TMME0271 — Modern analízis 1

14 heti bontásban (2011/12–I. félév)

1. **Alapfogalmak metrikus terekben** (a metrikus tér fogalma, példák; nyílt gömbök; halmaz belső pontja; nyílt halmazok, zárt halmazok, korlátos halmazok; torlódási pont, izolált pont; halmaz lezártja, szeparábilitás).
2. **Kompakt halmazok, összefüggő halmazok, sorozatok metrikus terekben** (a kompakt halmaz fogalma, tulajdonságai; a Bolzano–Weierstrass-tétel absztrakt változata; kompakt halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, Heine–Borel-tétel; összefüggő halmazok a valós számok metrikus terében; konvergens sorozatok, teljes metrikus terek).
3. **Folytonos függvények metrikus tereken** (folytonosság fogalma és topológiai átfogalmazásai; a folytonosság globális jellemzése; egyenletes folytonosság; kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai; összefüggőség és folytonosság).
4. **A Banach-féle fixpont-tétel és alkalmazásai** (Lipschitz-függvény, kontrakció, a Banach-féle fixpont-tétel; a Fredholm- és a Volterra-féle másodfajú integrálegyenletek; a Picard–Lindelöf-tétel kezdetiérték-problémákra).
5. **A Baire-féle kategória-tétel** (sűrű halmaz, szeparábilis metrikus tér; Baire tétele; seholsem sűrű halmaz, első illetve második kategóriájú halmaz, Baire-féle kategória-tétel).
6. **A mértéktér fogalma, a mérték tulajdonságai** (mérhető tér, σ-algebra, mértéktér, mérték, σ-additív halmazfüggvény fogalma; a mérhető tér struktúrája, a mérték additivitása, monotonitása, σ-szubadditivitása és folytonossága; valószínűségi, véges, σ-véges iletve teljes mérték[tér] fogalma; mértéktér altere; elemi példák).
7. **Mértékek intervallumokon és euklideszi terekben** (mérték származtatása külső mértékből; külső mérték konstrukciója; a Lebesgue-mérték az $\mathbb{R}^n$ téren; Lebesgue–Stieltjes-mértékek a számegyenesen, regularitási tulajdonságaik; *a Hausdorff-féle mértékek és a Hausdorff-dimenzió metrikus terekben*).
8. **Mérhető függvények** (mérhető függvények fogalma, karakterizációi, műveleti szabályok; példák, Luzin tétele; a „majdnem mindenütt” fogalma; mérhető függvények sorozatainak konvergencia-fogalmai; nemnegatív mérhető függvények approximációja egyszerű függvényekkel).
9. **Az integrál fogalma, tulajdonságai** (nemnegatív mérhető függvények integrálja; a Fatou-lemma és a Beppo–Levi-tétel nemnegatív mérhető függvények sorozataira; integrálható függvények, az integrál tulajdonságai; a nagy Lebesgue-tétel integrálható függvények sorozataira; a Riemann- és a Lebesgue-integrál összehasonlítása).
10. **Az L^p-terek** (komplex értékű integrálható függvények; a p-normák meghatározása, Hölder-egyenlőtlenség, Minkowski-egyenlőtlenség; az L^p-terek fogalma, Riesz–Fischer-tétel).
11. **Normált terek** (normált tér, Banach-tér fogalma, példák; konvergens illetve abszolút konvergens sorok; Schauder-bázis).

12. **Normált tér topológiája és dimenziója** (véges dimenziós normált terek, normák ekvivalenciája; Riesz lemmája majdnem ortogonális elem létezéséről, a zárt egységgömb kompaktsága és a tér dimenziója).

13. **Korlátos lineáris operátorok és funkcionálok** (lineáris illetve korlátos lineáris operátor fogalma, folytonossága, normája; a korlátos lineáris operátorok terének teljessége; korlátos lineáris funkcionálok; példák; a Hahn–Banach-tétel normált terekben, a duális tér szétválasztási tulajdonsága).

14. **A lineáris analízis fő tételei** (Banach–Steinhaus-tétel; nyílt leképezés tétel, Banach tétele a korlátos inverzről, az ekvivalens normák tétele, zárt gráf tétel).