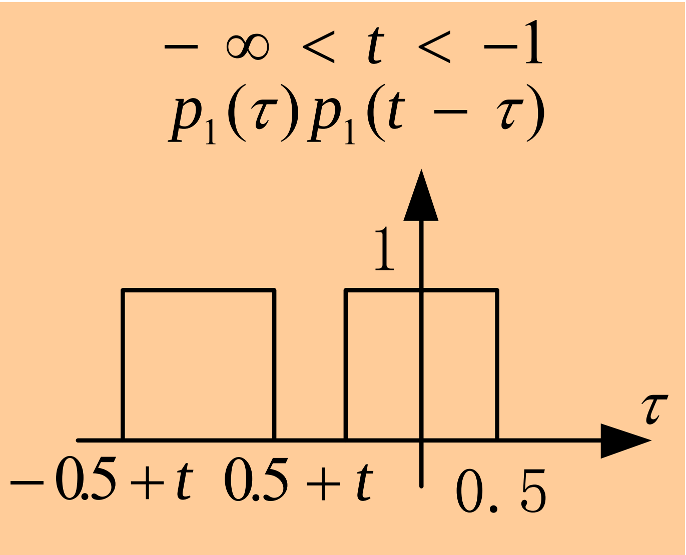




$$f(t) * h(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = 1 - e^{-t} \qquad t \ge 0$$

例2：计算$y(t) = p_1(t) * p_1(t)$。

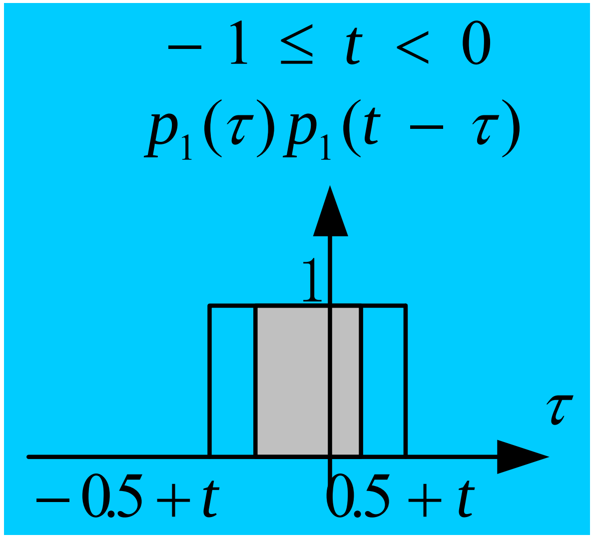




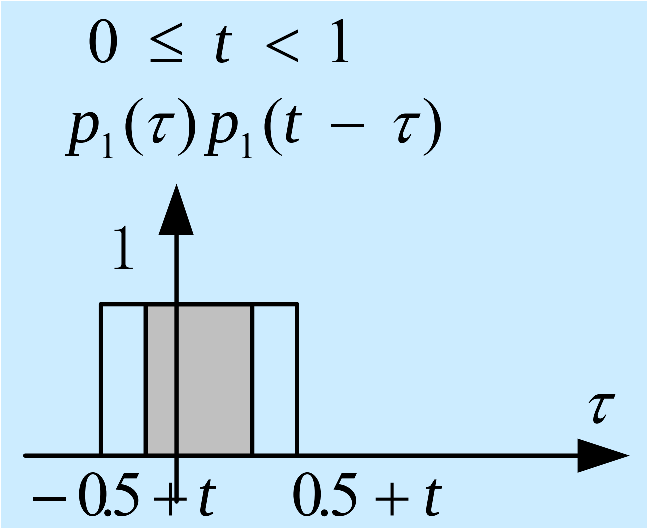
a) $-\infty < t \le -1$

$y(t)=0$

b) $-1 \le t < 0$



$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5+t} dt = 1 + t$$

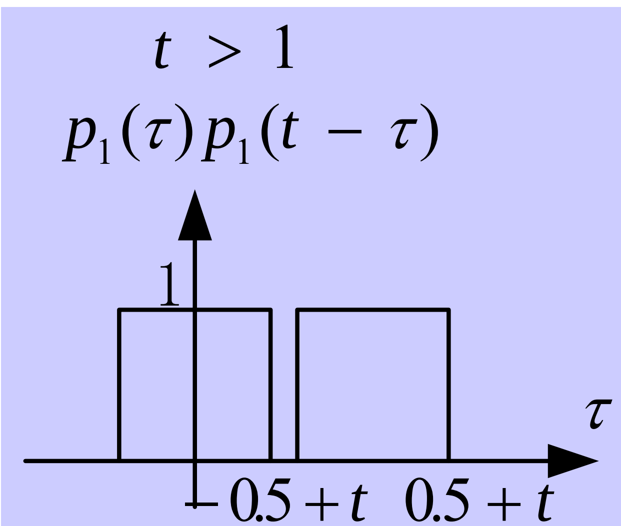


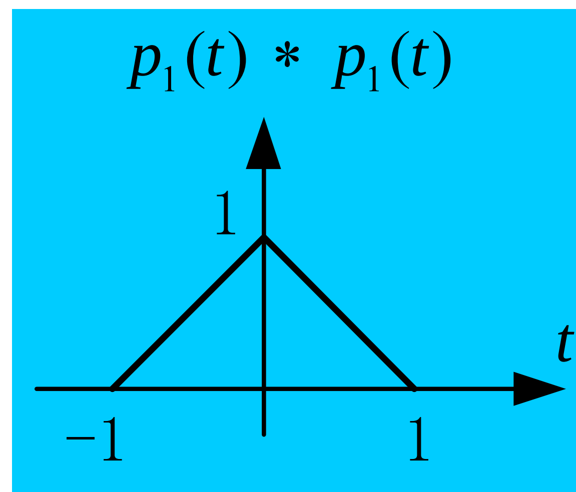
c) $0 \le t < 1$

$$y(t) = \int_{-0.5+t}^{0.5} dt = 1 - t$$

d) $1 \le t < \infty$

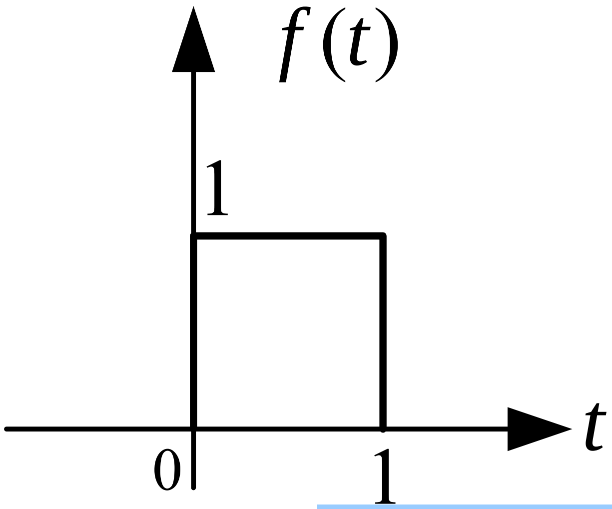
$y(t) = 0$

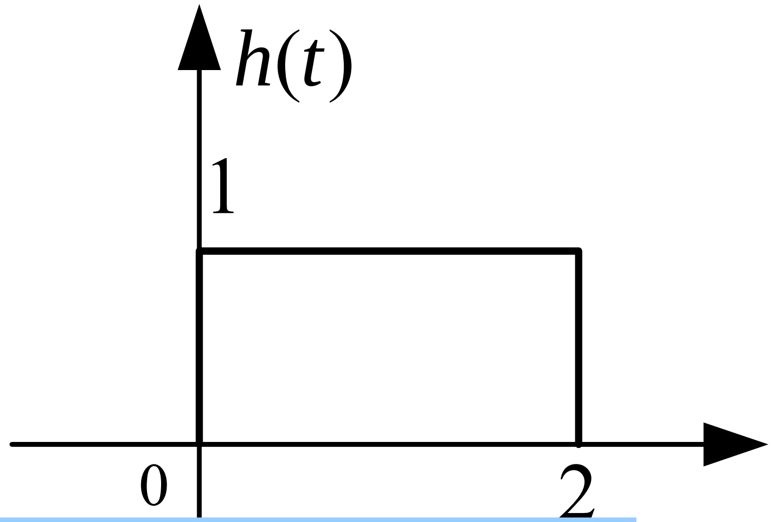


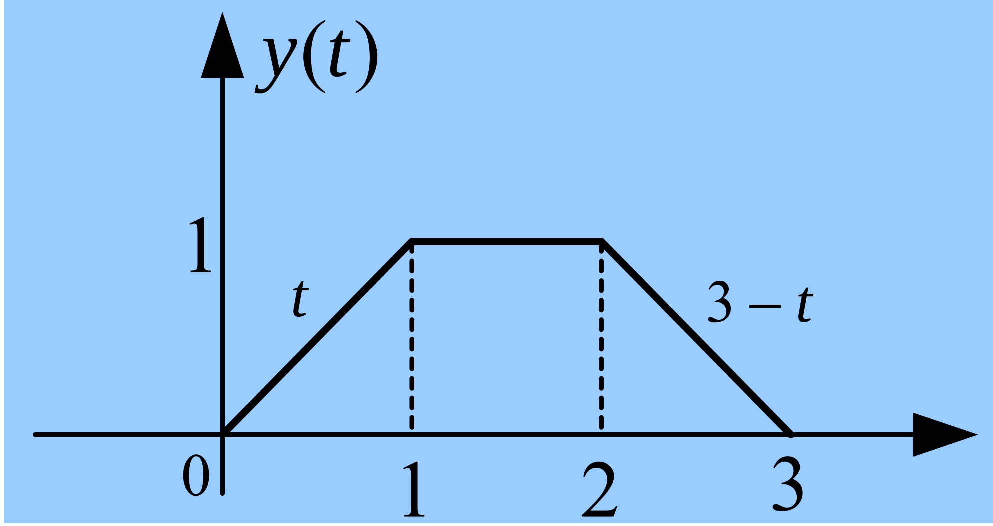


练习1：$u(t) * u(t)$ $= r(t)$

练习2：计算$y(t) = f(t) * h(t)$。







二 卷积的性质

- 1)交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
- 2)分配律 $[f_1(t) + f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$
- 3)结合律 $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$
- 4)位移特性
  - 已知 $f_1(t) * f_2(t) = y(t)$
  - 则: $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$
- 5)展缩

$$f_1(at) * f_2(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

位移特性证明：

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau-t_1) * f_2(t-\tau-t_2)d\tau$$

$$\overset{\tau-t_1=x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) * f_2(t-t_1-t_2-x)dx$$

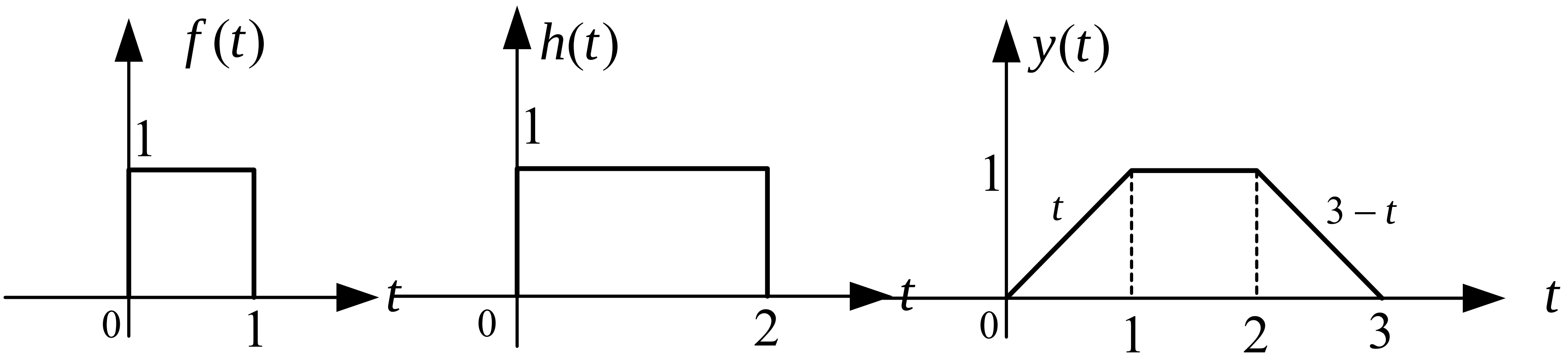
$$= y(t-t_1-t_2)$$

展缩特性证明：

$$f_1(at) * f_2(at) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(a\tau-t_1) * f_2(a(t-\tau))d\tau$$

$$\overset{a\tau=x}{=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) * f_2(at-x)dx = \frac{1}{|a|}y(at)$$

例：利用位移特性及$u(t) * u(t) = r(t)$，计算$y(t) = f(t) * h(t)$。



$$y(t) = f(t) * h(t) = [\ u(t) - u(t\text{-}1)\ ] * [u(t) - u(t\text{-}2)\ ]$$

$$= u(t)*u(t) - u(t-1)*u(t) - u(t)*u(t-2) + u(t-1)*u(t-2)$$

$$= r(t) - r(t-2) - r(t-1) + r(t-3)$$

三 奇异信号的卷积

- 1)延迟特性 $f(t) * \delta(t-T) = f(t-T)$
- 2)微分特性 $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$
- 3)积分特性

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = f_1^{(-1)}(t)$$

•4)等效特性

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

$$= [f_1'(t) * f_2(t)]^{(-1)}$$

例1：已知 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求$y'(t)$。

解：$y'(t)=y(t)*\delta'(t)=[f_1(t)*f_2(t)]*\delta'(t)$

$$=f_1'(t)*f_2(t)\quad =f_1(t)*f_2'(t)$$

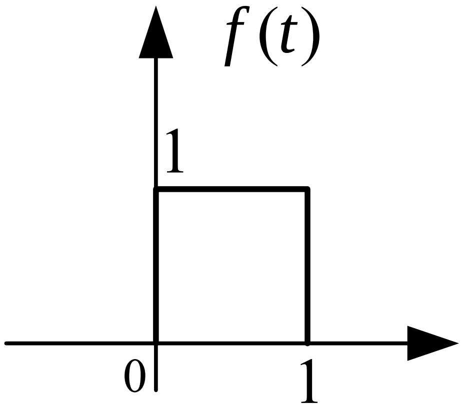
例2：已知 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求$y^{(-1)}(t)$。

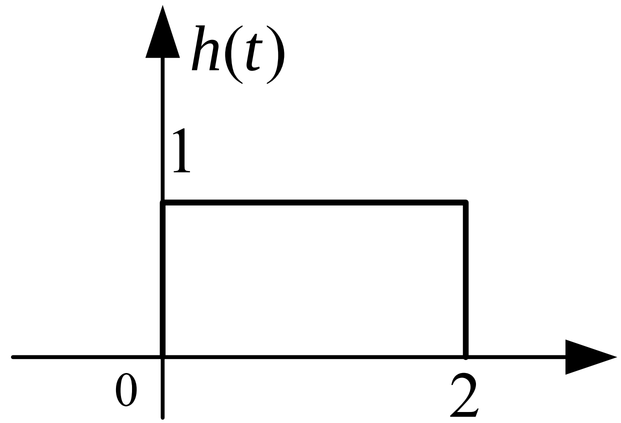
解：$y^{(-1)}(t)=y(t)*u(t)=[f_1(t)*f_2(t)]*u(t)$

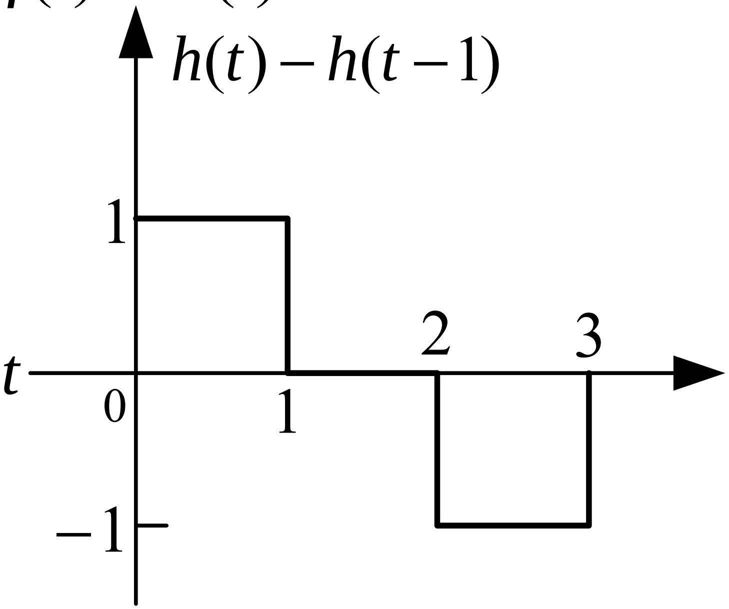
$$=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$$

$$=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

例3：利用等效特性，计算$y(t)=f(t)*h(t)$。



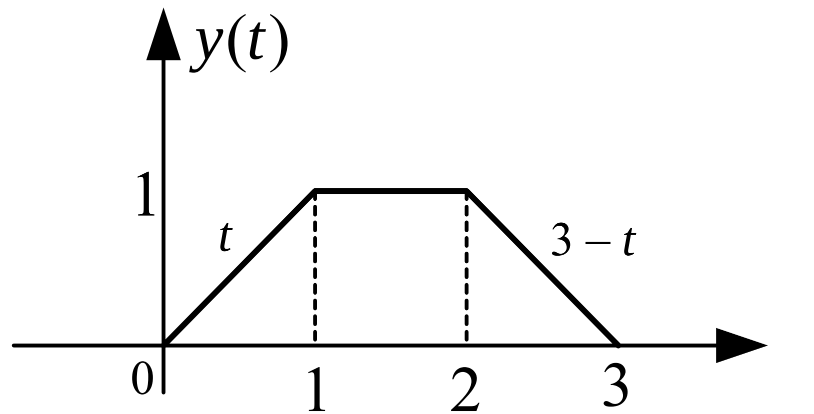




$$f'(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$

$$f'(t)*h(t)=h(t)-h(t-1)$$

$$y(t)=\int_0^t [h(t)-h(t-1)]dt$$



离散时间LTI系统的响应

- 迭代法求系统响应
- 经典时域法求系统响应
- 卷积法求系统响应
- 零输入响应求解
- 零状态响应求解

离散时间LTI系统的数学模型为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j f[k-j]$$

系统响应求解方法:

1. 迭代法:
2. 经典时域分析方法: 求解差分方程
3. 卷积法:

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y[k] = y_x[k] + y_f[k] = y_x[k] + f[k]*h[k]$$

- 求解齐次差分方程得到零输入响应$y_x[k]$
- 利用卷积和可求出零状态响应$y_f[k]$

一、 迭代法

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j f[k-j]$$

已知n个初始条件$\{$**$y[-1], y[-2], y[-3], \cdots, y[-n]$**$\}$和**输入$f[k]$**，由差分方程迭代出系统的输出。

$$y[k] = -\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] + \sum_{j=0}^{m} b_j f[k-j]$$

迭代法举例

例1 一阶线性常系数差分方程$y[k]-0.5y[k-1]=u[k]$，

$y[-1]=1$，用递推法求解差分方程。

解： 将差分方程写成：　$y[k]=u[k]+0.5y[k-1]$

代入初始条件，可求得

$$y[0]=u[0]+0.5y[-1]=1+0.5\times1=1.5$$

依此类推：

$$y[1]=u[1]+0.5y[0]=1+0.5\times1.5=1.75$$

$$y[2]=u[2]+0.5y[1]=1+0.5\times1.75=1.875$$

$$\vdots$$

缺点：很难得到闭合形式的解。

二、 经典时域分析方法

差分方程的全解即系统的完全响应, 由齐次解 $y_h[k]$ 和特解 $y_p[k]$ 组成:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k]$$

齐次解 $y_h[k]$ 的形式由齐次方程的特征根确定

特解 $y_p[k]$ 的形式由方程右边激励信号的形式确定

齐次解的形式

（1）特征根是不等实根 $r_1, r_2, \dots, r_n$

$$y_h[k] = C_1 r_1^{\ k} + C_2 r_2^{\ k} + \cdots + C_n r_n^{\ k}$$

（2）特征根是相等实根 $r_1 = r_2 = \dots = r_n$

$$y_h[k] = C_1 r^k + C_2 k r^k + \cdots + C_n k^{n-1} r^k$$

（3）特征根是成对共轭复根 $r_{1,2} = a \pm jb = \rho e^{\pm j\Omega_0}$

$$y_h[k] = C_1 \rho^k \cos k\Omega_0 + C_2 \rho^k \sin k\Omega_0$$

常用激励信号对应的特解形式

输入信号	特解
a^k (a不是特征根)	Aa^k
a^k (a是特征根)	Aka^k
k^n	$A_n k^n + A_{n-1}k^{n-1} + \cdots + A_1 k + A_0$
$a^k k^n$	$a^k(A_n k^n + A_{n-1}k^{n-1} + \cdots + A_1 k + A_0)$
$\sin k\Omega_0$ 或 $\cos k\Omega_0$	$A_1\cos k\Omega_0 + A_2\sin k\Omega_0$
$a^k\sin k\Omega_0$ 或 $a^k\cos k\Omega_0$	$a^k(A_1\cos k\Omega_0 + A_2\sin k\Omega_0)$

例2 已知某二阶线性时不变连续时间系统的动态方程

$$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=f[k]$$

初始条件$y[0]=0$, $y[1]=-1$, 输入信号$f[k]=2^k u[k]$，求系统的完全响应$y[k]$。

解 (1)求齐次方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=0$的齐次解$y_h[k]$

特征方程为 $r^2-5r+6=0$

特征根为 $r_1=2, r_2=3$

齐次解$y_h[k]$

$$y_h[k]=C_1 2^k+C_2 3^k$$

2) 求非齐次方程$y[k]-5y[k-1]+6y[k-2]=f[k]$ 的特解$y_p[k]$

由输入$f[k]=2^k u[k]$，设方程的特解形式为

$$y_p[k]=Ak2^k,\quad k\geq 0$$

将特解带入原微分方程即可求得常数$A=-2$。

3) 求方程的全解

$$y[k]=y_h[k]+y_p[k]=C_1 2^k+C_2 3^k-k2^{k+1},\quad k\geq 0$$

$$y[0]=C_1+C_2=0$$

$$y[1]=2C_1+3C_2-4=-1$$

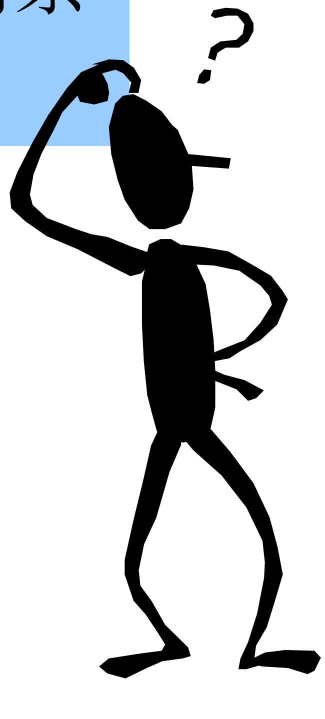
解得 $C_1=-3$，$C_2=3$

$$y[k]=-3\times 2^k+3^{k+1}-k2^{k+1},\quad k\geq 0$$

讨论

1) 若初始条件不变，输入信号 $f[k] = \sin\Omega_0 k\, u[k]$，则系统的完全响应$y[k]$=?

2) 若输入信号不变，初始条件$y[0]$=1, $y[1]$=1, 则系统的完全响应$y[k]$=?



经典法不足之处

- 若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
- 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
- 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
- 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

三、卷积法

系统完全响应=零输入响应+零状态响应

1. <u>**系统的零输入响应**</u>是输入信号为零，仅由系统的初始状态单独作用而产生的输出响应。

数学模型:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y[k-i] = 0$$

求解方法:

•根据差分方程的特征根确定**零输入响应**的形式，

•再由初始条件确定待定系数。

例3 已知某线性时不变系统的动态方程式为:

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=f[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]=0$， $y[-2]=1/2$，求系统的零输入响应$y_x[k]$。

[**解**] 系统的特征方程为 $r^2+3r+2=0$

系统的特征根为 $r_1=-1, r_2=-2$

$$y_x[k]=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$y[-2]=C_1+\frac{1}{4}C_2=\frac{1}{2}$$

解得 $C_1=1$， $C_2=-2$

$$y_x[k]=(-1)^k-2(-2)^k \quad k\geq 0$$

例4 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$y[k]+4y[k-1]+4y[k-2]=f[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]$=0， $y[-2]$= -1，求系统的零输入响应$y_x[k]$。

- [解] 系统的特征方程为 $r^2+4r+4=0$

系统的特征根为 $r_1=r_2=-2$ （两相等实根）

$$y_x[k]=C_1k(-2)^k+C_2(-2)^k$$

$$y[-1]=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{2}=0$$

$$y[-2]=-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{4}=-1$$

解得 C_1 =4, C_2=4

$$y_x[k]=4k(-2)^k+4(-2)^k，\quad k\geq 0$$

例5 已知某线性时不变系统的动态方程式为

$$y[k]-0.5y[k-1]+y[k-2]-0.5y[k-3]=f[k]$$

系统的初始状态为$y[-1]=2$， $y[-2]=-1$， $y[-3]=8$，求系统的零输入响应$y_x[k]$。

[解] 系统的特征方程为 $r^3-0.5r^2+r-0.5=0$

系统的特征根为 $r_1=0.5, r_{2,3}=\pm j=e^{\pm j\frac{\pi}{2}k}$

$$y_x[k]=C_1(\frac{1}{2})^k+C_2\sin\frac{\pi}{2}k+C_3\cos\frac{\pi}{2}k$$

$$y[-1]=2C_1-C_2=2$$

$$y[-2]=4C_1-C_3=-1$$

解得 $C_1=1$，$C_2=0$，$C_3=5$

$$y[-3]=8C_1+C_2=8$$

$$y_x[k]=(\frac{1}{2})^k+5\cos\frac{\pi}{2}k,\quad k\ge 0$$

2. 系统的零状态响应

当系统的初始状态为零时，由系统的外部激励$f[k]$产生的响应称为零状态响应，用$y_f[k]$表示。

- **求解系统零状态响应$y_f[k]$的方法：**
- 1) 直接求解初始状态为零的差分方程。
- 2) 卷积法：
- 利用信号分解和线性时不变系统的特性求解。

卷积法求解系统零状态响应$y_f[k]$的思路

- 1) 将任意信号分解为单位脉冲序列的线性组合
- 2) 求出单位脉冲序列作用在系统上的零状态响应——单位脉冲响应。
- 3) 利用线性时不变系统的特性，求出单位脉冲序列线性组合作用在系统上的响应，即系统在任意信号$f[k]$激励下的零状态响应$y_f[k]$ 。

卷积和求解系统零状态响应$y_f[k]$推导

$$\delta[k] \Rightarrow h[k]$$

由时不变特性　　$\delta[k-n] \Rightarrow h[k-n]$

由均匀特性　　$f[n]\delta[k-n] \Rightarrow f[n]h[k-n]$

由叠加特性

$$T\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta[k-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n]$$

$$y_f[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n] = f[k] * h[k]$$

例6 若描述某离散系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=f[k]$$

已知激励 $f[k]=3(\frac{1}{2})^k u[k]$ $\quad h[k]=[-(-1)^k+2(-2)^k]u[k]$

求系统的零状态响应$y_f[k]$。

解：

$$y_f[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3(\frac{1}{2})^n u[n]\cdot[-(-1)^{k-n}+2(-2)^{k-n}]u[k-n]$$

$$=\begin{cases} -3(-1)^k\sum_{n=0}^{k}(-\frac{1}{2})^n+6(-2)^k\sum_{n=0}^{k}(-\frac{1}{4})^n, & k\geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$$

$$=[-2(-1)^k+\frac{24}{5}(-2)^k+\frac{1}{5}(\frac{1}{2})^k]u[k]$$

离散系统的单位脉冲响应

- 单位脉冲响应$h[k]$定义
- $h[k]$的求解
-     迭代法
-     等效初始条件法
- 单位阶跃响应$g[k]$的求解

1. 单位脉冲响应$h[k]$定义

单位脉冲序列$\delta[k]$作用于离散时间LTI系统所产生的零状态响应称为单位脉冲响应, 用符号$h[k]$表示。

对N阶LTI离散时间系统， $h[k]$满足方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_i h[k-i] = \sum_{j=0}^{m} b_j \delta[k-j]$$

2. $h[k]$的求解

求解方法:

1) 迭代法

2)等效初始条件法

将$\delta[k-j]$对系统的瞬时作用，转化为系统的等效初始条件。

等效初始条件由差分方程和$h[-1]=h[-2]=\ldots=h[-n]=0$递推求出。

例1 若描述某离散时间LTI系统的差分方程为

$$y[k]+3y[k-1]+2y[k-2]=f[k]$$

求系统的单位脉冲响应$h[k]$。

解： $h[k]$满足方程

$$h[k]+3h[k-1]+2h[k-2]=\delta[k]$$

1)求等效初始条件

对于因果系统有$h[-1]=h[-2]=0$，代入上面方程可推出

$$h[0]=\delta[0]-3h[-1]-2h[-2]=1$$

$$h[1]=\delta[1]-3h[0]-2h[-1]=-3$$

可以选择$h[0]$和$h[1]$ 或$h[-1]$和$h[0]$作为初始条件

注意：<u>选择初始条件的基本原则是必须将$\delta[k]$的作用体现在初始条件中</u>

2)求差分方程的齐次解

特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$

特征根为 $r_1 = -1, r_2 = -2$

齐次解的表达式为

$$h[k] = C_1(-1)^k + C_2(-2)^k$$

代入初始条件，有

$$h[-1] = -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0$$

$$h[0] = C_1 + C_2 = 1$$

解得 $C_1 = -1$，$C_2 = 2$

$$h[k] = -(-1)^k + 2(-2)^k \quad k \geq 0$$

3. 单位阶跃响应

单位阶跃序列$u[k]$作用在离散时间LTI系统上产生的零状态响应称为单位阶跃响应，用符号$g[k]$表示。

求解方法：

1) 迭代法

2) 经典法

3) 利用单位阶跃响应与单位脉冲响应的关系

$$g[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} h[n]$$

$$h[k]=g[k]-g[k-1]$$

例2 求例1所述系统的单位阶跃响应$g[k]$。

解:

例1所述系统的单位脉冲响应为

$$h[k]=[-(-1)^k+2(-2)^k]u[k]$$

利用$h[k]$与$g[k]$ 的关系，可得

$$g[k]=-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n+2\sum_{n=0}^{k}(-2)^n$$

$$=[-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{4}{3}(-2)^k+\frac{1}{6}]u[k]$$

卷积和的计算与性质

- 图解法计算卷积和
- 列表法计算卷积和
- 卷积和的性质
- 交换律
- 结合律
- 分配律
- 位移特性
- 差分与求和特性

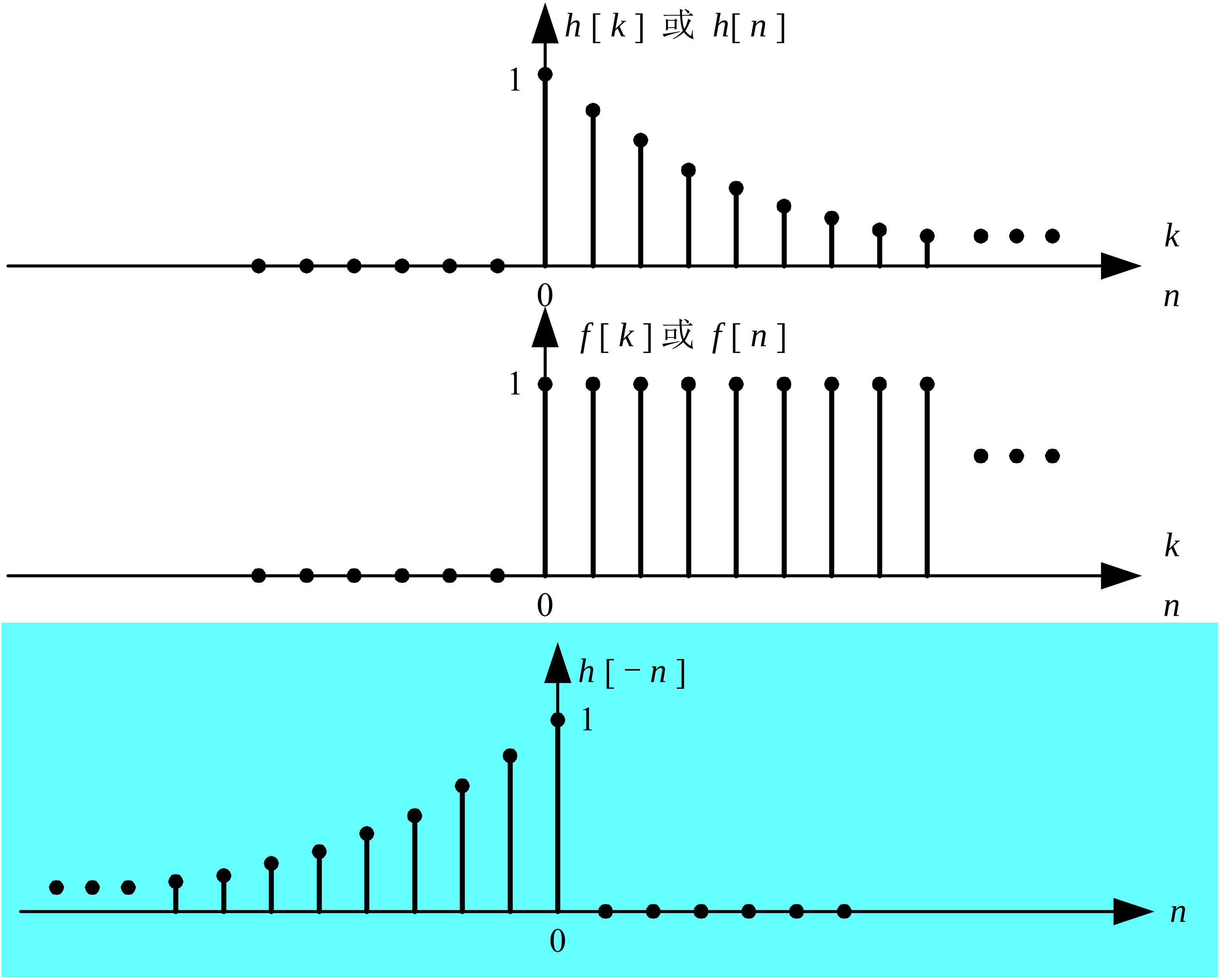
一. 图解法计算卷积和

卷积和定义为

$$f[k]*h[k]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]h[k-n]$$

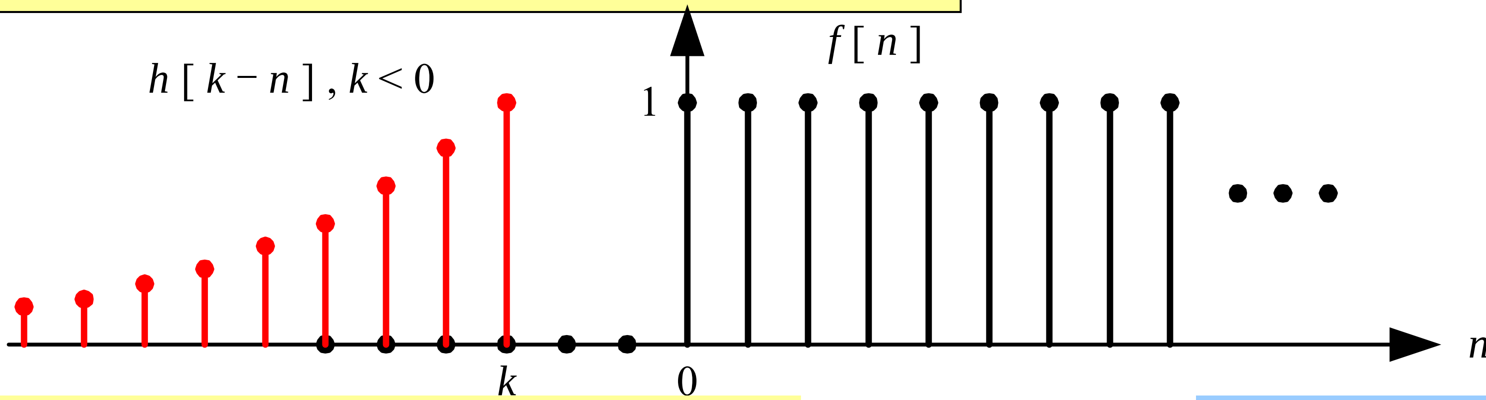
- **计算步骤:**
- 1)将$f[k]$、$h[k]$中的自变量由k改为n;
- 2)把其中一个信号翻转，如将$h[n]$翻转得 $h[-n]$;
- 3)把$h[-n]$平移k，k是参变量。$k>0$图形右移，$k<0$图形左移。
- 4)将$f[n]$与 $h[k-n]$重叠部分相乘;
- 5)对乘积后的图形求和。

例1 已知$f[k]=u[k]$, $h[k]=a^k u[k]$, $0<a<1$, 计算$y[k]=f[k]*h[k]$



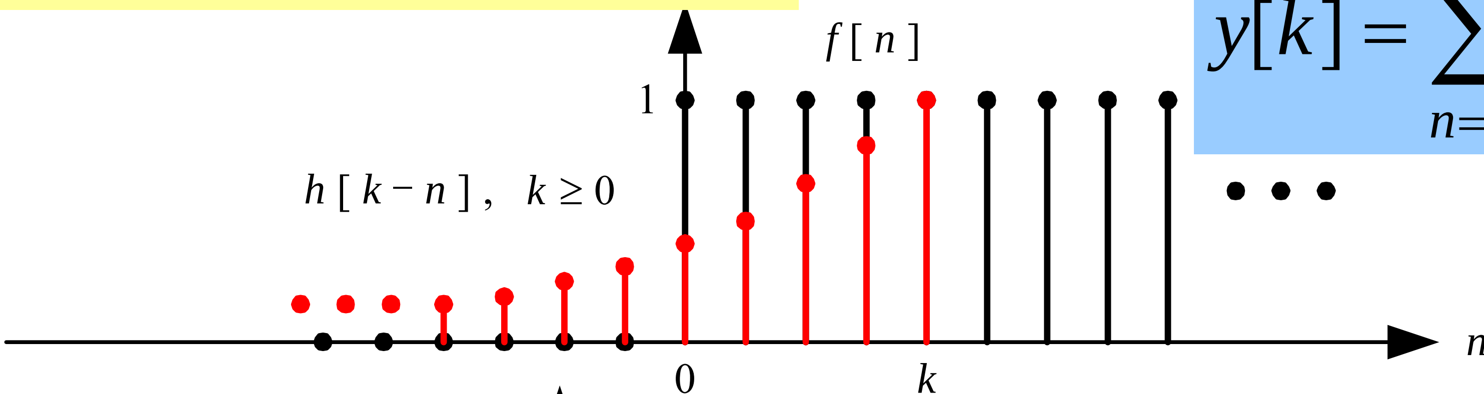
$k < 0$, $f[n]$与$h[k\text{-}n]$图形没有相遇

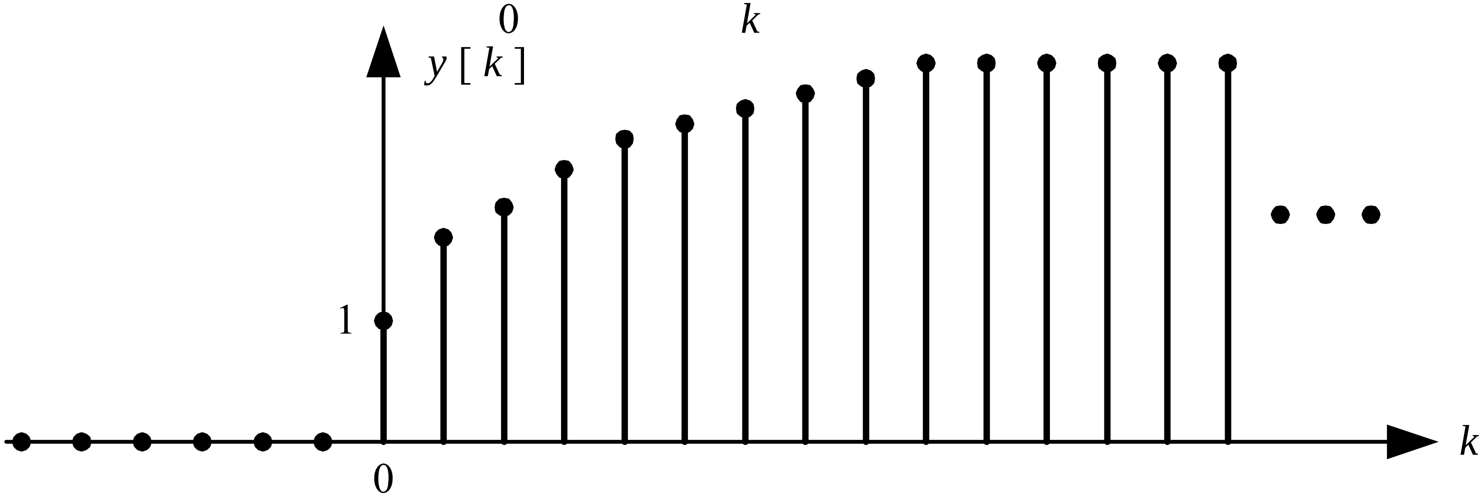
$y[k]=0$



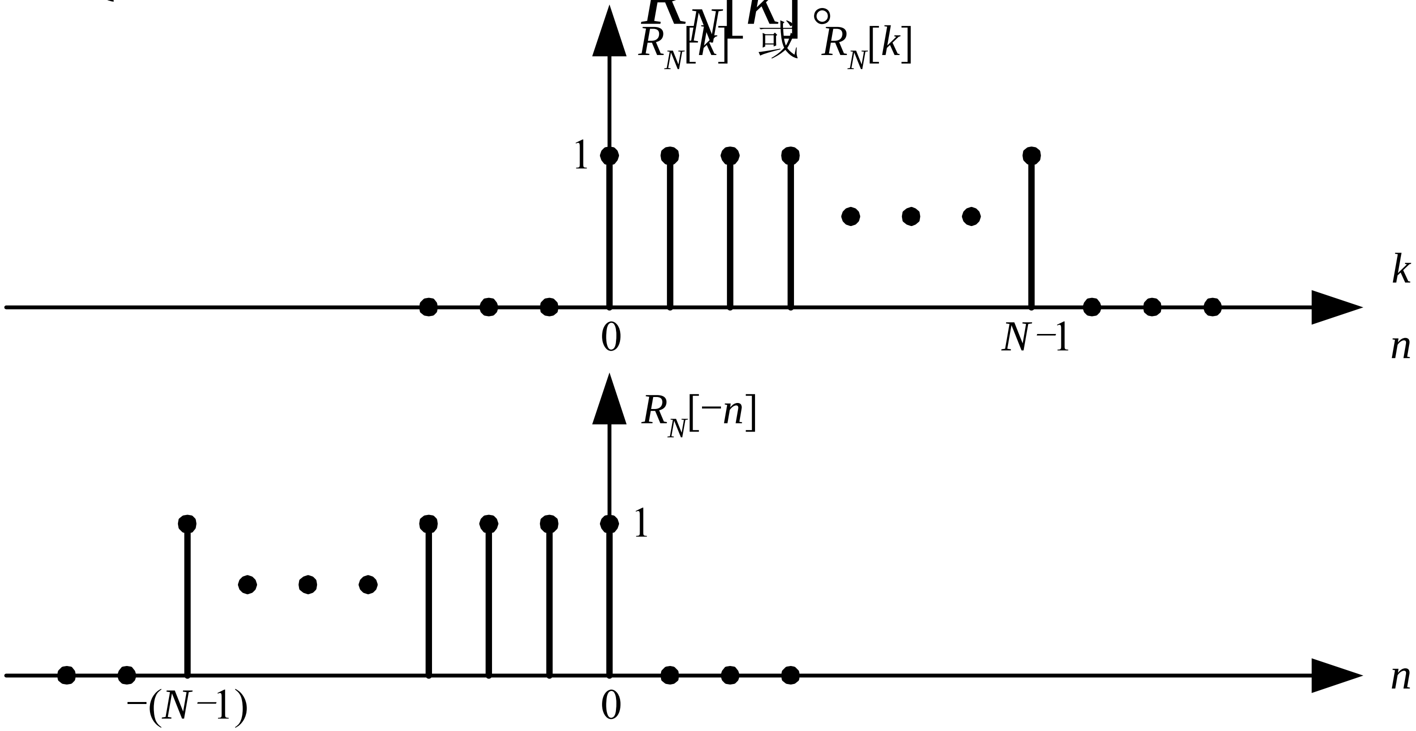
$k > 0$, $f[n]$与$h[k\text{-}n]$图形相遇

$$y[k] = \sum_{n=0}^{k} a^{k-n}$$



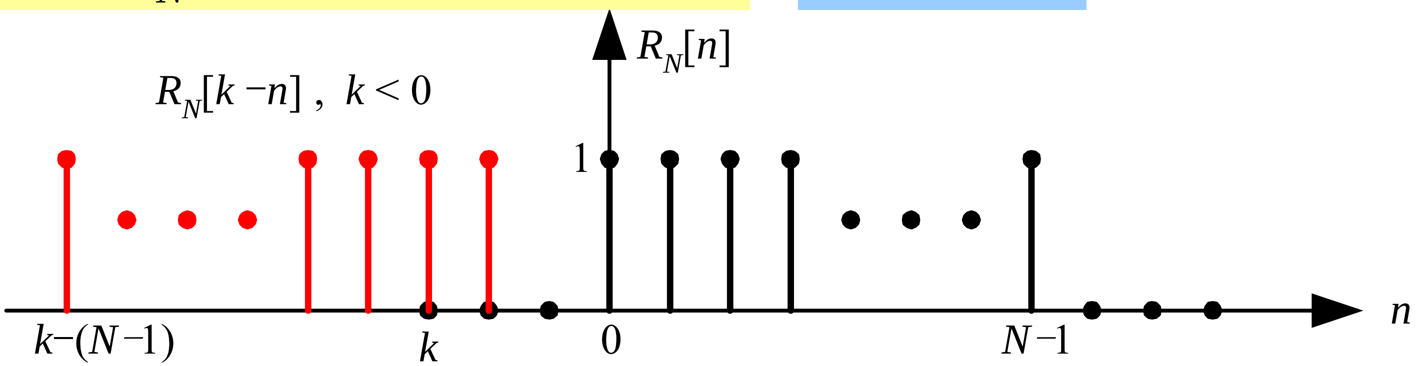


例2 $R_N[k]=\begin{cases}1 & 0\le k\le N-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ 计算$y[k]=R_N[k]*R_N[k]$。

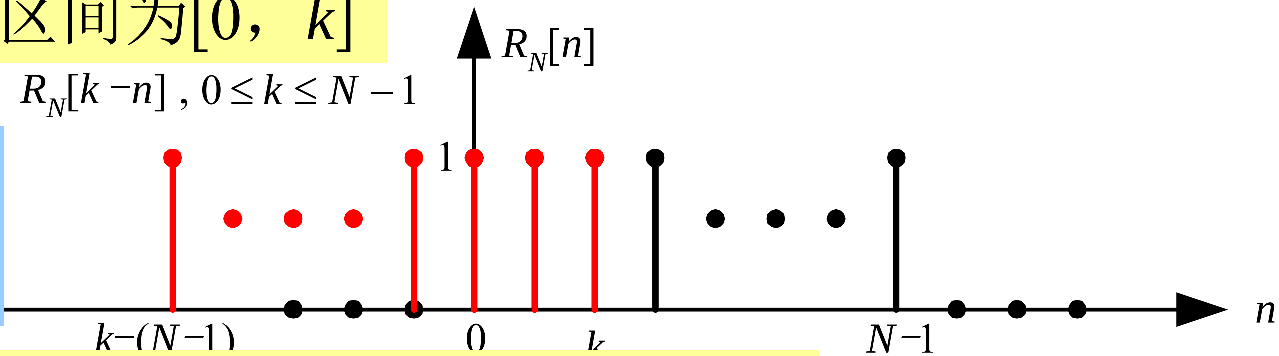


•$k<0$时, $R_N[n]$与$R_N[k\text{-}n]$图形没有相遇

$y[k]=0$

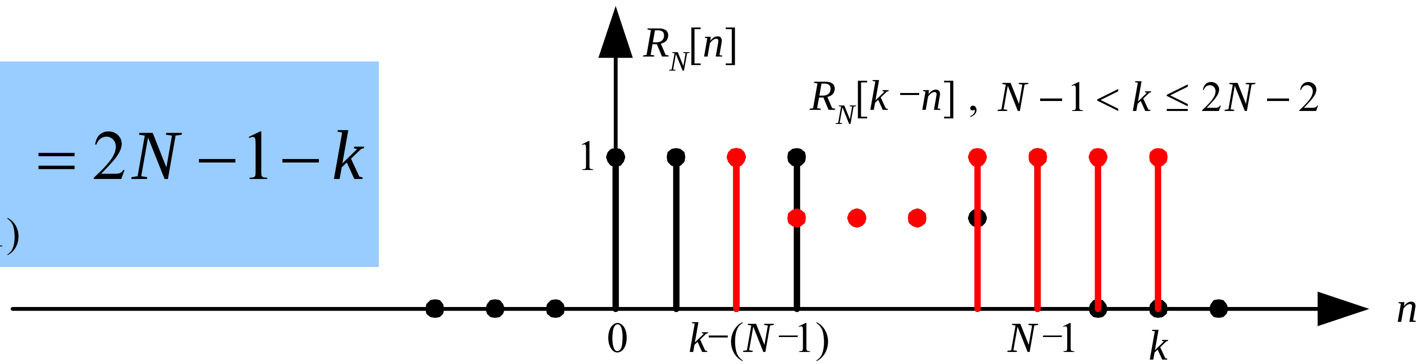


•$0\le k\le N-1$时,重合区间为$[0，k]$



$$y[k]=\sum_{n=0}^{k}1=k+1$$

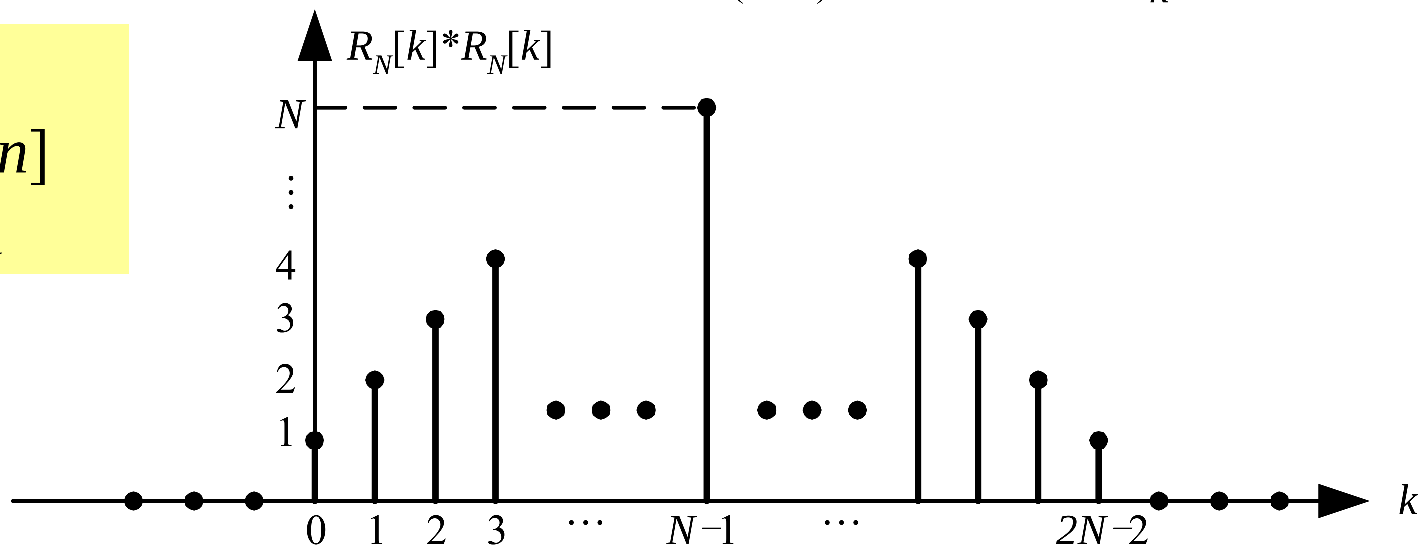
•$N-1\le k\le 2N-2$时, 重合区间为$[-(N-1)+k，N-1]$



$$y[k]=\sum_{n=k-(N-1)}^{N-1}1=2N-1-k$$

•$k>2N-2$时,
$R_N[n]$与$R_N[k\text{-}n]$
图形不再相遇

$y[k]=0$



二. 列表法计算序列卷积和

设$f[k]$和$h[k]$都是因果序列，则有

$$f[k]*h[k]=\sum_{n=0}^{k} f[n]h[k-n],k\geq 0$$

当$k=0$时，$y[0]=f[0]h[0]$

当$k=1$时，$y[1]=f[0]h[1]+f[1]h[0]$

当$k=2$时，$y[2]=f[0]h[2]+f[1]h[1]+f[2]h[0]$

当$k=3$时，$y[3]=f[0]h[3]+f[1]h[2]+f[2]h[1]+f[3]h[0]$

$$\vdots$$

以上求解过程可以归纳成列表法。

列表法

将$h[k]$ 的值顺序排成一行，将$f\,[k]$的值顺序排成一列，行与列的交叉点记入相应$f[k]$与$h[k]$的乘积，

	$h[0]$	$h[1]$	$h[2]$	$h[3]$	$\cdots$
$f[0]$	$f[0]\,h[0]$	$f[0]\,h[1]$	$f[0]\,h[2]$	$f[0]\,h[3]$	$\cdots$
$f[1]$	$f[1]\,h[0]$	$f[1]\,h[1]$	$f[1]\,h[2]$	$f[1]\,h[3]$	$\cdots$
$f[2]$	$f[2]\,h[0]$	$f[2]\,h[1]$	$f[2]\,h[2]$	$f[2]\,h[3]$	$\cdots$
$f[3]$	$f[3]\,h[0]$	$f[3]\,h[1]$	$f[3]\,h[2]$	$f[3]\,h[3]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

对角斜线上各数值就是 $f[n]h[k-n]$的值。

对角斜线上各数值的和就是$y[k]$各项的值。

例3 计算 $f[k]=\{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$ 与 $h[k]=\{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$ 的卷积和。

		$f[-2]$	$f[-1]$	$f[0]$	$f[1]$	$f[2]$
		1	2	0	3	2
$h[-1]$	1	1	2	0	3	2
$h[0]$	4	4	8	0	12	8
$h[1]$	2	2	4	0	6	4
$h[2]$	3	3	6	0	9	6

$$y[k]=\{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$$

三. 卷积和的性质

- 交换律:

$$f[k] * h[k] = h[k] * f[k]$$

结合律:

$$f[k] * \{ h_1[k] * h_2[k]\} = \{ f[k] * h_1[k] \} * h_2[k]$$

分配律:

$$f[k] * \{ h_1[k] + h_2[k] \} = f[k] * h_1[k] + f[k] * h_2[k]$$

卷积和的性质（续）

- **位移特性：** $$f[k] * \delta[k-n] = f[k-n]$$

推论： 若$f[k]*h[k]=y[k]$，则

$$f[k-n] * h[k-l] = y[k-(n+l)]$$

差分与求和特：

若$f[k]*h[k]=y[k]$

$$\nabla f[k] * h[k] = f[k] * \nabla h[k] = \nabla y[k]$$

$$f[k] * \sum_{n=-\infty}^{k} h[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{k} f[n]\right) * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{k} y[n]$$

例4 计算 $f[k]=\{1,0,\overset{\downarrow}{2},4\}$ 与 $h[k]=\{1,\overset{\downarrow}{4},5,3\}$ 的卷积和

解：

$$f[k]=\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]$$

利用位移特性

$$f[k]*h[k]=\{\delta[k+2]+2\delta[k]+4\delta[k-1]\}*h[k]$$

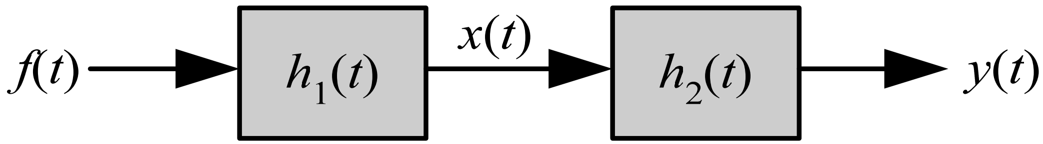
$$=h[k+2]+2h[k]+4h[k-1]$$

$$y[k]=f[k]*h[k]=\{1,4,7,\overset{\downarrow}{15},26,26,12\}$$

单位冲激响应表示的系统特性

- 级联系统的单位冲激响应
- 并联系统的单位冲激响应
- 因果系统
- 稳定系统

1. 级联系统的单位冲激响应



$$x(t)=f(t)*h_1(t)$$

$$y(t)=x(t)*h_2(t)=f(t)*h_1(t)*h_2(t)$$

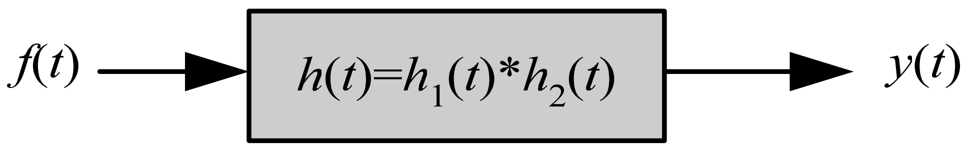
根据卷积积分的结合律性质，有

$$y(t)=f(t)*h_1(t)*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

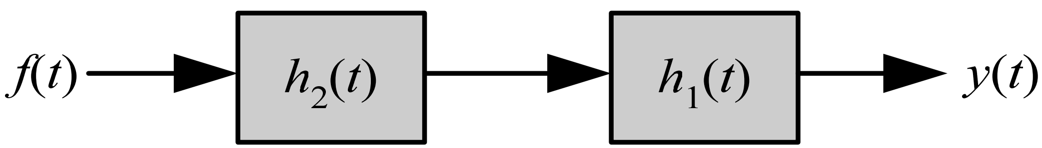
$h(t)$

结论:

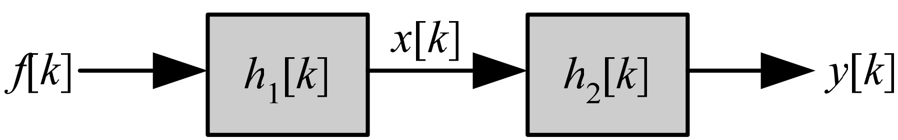
1)级联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应的卷积。

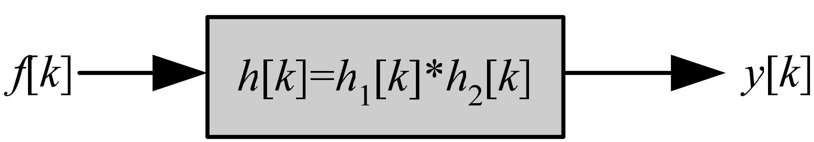


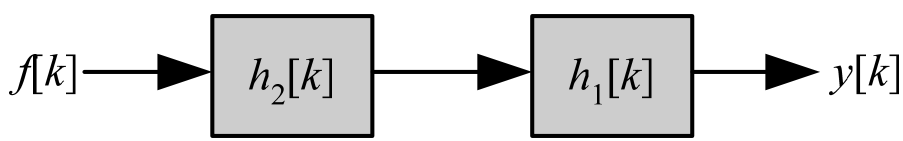
2)交换两个级联系统的先后连接次序不影响系统总的冲激响应。



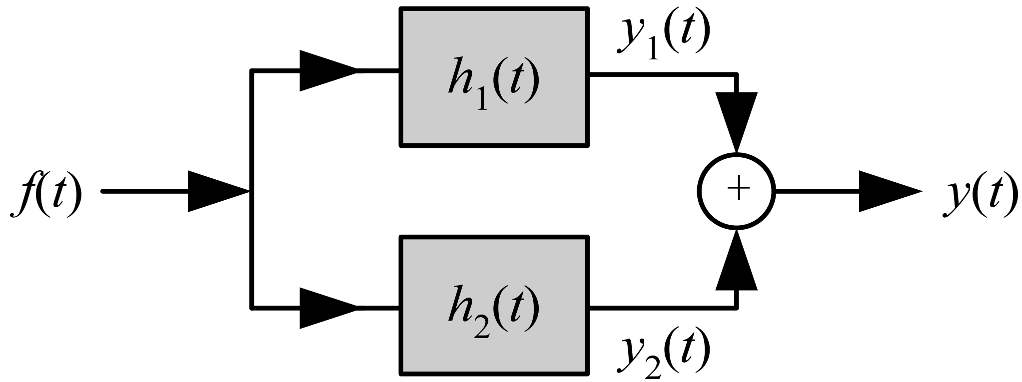
•两个离散时间系统的级联也有同样的结论。







2. 并联系统的单位冲激响应



$$y_1(t) = f(t) * h_1(t) \qquad y_2(t) = f(t) * h_2(t)$$

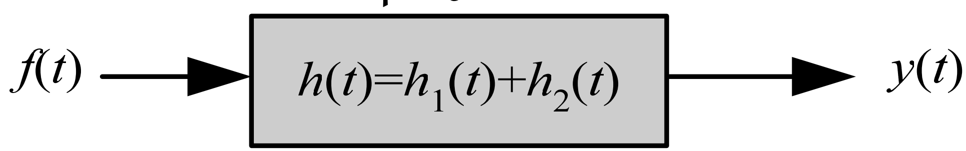
$$y(t) = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)$$

应用卷积积分的分配律性质，有

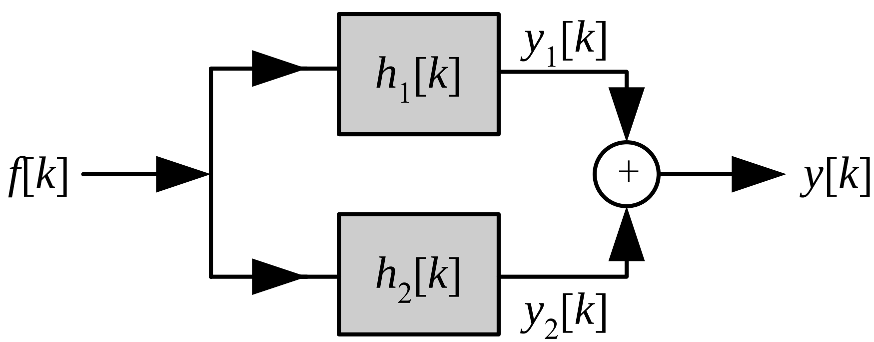
$$y(t) = f(t) * [\underbrace{h_1(t) + h_2(t)}_{h(t)}]$$

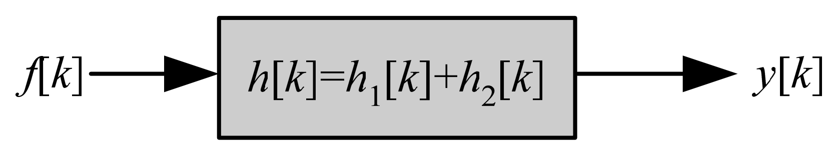
结论

并联系统的冲激响应等于两个子系统冲激响应之和。



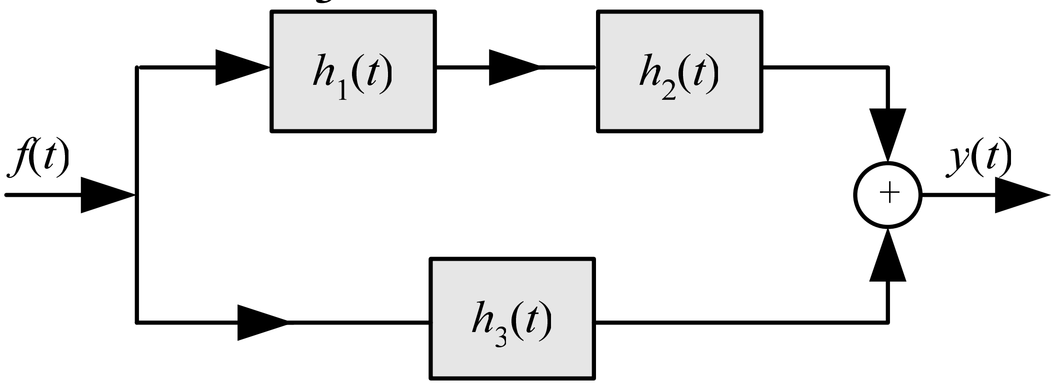
- 两个离散时间系统的并联也有同样的结论。





例1　求图示系统的冲激响应。其中$h_1(t)$=e^{-3t} $u(t)$，

$h_2(t)$=$\delta(t-1)$，$h_3(t)$=$u(t)$。



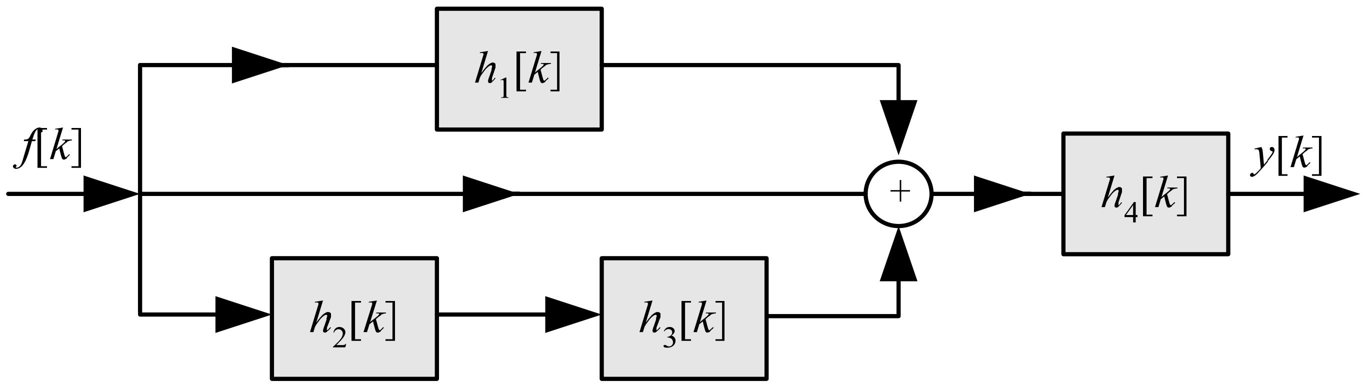
解：

子系统$h_1(t)$ 与$h_2(t)$ 级联，　$h_3(t)$支路与$h_1(t)$ $h_2(t)$级联支路并联。

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_3(t)$$

$$= \delta(t-1) * e^{-3t}u(t) + u(t) \ = e^{-3(t-1)}u(t-1) + u(t)$$

例2 求图示系统的单位脉冲响应。其中$h_1[k]=2^k u[k]$，$h_2[k]=\delta[k-1]$， $h_3[k]=3^k u[k]$， $h_4[k]=u[k]$。



解：

子系统$h_2[k]$与$h_3[k]$级联，$h_1[k]$支路、全通支路与$h_2[k]\,h_3[k]$级联支路并联，再与$h_4[k]$级联。

全通支路满足 $y[k]=f[k]*h[k]=f[k]$

全通离散系统的单位脉冲响应为单位脉冲序列$\delta[k]$

$$h[k]=\{h_1[k]+\delta[k]+h_2[k]*h_3[k]\}*h_4[k]$$

$$=2(2)^k u[k]+[1.5(3)^{k-1}-0.5]u[k-1]$$

3. 因果系统

• 定义：因果系统是指系统t_0时刻的输出只和t_0时刻及以前的输入信号有关。

• 因果系统的充分必要条件

因果连续时间LTI系统的单位冲激响应必须满足

$$h(t) = 0, t < 0$$

因果离散时间LTI系统的单位脉冲响应必须满足

$$h[k] = 0, k < 0$$

一个因果系统的冲激响应在冲激出现之前必须为零。

例3 判断M_1+M_2+1点滑动平均系统是否是因果系统。

$(M_1, M_2 \geq 0)$

解： M_1+M_2+1点滑动平均系统的输入输出关系为

$$y[k]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{n=-M_1}^{M_2} f[k+n]$$

系统的单位脉冲响应为

$$h[k]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{n=-M_1}^{M_2} \delta[k+n]$$

即
$$h[k]=\begin{cases}1/(M_1+M_2+1) & -M_2 \leq k \leq M_1 \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

显然，只有当$M_2=0$时，才满足$h[k]=0, k<0$的充要条件

即当$M_2=0$时，系统是因果的。

4. 稳定系统

•定义：若连续系统对任意的有界输入其输出也有界，则称该系统是稳定系统。

•稳定系统的充分必要条件

连续时间LTI系统稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau = S < \infty$$

离散时间LTI系统稳定的充分必要条件是

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = S < \infty$$

例4 判断M_1+M_2+1点滑动平均系统是否稳定。

解： 由例3可知，系统的单位脉冲响应为

$$h[k]=\begin{cases}1/(M_1+M_2+1) & -M_2\le k\le M_1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

对$h[k]$求和，可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h[k]\right|=\sum_{k=-M_2}^{M_1}\frac{1}{M_1+M_2+1}=1$$

由离散时间LTI系统稳定的充分必要条件可以判断出该系统稳定。

例5 已知一因果LTI系统的单位冲激响应为$h(t)=\mathrm{e}^{at}u(t)$，判断该系统是否稳定。

解： 由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{a\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\tau}\Big|_{0}^{\infty}$$

当$a<0$时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}$$

系统稳定

当$a\geq 0$时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\to\infty$$

系统不稳定

作业

- 2-1(1)(3)(6)(7), 2-2(2)(3)(6), 2-4(1)(6)(7)(9), 2-5(a)(d), 2-6(a)(b)(d), 2-7(1)(2)(7)(8),
- 2-8(a), 2-14, 2-15, 2-16(2)(3), 2-17(1)(2),
- 2-25(2)(3), 2-28(1)(2), 2-32(b), 2-38, 2-39(4)
- 2-40, 2-44(4), 2-45