



## SOMMAIRE

	<b>Nomenclature .....</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>LOIS DE COMPORTEMENT.....</b>	<b>5</b>
2.1	SCHÉMATISATION DES COMPORTEMENTS RÉELS.....	6
2.2	COMPORTEMENT PARFAITEMENT PLASTIQUE .....	8
2.3	MATÉRIAUX ÉCROUISSABLES .....	9
2.4	COMPORTEMENT VISCO-PLASTIQUE .....	10
2.5	ÉTABLISSEMENT DES LOIS DE COMPORTEMENT .....	14
<b>3</b>	<b>CARACTÉRISATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DYNAMIQUES .....</b>	<b>14</b>
3.1	MACHINES HYDRAULIQUES .....	15
3.2	BARRES DE HOPKINSON EN COMPRESSION .....	15
3.3	BARRES DE HOPKINSON DE TORSION .....	17
3.4	L'ARBALÈTE.....	18
3.5	TEST DE L'EXPANSION D'ANNEAU .....	18
3.6	LE LANCEUR À GAZ.....	19
3.7	TEST DE TAYLOR.....	20
<b>4</b>	<b>DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES LOIS DE COMPORTEMENT.....</b>	<b>21</b>
4.1	DIAGRAMME RATIONNEL PLASTIQUE.....	21
4.2	MÉTHODE D'IDENTIFICATION SIMPLIFIÉE .....	23
4.3	OPTIMISATION, IDENTIFICATION & MÉTHODE INVERSE.....	23
4.4	SENSIBILITÉ.....	26
<b>5</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>28</b>
	<b>Annexes .....</b>	<b>30</b>
	<b>Notes .....</b>	<b>33</b>

## Liste des figures

Figure 1. Effets de la viscosité sur les matériaux métalliques - Exemple d'un acier.....	6
Figure 2. Effets de la vitesse de déformation avec un modèle de comportement parfaitement plastique.....	8
Figure 3. Comparaison des modèles d'écroutissage.....	10
Figure 4. Effets de la viscosité avec un modèle de NORTON.....	11
Figure 5. Moyens d'essais mécaniques à grandes vitesses de déformation...	14
Figure 6. Machine hydraulique rapide et son montage de traction dynamique	15
Figure 7. Principe des barres de Hopkinson de compression.....	16
Figure 8. Exemple d'un signal obtenu lors d'un essai aux barres de Hopkinson.....	16
Figure 9. Barres de Hopkinson.....	16
Figure 10. Éprouvette de torsion.....	17
Figure 11. Expansion d'anneau.....	18
Figure 12. Vitesse d'expansion radiale.....	19
Figure 13. Lanceur à gaz.....	20
Figure 14. Essai de Taylor.....	21
Figure 15. Problèmes directs et inverses.....	25
Figure 16. Calcul intégral numérique.....	27

## *Nomenclatures*

### *Latines*

$m$	coefficient de sensibilité à la température
$K_0, n$	coefficients d'écroutissage
$K_1, r$	coefficients de sensibilité à la vitesse
$T$	température
$T_0$	température de référence
$T_m$	température de fusion

### *Grecques*

$\mathcal{E}$	déformation
$\dot{\mathcal{E}}$	vitesse de déformation
$\dot{\mathcal{E}}_0$	vitesse de déformation de référence
$\mathcal{E}_e$	déformation élastique
$\mathcal{E}_p$	déformation plastique
$\sigma_0$	limite d'élasticité

## 1 Introduction

Dès la conception d'une structure, la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux mis en œuvre apparaît nécessaire. Dans la plupart des cas, l'ingénieur demande uniquement des valeurs de charges limites, au delà desquelles se manifestent des phénomènes irréversibles (déformations plastiques, endommagement, ...). En revanche, pour le calcul prévisionnel d'évolution de structures appelées à se déformer fortement, la compréhension des phénomènes reliant les différents paramètres mécaniques devient indispensable. Les études sur le comportement rhéologique sous grandes vitesses de sollicitations s'intègrent dans ce cadre.

La complexité des phénomènes mécaniques et matériaux, les durées très courtes des expériences (l'unité de temps est la microseconde) et la grande variété des matériaux concernés, rendent les approches expérimentales et théoriques délicates. L'optimisation des structures nécessite des simulations numériques de plus en plus précises. Ceci implique, entre autre, le développement de modèles rhéologiques de plus en plus réalistes et l'identification de paramètres intrinsèques au matériau.

Nous présentons dans ce cours des modèles de lois de comportement, susceptibles d'être rencontrés et introduits dans les outils de simulation numérique. Nous présentons ensuite des méthodes de détermination des paramètres de ces modèles de comportement, ainsi que des moyens expérimentaux de laboratoire permettant d'étudier le comportement des matériaux et d'accéder aux paramètres des lois de comportement.

## 2 Lois de comportement

Lors d'une sollicitation, un matériau peut réagir de différentes manières : par échauffement thermique, par déformation élastique, déformation plastique, par formation et croissance de microcavités ou de microfissures. On appelle modèle de comportement la relation qui relie la contrainte appliquée à la température, la déformation et la vitesse de déformation (2.1). Par contre, un modèle d'endommagement est la relation qui décrit l'état de détérioration du matériau de l'état vierge à l'amorçage de la fissure macroscopique. Les modèles de comportement et d'endommagement font références à la Mécanique des Milieux Continus. La Mécanique de la Rupture permet, quant à elle, de formuler la progression de la fissure et les phénomènes de rupture qui suivent.

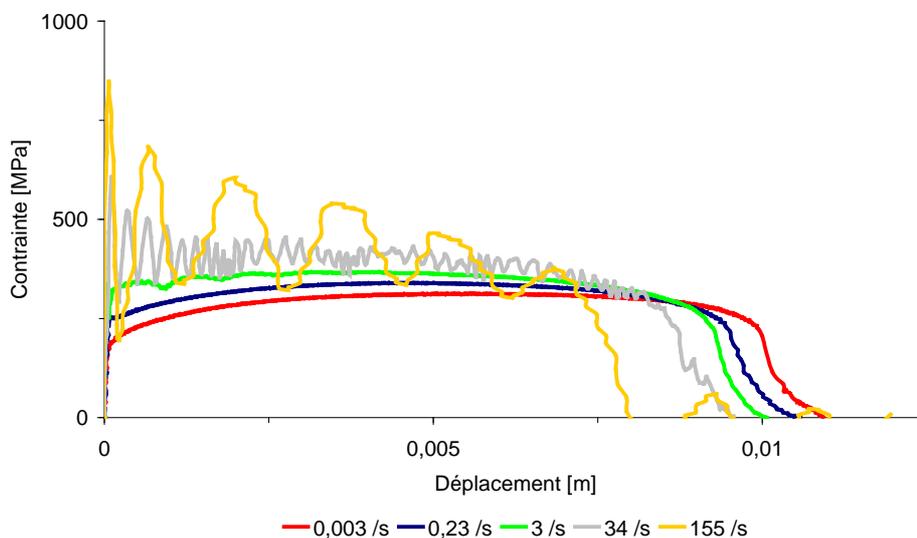
$$\sigma = \sigma(T, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (2.1)$$

Nous raisonnons ici en terme de contrainte scalaire, alors que nous savons que les contraintes et les déformations appliquées à un élément fini se caractérisent par un tenseur du second ordre à six composantes. Pour simplifier cette représentation, nous réduisons les

contraintes et déformations tensorielles en contraintes et déformations scalaires dites « équivalentes » à l'aide d'un critère d'équivalence<sup>†</sup> (Tresca, von Mises, etc.).

Nous nous intéressons, ici, aux modèles de comportement et plus particulièrement à ceux qui prennent en compte la vitesse de déformation dans leur formulation. La plupart des matériaux que nous allons traiter dans le cadre de ce cours obéissent dans leur domaine d'élasticité à la loi de Hooke (proportionnalité de la contrainte et de la déformation). Ceci appelle également à la connaissance des caractéristiques élastiques et de leur évolution en fonction de la température et de la vitesse de sollicitation. La Figure 1 présente, à titre d'exemple, les résultats obtenus pour un matériau présentant une sensibilité à la vitesse de déformation.

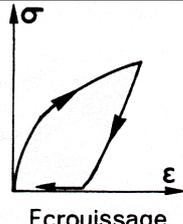
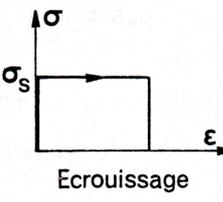
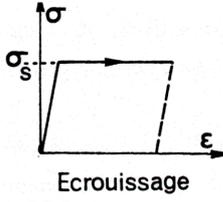
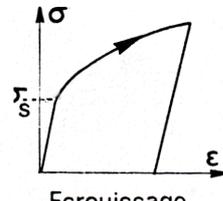
Figure 1. Effets de la viscosité sur les matériaux métalliques – Exemple d'un acier

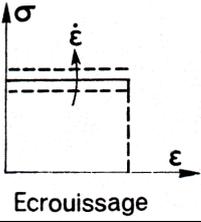
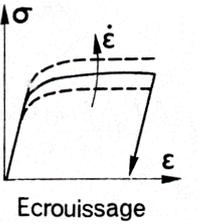
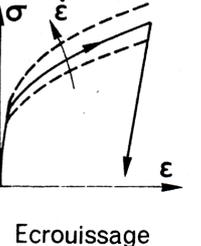


### 2.1 Schématisation des comportements réels

L'allure de la réponse à un essai de d'écroutissage permet de classer le matériau dans une des catégories suivantes : rigide, élastique, plastique, etc. A chaque schéma type correspond une théorie mathématique (en particulier : élasticité, plasticité, viscoplasticité, endommagement).

<i>Solide élastique parfait</i>	
<p style="text-align: center;">Ecroutissage</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ La réversibilité est instantanée.</li> <li>▪ <math>\sigma = f(\epsilon)</math></li> </ul>
<i>Solide viscoélastique</i>	

	<ul style="list-style-type: none"> <li>La réversibilité est « retardée » et n'intervient qu'après un temps infini.</li> <li><math>\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})</math></li> </ul>
<p>–Solides plastiques–</p>	
<p>On appelle ainsi des solides qui, après cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Par définition, la déformation plastique, <math>\epsilon_p</math>, est celle qui correspond à la configuration relâchée : <math>\epsilon_p = \epsilon(\sigma = 0)</math>.</p>	
<p><i>Solide rigide parfaitement plastique</i></p>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte <math>\sigma_S</math> et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur.</li> <li><math> \sigma  &lt; \sigma_S \rightarrow \epsilon = 0</math></li> <li><math> \sigma  = \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_p</math> (arbitraire)</li> </ul>
<p><i>Solide élastique parfaitement plastique</i></p>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>La déformation est élastique linéaire en deçà du seuil <math>\sigma_S</math> et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur.</li> <li><math> \sigma  &lt; \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}</math></li> <li><math> \sigma  = \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_p</math> (arbitraire)</li> </ul>
<p><i>Solide élastique écrouissable</i></p>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>La déformation totale est la somme d'une déformation élastique linéaire et d'une déformation permanente, nulle en deçà du seuil <math>\sigma_S</math>.</li> <li><math> \sigma  &lt; \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}</math></li> <li><math> \sigma  \geq \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma)</math></li> </ul>
<p><i>Solide parfaitement viscoplastique</i></p>	

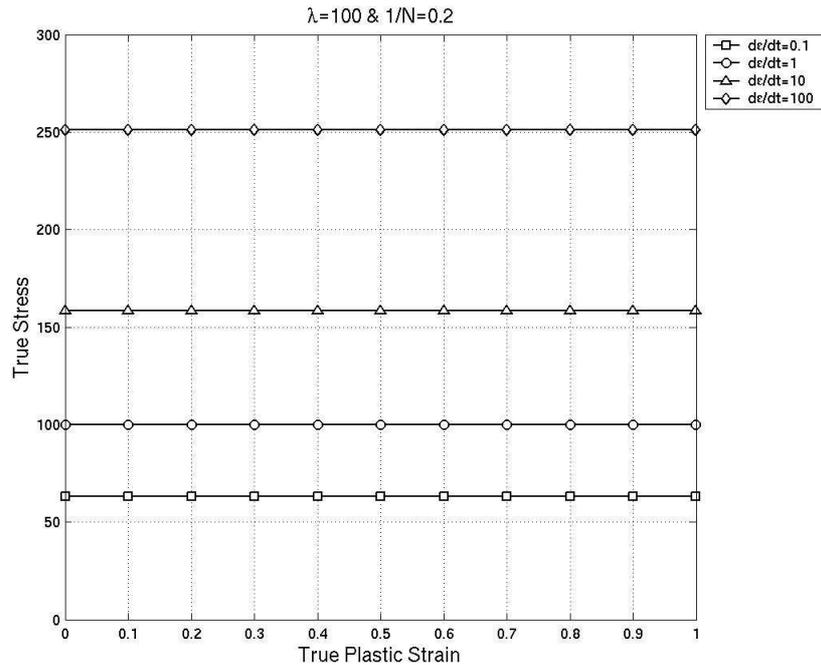
	<ul style="list-style-type: none"> <li>La vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte.</li> <li><math>\sigma = f(\dot{\epsilon})</math></li> <li>Modèle de Norton : <math>\sigma = \lambda \dot{\epsilon}^{1/N}</math></li> </ul>
<i>Solide élastique parfaitement viscoplastique</i>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>L'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écroissance.</li> <li><math> \sigma  &lt; \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}</math></li> <li><math> \sigma  \geq \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p</math> et <math>\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma)</math></li> </ul>
<i>Solide élasto-visco-plastique écroissable</i>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>C'est le schéma le plus complexe puisque la contrainte dépend de la vitesse de déformation plastique et de la déformation plastique elle-même ou d'une autre variable d'écroissance.</li> <li><math> \sigma  &lt; \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}</math></li> <li><math> \sigma  \geq \sigma_S \rightarrow \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p</math> et <math>\sigma = E\epsilon_e = f(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p)</math></li> </ul>

## 2.2 Comportement parfaitement plastique

Nous considérons en première approximation du comportement non-linéaire des matériaux un modèle de comportement parfaitement plastique. Dans le cas des sollicitations rapides, il est possible d'introduire une dépendance de la limite d'élasticité,  $\sigma_0$ , avec la vitesse de déformation (Figure 2) avec un modèle de type Norton (2.2) ou avec la température.

$$\sigma = \lambda \dot{\epsilon}^{1/N} \quad (2.2)$$

Figure 2. Effets de la vitesse de déformation avec un modèle de comportement parfaitement plastique



(voir l'influence de  $\lambda$ ) et (voir l'influence de  $N$ )

### 2.3 Matériaux écrouissables

La prise en compte de l'écrouissage s'effectue par l'intermédiaire d'un coefficient,  $n$ , qui traduit l'augmentation de la contrainte avec la déformation plastique. Une des lois les plus simples est la loi de HOLLOMON ou loi puissance (2.3). Cette loi ne s'appuie que sur deux paramètres  $K_0$  et  $n$ , et n'apporte aucune information sur la limite d'élasticité,  $\sigma_0$ .

$$\sigma = K_0 \varepsilon_p^n \quad (2.3)$$

où,  $\sigma$  est la contrainte d'écoulement et  $\varepsilon_p$  la déformation plastique rationalisée.

On définit ainsi un coefficient d'écrouissage  $n$  par :

$$n = \frac{d \log \sigma}{d \log \varepsilon} \quad (2.4)$$

Certains matériaux présentent différents domaines d'écrouissage. L'exemple le plus connu est celui du cuivre pour lequel, dans le domaine des vitesses de déformation quasi-statique ( $\dot{\varepsilon} = 10^{-3} s^{-1}$ ),  $n$  vaut 0.55 aux faibles déformations et 0.34 au-delà. On dit, dans ce cas, que le matériau présente plusieurs stades de consolidation (deux voire trois stades parfois).

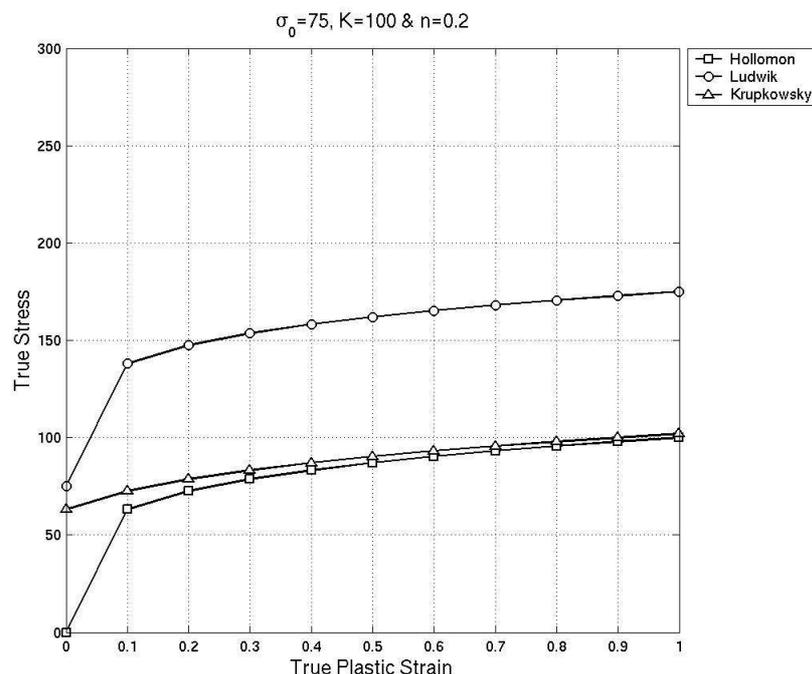
D'autres lois de formulation simple, que l'on peut qualifier de lois de comportement empiriques, sont couramment utilisées. On peut retenir la loi de LUDWIK (2.5) et de KRUPKOWSKY (2.6) qui permettent, contrairement à la loi de HOLLOMON,

d'apporter des informations sur la limite d'élasticité (Figure 3). Comparé au modèle de HOLLOMON, le modèle de LUDWIK permet d'augmenter la contrainte pour un même niveau de déformation (le diagramme est décalé vers le haut), alors que le modèle de KRUPKOWSKY permet de diminuer la déformation pour un même niveau de contrainte (le diagramme est tiré vers la gauche).

$$\sigma = \sigma_0 + K_0 \varepsilon_p^n \quad (2.5)$$

$$\sigma = K_0 (\varepsilon_0 + \varepsilon_p)^n \quad (2.6)$$

Figure 3. Comparaison des modèles d'érouissage



Cette illustration montre qu'il est nécessaire de choisir un modèle d'érouissage adapté aux phénomènes rencontrés. De même, une fois les paramètres du modèle sélectionné identifiés, ils ne peuvent pas être utilisés, dans l'état, pour décrire le comportement du matériau avec un autre modèle (pour un matériau donné,  $K_0$  et  $n$  d'un modèle de HOLLOMON ne conviennent pas à un modèle de LUDWIK ou KRUPKOWSKY).

#### 2.4 Comportement visco-plastique

Le comportement visco-plastique est défini par une loi d'écoulement plastique liée à une loi d'érouissage dépendant de la vitesse de déformation (*strain rate dependant plasticity*). Dans les formulations précédentes, l'influence de la vitesse de déformation n'apparaît pas explicitement. On est obligé alors d'établir des lois  $K(\dot{\varepsilon})$  et  $n(\dot{\varepsilon})$ . Il est aussi possible de contourner le problème en utilisant une loi puissance qui prend directement en compte la vitesse de déformation de manière multiplicative (2.7) ou additive (2.8). Les fonctions  $F$  et  $G$  sont également appelées modèles de correction dynamique.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = k_{ref} F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (2.7)$$

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = k_{ref} + G(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \quad (2.8)$$

La plus simple des expressions de  $F(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  semble être du à NORTON (2.9). Cette formulation s'appuie sur la loi d'HOLLOMON pour la partie statique que l'on retrouve lorsque  $\dot{\varepsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$  (Figure 4).

$$\sigma = K_0 \varepsilon_p^n \dot{\varepsilon}^r \quad (2.9)$$

où,  $r$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation (2.10).

$$r = \left( \frac{\partial \log \sigma}{\partial \log \dot{\varepsilon}} \right)_{\varepsilon} \quad (2.10)$$

qui dépend donc du niveau de déformation.

En incluant les effets de température, on peut utiliser une loi du même type (2.11).

$$\sigma = K_0 \varepsilon_p^n \dot{\varepsilon}^r T^m \quad (2.11)$$

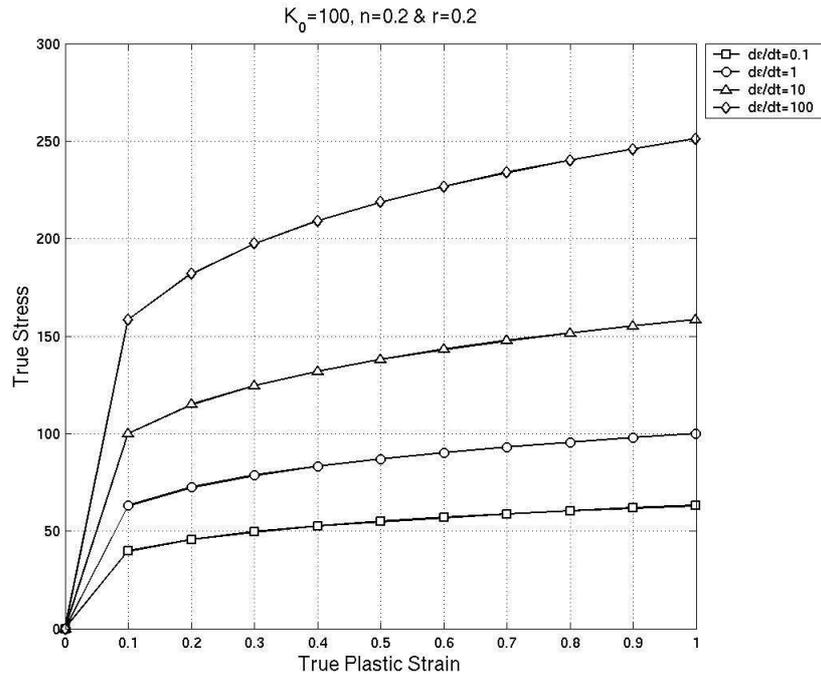
où  $m$  est le coefficient de sensibilité à la température (2.12).

$$m = \left( \frac{\partial \log \sigma}{\partial \log T} \right)_{\varepsilon, \dot{\varepsilon}} \quad (2.12)$$

qui dépend donc du niveau de déformation et de vitesse de déformation.

Cet exemple qui est parmi les plus simples, montre déjà qu'il est très délicat, d'une part, d'établir de telles lois (le plus complètement possible en termes de déformation, de vitesse de déformation, de température, etc.), car on comprend que cela nécessite une investigation expérimentale très importante, mais aussi que l'utilisation de ces lois va devoir s'effectuer à bon escient.

*Figure 4. Effets de la viscosité avec un modèle de NORTON*



(voir l'influence de  $r$ )

Les paramètres  $n$  et  $r$  de sensibilité à la déformation et à la vitesse de déformation plastique se retrouvent au travers d'un grand nombre de lois, mais leur définition peut varier. Ainsi, on rencontre souvent des lois mettant en évidence un comportement linéaire du matériau vis-à-vis de la vitesse de déformation, dans le domaine dynamique. Ces lois (modèles additifs) peuvent s'écrire :

$$\sigma = K_0 \varepsilon_p^n + \alpha \dot{\varepsilon} \quad (2.13)$$

Le coefficient  $\alpha$  traduit la sensibilité à la vitesse de déformation et peut être relié à  $r$  comme :

$$r = \left( \frac{\partial \log \sigma}{\partial \log \dot{\varepsilon}} \right)_{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} = \frac{\alpha \dot{\varepsilon}}{K_0 \varepsilon_p^n + \alpha \dot{\varepsilon}} \quad (2.14)$$

Cette loi linéaire, qui peut s'expliquer dans un cadre général dicté par la théorie des dislocations et traduit un phénomène d'amortissement, est valable dans un domaine de vitesse de déformation limité. En deçà d'une certaine vitesse (généralement  $10^2 \text{ s}^{-1}$ ), les mécanismes microscopiques sont différents. Au delà de  $10^4 \text{ s}^{-1}$ , les effets thermiques l'emportent sur les effets de la vitesse de déformation.

Le modèle de COWPER-SYMONDS (2.15) est un modèle de comportement qui prend en compte les effets de la vitesse de déformation de façon multiplicative (2.5). La partie élastoplastique de la loi,  $k_{ref}$ , peut être représentée un modèle analytique (LUDWIK ou KRUPKOWSKY) ou multi-linéaire.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = k_{ref} F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) \text{ avec } F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{K_1} \right)^r \quad (2.15)$$

La loi de JOHNSON-COOK (2.16) est un autre modèle de comportement multiplicatif. Il prend en compte les effets de la vitesse de déformation, mais également ceux de la température. Le modèle de LUDWIK est la partie élastoplastique de la loi.

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \left( \sigma_0 + K_0 \varepsilon_p^n \right) \left( 1 + K_1 \ln \dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_0 \right) \left( 1 - T^{*m} \right) \quad (2.16)$$

où,  $T^*$  est une fonction de la température de fusion  $T_m$  et de la température de référence  $T_0$  (2.17),  $\sigma_0$  représente la limite d'élasticité, les paramètres  $K_0$  et  $n$  traduisent l'écrouissage,  $K_1$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  la sensibilité à la vitesse de déformation et  $m$  à la température.

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \quad (2.17)$$

Lorsque la température du matériau devient égale à la température de fusion, la contrainte s'annule quelle que soit la déformation et la vitesse de déformation (on dit que le matériau est dans un état pâteux).

Ces deux derniers modèles sont très utilisés dans les codes de calcul numérique en raison de leur simplicité d'écriture et du faible nombre de paramètres. Ces formes sont généralement données à une vitesse de déformation plastique faible ou à des matériaux présentant une même sensibilité à la vitesse de déformation, quel que soit le niveau de déformation. Ce type de modèle introduit un effet d'homothétie de la courbe d'écrouissage avec l'augmentation de la vitesse de déformation. Des corrections comme celles proposées par JONES permettent d'étendre ces descriptions à une plus large gamme de déformations en introduisant une prise en compte de l'évolution de l'influence de la vitesse de déformation au cours de la déformation (2.18).

$$F(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 1 + \left( \frac{(\varepsilon_u - \varepsilon_y) \dot{\varepsilon}}{K_y (\varepsilon_u - \varepsilon) + K_u (\varepsilon - \varepsilon_y)} \right)^r \quad (2.18)$$

Il existe bien entendu d'autres modèles de comportement plus ou moins complexes (Zerilli-Armstrong, Preston-Tonks-Wallace, etc.). On retiendra également les modèles *visco-élastoplastiques* qui font intervenir les effets de la vitesse de déformation sur l'ensemble du comportement élasto-plastique : Perzyna, Bodner-Parton, Seaman ou Steinberg-Cochran-Guinan. Ils sont de loin les plus complets (prise en compte d'effets tridimensionnels, des déchargements, ...), mais sont paradoxalement les plus difficiles à appréhender. Ils prennent également en compte le caractère incrémental de la plasticité, sans hypothèse particulière notamment sur les trajets de déchargement.

## 2.5 Établissement des lois de comportement

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le signaler, l'établissement d'une loi de comportement pour un matériau donné relève d'une étude particulière, nécessitant une investigation expérimentale importante. L'objectif des différents laboratoires qui s'attachent à ce problème est de déterminer au travers d'essais mécaniques les plus simples (traction, compression, torsion) et dans une très large gamme de vitesse de déformation, les différents paramètres de ces lois.

L'un des principaux problèmes réside dans le fait que, pour balayer une très large gamme de vitesse de déformation, l'expérimentateur doit avoir recours à des techniques parfois différentes qu'il est nécessaire de maîtriser parfaitement. La démarche utilisée consiste alors à effectuer différents essais à différentes vitesses de déformation et à tracer dans un premier temps les courbes rationnelles de la contrainte fonction de la déformation (plastique pour une loi visco-plastique). La modélisation de ces courbes s'effectue ensuite en utilisant les techniques mathématiques classiques qui consistent à minimiser les écarts entre l'expérience et le modèle recherché. Dans les cas les plus simples (2 variables à déterminer), cette opération s'effectue à l'aide de régression linéaire et par ajustement de la théorie des moindres carrés. Dans d'autres cas, des méthodes d'itération s'avèrent nécessaires.

Les lois de comportement décrites précédemment ont été établies sans faire d'hypothèse sur l'application à un matériau donné. On peut penser que ces lois peuvent décrire le comportement de bon nombre de matériaux à condition que ceux-ci soient isotropes. Une (ou des) loi(s) de comportement ayant été choisie(s) pour modéliser le comportement d'un matériau sous sollicitations dynamiques dans un code de calcul, il faut déterminer les paramètres de la loi de comportement associée à ce matériau. On peut déjà remarquer que si l'on veut utiliser les simulations numériques en tant qu'outil prédictif, la détermination des paramètres de la loi de comportement doit être la plus précise et la plus complète possible.

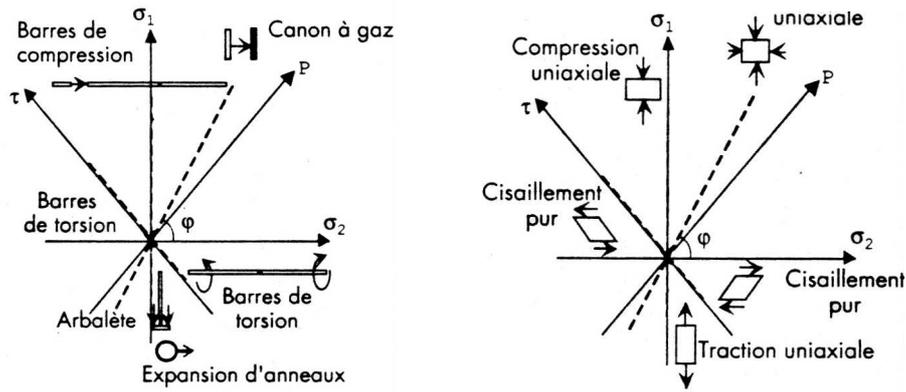
## 3 Caractérisation des lois de comportement dynamiques

Les essais utilisés pour déterminer les paramètres des lois de comportement sont les plus souvent uni-axiaux de façon à faciliter leur interprétation et l'identification des paramètres. Néanmoins, le matériau peut être sollicité dans tout l'espace des contraintes et il est donc indispensable de caractériser les réponses du matériau à différents types et vitesses de sollicitation pour établir des modèles de comportement s'étendant dans tout l'espace des contraintes (Figure 5). De cette manière, les lois de comportement peuvent relier les contraintes et les déformations sous leur forme tensorielle.

*Figure 5. Moyens d'essais mécaniques à grandes vitesses de déformation*

a- trajets de chargements

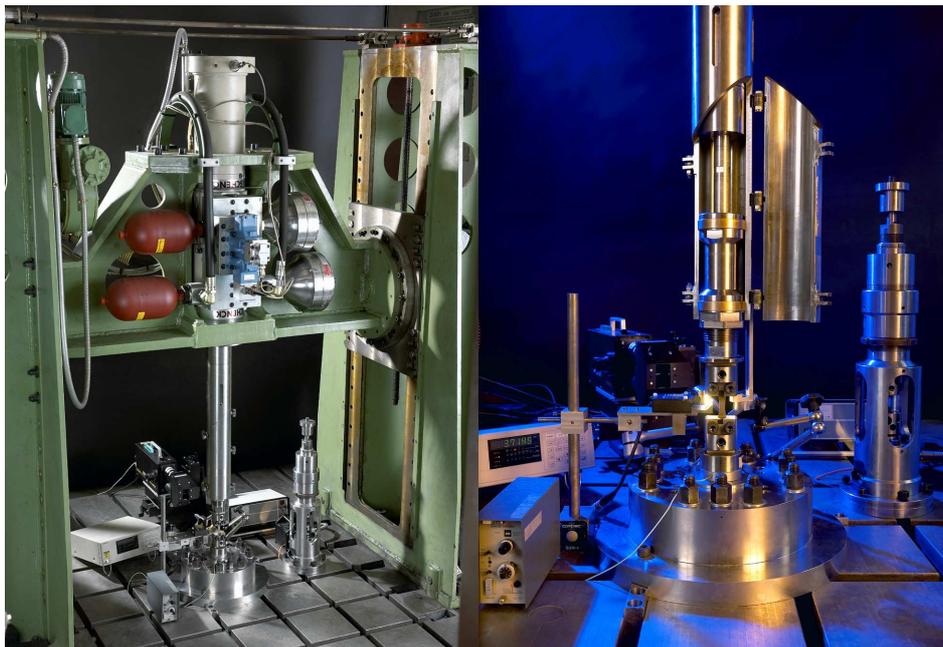
b- états de contraintes associés



### 3.1 Machines hydrauliques

De l'huile sous pression permet de venir déplacer un vérin. Ce type de machine est asservi en déplacement pour solliciter l'échantillon à vitesse constante. A l'extrémité de ce vérin est fixée la partie mobile d'un montage permettant de solliciter un échantillon en traction ou en compression uniaxiale. L'autre partie, fixe, du montage est reliée au bâti (Figure 6). Cette méthode d'essai intéresse le domaine des vitesses de déformation quasi-statiques et intermédiaires ( $10^{-4} \leq \dot{\epsilon} \leq 100 \text{ s}^{-1}$ ).

Figure 6. Machine hydraulique rapide et son montage de traction dynamique



### 3.2 Barres de Hopkinson en compression

Cet essai (Figure 7) consiste à soumettre un matériau à une compression dynamique uniaxiale avec des vitesses de déformation de l'ordre de  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . Le barreau impacteur engendre dans la barre d'entrée une onde dite « de barre », dans son régime établi. Celle-ci véhicule, à la vitesse  $c_b$ , une impulsion de contrainte élastique  $\sigma_b$  telle que :

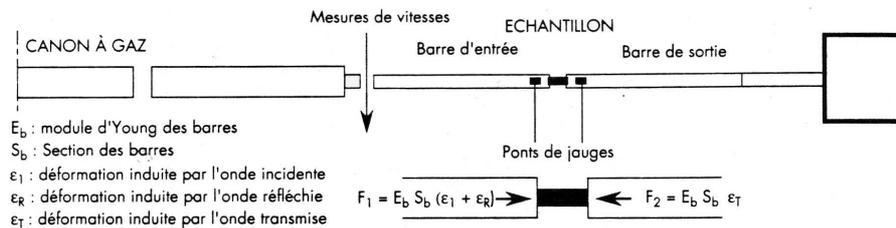
$$\sigma_b = \rho \cdot c_b \cdot V_b \quad (3.1)$$

avec  $c_b = \sqrt{E/\rho}$ ,  $\rho$  la masse volumique de la barre d'entrée et  $V_b$  la vitesse particulière dans cette barre.

Pour l'essai aux barres de Hopkinson en compression, les tenseurs de contrainte et de déformation s'écrivent :

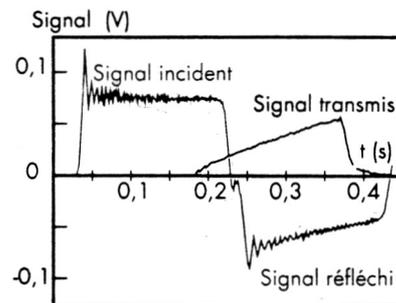
$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Figure 7. Principe des barres de Hopkinson de compression



Quand l'échantillon est un cylindre de hauteur réduite, les aller et retour de l'onde établissent un régime de contrainte uniforme. L'état de compression est alors quasiment équilibré ( $F_1 = F_2$ , Figure 7). Une partie de l'onde est transmise dans la barre de sortie, une autre partie est réfléchie dans la barre d'entrée. Le régime de sollicitation impose des contraintes élastiques dans les deux barres. Par conséquent, la mesure de leur déformation au cours du temps permet de remonter à l'histoire de la contrainte et de la déformation de l'échantillon. On interprète les essais (Figure 8) à l'aide des formules (3.3) où  $\sigma$  est la contrainte moyenne non rationalisée dans l'échantillon.

Figure 8. Exemple d'un signal obtenu lors d'un essai aux barres de Hopkinson



$$\dot{\varepsilon} = \frac{2c_b}{L} \varepsilon_r, \quad \varepsilon = \frac{2c_b}{L} \int \varepsilon_r dt, \quad \sigma = \frac{E_b S_b}{S_e} \varepsilon_t \quad (3.3)$$

dans laquelle  $L$  et  $S_e$  caractérisent la géométrie de l'échantillon.

Figure 9. Barres de Hopkinson



### 3.3 Barres de Hopkinson de torsion

Ce dispositif permet d'établir des lois de comportement pour de grandes déformations ( $\varepsilon > 50\%$ ). Une onde de torsion est créée en libérant très rapidement une barre pré-tordue appelée « barre d'entrée ». Cette onde se propage jusqu'à l'éprouvette fixée entre la barre d'entrée et la barre de sortie. En mesurant les déformations principales des deux barres, on connaît les distorsions incidentes, transmises et réfléchies. La vitesse des ondes de cisaillement est :  $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ . Les tenseurs de contrainte et de déformation s'écrivent :

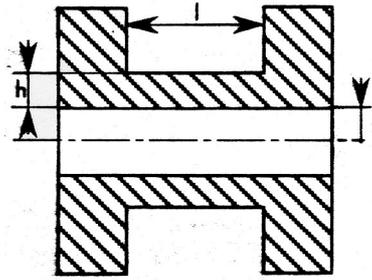
$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

avec  $\tau = \mu\gamma$  et  $\mu$  le module de cisaillement<sup>†</sup>.

Le principe d'interprétation des signaux expérimentaux reste analogue à celui décrit ci-dessus pour la compression. Le raisonnement avec les forces et les translations se transpose ici de manière formelle sur les couples et les rotations. Avec une éprouvette tubulaire (Figure 10), les formules deviennent ici :

$$\dot{\gamma} = \frac{r}{l} \frac{2}{\rho J c_t} M_r, \quad \gamma = \frac{r}{l} \frac{2}{\rho J c_t} \int M_r dt, \quad \tau = \frac{M_t}{2\pi r^3} \quad (3.5)$$

Figure 10. Éprouvette de torsion



### 3.4 L'arbalète

L'éprouvette est vissée d'une part sur une barre dynamométrique fixe, et d'autre part, sur une tête mobile mise en mouvement par un projectile. La force appliquée à l'extrémité fixe de l'éprouvette est mesurée par extensométrie. Les déplacements relatifs d'un réseau de traits équidistants gravés sur l'éprouvette sont enregistrés au moyen d'une caméra ultra-rapide. Les vitesses de déformations varient entre  $10^2$  et  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . L'état de contrainte est uniaxial et celui des déformations est triaxial :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La mesure des forces et des déplacements (donc des contraintes et des déformations) se fait de manière locale et non globale. Les états de contraintes et de déformations ne sont en effet pas homogènes dans tout le matériau testé. Afin d'établir des lois de comportement en traction dynamique uniaxiale les forces appliquées de part et d'autre de l'éprouvette sont mesurées. L'analyse de ces mesures peut alors être effectuée de manière similaire à celle utilisée dans le cadre du dispositif de compression à barres de Hopkinson. Cet essai est également exploitable pour les études des mécanismes de déformations et d'instabilité en traction dynamique, par exemple l'écoulement, la ductilité et les processus d'endommagement et de rupture des matériaux.

### 3.5 Test de l'expansion d'anneau

Le test d'expansion d'anneau apporte un complément dans la connaissance du comportement mécanique des matériaux. Après la détonation d'un bâtonnet d'explosif amorcé simultanément à ses deux extrémités (Figure 11), les anneaux acquièrent une vitesse radiale grâce à l'onde de compression qui parcourt le cylindre transmetteur. Lorsqu'il s'en détache, l'anneau central a acquis son énergie cinétique totale, qui lui permet de se déformer plastiquement et de poursuivre son mouvement d'expansion radiale. La décélération est provoquée par la contrainte d'écoulement uniaxiale circonférentielle, homogène dans la direction de plus grande déformation. Le suivi temporel de la vitesse radiale est obtenu par interférométrie Doppler laser (Figure 12).

Figure 11. Expansion d'anneau

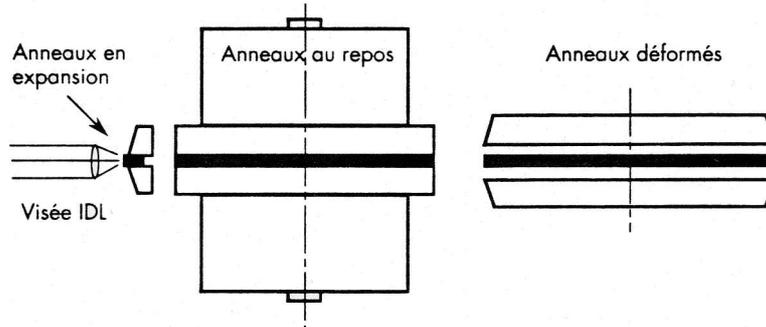
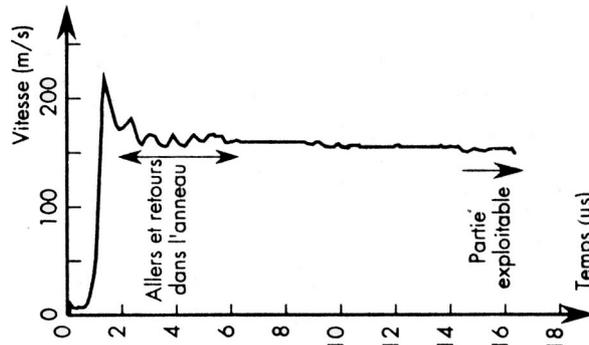


Figure 12. Vitesse d'expansion radiale



Le mode de sollicitation mécanique imposé au matériau lors d'un test d'expansion d'anneau est analysé selon les hypothèses suivantes : homogénéité des contraintes et des déformations dans l'anneau en relation avec son mode de décélération uniforme ; uniaxialité des contraintes dans la circonférence de l'anneau. Avec une section de l'anneau petite par rapport au rayon, cela est analogue à une traction uniaxiale et axisymétrique. Les tenseurs de contraintes et de déformations s'écrivent, en coordonnées cylindriques :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

avec les expressions :

$$\sigma_{\theta} = -\rho \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_0}{R_0} \right) \right] R \ddot{R}, \quad \varepsilon_{\theta} = \ln(R/R_0), \quad \dot{\varepsilon}_{\theta} = R/R_0 \quad (3.8)$$

Le domaine des valeurs de  $\dot{\varepsilon}$  exploré par les essais de l'expansion de l'anneau est compris entre  $5 \cdot 10^3$  et  $10^4 \text{ s}^{-1}$ . Les résultats d'expansion d'anneau apportent des données à de plus grandes valeurs de  $\dot{\varepsilon}$  par rapport aux barres de Hopkinson.

### 3.6 Le lanceur à gaz

Les essais consistent à réaliser des impacts plans de plaques. Une onde longitudinale plane est ainsi induite dans les matériaux étudiés. Tant que le comportement mécanique du matériau reste élastique, la vitesse des ondes est :

$$c_l = \sqrt{\frac{K + 4\mu}{3}} \quad (3.9)$$

avec  $K$  le module de compressibilité<sup>§</sup>.

Les vitesses de déformation mises en jeu sont de l'ordre de quelques  $10^4$  à quelques  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . L'état de déformation du matériau est uniaxial. Les tenseurs de contraintes et de déformations s'écrivent :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Ces essais fournissent des résultats de compression triaxiale (expériences de compression-détente) et en traction triaxiale (expériences d'écaillage). Le niveau de contrainte atteint dépend de la vitesse d'impact, de la polaire de choc et du comportement du matériau.

Figure 13. Lanceur à gaz

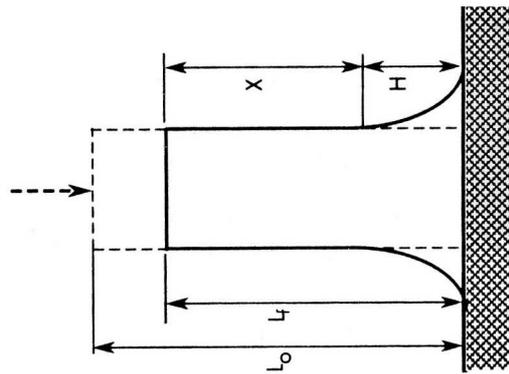


### 3.7 Test de Taylor

Les essais mécaniques décrits précédemment sollicitent les matériaux à des vitesses de déformations de  $10^4$  à  $10^5 \text{ s}^{-1}$  et permettent d'identifier les paramètres de lois de comportement sur ce domaine. Pour les valider, il est nécessaire de réaliser d'autres expériences. La première étape de cette validation peut être menée à partir d'un essai de Taylor.

Le test de Taylor consiste à projeter un cylindre métallique fait du matériau étudié contre une cible supposée infiniment rigide. Les vitesses d'impact sont telles que le cylindre s'écrase contre la cible en prenant l'aspect d'une « patte d'éléphant » (Figure 14). Une partie (H) du cylindre se déforme plastiquement, l'autre (X) reste élastique. Les vitesses de déformation atteintes sont comparables à celles observées lors d'essais à barre de Hopkinson. Cependant, dans le cas du test de Taylor, les états de contrainte, de déformation et de vitesse de déformation ne sont pas homogènes dans tout l'échantillon. D'où l'intérêt de cette expérience pour la validation des lois de comportement : la simulation d'un tel essai permet de tester les différentes lois dans une configuration plus complexe.

Figure 14. Essai de Taylor



Nous venons rapidement de voir quelques techniques expérimentales spécifiques des études dynamiques. A l'ensemble de ces moyens, il faut associer des dispositifs d'analyses plus classiques, pour une bonne compréhension des phénomènes : machines d'essais statiques, caractérisation thermiques, métallurgiques, ... Quelques informations sur les capteurs de mesure sont rassemblées en Annexe.

#### 4 Détermination des paramètres des lois de comportement

Les méthodes de détermination des paramètres sont différentes selon le type de lois de comportement. Pour les matériaux métalliques, la loi de comportement repose sur la détermination du diagramme rationnel plastique issu de l'essai expérimental. A titre d'exemple, nous décrivons plusieurs méthodes pouvant être utilisées pour identifier les paramètres des lois de comportement.

##### 4.1 Diagramme rationnel plastique

Le diagramme rationnel est une représentation de la courbe d'essai avec en ordonnée la contrainte vraie (ou contrainte rationnelle) et en abscisse la déformation vraie (ou déformation rationnelle). Nous rappelons la justification du diagramme rationnel ainsi que les relations décrivant cette transformation.

##### 4.1.1 Déformation vraie

L'origine de cette transformation est que même si la définition des allongements est cohérente avec une théorie des petites transformations, ainsi définis, ils ne sont pas additifs. De même, les strictiones ne sont pas additives. Pour palier ces inconvénients, les physiciens ont introduit une déformation physique ou naturelle  $\varepsilon_v$ , définie par la relation (4.1).

$$\varepsilon_v = \int_{L_0}^{L_1} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_1}{L_0} \quad (4.1)$$

On vérifie facilement que cette déformation est additive :

$$\varepsilon_v = \int_{L_0}^{L_2} \frac{dL}{L} = \int_{L_0}^{L_1} \frac{dL}{L} + \int_{L_1}^{L_2} \frac{dL}{L} = \varepsilon_{01} + \varepsilon_{12} \quad (4.2)$$

La relation entre la déformation  $\varepsilon$  obtenue au cours de l'essai par un capteur de déformation ( $\varepsilon = (x - x_0)/x_0$ ) et la déformation rationnelle est précisée par la relation (4.3).

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= \int_{L_0}^{L_1} \frac{dL}{L} = \ln \frac{L_1}{L_0} = \ln \left( \frac{L_0 + \Delta l}{L_0} \right) \\ \varepsilon_v &= \ln \frac{L_1}{L_0} = \ln(1 + \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.3)$$

#### 4.1.2 Contrainte vraie

La contrainte vraie tient compte de la variation de section au cours de l'essai et est égale à la charge rapportée à la section instantanée (4.4).

$$\sigma_v = \frac{F}{S} \quad (4.4)$$

Pour des petites déformations, la contrainte vraie peut être identifiée à la contrainte nominale  $\sigma = F/S_0$  (ou contrainte de Piola-Kirchoff). Sinon, il faut prendre en compte la variation de section et la section instantanée s'exprime alors comme :

$$S = S_0 \cdot (1 - \nu^* \cdot \varepsilon)^2 \approx S_0 \cdot (1 - 2\nu^* \cdot \varepsilon) \quad (4.5)$$

$\nu^*$  est le coefficient de contraction élastique ou élastoplastique. En première approximation, en élastoplasticité  $\nu^*$  est confondu avec  $1/2$ .

La contrainte vraie s'exprime alors simplement comme :

$$\sigma_v = \frac{F}{S_0 \cdot (1 - \nu^* \cdot \varepsilon)^2} \approx \frac{F}{S_0} \cdot (1 + \varepsilon) = \sigma e^{\varepsilon_v} \quad (4.6)$$

#### 4.1.3 Déformation plastique

Une fois le diagramme rationnel déterminé, il est nécessaire d'extraire la partie plastique de la déformation. La détermination de la partie plastique de la déformation repose sur l'équation (4.7).

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (4.7)$$

Pour les matériaux qui obéissent à la loi de Hooke dans leur domaine d'élasticité, la déformation élastique est exprimée en fonction de la contrainte courante et du module d'Young du matériau (4.8).

$$\varepsilon_e = \sigma/E \quad (4.8)$$

Il vient finalement la relation reliant la déformation plastique à la déformation.

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \sigma/E \quad (4.9)$$

Le diagramme est défini tant que la déformation est homogène dans la zone utilisée de l'échantillon, c'est-à-dire avant l'apparition de la striction. La striction apparaît lorsque  $\frac{dF}{d\varepsilon} = 0$  ou encore  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$ .

#### 4.2 Méthode d'identification simplifiée

Si les paramètres agissent de manière indépendante sur la courbe contrainte fonction de la déformation, la méthode de détermination la plus simple consiste à « simuler » par calcul mathématique le modèle de comportement et à le comparer aux résultats des essais. On identifie séquentiellement l'effet de chaque paramètre sur la forme de la courbe contrainte fonction de la déformation (en réalisant éventuellement une étude de sensibilité de paramètre) et on s'efforce de restituer au mieux la courbe expérimentale. Le calcul de la distance entre l'expérience et le modèle ou et d'écart types peuvent aider à juger de la qualité d'un jeu de paramètres. On peut ainsi déterminer par itérations successives les paramètres d'une loi de comportement. Il faut noter toutefois que l'on ne peut pas être certain de l'unicité de la solution paramétrique déterminée par cette méthode et que le set de paramètres peut ne pas être intrinsèque au matériau.

Prenons à titre d'exemple le modèle de JOHNSON-COOK exprimé sans son terme en température (4.10). On remarque que le paramètre  $A$  permet d'ajuster le seuil d'écroutissage et le paramètre  $C$  la sensibilité à la vitesse de déformation, donc l'augmentation de la contrainte obtenue quand la vitesse de déformation s'accroît.

$$\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}) = (A + B\varepsilon_p^n) \left( 1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \quad (4.10)$$

(essayer d'identifier  $A$  et  $C$ )

#### 4.3 Optimisation, identification & méthode inverse

Lorsque les paramètres n'agissent pas de manière indépendante (les paramètres sont couplés) sur la courbe contrainte fonction de la déformation, il est nécessaire d'avoir recours à un outil d'optimisation. Au sens technique, on qualifie d'optimisation simplement l'amélioration d'un système en changeant certaines caractéristiques de ce système. Pour étayer ces améliorations de façon quantitative, nous avons besoin d'un critère de qualité, généralement qualifié de fonction performance. Optimiser signifie donc améliorer la valeur de la fonction performance en faisant varier de façon appropriée les paramètres d'optimisation. La notion de fonction de performance repose finalement sur l'existence d'un modèle de

comportement  $\Psi$  du système. L'optimum d'un système peut parfois être directement décrit en fonction des valeurs des paramètres de ce modèle mais aussi simplement mesuré via la comparaison du comportement du modèle optimisé par rapport à celui du système théorique optimal (ou référence). Dans ce second cas la fonction performance prend la forme d'un estimateur d'erreur qui peut être par exemple la somme quadratique d'erreur sur quelques points de fonctionnement du système optimal. Ce critère doit posséder la propriété, nécessaire pour les méthodes d'optimisation, de varier de façon continue, indépendamment du nombre de points de fonctionnement. D'autres formulations, par exemple écart type, sont envisageables et acceptables à condition qu'elles remplissent la condition de continuité. Une fois formulée la fonction performance, il est possible de trouver les paramètres minimisant l'erreur ou optimisant le comportement du système.

La fonction de performance, utilisée pour l'optimisation d'un système, peut naturellement être utilisée pour « l'identification » des paramètres du modèle de comportement : l'optimisation visera à améliorer le système, l'identification à améliorer le modèle. La référence devient simplement, dans le cas de l'identification, le système existant et sa réponse réelle.

Si nous appliquons ce principe au cas de la caractérisation de lois de comportement matérielles de type puissance, JOHNSON-COOK ou COWPER-SYMONDS, la réalisation d'un essai mécanique donne l'effort,  $F(t)$ , les déformations,  $\varepsilon(t)$ , ou le déplacement,  $\delta(t)$ , en réponse au système constitué de l'éprouvette et de son environnement, soumis à une sollicitation  $\Gamma$  telle que la vitesse de sollicitation  $V$ . Si  $\underline{z}$  décrit l'ensemble des paramètres de la loi de comportement à identifier, le problème « direct » fait l'hypothèse que les réponses  $\Omega$  du système s'expriment littéralement et directement en fonction des valeurs de paramètres à identifier  $\underline{z}$  et de la sollicitation,  $\Gamma$ . Il vient alors :

$$\Omega = \Psi(\underline{z}, \Gamma) \quad (4.11)$$

Des hypothèses classiques de la mécanique permettent de décrire complètement le problème en posant :

$$\sigma = \frac{F(t)}{S(t)} = f(\underline{z}, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)) \quad (4.12)$$

soit encore 
$$\frac{F(t)}{S(t)} - f(\underline{z}, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)) = 0 \quad (4.13)$$

Dans ce cas, les réponses  $\Omega = \{F, S, \varepsilon, \dot{\varepsilon}\}$  sont les variables d'état du système. Le traitement des valeurs des variables d'état recueillies par l'expérience permet alors de résoudre le système directement. Dans la majorité des cas, la résolution du problème « direct » aboutit à une solution unique et stable vis-à-vis des écarts de données (mesure), de la finesse de

discrétisation du problème (nombre de points de fonctionnement) ou de la représentativité du modèle à caractériser.

Dans le cas où le système ne pourrait pas être complètement décrit (méconnaissance de  $S$ ,  $\dot{\varepsilon}$ ), la méthode 'directe' ne permet pas la détermination de l'ensemble des paramètres. Les réponses au système ne sont plus alors considérées comme des variables d'état du système mais comme des variables observables ou variables d'état accessibles à l'observation. On appelle alors  $\omega$  un sous ensemble de la réponse  $\Omega$  :  $\omega = \{F, \varepsilon, \dot{\varepsilon}\}$ . En faisant l'hypothèse que la connaissance des seules variables observables suffit à caractériser complètement le système, le problème initialement posé :

$$\frac{F(t)}{S(t)} - f(\underline{z}, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)) = 0$$

devient :

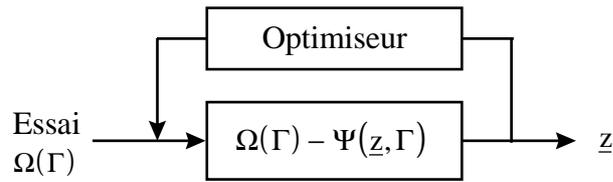
$$F(t) - f(\underline{z}, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)) \cdot S(\underline{z}, \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)) = 0 \quad (4.14)$$

$S$  est alors une variable d'état cachée qui s'exprime implicitement en fonction des paramètres recherchés et des autres variables observables. Le principe de la « méthode inverse » consiste à intégrer, dans la boucle d'identification, le calcul et donc l'influence des variables d'état cachées par méthode analytique, éléments finis, etc. L'hypothèse fondamentale est alors qu'une fois atteinte la performance recherchée, les paramètres du modèle de comportement de l'essai « virtuel » caractérisent le comportement du système réel. Pour résoudre le problème, il suffit donc de disposer d'informations éventuellement partielles sur la réponse (Figure 15).

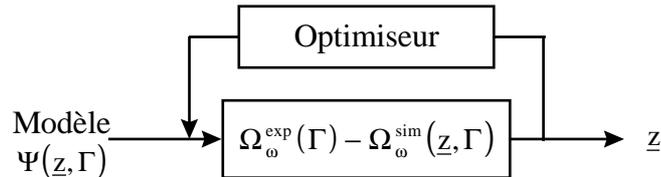
L'identification des paramètres matériels par méthode inverse consiste alors à optimiser les paramètres  $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  du modèle mécanique  $\Psi$  décrivant le système physique à l'aide de la réponse partielle du système physique mesurée par l'expérience,  $\omega^{\text{exp}}$ , et celle du modèle mécanique,  $\omega^{\text{sim}}(\underline{z})$ , obtenue par une simulation numérique utilisant la méthode des éléments finis par exemple.

*Figure 15. Problèmes directs et inverses*

Problème direct :



Problème inverse :



#### 4.4 Sensibilité

Avant de commencer l'identification des paramètres d'une loi de comportement, il est recommandé de mener une étude de sensibilité de paramètres (surtout lorsque les paramètres sont couplés et que l'on a recourt aux techniques d'optimisation). L'étude de sensibilité permet de hiérarchiser l'influence de chaque paramètre de manière à débiter l'identification les plus forts. Cette étude permet également de définir des domaines d'influence pour éventuellement opter pour une identification par partie. Son intérêt réside également en l'estimation des bornes d'une optimisation sous contraintes (on choisira un intervalle de solution plus large pour un paramètre sensible de manière à éviter qu'il ne se « colle » sur une des deux bornes). Un second intérêt dans cette étude est également de mesurer (et de hiérarchiser) la performance d'une variable observable pour l'optimisation d'un paramètre.

La mise en œuvre d'une étude de sensibilité consiste à simuler le comportement de l'échantillon (à l'aide de la méthode des éléments finis par exemple) en effectuant une variation,  $\beta$ , sur la valeur de chacun d'entre eux. Une sensibilité instantanée (ou sensibilité locale) est définie en tout point de l'essai par l'application de la relation (4.15), qui détermine une norme. Le domaine de sensibilité de chacune paramètre est déterminé par la courbe de sensibilité locale.

$$\eta^i = \frac{z^i}{\beta} \cdot \left| \frac{FEM(z^i + \beta) - FEM(z^i)}{FEM(z^i)} \right| = \frac{1}{\alpha} \left| \frac{\Delta FEM}{FEM(z^i)} \right| \quad (4.15)$$

avec  $\beta = \alpha \cdot z^i$  et  $0 < \alpha < 1$ .

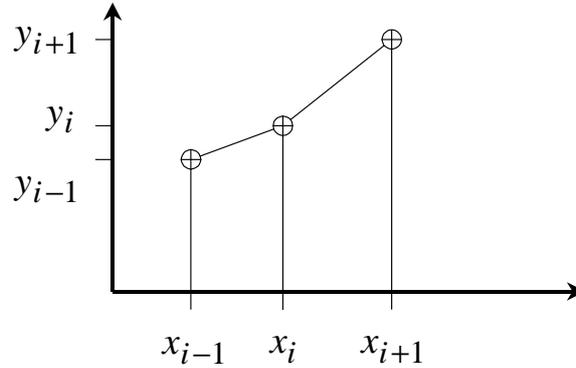
La sensibilité globale du paramètre est alors définie par l'aire sous la courbe de sensibilité locale (4.16).

$$I^i = \int \eta^i(x) \cdot dx \quad (4.16)$$

$x$  est l'abscisse commune sélectionnée.

Le calcul numérique de l'intégrale peut être exprimé par la relation (4.17) en première approximation (Figure 16).

Figure 16. Calcul intégral numérique



$$I^i = \sum_i \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) (y_i + y_{i-1}) \quad (4.17)$$

Pour introduire la notion d'essai et non plus de courbe numérique, le calcul de sensibilité est dans premier temps arrêté lorsque la valeur du déplacement correspond à la rupture observée sur la courbe de référence (4.18).

$$I^i = \sum_i \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) (y_i + y_{i-1}), \text{ tq } x \leq \delta_u^{ref} \quad (4.18)$$

Pour éviter de masquer et de surestimer la sensibilité d'un paramètre durant l'essai, on retire ensuite les valeurs de sensibilité locale supérieures à 1 (elles concernent souvent le dernier point de la courbe de sensibilité relatif à  $[x = \delta_u, y = 0]$ ). Avec cette dernière relation (4.19), on peut comparer la sensibilité des paramètres pour les observables d'un même essai et donc définir la performance d'une observable mais pas celle d'un essai.

$$\forall y_i \leq 1 \text{ et tq } x \leq \delta_u^{ref}, I^i = \sum_i \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) (y_i + y_{i-1}) \quad (4.19)$$

Pour cela, on exprime la sensibilité locale en fonction du numéro de la sauvegarde dans le fichier de résultat ( $\underline{x} = [0, \delta_u] \Rightarrow \underline{x} = [1, NP]$ ) pour que la sensibilité ne soit pas fonction de l'abscisse commune (durée du phénomène ou déplacement). Enfin, on norme la valeur de sensibilité en divisant par le nombre de point sur la courbe et on obtient ainsi la sensibilité globale d'un paramètre (4.20). Avec cette dernière relation, on peut comparer la sensibilité d'un paramètre pour chacun des essais et étudier la performance des essais entre

eux (pour éventuellement éliminer de la boucle d'optimisation les essais pas ou peu sensibles).

$$\forall y_i \leq 1 \text{ et } tq \ x \leq \delta_u^{ref}, I^i = \frac{1}{NP} \sum_i \frac{1}{2} (y_i + y_{i-1}) \quad (4.20)$$

car  $\forall x, (x_i - x_{i-1}) = 1$

Les paramètres, les observables et les essais sont alors hiérarchisés en fonction des valeurs de sensibilités globales ainsi déterminées.

## 5 Bibliographie

- J.P. Ansart, « *Lois de comportement* », DYMAT, ETCA, Arcueil, France (1994)
- S.R. Bodner and Y. Partom, « *Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain hardening materials* », J. of Applied Mechanics Trans. of ASME (1975) 385-389
- D. Bois et D. Grave, « *Simulation numérique d'essais d'impact et comparaison des lois de comportement* », J. de Physique, Colloque C5, supplément au n°8. Tome **46**, pp 101-112; Août 1985.
- A. Cosculluela, N. Goubot et G. Naulin, « *Comportement mécanique des matériaux sous grandes vitesses de sollicitations* », Revue Scientifique et Technique de la Direction des Applications Militaires (1994) **11** 53-64.
- P. Germain et P. Muller, « *Introduction à la mécanique des milieux continus* », Masson, Paris, 1986.
- M.R. Hestenes, « *Conjugate direction methods in optimisation* », Applications of Mathematics, Vol. 12, Springer-Verlag, 1980.
- K.G. Hoge, and A.K. Mukherjee, « *The temperature and strain rate dependence of the flow stress of tantalum* », J. of Materials Science (1977) **12** 1666-1672
- T.J. Holmquist and G.R. Johnson, « *Determination of constants and comparison of results for various constitutive models* », J. de Physique, Colloque C3, supplément au n°3, Vol. **1**, Octobre 1991.
- B. Hopkinson, « *A method of measuring the pressure in the deformation of high explosives by the impact of bullets* », Philosophical Transaction Royal Society of London, Series A, 213, 437-452, 1914
- G.R. Johnson, W.H. Cook, « *A constitutive model and data for metal subjected to large strains, high strain rates and high temperatures* », Proc. of 7th Symp. on ballistics, The Hague, The Netherlands, pp. 541-547, April 1983.
- G.R. Johnson, W.H. Cook, « *Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures* », Engineering Fracture Mechanics (1985) **21**(1) 31-48
- N. Jones, « *Material properties for structural impact problems* », International Symposium on Materials for Advanced Technology Systems, 44th Annual Technical Meeting, The Indian Institute of Metals, Tiruchirappalli, India November 14-17, 1990.
- A. Juanicotena, « *Étude théorique et expérimentale du comportement viscoplastique des matériaux aux grandes déformations et grandes vitesses de déformation – Application à l'acier Mars190 et au tantale* », Thèse de doctorat de l'Université de Metz, Juillet 1998.
- B. Langrand, F. Bos, D. Drazétic, E. Markiewicz, P. Geoffroy et J.L. Petitniet, « *Identification paramétrique des lois de comportement de l'acier XC48 en compression - Évolution vers une méthode inverse* », Méca. Indus. Mate. (1996) **49** 89-91.
- B. Langrand, P. Geoffroy, J.-L. Petitniet, J. Fabis, E. Markiewicz and P. Drazétic. « *Identification technique of constitutive model parameters for crashworthiness modelling* », Aerospace Science and Technology (1999) **3**(4) 215-227
- J. Lemaitre et J.L. Chaboche, "*Mécanique des matériaux solides*", Bordas, Paris, 1985.

- L.E. Malvern, « *Experimental and theoretical approaches to characterisation of material behaviour at high rates of deformation* » Inst. Phys. Conf. Ser., Vol. **70**, Paper presented at the 3rd Conf. Mech. Prop. High Rates of Strain, Oxford 1984.
- D. Montoya, G. Naulin et J.P. Ansart, « *Comportement dynamique d'une nuance d'acier de Béryllium* », J. de Physique, Colloque C3, supplément au n°3, Vol. **1**, Octobre 1991.
- J.P. Noble and J. Harding, « *An evaluation of constitutive relations for high-rate material behaviour using the tensile Hopkinson-bar* », J. de Physique, Colloque C8, supplément au n°3, Vol. **4**, Septembre 1994.
- L. Penazzi et al, « *Engineering models of dynamic plasticity and applications to industrial simulation of crash and sheet metal stamping* », COMPLAS III, Barcelona, April 6-10, 1992.
- L. Penazzi et al, « *Material characterisation for the CAE finite element simulation of sheet metal forming* », Paper presented at the 17th IDDRG Biennial Congress, Shengang, China, June 11-13, 1992.
- L. Penazzi et D. Bois, « *Lois de comportement utilisables dans la simulation numérique des phénomènes dynamique* », DYMAT, ETCA, Arcueil, France (1994)
- E. Polak, « *Computational methods in optimisation* », Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. **77**, Academic Press, 1971.
- D.L. Preston, D.L. Tonks and D.C. Wallace, « *PTW material model* », Los Alamos National Laboratory (1992).
- D.J. Steinberg, S.G. Cochran and M.W. Guinan, « *A constitutive model for metals applicable at high strain rate* », J. of Applied Phys. (1980) **51**(3) 1498-1504
- D.J. Steinberg and C.M. Lund, « *A constitutive model for strain rate from  $10^{-4}$  to  $10^6$  s<sup>-1</sup>* », J. of Applied Phys. (1989) **65**(4) 1528-1533
- P.S. Symonds, « *Survey of methods of analysis for plastic deformation of structures under dynamic loading* », Brown University, Report BU/NSRDC, January 1967.
- G.I. Taylor, « *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. Theoretical considerations* », Proc. Roy. Soc. London, Series A, 194, 289, 1948.
- F.J. Zerilli and R.W. Armstrong, « *Dislocation mechanics based constitutive relations for materials dynamics calculations* », J. Applied Phys. (1987) **61**(5) 1816-1825

## Annexe 1. Lois de comportement

Tableau 1. Modèles empiriques

Name-Authors(s)	Model	Parameters
Prandtl	$\dot{\epsilon} = C \cdot sh(\alpha \cdot \sigma)$	$C, \alpha$
Sokolovsky Malvern	$\dot{\epsilon} = \gamma \cdot \left\langle \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_{y0}} \right\rangle$	$\gamma, \sigma_y, \sigma_{y0}$
Perzina	$\dot{\epsilon} = \gamma \cdot \left\langle \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right\rangle$	$\gamma, \sigma_y$
Zerilli-Amstrong	$\sigma = C_0 + C_2 \cdot \epsilon^n \cdot \exp(-C_3 \cdot T + C_4 \cdot T \cdot \ln \dot{\epsilon})$ $\sigma = C_0 + C_1 \cdot \epsilon^n \cdot \left[ \exp(-C_3 \cdot T + C_4 \cdot T \cdot \ln \dot{\epsilon}) + C_5 \cdot \epsilon^n \right]$	$C_0, C_2, C_3, C_4$ if fcc $C_0, C_1, C_3, C_4, C_5$ if bcc
Modified Krupkowsky (Swift)	$\sigma = K_{ref} \cdot X^a \cdot (\epsilon_{0ref} \cdot X^b + \epsilon^p)^{n \cdot X^c}$ <p>with <math>X = \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_{ref}</math></p>	$K_{ref}, \epsilon_{0ref}, a, b, n, c$

Tableau 2. Modèles Additifs

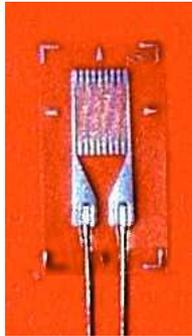
Name-Authors(s)	$F(\bar{\epsilon}, \dot{\epsilon})$	Parameters
Sokolovsky Malvern	$A \cdot \log(1 + B \cdot \dot{\epsilon})$	A, B
Ludwick type	$g(\epsilon^p) \cdot \log(\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_{ref})$	$g(\epsilon^p)$
Lindholm	$(A + B \cdot \epsilon_p^n) \cdot \log \dot{\epsilon}$	A, B, n

Tableau 3. Modèles Multiplicatifs

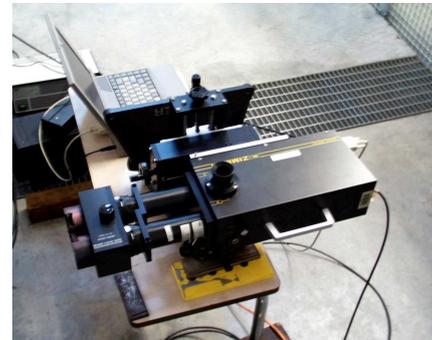
Name-Authors(s)	$k_{ref}(\bar{\epsilon})$	$G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}})$	Parameters
Cowper-Symonds	analytical or multi-linear curve	$1 + \left[ \frac{\dot{\bar{\epsilon}}}{D} \right]^{1/m}$	D, m
Johnson-Cook	$(A + B \cdot \epsilon_p^n)$	$1 + C \cdot \ln(\dot{\bar{\epsilon}}/\dot{\bar{\epsilon}}_{ref})^{**}$	A, B, n, C
Jones	analytical or multi-linear curve	$1 + \left[ \frac{\epsilon_u - \epsilon_y}{D_y \cdot (\epsilon_u - \epsilon) + D_u \cdot (\epsilon - \epsilon_y)} \right]^{1/m}$	$D_u, D_y, \epsilon_u, \epsilon_y, m$

## Annexe 2. Capteurs de mesure

### *Capteurs de déformation*



points de être mesuré l'éprouvette extensomètre mires (mesure uniforme entre peut la déduire du déplacement relatif deux repères et de la connaissance de la distance initiale entre ceux-ci.



Les jauges d'extensométrie : Un fil résistant collé sur l'éprouvette subit le même allongement que celle-ci. Il s'ensuit une variation de résistance qui est proportionnel à la déformation (domaine de linéarité du capteur). La variation de résistance est mesurée grâce à un montage dans un pont de Wheastone. L'inconvénient de la méthode est que l'étendue de mesure des jauges est souvent limitée à 20%.

Les extensomètres : Ils mesurent le déplacement relatif de deux l'éprouvette. Le déplacement axial peut par un extensomètre à couteaux fixé sur (mesure par contact) ou par un optique qui suit le déplacement de deux sans contact). Si la déformation est les deux repères (couteaux ou mires), on peut la déduire du déplacement relatif deux repères et de la connaissance de la distance initiale entre ceux-ci.



### *Capteurs de force*

On utilise un dynamomètre monté en série avec l'éprouvette. Il s'agit en général de dynamomètres à jauges de déformation ou à pastille piézoélectrique.

## Notes

---

† Un critère de plasticité permet de déterminer les conditions de plastification d'un élément de matière. Il s'agit d'une fonction scalaire  $f(\underline{\underline{\sigma}})$  ( $\underline{\underline{\sigma}}$  désignant le tenseur des contraintes) dite fonction de charge telle que, par convention, la réponse reste élastique tant que  $f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0$ , la possibilité d'une réponse plastique apparaissant pour  $f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$ .

$$\ddagger \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\S K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

\*\* Temperature effects may be introduced by the following expression:

$$k_{ref}(\bar{\epsilon}) \cdot G(\bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) \cdot \left[ 1 - \left[ \frac{T - T_{ref}}{T_m - T_{ref}} \right] \right]^m$$

where  $T$ ,  $T_{ref}$  and  $T_m$  represent the temperature, the room temperature and the melt temperature