

Parciális differenciálegyenletek néhány numerikus módszere

Jegyzet

Írta: Gáspár Csaba
Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2021

Contents

1	Bevezetés	4
2	Vektoranalízis, összefoglaló	6
2.1	Differenciálás	6
2.2	Integrálás	8
2.3	A Laplace-operátor polárkoordinátás alakja	13
3	A fizikai törvényektől a parciális differenciál- egyenletekig	16
3.1	Hővezetés	16
3.2	Diffúzió	17
3.3	Elektromos áram kiterjedt közegben	18
3.4	Szivárgás porózus közegen keresztül	19
4	Peremfeltételek	23
5	A perem-integrálegyenlet módszer	29
5.1	A 3. Green-formula	29
5.2	A logaritmikus, az egyszerű réteg és a kettősréteg potenciálok tulajdonságai	34
5.3	Perem-integrálegyenlet a 2D Poisson-egyenletre	43
5.4	A perem-integrálegyenlet numerikus megoldása kollokációs módszerrel	46
6	A véges elem módszer	51
6.1	Elmélet dióhéjban	51
6.1.1	Emlékeztető	51
6.1.2	Absztrakt variációs problémák	56
6.2	Véges elem módszer az 1D Poisson-egyenletre	62
6.2.1	Végeselemes alterek	64
6.2.2	Hibabecslések	66
6.2.3	Végeselem módszer általánosabb 1D problémákra	68
6.2.4	1D elliptikus feladatok, inhomogén Dirichlet-feltétel mellett	71
6.2.5	1D problémák kevert peremfeltétellel	72
6.3	Véges elem módszer 2D Poisson-problémákra	76
6.3.1	Végeselemes alterek	79
6.3.2	Néhány 2D végeselem-típus	83

7	Kitekintés – egyéb technikák	86
7.1	A Fourier-módszer	86
7.1.1	A Fourier-módszer a 2D Poisson egyenletre	86
7.1.2	A Fourier-módszer a 2D Laplace-egyenletre	89
7.2	A véges differenciák módszere	92
7.2.1	A véges differenciák módszere 1D elliptikus problémákra	92
7.2.2	A véges differenciák módszere 2D elliptikus problémákra	99
7.3	Az alapmegoldások módszere	105

1 Bevezetés

A tudományos és mérnöki problémákban a közönséges és parciális differenciálegyenletek kitüntetett szerepet játszanak. Ezeknek a differenciálegyenleteknek a szigorú tárgyalása általában meglehetősen nehéz: ugyanakkor gyakorlati szempontokból ezeknek a differenciálegyenleteknek sokkal inkább a közelítő, numerikus megoldása érdekes mintsem az elméleti vizsgálatuk. Ámde a numerikus megoldások még mindig nehezek, és sok matematikai eszközt igényelnek különösképp az analízis és a numerikus analízis területéről (pl. nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldása stb.).

Ebben a jegyzetben megkísérelünk egyfajta kompromisszumot kötni a differenciálegyenletekre vonatkozó elméleti matematikai és a numerikus matematikai eszközök közt. Csak időfüggetlen jelenségeket leíró parciális differenciálegyenletekre szorítkozunk, ezek közül is csak az elliptikus problémákra.

Mindenekelőtt áttekintjük a legfőbb vektoranalízisbeli fogalmakat és állításokat, melyek alapvető fontosságúak az parciális differenciálegyenletek tárgyalásakor. Ezután néhány fizikai problémán keresztül megmutatjuk, hogyan lehetséges parciális differenciálegyenletekkel leírni a jelenséget, fizikai törvényekre támaszkodva. Rámutatunk a peremfeltételeknek természetes módon való származtatására is.

Ezután egy viszonylag fiatal, de figyelemreméltó előnyöket felmutató módszert vázolunk mind elméleti, mind numerikus szempontból (perem-integrálegyenlet módszer).

A következő fejezet a jelenleg legelterjedtebb módszert, a véges elemek módszerét mutatja be röviden. Csak a módszer működésének megértésére koncentráltunk, és igyekeztünk olyan kevésbé belemenni a matematikai részletekbe, amilyen kevésbé csak lehetséges: mindazonáltal a módszer lényegét képező elméleti háttérrel is vázoljuk.

Végül egy-két hagyományos és modernebb módszert is körvonalazunk. Ezek: a Fourier-módszer, a véges differenciák módszere. A cél pusztán annyi, hogy az Olvasó lássa, min alapulnak, hogyan működnek ezek a módszerek. A fejezetet egy aránylag új, de néhány területen nagy népszerűségnek örvendő módszerrel zárjuk: ez az alapmegoldások módszere, ami – bizonyos szempontból – a perem-integrálegyenlet módszer egyszerűsített változatának is tekinthető.

Miután az itt alkalmazott matematikai eszközök meglehetősen nehezek, megpróbáltuk a matematikai háttérrel olyan részletességgel bemutatni, amilyen csak lehetséges, de sok állítást és bizonyítást el kellett hagyni: megpróbáltunk a bemutatott módszerek numerikus vonatkozásaira koncentrálni.

Minden elírásra, esetleges hibára utaló észrevételt ill. bármely egyéb megjegyzést hálásan fogad a szerző:

Dr. Csaba Gáspár, egyetemi tanár

Matematika és Számítástudomány Tanszék, Széchenyi István Egyetem
Numerikus Analízis Tanszék, Eötvös Loránd Tudományegyetem

gasparcs@math.sze.hu

2 Vektoranalízis, összefoglaló

Először röviden összefoglaljuk a fő jelöléseket és fogalmakat, melyeket a jegyzetben használni fogunk.

- \mathbf{N} : a természetes számok halmaza
- \mathbf{Z} : az egész számok halmaza
- \mathbf{R} : a valós számok halmaza
- \mathbf{R}^N : a rendezett valós szám- N -esek halmaza (általában oszlopvektorként értve)
- \mathbf{C} : a komplex számok halmaza
- \mathbf{C}^N : a rendezett komplex szám- N -esek halmaza (általában oszlopvektorként értve)
- ha $a = (a_1, a_2, \dots, a_N), b = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbf{R}^N$ N -dimenziós vektorok, akkor jelölje $\langle a, b \rangle$ az a és b vektorok skaláris szorzatát:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^N a_j \cdot b_j$$

Megjegyezzük, hogy a skaláris szorzat a komplex \mathbf{C}^N vektortérben is értelmezhető a

$$\langle a, b \rangle := \sum_{j=1}^N a_j \cdot \bar{b}_j$$

formulával, ahol a felülvonás a szokásos komplex konjugálást jelöli.

2.1 Differenciálás

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ egy korlátos tartomány az N -dimenziós térben (a későbbiekben általában az $N = 1, N = 2$ vagy $N = 3$ esetek fordulnak elő) és legyen $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ egy többváltozós számértékű függvény (*skalárfüggvény*). Jelöljön $E : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ egy többváltozós vektor értékű függvényt (*vektormezőt*):

$$E := (E_1, E_2, \dots, E_N)$$

ahol E_j -k az E függvény *komponensfüggvényei* vagy komponensei. Feltesszük, hogy u és E elegendően sima függvények.

Vezessük be az alábbi vektormezőt:

$$\text{grad } u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right),$$

és a következő skalárfüggvényt:

$$\text{div } E := \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial E_N}{\partial x_N}$$

$\text{grad } u$ -t az u függvény *gradiensének* nevezzük. $\text{div } E$ az E vektormező *divergenciája*.

A következő állítás közvetlen számolásokkal igazolható:

Állítás: Legyenek u, v elegendően sima skalárfüggvények, E pedig egy elegendően sima vektormező. Akkor:

$$\text{grad } (u \cdot v) = (\text{grad } u) \cdot v + u \cdot (\text{grad } v)$$

$$\text{div } (u \cdot E) = \langle \text{grad } u, E \rangle + u \cdot (\text{div } E)$$

Legyen u egy differenciálható skalárfüggvény és jelöljön n egy tetszőleges egységvektort. A

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \langle \text{grad } u(x), n \rangle$$

kifejezést u -nak az n irányban vett (vagy n irány menti) deriváltjának nevezzük. Ez a következő törtkifejezés határértéke:

$$\frac{u(x + \varepsilon \cdot n) - u(x)}{\varepsilon}$$

midőn $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ha u egy (kétszer differenciálható) skalárfüggvény, definiáljuk a Δu skalárfüggvényt a következőképp:

$$\Delta u := \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

A Δ differenciáloperátort *Laplace-operátornak* nevezzük.

A definíciók azonnali következménye:

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$$

(ellenőrizzük!)

Megjegyzés: Néha kényelmes bevezetni a ∇ szimbolikus vektort, melynek komponensei az egyes változók szerinti parciális differenciáloperátorok (*nabla operátor*):

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$$

Akkor a gradiens és a divergencia a nabla operátorral a következőképp fejezhető ki:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u$$

$$\operatorname{div} E = \nabla \cdot E = \langle \nabla, E \rangle,$$

azaz a divergencia a ∇ vektor és a megfelelő vektormező "skaláris szorzata".

2.2 Integrálás

Jelölje Γ az Ω tartomány *peremét*. Ez egy zárt görbe, ha $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, ill. egy zárt felület, ha $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Emléztetünk rá, hogy ha u egy Ω -n integrálható számértékű (skalár-) függvény, akkor az

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega$$

térfogati (területi) integrál egy valós szám. Ennek szemléletes jelentése a következő. Osszuk fel az Ω tartományt a diszjunkt $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ résztartományok egyesítésére, akkor

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega \approx \sum_{j=1}^n u_j \cdot |\Omega_j|,$$

ahol $|\Omega_j|$ jelöli az Ω_j résztartomány térfogatát (területét), míg u_j az u függvény egy helyettesítési értéke az Ω_j résztartomány egy tetszőleges pontjában. Hasonlóan, a

$$\int_{\Gamma} u \, d\Gamma$$

vonalintegrál (ill. *felületi integrál*) egy másik valós szám: ha a $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ részhalmazok Γ -nak egy diszjunkt felbontását adják, akkor

$$\int_{\Gamma} u \, d\Gamma \approx \sum_{j=1}^n u_j \cdot |\Gamma_j|,$$

ahol $|\Gamma_j|$ jelöli a Γ_j részhalmaz hosszát (ill. területét), u_j pedig ismét az u függvénynek a Γ_j egy tetszőleges pontjában felvett értéke. A közelítő egyenlőségek pontos egyenlőségekbe mennek át, ha a felbontásokban szereplő részhalmazok maximális térfogata ill. hossza/területe 0-hoz tart, azaz a felbontás minden "határon túl finomodik".

Fizikai szempontból fontos, hogy a fenti integrálok mértékegységgel is elláthatók, éspedig:

$$\left(\int_{\Omega} u \, d\Omega \text{ mértékegysége} \right) = (u \text{ mértékegysége}) \cdot \text{méter}^N$$

and

$$\left(\int_{\Gamma} u \, d\Gamma \text{ mértékegysége} \right) = (u \text{ mértékegysége}) \cdot \text{méter}^{N-1}$$

A vektoranalízis egyik legalapvetőbb és legfontosabb tétele a *divergenciatétel*:

Divergenciatétel (Gauss): Ha $E : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ elegendően sima vektormező, és Ω elegendően sima tartomány, akkor:

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, d\Omega = \int_{\Gamma} \langle E, n \rangle \, d\Gamma,}$$

ahol n jelöli a *kifelé mutató normális irányú egységvektort* a Γ perem mentén (azaz n merőleges Γ -ra, és hossza mindig 1). Ezért $\langle E, n \rangle$ az E vektor kifelé mutató normális irányú komponensének hossza.

A divergenciatétel matematikai jelentése, hogy egy függvény egy deriváltjának (a divergenciának) integrálja egy másik integrállal egyenlő, amely azonban csak az eredeti tartomány peremén van véve (mely egy eggyel kisebb dimenziós sokaság, mint az eredeti tartomány). Ilyen értelemben a divergenciatétel a jól ismert Newton-Leibniz tétel egy erős általánosítása.

A $\int_{\Gamma} \langle E, n \rangle \, d\Gamma$ integrált gyakran E -nek a Γ peremen keresztüli *fluxusának* nevezzük. Ennek közvetlen fizikai jelentése is van. Ha E egy mozgó folyadék

pl. víz sebességmezője, akkor $\int_{\Gamma} \langle E, n \rangle d\Gamma$ fizikai dimenziója $\frac{m}{sec} \cdot m^2 = \frac{m^3}{sec}$, azaz *vízhozam*. Mivel a víz összenyomhatatlan, a tömegmegmaradás törvénye szerint egy zárt felületen keresztüli teljes fluxus mindig nulla (feltéve, hogy a tartományban nincsenek források és nyelők). Következésképp a divergenciatétel miatt E szükségképp divergenciamentes, azaz $\text{div } E \equiv 0$. Ez a divergenciatétel egy fizikai interpretációja.

Most vázoljuk a divergenciatétel egyfajta szemléltetését (ami persze távol áll a szigorú bizonyítástól). 2D-ben tekintsünk egy $E = (F, G)$ vektormezőt, melynek értékeit csak egy merőleges, ekvidisztáns, h lépésközű rácsháló középpontjaiban ismerjük, másutt közelítő értékekkel kell számolnunk (ld. az 1. ábrát). Tegyük fel, hogy a h lépésköz kicsi. Egy elemi cellában (jelöljük ezt C -vel), közelítsük a divergenciatétel bal oldalát. Jelölje a C -vel szomszédos cellákat rendre N , W , S és E , és az előforduló deriváltakat közelítsük centrális differenciasémákkal. Akkor, mivel

$$(\text{div } E)_C = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_C + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_C \approx \frac{F_E - F_W}{2h} + \frac{G_N - G_S}{2h},$$

azért E divergenciájának a C cellán vett integrálja közelítőleg az alábbival egyenlő:

$$\int_C \text{div } E \, d\Omega \approx \left(\frac{F_E - F_W}{2h} + \frac{G_N - G_S}{2h} \right) \cdot h^2 = \frac{h}{2} \cdot (F_E - F_W + G_N - G_S)$$

Ahhoz, hogy kiszámítsuk a divergenciatétel jobb oldalán álló peremintegrált, először is osszuk fel a C cella peremét négy részre, jelölje ezeket Γ_N , Γ_W , Γ_S és Γ_E (északi, nyugati, déli és keleti részek). Γ_E mentén, a kifelé mutató normális irányú egységvektor $n = (1, 0)$. Az (F, G) vektorfüggvény normális irányú komponensét (azaz az F függvény értékét) a keleti peremen az $F|_{\Gamma_E} \approx \frac{F_E + F_C}{2}$ átlagértékkel, a következőt kapjuk:

$$\int_{\Gamma_E} \langle E, n \rangle d\Gamma \approx \left(\frac{1}{2} F_E + \frac{1}{2} F_C \right) \cdot h$$

Hasonlóan:

$$\int_{\Gamma_N} \langle E, n \rangle d\Gamma \approx \left(\frac{1}{2} G_N + \frac{1}{2} G_C \right) \cdot h \quad (\text{itt } n = (0, 1))$$

$$\int_{\Gamma_W} \langle E, n \rangle d\Gamma \approx \left(-\frac{1}{2} F_W - \frac{1}{2} F_C \right) \cdot h \quad (\text{itt } n = (-1, 0))$$

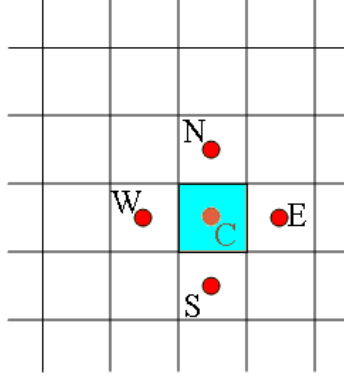


Figure 1: Cellarendszer; egy centrális cella és szomszédjai

$$\int_{\Gamma_S} \langle E, n \rangle d\Gamma \approx \left(-\frac{1}{2}G_S - \frac{1}{2}G_C \right) \cdot h \quad (\text{itt } n = (0, -1))$$

Összeadva a fenti négy (közelítő) egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \langle E, n \rangle d\Gamma &\approx \\ &\approx \left(\frac{1}{2}F_E + \frac{1}{2}F_C + \frac{1}{2}G_N + \frac{1}{2}G_C - \frac{1}{2}F_W - \frac{1}{2}F_C - \frac{1}{2}G_S - \frac{1}{2}G_C \right) \cdot h = \\ &= (F_E + G_N - F_W - G_S) \cdot \frac{h}{2} \approx \int_C \operatorname{div} E d\Omega. \end{aligned}$$

Így a tétel szemléltettük (nem bizonyítottuk!) egy elemi C cellára.

Ha most Ω véges sok elemi C_1, C_2, \dots, C_m cellák egyesítése, akkor:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} E d\Omega &= \sum_{k=1}^m \int_{C_k} \operatorname{div} E d\Omega \approx \\ &\approx \sum_{k=1}^m \int_{\partial C_k} \langle E, n \rangle d\Gamma \approx \end{aligned}$$

Legyen Γ_0 egy olyan cellaoldal, mely az Ω tartomány belsejében fekszik.

Akkor a $\int_{\Gamma_0} \langle E, n \rangle d\Gamma$ integrál a fenti összegben pontosan kétszer fordul elő,

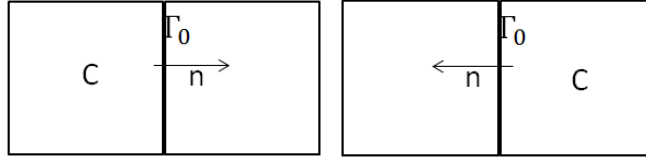


Figure 2: Szomszédos cellák közös határához rendelt peremintegrálok

de ellenkező előjellel (ld. a 2. ábrát), így kiejtik egymást, ezért a divergenciatétel ez esetben is (közelítően) igaz marad. Az általános esettel nem foglalkozunk.

A divergenciatételnek számos közvetlen következménye van. Az alábbi állításokban összegyűjtöttük a legfontosabbakat. Legyenek u és v elegendően sima skalárfüggvények (pontosabban, tegyük fel, hogy kétszer folytonosan differenciálhatók Ω lezárásán). Akkor:

Állítás:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma$$

Bizonyítás: Nyilván

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, d\Omega$$

A jobb oldalon a divergenciatételt alkalmazva:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, d\Omega = \int_{\Gamma} \langle \operatorname{grad} u, n \rangle \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma.$$

□

Green első tétele:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v \, d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\Gamma$$

Bizonyítás: Mivel $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$, azért:

$$\operatorname{div} ((\operatorname{grad} u) \cdot v) = (\Delta u) \cdot v + \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle$$

Integrálva Ω felett a bal oldalt, és alkalmazva a divergenciatételt, kapjuk, hogy:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((\operatorname{grad} u) \cdot v) d\Omega = \int_{\Gamma} \langle (\operatorname{grad} u) \cdot v, n \rangle d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v d\Gamma$$

Integrálva Ω felett a jobb oldalt:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle d\Omega,$$

ahonnan a tétel már következik. \square

Green második tétele:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} u \cdot \Delta v d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v d\Gamma - \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma$$

Bizonyítás: Green első tétele szerint:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v d\Gamma$$

Felcserélve u és v szerepét:

$$\int_{\Omega} (\Delta v) \cdot u d\Omega = - \int_{\Omega} \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u \rangle d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \cdot u d\Gamma$$

Kivonva a két utolsó egyenletet egymásból, a tételt kapjuk. \square

2.3 A Laplace-operátor polárkoordinátás alakja

A későbbiekben szükségünk lesz arra, hogy a deriválások hogyan végezhetőek el, ha az illető függvény polárkoordinátás alakban adott. Ezen belül is kiemelt fontosságú a Laplace-operátor polárkoordinátás alakja.

Legyen $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ egy elég sima kétváltozós függvény. Vezessünk be \mathbf{R}^2 -ben polárkoordinátákat (ld. a 3. ábrát). Itt x, y jelölik a szokásos derékszögű koordinátákat, míg r, t a megfelelő polárkoordinátákat. Ismeretes, hogy

$$x = r \cdot \cos t, \quad y = r \cdot \sin t,$$

és

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

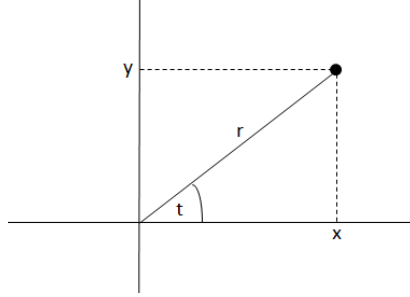


Figure 3: Polárkoordináták \mathbf{R}^2 -ben

(amennyiben (x, y) az első síknegyedben van; a többi síknegyedben t számítása kissé eltérő, itt eltekintünk a részletektől, de javasoljuk, hogy az Olvasó ellenőrizze a formulákat mindegyik síknegyedre).

Jelölje U az u függvény polárkoordinátás megfelelőjét:

$$u(x, y) = U(r, t)$$

Számítsuk ki u -nak az x , majd az y szerinti parciális deriváltjait. A jelölések egyszerűsítése érdekében itt alsó indexszel fogjuk jelölni a valamelyik változó szerinti parciális deriválást. Mindenekelőtt:

$$u_x = U_r \cdot r_x + U_t \cdot t_x$$

Még egyszer deriválva x szerint:

$$u_{xx} = (U_{rr} \cdot r_x + U_{rt} \cdot t_x) \cdot r_x + U_r \cdot r_{xx} + (U_{rt} \cdot r_x + U_{tt} \cdot t_x) \cdot t_x + U_t \cdot t_{xx}$$

Hasonlóan:

$$u_{yy} = (U_{rr} \cdot r_y + U_{rt} \cdot t_y) \cdot r_y + U_r \cdot r_{yy} + (U_{rt} \cdot r_y + U_{tt} \cdot t_y) \cdot t_y + U_t \cdot t_{yy}$$

Összeadva:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = \\ &= U_{rr} \cdot (r_x^2 + r_y^2) + 2U_{rt} \cdot (r_x t_x + r_y t_y) + U_{tt} \cdot (t_x^2 + t_y^2) + U_r \cdot \Delta r + U_t \cdot \Delta t \end{aligned}$$

r és t kifejezéseiből a parciális deriváltak könnyen számíthatók. Az eredmények (ellenőrizzük!):

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r}, & r_y &= \frac{y}{r} \\ t_x &= -\frac{y}{r^2}, & t_y &= \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

Következésképp:

$$r_x^2 + r_y^2 \equiv 1, \quad r_x t_x + r_y t_y \equiv 0, \quad t_x^2 + t_y^2 = \frac{1}{r^2}$$

Némi számolás árán az is adódik, hogy:

$$\Delta r = \frac{1}{r}, \quad \Delta t \equiv 0$$

Innen azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \Delta u &= U_{rr} + \frac{1}{r^2} \cdot U_{tt} + \frac{1}{r} \cdot U_r = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned}$$

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy a függvény *radiális függvény*, azaz U csak r -től függ, de t -től nem. Ilyen függvényekre a Laplace-operátor polárkoordinátás alakja különösen egyszerű:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

3 A fizikai törvényektől a parciális differenciálegyenletekig

Most néhány példán keresztül bemutatjuk, hogyan vezet egy fizikai törvény parciális differenciálegyenletre, ami leírja a szóban forgó fizikai folyamatot. A kulcs mindenütt a divergenciatétel lesz. Csak elliptikus (ezért időfüggetlen) egyenletekkel foglalkozunk.

3.1 Hővezetés

Tekintsünk egy valós, háromdimenziós objektumot, melyben hőforrások (és esetleg -nyelők) vannak, melyek egy térben nem feltétlen egyenletes hőmérsékleteloszlást hoznak létre. Tegyük fel, hogy már elértük a stacionárius állapotot, azaz a hőmérséklet időben már nem változik. Jelölje $u(x)$ az anyag hőmérsékletét az x térbeli pontban (mértékegysége: K). Legyen σ az anyag *hővezetési tényezője* (fizikai dimenziója $\frac{\text{teljesítmény}}{\text{hossz} \cdot \text{hőmérséklet}}$, mértékegysége $\frac{W}{m \cdot K}$), ami az anyag hővezető képességének "hatásosságát" jellemzi.

Legyen n egy tetszőleges egységnyi hosszúságú irányvektor. A $\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n}$ mennyiség fizikai dimenziója $\frac{\text{teljesítmény}}{\text{hossz} \cdot \text{hőmérséklet}} \cdot \frac{\text{hőmérséklet}}{\text{hossz}} = \frac{\text{teljesítmény}}{\text{hossz}^2}$.

Fourier törvénye szerint a hőfluxus sűrűsége arányos a hőmérsékletnek az n irányban vett deriváltjával, és az arányossági tényező épp a (negatív) hővezetési tényező.

Ezért ha Γ_0 egy tetszőleges (zárt vagy nem zárt) felület a térben, az

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

integrál a Γ_0 -on másodpercenként átmenő teljes hőmennyiség, ahol n a Γ_0 felület normálvektora. Az energiamegmaradás törvénye (a termodinamika első törvénye) szerint tehát

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

érvényes minden *zárt* felületre, mely egy Ω_0 térrészt határol. A divergenciatétel miatt:

$$\int_{\Omega_0} \text{div}(\sigma \cdot \text{grad } u) d\Omega = 0$$

minden, a hővezetés Ω tartományában fekvő Ω_0 résztartományra. Ezért

$$\text{div}(\sigma \cdot \text{grad } u) = 0$$

érvényes az Ω tartomány minden pontjában.

Ha a σ hővezetési tényező konstans a teljes Ω tartományban, akkor a fenti parciális differenciálegyenlet leegyszerűsödik a

$$\sigma \cdot \Delta u = 0$$

vagy egyszerűen a

$$\Delta u = 0$$

alakra.

3.2 Diffúzió

Tekintsünk egy nyugvó folyadéktömeget, melyben valamilyen szennyezőanyag molekuláris diffúziója megy végbe. Tegyük fel, hogy már elértük a stacionárius állapotot, azaz a folyamat fizikai jellemzői időben már nem változnak.

Jelölje $u(x)$ a szennyezőanyag koncentrációját az x térbeli pontban (mértékegysége: $\frac{kg}{m^3}$). Legyen σ a szennyezőanyag *diffúziós tényezője* (diffuzivitása, fizikai dimenziója $\frac{\text{hossz}^2}{\text{idő}}$), ami a diffúzió "sebességét" jellemzi (azaz a szennyezőanyag-részecskék mozgékonyágát).

Legyen n egy tetszőleges egységnyi hosszúságú irányvektor. A $\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n}$ mennyiség fizikai dimenziója $\frac{\text{hossz}^2}{\text{idő}} \cdot \frac{\frac{\text{tömeg}}{\text{hossz}^3}}{\text{hossz}} = \frac{\text{tömeg}}{\text{hossz}^2}$.

A *Fick-törvény* szerint a diffúziós fluxus sűrűsége a koncentrációnak az n irányban vett deriváltjával arányos, és az arányossági tényező épp a (negatív) diffúziós tényező.

Ezért ha Γ_0 egy tetszőleges (zárt vagy nem zárt) felület a térben, az

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

integrál a Γ_0 -on másodpercenként átmenő teljes szennyezőanyag-tömeg, ahol n a Γ_0 felület normálvektora. A tömegmegmaradás törvényéből így az adódik, hogy

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

érvényes minden *zárt* felületre mely egy Ω_0 térrészt határol. A divergenctétel miatt:

$$\int_{\Omega_0} \text{div}(\sigma \cdot \text{grad } u) d\Omega = 0$$

minden, a diffúzió Ω tartományában fekvő Ω_0 résztartományra. Ezért

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = 0$$

érvényes az Ω tartomány minden pontjában.

Ha a σ diffúziós tényező konstans a teljes Ω tartományban, akkor a fenti parciális differenciálegyenlet leegyszerűsödik a

$$\sigma \cdot \Delta u = 0$$

vagy egyszerűen a

$$\Delta u = 0$$

alakra.

3.3 Elektromos áram kiterjedt közegben

Tekintsünk egy elektromosan vezető 3D anyagot (pl. elektrolit, biológiai szövet, talaj stb.), melyben időben állandósult elektromos áram van jelen. Jelölje $u(x)$ az x térbeli pontban érvényes elektromos potenciált (mértékegysége: V), és legyen σ a közeg fajlagos vezetőképessége (konduktivitás, mértékegysége $\frac{1}{\text{ohm}\cdot\text{m}}$). Ez a közeg fajlagos ellenállásának reciproka.

A $\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ mennyiség mértékegysége $\frac{1}{\text{ohm}\cdot\text{m}} \cdot \frac{V}{\text{m}} = \frac{A}{\text{m}^2}$ minden n irányban (ahol n tetszőleges egységvektor). Azaz a $\sigma \frac{\partial u}{\partial n}$ mennyiség az n irányú *áramsűrűség*.

Az *Ohm-törvény* szerint az áramsűrűség egyenesen arányos az elektromos potenciálnak az n irányú deriváltjával, az arányossági tényező pedig épp a fajlagos vezetőképesség.

Ezért ha Γ_0 egy tetszőleges (zárt vagy nem zárt) felület a térben, az

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

integrál a Γ_0 -on átmenő teljes áram, ahol n a Γ_0 felület normálvektora. A töltésmegmaradás törvényéből így az adódik, hogy

$$\int_{\Gamma_0} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

érvényes minden *zárt* felületre mely egy Ω_0 térrészt határol. A divergenctétel miatt:

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) d\Omega = 0$$

minden, az elektromos áram Ω tartományában fekvő Ω_0 résztartományra. Ezért

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = 0$$

érvényes az Ω tartomány minden pontjában.

Ha a σ fajlagos vezetőképesség konstans a teljes Ω tartományban, akkor a fenti parciális differenciálegyenlet leegyszerűsödik a

$$\sigma \cdot \Delta u = 0$$

vagy egyszerűen a

$$\Delta u = 0$$

alakra.

3.4 Szivárgás porózus közegen keresztül

Tekintsünk egy 3D porózus közeg (talaj, homok stb.), melyben talajvíz-szivárgás jön létre. Tegyük fel, hogy ez a szivárgó mozgás már időben állandósult, azaz a kialakuló szivárgási sebességek nem függenek az időtől. Jelölje $u(x)$ az x térbeli pontban érvényes sebességpotenciált (hidraulikus magasság, hydraulic head). Akkor

$$u = \frac{p}{\rho g} + z,$$

ahol p a nyomás, ρ a víz sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás; z jelöli az x pont magasságát egy referencia szint felett (azaz a pont függőleges koordinátáját). Fizikai dimenziója hossz, mértékegysége méter.

A *Darcy-törvény* szerint a szivárgási sebességnek egy n irányú komponense (egy dimenziómentes konstans szorzótól eltekintve) a hidraulikus magasságnak, azaz a sebességpotenciálnak n irány menti deriváltjával arányos (ahol n tetszőleges egységvektor). Az arányossági konstans mínusz egyszeresét a közeg *hidraulikus vezetőképességének* (vagy permeabilitásának, vagy szivárgási tényezőjének) nevezzük, és K -val jelöljük. Fizikai dimenziója $\frac{\text{hossz}}{\text{idő}}$, azaz sebesség.

Ezért ha Γ_0 egy tetszőleges (zárt vagy nem zárt) felület a térben, az

$$\int_{\Gamma_0} K \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

integrál a Γ_0 felületen átáramló teljes vízhozam, ahol n jelöli a Γ_0 felület normálvektorát. A tömegmegmaradás törvénye miatt

$$\int_{\Gamma_0} K \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0$$

érvényes minden *zárt* felületre, mely egy Ω_0 térrészt határol. A divergenziatétel miatt:

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad} u) d\Omega = 0$$

minden, az Ω szivárgási tartományában fekvő Ω_0 résztartományra. Ezért

$$\operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad} u) = 0$$

érvényes az Ω tartomány minden pontjában.

Ha a K szivárgási tényező konstans a teljes Ω tartományban, akkor a fenti parciális differenciálegyenlet leegyszerűsödik a

$$K \cdot \Delta u = 0$$

vagy egyszerűen a

$$\Delta u = 0$$

alakra.

A fenti négy példa mindegyikében az (időfüggetlennek feltételezett) fizikai folyamatot egy alábbi alakú parciális differenciálegyenlet írja le:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = 0,$$

ahol az ismeretlen u függvény az a fizikai mennyiség, ami az adott folyamatot jellemzi, σ egy adott többváltozós, pozitív függvény, mely bizonyos anyagi tulajdonságokat ír le. Források és nyelők jelenléte esetén a fenti differenciálegyenlet a következőképp módosul:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = f,$$

ahol f adott, többváltozós függvény, mely a forrassűrűség eloszlását írja le.

Megjegyezzük még, hogy a σ függvény olykor nem skalár-, hanem *mátrixfüggvény* is lehet (mely azonban mindenhol önadjungált, pozitív definit). Ez a helyzet pl. stacionárius szivárgás esetén, ha a talaj szivárgási tényezője irányfüggő.

A fenti differenciálegyenletek a legegyszerűbb példák másodrendű *elliptikus parciális differenciálegyenletekre*. Ezek állandósult fizikai folyamatokat írnak le, ahol a fizikai mennyiségek időfüggetlenek.

Léteznek ennél általánosabb elliptikus parciális differenciálegyenletek, ilyen pl. a konvekciós-diffúziós egyenlet, mely gázban vagy folyadékban végbemenő transzportfolyamatot ír le. A gáz- ill. folyadékmozgást leíró

egyenletek sokkal bonyolultabbak, és nem is lineárisak. E jegyzet keretein belül a fenti egyszerűbb elliptikus egyenletekre szorítkozunk. Megjegyezzük még, hogy az időfüggő folyamatok hasonló, de még bonyolultabb parciális differenciálegyenletekkel írhatók le, melyek idő szerinti deriváltakat is tartalmaznak.

Fontos speciális eset, amikor a σ anyagjellemző függvény konstans a teljes Ω tartományon. Ez esetben a $\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = f$ egyenlet *Poisson-egyenletre* egyszerűsödik:

$$\Delta u = f$$

ahol a σ konstans beleolvasztottuk a jobb oldali f függvénybe. Ha f azonosan zérus, akkor a *Laplace-egyenletre* jutunk:

$$\Delta u = 0$$

A Laplace-egyenlet megoldásait *harmonikus függvényeknek* nevezzük.

Gyakran előfordul, hogy a σ függvény *szakaszonként* (azaz *résztartományonként*) *konstans*, ill. ilyennel közelíthető. Ez esetben a differenciálegyenlet maga nem bonyolultabb a Laplace-egyenletnél, de egy extra jelenséggel állunk szemben azon belső felület mentén, mely elválasztja azokat a rész-tartományokat, ahol σ különböző értékeket vesz fel. Modellfeladatként tegyük fel, hogy az Ω két rész-tartományból áll, Ω_1 -ből és Ω_2 -ből. Tegyük fel, hogy $\sigma \equiv \sigma_1 = \text{const.}$ Ω_1 -ben, és $\sigma \equiv \sigma_2 = \text{const.}$ Ω_2 -ben. Legyen Γ_0 az Ω_1 és Ω_2 rész-tartományokat elválasztó belső felület (interface): $\Gamma_0 := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Tekintsünk egy vékony Ω_0 rész-tartományt a Γ_0 interface-nél (ld. a 4. ábrát). Legyen n az Ω_1 -ből Ω_2 -be mutató normálvektor. Legyen u a

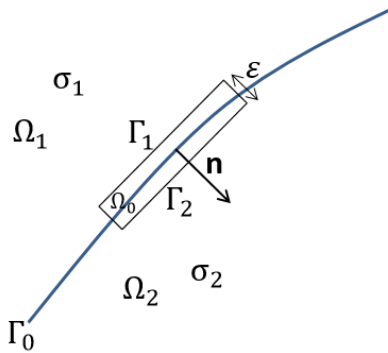


Figure 4: Az interface feltétel levezetéséhez.

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = 0$$

parciális differenciálegyenlet megoldása, és jelölje $u_1 := u|_{\Omega_1}$, $u_2 := u|_{\Omega_2}$ az u függvény leszűkítéseit az Ω_1 ill. Ω_2 résztartományra. Akkor, Ω_1 és Ω_2 belsejében az

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0$$

differenciálegyenletek teljesülnek, de nem ez a helyzet a Γ_0 interface mentén (itt ugyanis u *nem* kétszer folytonosan differenciálható). Ám u folytonos itt (ami fizikai szempontból nyilvánvaló), azaz:

$$u_1 = u_2 \quad \Gamma_0 \text{ mentén}$$

Az $\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u)$ függvényt integrálva Ω_0 -on, az integrál zérus: másrészt, a divergenciatétel miatt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma \approx \\ &\approx \int_{\Gamma_2} \sigma_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \sigma_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} d\Gamma, \end{aligned}$$

mivel n Ω_1 -ből Ω_2 -ba mutat, így, n a kifelé (ill. befelé) mutató normálvektor Γ_2 (ill. Γ_1) mentén. Midőn $\varepsilon \rightarrow 0$, a közelítő egyenlőség pontos egyenlőségbe megy át, és mivel Ω_0 tetszőleges volt, azt kapjuk, hogy:

$$\sigma_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial n}$$

Γ_0 mentén. Megjegyezzük, hogy fizikai szempontból ez is nyilvánvaló: pl. ha u elektromos potenciál, akkor az $\sigma_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{\Gamma_0} = \sigma_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial n}|_{\Gamma_0}$ egyenlőség a töltésmegmaradást jelenti, ami Γ_0 mentén is teljesül.

Röviden, a megoldás folytonos marad a Γ_0 interface mentén, de a normális irányú deriváltak itt ugrása van.

Idáig csak parciális differenciálegyenleteket vezettünk be, és igyekeztünk tisztázni ezek fizikai jelentését. Ám a fizikai folyamatot magát a differenciálegyenlet még *nem* határozza meg teljes mértékben. Fizikailag ez nyilvánvaló: pl. amikor egy 3D objektumon átfolyó elektromos áramot vizsgálunk, a potenciáeloszlás döntő mértékben a be- és kilépő áramsűrűségek eloszlásától függ. A folyamat leírásához tehát még bizonyos extra feltételek (*mellékfeltételek*) megadása is szükséges.

4 Peremfeltételek

Ahogy azt már korábban is említettük, a differenciálegyenlet nem írja le egyértelműen a megfelelő fizikai folyamatot. Matematikai szempontból ez azt jelenti, hogy egy parciális differenciálegyenletnek végtelen sok megoldása van. Valóban, tekintsük a legegyszerűbb 2D Laplace-egyenletet:

$$\Delta u = 0,$$

akkor az $u := 1$, $u := x$, $u := y$, $u := x^2 - y^2$, $u = x \cdot y, \dots$ és ezek tetszőleges lineáris kombinációja mind kielégíti a differenciálegyenletet.

Feladat: Legyen n természetes szám, és tekintsük az alábbi formulákkal értelmezett függvényeket:

$$u(x, y) := \operatorname{Re}((x + iy)^n), \quad v(x, y) := \operatorname{Im}((x + iy)^n),$$

ahol i a képzetes egység. Mutassuk meg, hogy u , v pontosan n -edfokú polinomok, és harmonikusak, azaz $\Delta u \equiv 0$, $\Delta v \equiv 0$ mindenütt \mathbf{R}^2 -en. \square

Ha egy konkrét megoldást akarunk meghatározni (ami a megfelelő fizikai folyamatot leírja), akkor bizonyos plusz információ is szükséges. Elliptikus egyenletek esetében ez az extra információ általában a tartomány pereméhez kötődnek. Ezeknek a *peremfeltételeknek* szintén van fizikai jelentésük.

Most körvonalazzuk a szokásos peremfeltételeket. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, megjegyezzük, hogy e peremfeltételek valamelyikével ellátva a korábban bevezetett elliptikus egyenleteket, a kapott peremérték feladatnak általában egyetlen megoldása van egy jól definiált függvény-térben.

Tekintsük tehát az alábbi elliptikus egyenletet:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = f \quad \Omega\text{-ban}$$

ahol Ω egy korlátos tartomány. Jelölje Γ az Ω tartomány peremét.

Első (vagy Dirichlet) peremfeltétel:

$$u \text{ előírt } \Gamma \text{ mentén}$$

Példaként tekintsük a kővezetési egyenletet. Tegyük fel, hogy egy 3D objektum hőforrásokat is tartalmaz. Ha az objektumot olvadó jég közé tesszük,

akkor Dirichlet-peremfeltételt kényszerítünk ezzel ki: a peremen a hőmérséklet mindenütt 0 Celsius fok lesz (feltéve, hogy a hőegyensúlyi állapotot már elértük, a hőmérséklet már nem függ az időtől). A gyakorlatban ez ritkán tehető meg. Sokkal valószínűbb, hogy a perem mentén elegendően sűrű térbeli pontokon *megmérjük* a hőmérsékletet, úgyhogy a hőmérsékleteloszlás a peremen a mérésekből ismertnek vehető.

Második (vagy Neumann) peremfeltétel:

$$\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \text{ előírt } \Gamma \text{ mentén}$$

ahol n a kifelé mutató normálvektort jelöli a Γ perem mentén. Gyakorlatilag ez azzal egyenértékű, hogy a $\frac{\partial u}{\partial n}$ normális irányú deriváltat írjuk elő a Γ perem mentén.

Fontos speciális eset, amikor a normális irányú derivált azonosan nulla a perem mentén. Ez a helyzet pl. a hővezetési probléma esetén, ha az objektumot hőszigetelő határolással látjuk el. Ha kiterjedt testben elektromos áram eloszlását modellezzük, akkor ez a peremfeltétel azt jelenti, hogy a test elektromosan szigetelve van a környező anyagoktól.

Megjegyzés: Poisson-egyenleteknél, ahol az ismeretlen u függvény önmagában nem, csak annak gradiense fordul elő, nyilvánvaló, hogy az azonosan konstans függvény mindig megoldása a differenciálegyenletnek. Ha az egyenletet Neumann-peremfeltétellel látjuk el, akkor az is nyilvánvaló, hogy a megoldás legfeljebb egy additív konstans erejéig lehet egyértelmű. Valóban, ha u megoldása a

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = v_0,$$

Neumann-problémának, akkor bármilyen $C \in \mathbf{R}$ esetén $u + C$ is megoldás. Ekkor ezt az additív konstans egyéb feltétellel tehetjük egyértelművé, így pl. megkövetelhetjük, hogy az u megoldásra

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0$$

teljesüljön. Továbbá a fenti Neumann-problémának nem mindig van megoldása: integrálva a differenciálegyenletet Ω -n, és alkalmazva a divergenciatételt, kapjuk, hogy a megoldhatósághoz szükséges, hogy az

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \int_{\Gamma} v_0 \, d\Gamma$$

kompatibilitási feltétel teljesüljön.

Harmadik (vagy Robin) peremfeltétel:

Az u és a $\frac{\partial u}{\partial n}$ függvények egy lineáris kombinációja előírt Γ mentén

Első pillanatra úgy tűnhet, hogy ez egy pusztán matematikai általánosítása a Dirichlet- és a Neumann-peremfeltételeknek. Valójában ilyen peremfeltétel természetes módon feltűnik, mikor a

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \operatorname{grad} u) = 0,$$

differenciálegyenletet akarjuk megoldani, ahol a tartomány két részből áll: egy belső Ω tartományból, és egy vékony Ω_0 rétegből, mely körülveszi Ω -t.

Tegyük fel, hogy $\sigma \equiv \text{const.}$ Ω -ban, és $\sigma \equiv \sigma_0$ Ω_0 -ban, ahol $0 < \sigma_0 \ll \sigma$, és az Ω_0 réteg vastagsága sokkal kisebb, mint az Ω tartomány jellemző mérete (ld. a 5. ábrát). Ez a helyzet pl. akkor ha u elektromos potenciált jelent, és az Ω_0 réteget egy "majdnem" szigetelőanyag tölti ki, melynek fajlagos vezetőképessége sokkal kisebb, mint az Ω tartomány belsejét kitöltő anyagé. (Vagy akár a nem tökéletes hőszigetelő anyaggal burkolt közegre is gondolhatunk, ha hővezetési probléma vizsgálata a feladat, és így tovább.)

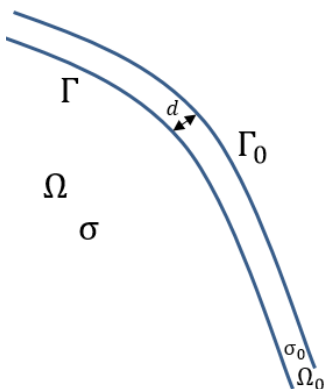


Figure 5: A Robin-peremfeltétel származtatásához.

Tegyük fel, hogy Γ_0 mentén, ami most az Ω_0 réteg külső peremét jelöli, az u_{ext} potenciál adott mint Dirichlet-peremfeltétel. Akkor a Γ interface

mentén (ld. az előző szakaszt) teljesül, hogy:

$$\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n}$$

Mivel Ω_0 vékony, a $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ derivált egyszerűen a $\frac{u_0|_{\Gamma_0} - u_0|_{\Gamma}}{d} = \frac{u_{ext} - u}{d}$ különbségi hányadossal közelíthető. Kapjuk, hogy (közelítően):

$$\sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma_0 \cdot \frac{u_{ext} - u}{d}$$

Átrendezve ezt az egyenlőséget, azonnal kapjuk a Γ mentén érvényes Robin-peremfeltételt:

$$\frac{\sigma_0}{d} \cdot u + \sigma \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\sigma_0}{d} \cdot u_{ext}$$

Azaz, maga a fizikai probléma hozza magával természetes módon a Robin-peremfeltételt.

A gyakorlatban a fenti "tisztá" peremfeltételek viszonylag ritkán fordulnak elő. Sokkal gyakoribb, hogy a perem több (diszjunkt) részből tevődik össze, és a különböző peremdarabok mentén különböző típusú peremfeltételek vannak előírva (*kevert peremfeltétel*). Durván szólva ez azt jelenti, hogy a perem minden pontjához pontosan egy peremfeltételt rendelünk. Megemlítjük azt is, hogy a peremfeltétel nem tartalmazhatja az ismeretlen függvénynek másod- vagy magasabb rendű deriváltját.

A kevert peremfeltételek igen természetes előfordulását az alábbi szivárgáshidraulikai példán keresztül szemléltetjük. Tekintsünk egy 2D szivárgási problémát, mely egy földgáton keresztül történik. A 6. ábra egy gát keresztmetszetét mutatja, melynek anyaga porózus. A gát bal oldalán a vízszint magas (H_1), míg a gát jobb oldalán alacsony (H_2). A nyomáskülönbség szivárgást hoz létre a gáton keresztül: az egyszerűség kedvéért a gát anyagát homogénnek tételezzük fel, mindenütt azonos szivárgási tényezővel.

Állandósult állapotban a szivárgást felülről egy Γ görbe határolja. Ez a *szabad felszín*, melynek elhelyezkedése előre nem ismert, így Γ meghatározása is a probléma része (*szabad felszín probléma*). Az Ω tartományban az u sebességpotenciál kielégíti a Laplace-egyenletet:

$$\Delta u = 0$$

A perem mentén többféle típusú peremfeltétel érvényes:

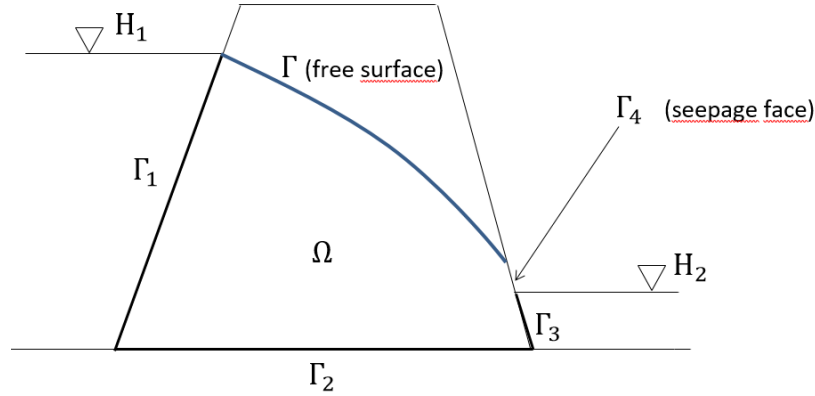


Figure 6: A klasszikus gát probléma (szabad felszín probléma).

- Ha az (x, y) pontra $(x, y) \in \Gamma_1$ teljesül, akkor a nyomás számítható: $p = (H_1 - y) \cdot \gamma$, ahol γ a víz fajsúlya. Behelyettesítve ezt a sebesség-potenciál $u = \frac{p}{\gamma} + y$ formulájába, kapjuk, hogy:

$$u \equiv H_1 \quad \Gamma_1 \text{ mentén}$$

(Dirichlet-peremfeltétel).

- Γ_2 mentén a sebességvektor érintőirányú, így normális irányú komponense azonosan zérus:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0 \quad \Gamma_2 \text{ mentén}$$

(Neumann-peremfeltétel).

- A Γ_3 peremszakaszon a helyzet hasonló, mint Γ_1 esetében, azaz:

$$u \equiv H_2 \quad \Gamma_3 \text{ mentén}$$

(Dirichlet-peremfeltétel).

- Ha $(x, y) \in \Gamma_4$, a nyomás itt atmoszferikus, ezért:

$$u(x, y) = y \quad \Gamma_4 \text{ mentén}$$

(Dirichlet-peremfeltétel). Megjegyezzük, hogy a Γ_1 és Γ_3 peremszakaszok esetével ellentétben, a peremfeltétel nem konstans: a perempont helyzetétől függ. Γ_4 -etszabad *kiszivárgási felületnek* (seepage face) nevezzük.

- Ha $(x, y) \in \Gamma$, ahol Γ az (előre nem ismert) szabad felszín (free surface), két független peremfeltétel is tehető. A sebességvektor érintőirányú, ezért:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0 \quad \Gamma \text{ mentén}$$

(Γ_2 esetéhez hasonlóan). Másrészt a nyomás atmoszferikus, amiből következik, hogy:

$$u(x, y) = y \quad \Gamma \text{ mentén}$$

A szabad felszín jelenléte az egész problémát nemlineárisá teszi. Mindazonáltal könnyen megoldható egy speciális iteratív technikával, amikor is a szabad felszín helyzetét minden lépésben alkalmas módon korrigáljuk. Minden iterációs lépésben egy kevert peremfeltétellel ellátott Laplace-egyenletet kell megoldani. A részleteket elhagyjuk: itt csak a peremfeltételek származtatását szemléltettük.

5 A perem-integrálegyenlet módszer

Ebben a fejezetben egy viszonylag új numerikus módszert, a perem-integrálegyenlet módszert vázoljuk. Már most megemlítjük, hogy a módszer nem minden elliptikus egyenletre alkalmazható, de amikor alkalmazható akkor jelentős numerikus előnyökkel rendelkezik a hagyományos módszerekhez (véges differencia módszer, véges elem módszer) képest. Nem kell ugyanis a tartományt magát diszkrétizálni sem számítási ráccsal, sem végeselemes hálóval: elég a tartomány *peremét* diszkrétizálni, ami – egyfelől kisebb dimenziós sokaság lévén – sokkal egyszerűbb, és sokkal kevesebb ismeretlen bevezetését teszi lehetővé.

A módszer lényegében *állandó együtthatós* ill. erre visszavezethető elliptikus egyenletekre alkalmazható. A módszert a 2D Poisson-egyenlet példáján fogjuk bemutatni, melyhez kevert peremfeltételt csatolunk. Ezt megelőzőleg az ehhez szükséges eszközöket vázoljuk.

5.1 A 3. Green-formula

Mindenekelőtt egy önmagában is érdekes és fontos függvény vizsgálatát tesszük meg:

Állítás: A $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $\Phi(x) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log \|x\|$ függvény az origót kivéve mindenütt harmonikus, azaz kielégíti a Laplace-egyenletet (itt $\|\cdot\|$ jelöli az euklideszi normát \mathbf{R}^2 -ben).

Bizonyítás: Jelölje x_1, x_2 az x pont derékszögű koordinátáit: $x = (x_1, x_2)$. Nyilván:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \cdot \log(x_1^2 + x_2^2)$$

Innen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Ismét deriválva x_1 szerint:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-x_2^2 + x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

ahonnan már következik, hogy $\Delta \Phi(x) = 0$ minden $x \neq \mathbf{0}$ esetén. \square

Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt polárkoordinátákra áttérve egyszerűbben is megkapjuk. Φ polárkoordinátás alakja nyilván

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi} \cdot \log r$$

ahonnan

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0,$$

feltéve, hogy $r \neq 0$.

Most kimondjuk és igazoljuk a perem-integrálegenlet módszer alapjául szolgáló formulát, ami Green 3. tételeként is ismert:

Tétel (Green 3. tétele): Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ szakaszonként sima korlátos tartomány, jelölje $\Gamma := \partial\Omega$ a peremet. Legyen $U : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$ tetszőleges, kétszer folytonosan differenciálható függvény. Akkor minden $x \in \Omega$ esetén érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned} U(x) = & -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{\|x-y\|^2} \cdot U(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log \|x-y\|) \cdot \frac{\partial U}{\partial n}(y) d\Gamma_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log \|x-y\|) \cdot \Delta U(y) d\Omega_y \end{aligned}$$

ahol n_y jelöli a perem y pontjához tartozó kifelé mutató normálvektort; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ill. $\|\cdot\|$ jelöli az \mathbf{R}^2 -ben értelmezett skaláris szorzatot ill. normát.

Bizonyítás: A bizonyítás lényege, hogy alkalmazzuk a Green 2. tételét egy "kilyukasztott" $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ tartományra, ahol ε kicsi, majd elvégezzük a $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet.

Legyen tehát $\varepsilon > 0$ olyan kicsi, hogy az x középpontú, ε sugarú kör $\overline{\Omega}_\varepsilon$ lezárása teljes egészében Ω belsejébe esik. Jelölje $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$ e kör peremét. Ha $y \in \Gamma_\varepsilon$, jelölje n_y az Ω_ε körből kifelé mutató normálvektort (ami $\Omega \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ belsejébe mutat!); ha pedig $y \in \Gamma$, akkor legyen n_y az Ω tartományból kifelé mutató normálvektor (7. ábra).

A rögzített $x \in \Omega$ mellett vezessük be az alábbi V függvényt:

$$V(y) := \frac{1}{2\pi} \cdot \log \|x-y\|$$

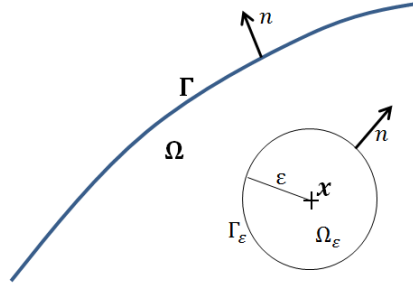


Figure 7: A 3. Green-formula bizonyításához.

Az előző állításból már tudjuk, hogy V harmonikus az $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ tartományon. Alkalmazzuk erre a tartományra Green 2. tételét, mely szerint:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega - \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}} U \cdot (\Delta V) \, d\Omega = \\ & = \int_{\partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon})} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma - \int_{\partial(\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon})} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma \end{aligned}$$

A bal oldal második integrálja tehát zérussal egyenlő, mert ott $\Delta V \equiv 0$, míg az első integrál előáll az Ω és az Ω_ε tartományokon vett integrálok különbségeként. Ugyanakkor a jobb oldal mindkét peremintegráljában a perem két görbe (Γ és Γ_ε) egyesítése, tehát két-két peremintegrál összegeként áll elő. Figyelembe véve, hogy Γ_ε mentén a normálvektor a $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ tartomány belsejébe mutat, a Γ_ε mentén vett integrálok előjelet váltanak: végeredményben azt kaptuk, hogy:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma - \int_{\Gamma} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Tekintsük a bal és a jobb oldalon álló három, ε -tól függő integrált:

$$I_0 := \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega, \quad I_1 := \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma, \quad I_2 := \int_{\Gamma_\varepsilon} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma,$$

és számítsuk ki ezen integrálok határértékét, midőn $\varepsilon \rightarrow 0$.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0$ kiszámítása:

$$|I_0| = \left| \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega \right| \leq \max |\Delta U| \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |V(y)| \, d\Omega$$

A jobb oldali integrálban térjünk át polárkoordinátákra:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |V(y)| \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^\varepsilon |\log r| \cdot r \, dr \right) \cdot 2\pi$$

Az integrandusz folytonossá tehető a 0-ban, mert $r \cdot \log r \rightarrow 0$, midőn $r \rightarrow 0$.

Innen:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |V(y)| \, d\Omega \leq \max_{0 < r \leq 1} (|\log r| \cdot r) \cdot \varepsilon \rightarrow 0,$$

midőn $\varepsilon \rightarrow 0$. Kaptuk tehát, hogy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0 = 0$.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1$ kiszámítása:

$$I_1 = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma$$

Ámde Γ_ε mentén definíció szerint $V \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot \log \varepsilon$, így a jobb oldalon V kiemelhető az integráljel elé, ahonnan:

$$I_1 = \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} \, d\Gamma = \frac{\log \varepsilon}{2\pi} \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta U \, d\Omega,$$

ahol a jobb oldalon a divergenciatétel egy következményét alkalmaztuk. Innen:

$$|I_1| \leq \frac{|\log \varepsilon|}{2\pi} \cdot (\max |\Delta U|) \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} 1 \, d\Gamma = \frac{|\log \varepsilon|}{2\pi} \cdot (\max |\Delta U|) \cdot \varepsilon^2 \pi$$

Ismert, hogy ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor $\varepsilon^2 \log \varepsilon \rightarrow 0$. Kaptuk tehát, hogy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = 0$.

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2$ kiszámítása:

$$I_2 = \int_{\Gamma_\varepsilon} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} U(y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \log \|x - y\| \, d\Gamma_y$$

Az integranduszban:

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \log \|x - y\| = \langle \text{grad}_y (\log \|x - y\|), n_y \rangle = \frac{\langle y - x, n_y \rangle}{\|y - x\|^2}$$

Ámde Γ_ε mentén $\|y - x\| = \varepsilon$. Továbbá ugyanitt $n_y = \frac{y-x}{\|y-x\|}$, innen $\langle y - x, n_y \rangle = \frac{\|y-x\|^2}{\|y-x\|} = \varepsilon$. Innen I_2 kifejezése leegyszerűsödik:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} U \, d\Gamma,$$

azaz I_2 egy vonal-integrálközep, mely $\varepsilon \rightarrow 0$ esetben az $U(x)$ értékhez tart. Vagyis: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 = U(x)$.

Visszahelyettesítve a most kiszámított határértékeket a korábbi egyenlőségbe, az alábbi egyenlőséget nyerjük:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\Delta U) \cdot V \, d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} \cdot V \, d\Gamma - \int_{\Gamma} U \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma + U(x), \end{aligned}$$

ahonnan a tétel állítása már következik, tekintve, hogy ahogy fentebb már kiszámítottuk:

$$\frac{\partial V}{\partial n_y} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\langle y - x, n_y \rangle}{\|y - x\|^2} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2}$$

□

Green 3. tétele úgy is felfogható, mint egy "megoldóképlet" a

$$\Delta U = f$$

Poisson-egyenletre: segítségével az U megoldás bármely belső x pontban kiszámítható. Bevezetve az

$$u := U|_{\Gamma}, \quad v := \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma}$$

peremen értelmezett függvényeket, a 3. Green-formula az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} U(x) = & -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) \, d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log \|x - y\|) \cdot v(y) \, d\Gamma_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log \|x - y\|) \cdot f(y) \, d\Omega_y \end{aligned}$$

tetszőleges $x \in \Omega$ esetén.

A jobb oldali három integrál különösen fontos, ezért külön nevet is kaptak:

Az $\int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{\|x-y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y$ integrált, mint x függvényét, *kettősréteg potenciálnak*, az $\int_{\Gamma} (\log \|x-y\|) \cdot v(y) d\Gamma_y$ integrált, mint x függvényét,

egyszerű réteg potenciálnak nevezzük. Az $\int_{\Omega} (\log \|x-y\|) \cdot f(y) d\Omega_y$ integrál, mint x függvénye: *logaritmikus potenciál* vagy *Newton-potenciál*. Az első két elnevezést az indokolja, hogy ha u sűrűségű (kétdimenziós) töltéseket helyezünk el Γ mentén, akkor az általuk keltett elektromos potenciál (konstans szorzótól eltekintve) épp az egyszerű réteg potenciál; hasonlóan, ha v sűrűségfüggvénnyel jellemezhető (kétdimenziós) dipólusokat helyezünk el Γ mentén, akkor az általuk keltett elektromos potenciál (konstans szorzótól eltekintve) épp a kettősréteg potenciál.

A formula megoldóképletként való alkalmazásához ismerni kell az U és a $\frac{\partial U}{\partial n}$ függvények értékeit a teljes Γ peremen (azaz az u és v függvényeket). A (kevert) peremfeltételek viszont csak azt jelentik, hogy a perem minden pontjában vagy U , vagy $\frac{\partial U}{\partial n}$ vagy kettőjük egy lineáris kombinációja adott – de együtt a kettő sohasem.

Szükséges tehát egy olyan módszer, amely segítségével U és $\frac{\partial U}{\partial n}$ értékeit meg tudjuk határozni a Γ perem mentén. Ez egy, a Γ peremen kitűzött *integrálegyenlet* lesz: ennek származtatásával foglalkozunk a következő szakaszokban.

5.2 A logaritmikus, az egyszerű réteg és a kettősréteg potenciálok tulajdonságai

Tétel: Ha f folytonos az Ω tartomány lezárásán, akkor a logaritmikus potenciál folytonos az Ω tartomány peremén, azaz tetszőleges $\xi \in \Omega$ belső pont és $x \in \Gamma$ perempont esetén:

$$\int_{\Omega} (\log \|\xi - y\|) \cdot f(y) d\Omega_y \rightarrow \int_{\Omega} (\log \|x - y\|) \cdot f(y) d\Omega_y, \quad \text{midőn } \xi \rightarrow x.$$

Bizonyítás: Tekintsük az x perempont körüli $\varepsilon > 0$ sugarú Ω_{ε} kört (8. ábra). Feltehető, hogy $\xi \in \Omega_{\varepsilon}$. Jelölje

$$F(\xi) := \int_{\Omega} \log \|\xi - y\| \cdot f(y) dy$$

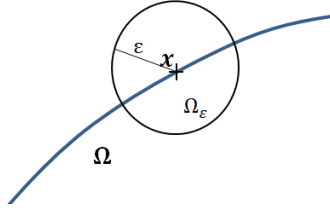


Figure 8: A logaritmus potenciál folytonosságának bizonyításához.

és

$$F(x) := \int_{\Omega} \log \|x - y\| \cdot f(y) dy.$$

Akkor

$$\begin{aligned} F(\xi) - F(x) &= \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\epsilon}} \log \|\xi - y\| \cdot f(y) dy - \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\epsilon}} \log \|x - y\| \cdot f(y) dy + \\ &+ \int_{\Omega \cap \Omega_\epsilon} \log \|\xi - y\| \cdot f(y) dy - \int_{\Omega \cap \Omega_\epsilon} \log \|x - y\| \cdot f(y) dy \end{aligned}$$

Innen:

$$\begin{aligned} |F(\xi) - F(x)| &\leq \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega_\epsilon}} |\log \|\xi - y\| - \log \|x - y\|| \cdot |f(y)| dy + \\ &+ \int_{\Omega \cap \Omega_\epsilon} |\log \|\xi - y\|| \cdot |f(y)| dy + \int_{\Omega \cap \Omega_\epsilon} |\log \|x - y\|| \cdot |f(y)| dy \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

A jobb oldali három integrált külön-külön becsüljük.

I_1 becslése. Az integrandusz regularitása miatt nyilván

$$I_1 \rightarrow 0,$$

midőn $\xi \rightarrow x$.

I_2 becslése. Kihasználva f folytonosságát:

$$I_2 \leq \|f\|_{\max} \cdot \int_{\Omega \cap \Omega_\epsilon} |\log \|\xi - y\|| dy \leq$$

$$\leq \|f\|_{\max} \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |\log \|\xi - y\|| \, dy \leq$$

A jobb oldali integrált nyilván felülről becsüljük, ha az integrálást egy ξ középpontú, 2ε sugarú körön végezzük. Ez utóbbit pedig kiszámíthatjuk polárkoordinátákra való áttéréssel:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|f\|_{\max} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\varepsilon} |\log r| \cdot r \, dr dt = \\ &= \|f\|_{\max} \cdot 2\pi \cdot (2\varepsilon^2 |\log 2\varepsilon| + \varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

I_3 becslése. Kihhasználva f folytonosságát:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \|f\|_{\max} \cdot \int_{\Omega \cap \Omega_\varepsilon} |\log \|x - y\|| \, dy \leq \\ &\leq \|f\|_{\max} \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |\log \|x - y\|| \, dy \leq \end{aligned}$$

A jobb oldali integrált polárkoordinátákra való áttéréssel kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \|f\|_{\max} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon |\log r| \cdot r \, dr dt = \\ &= \|f\|_{\max} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon^2 |\log \varepsilon| + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right) = \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy ha $\xi_n \rightarrow x$, akkor alkalmas, n -től és ε -tól független $C > 0$ konstans mellett:

$$\limsup |F(\xi_n) - F(x)| \leq C \cdot \varepsilon$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ -ra, így a bal oldalon a limesz is létezik (nemcsak a limesz superior), és:

$$\lim |F(\xi_n) - F(x)| = 0,$$

azaz $F(\xi_n) \rightarrow F(x)$. \square

Megjegyezzük, hogy a tétel nagyobb általánosságban is igaz: elég, ha f négyzetesen integrálható Ω -n. Továbbá a logaritmikus potenciál Ω belsejében is folytonos, nemcsak a peremen.

Tétel: Ha v folytonos az Ω tartomány Γ peremén, akkor az egyszerű réteg potenciál folytonos az Ω tartomány peremén, azaz tetszőleges $\xi \in \Omega$ belső pont és $x \in \Gamma$ perempont esetén:

$$\int_{\Gamma} (\log \|\xi - y\|) \cdot v(y) d\Gamma_y \rightarrow \int_{\Gamma} (\log \|x - y\|) \cdot v(y) d\Gamma_y, \quad \text{midőn } \xi \rightarrow x.$$

Bizonyítás: Tekintsük az x perempont körüli $\varepsilon > 0$ sugarú Ω_ε kört, mely a Γ peremből a Γ_ε peremdarabot vágja ki (9. ábra). Feltehető, hogy $\xi \in \Omega_\varepsilon$. Jelölje

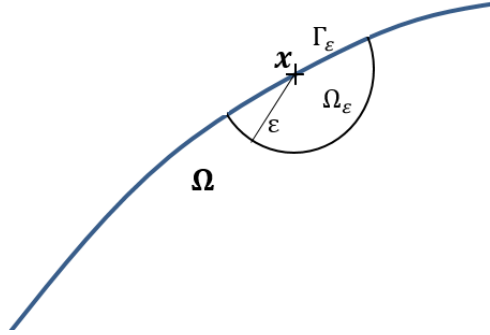


Figure 9: Az egyszerű réteg potenciál folytonosságának bizonyításához.

$$V(\xi) := \int_{\Gamma} \log \|\xi - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y$$

és

$$V(x) := \int_{\Gamma} \log \|x - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y.$$

Akkor

$$\begin{aligned} V(\xi) - V(x) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \log \|\xi - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \log \|x - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y + \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \log \|\xi - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma_\varepsilon} \log \|x - y\| \cdot v(y) d\Gamma_y \end{aligned}$$

Innen:

$$|V(\xi) - V(x)| \leq \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} |\log \|\xi - y\| - \log \|x - y\|| \cdot |v(y)| d\Gamma_y +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|\xi - y\|| \cdot |v(y)| d\Gamma_y + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|x - y\|| \cdot |v(y)| d\Gamma_y \\
& \qquad \qquad \qquad =: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

A jobb oldali három integrált külön-külön becsüljük.

I_1 becslése. Az integrandusz regularitása miatt nyilván

$$I_1 \rightarrow 0,$$

midőn $\xi \rightarrow x$.

I_2 becslése. Kihasznlva v folytonosságát:

$$I_2 \leq \|v\|_{\max} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|\xi - y\|| d\Gamma_y$$

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Γ poligon, x pedig egyik oldalán van. Akkor alkalmas lokális koordinátarendszerben Γ_ε paraméterezése: $y = (t, 0)$, ahol t befutja a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumot. Legyen $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, akkor $\|\xi - y\|^2 = (t - \xi_1)^2 + \xi_2^2$, így:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|\xi - y\|| d\Gamma_y &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log ((t - \xi_1)^2 + \xi_2^2)| dt \leq \\
&\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log |(t - \xi_1)|| dt \leq \int_{-\varepsilon - \xi_1}^{\varepsilon - \xi_1} |\log |w|| dw \leq \\
&\leq \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} |\log |w|| dw = 2 \cdot \int_0^{2\varepsilon} |\log w| dw =
\end{aligned}$$

A jobb oldali integrál kiszámítható, innen:

$$I_2 \leq \|v\|_{\max} \cdot 4\varepsilon (|\log 2\varepsilon| + 1) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$$

I_3 becslése. v folytonossága miatt:

$$I_3 \leq \|v\|_{\max} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|x - y\|| d\Gamma_y$$

Mint előbb, most is tegyük fel, hogy Γ poligon, x pedig egyik oldalán van. Akkor alkalmas lokális koordinátarendszerben Γ_ε paraméterezése: $y = (t, 0)$, ahol t befutja a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumot. Ezért:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\log \|x - y\|| d\Gamma_y = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\log |t|| dt = 2 \cdot \int_0^{\varepsilon} |\log t| dt$$

A jobb oldali integrál kiszámítható, innen:

$$I_3 \leq \|v\|_{\max} \cdot 2\varepsilon (|\log \varepsilon| + 1) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$$

Kaptuk tehát, hogy ha $\xi_n \rightarrow x$, akkor alkalmas, n -től és ε -tól független $C > 0$ konstans mellett:

$$\limsup |V(\xi_n) - V(x)| \leq C \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ -ra, így a bal oldalon a limesz is létezik (nemcsak a limesz superior), és:

$$\lim |V(\xi_n) - V(x)| = 0,$$

azaz $V(\xi_n) \rightarrow V(x)$. \square

A kettősréteg potenciál azonban másképp viselkedik:

Tétel: Ha u folytonos a Γ peremen, akkor a kettősréteg potenciálnak ugrása van a Γ perem mentén, éspedig tetszőleges $\xi \in \Omega$ belső pont és $x \in \Gamma$ perempont esetén:

$$\int_{\Gamma} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - u(x) \cdot (2\pi - \alpha(x)),$$

midőn $\xi \rightarrow x$, ahol $\alpha(x)$ jelöli a perem x pontbeli belső törésszögét; sima perem esetén $\alpha(x) = \pi$.

Bizonyítás: A bizonyítást egy lemmával készítjük elő:

Lemma: Legyen $\Gamma_0 \subset \mathbf{R}^2$ egy sima ívdarab, és $x \notin \Gamma_0$. Akkor a Γ_0 -on definiált egységnyi sűrűségű kettősréteg potenciál x -beli értéke $-\Theta(x)$, ahol $\Theta(x)$ jelöli Γ_0 látószögét x -ből nézve (10. ábra):

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} d\Gamma_y = -\Theta(x)$$

A lemma bizonyítása: Kössük össze egyenes vonalakkal x -et a Γ_0 ív végpontjaival; az így nyert alakzatból hagyjuk el mindazon pontokat, melyet x -től egy $\varepsilon > 0$ távolságnál közelebb vannak, így nyerve a Ω_ε tartományt (10. ábra). Az Ω_ε tartományon alkalmazzuk a divergenciatétel következményét a $V(y) := \log \|x - y\|$ formulával értelmezett függvényre:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta V d\Omega = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma$$

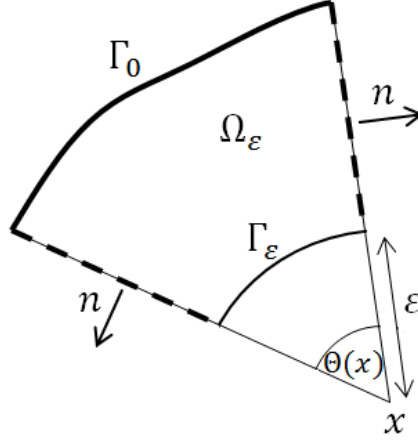


Figure 10: Egységnyi sűrűségű kettősréteg potenciálja.

Már tudjuk hogy V harmonikus Ω_ε -en, így mindkét oldal zérussal egyenlő. Kiszámítva V normális irányú deriváltját (az y változó szerint):

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \log \|x - y\| = \langle \text{grad}_y(\log \|x - y\|), n_y \rangle = \frac{\langle y - x, n_y \rangle}{\|y - x\|^2}$$

Innen:

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} d\Gamma = 0$$

A bal oldali integrál négy integrál összegére bontható. Ezek közül az egyenes oldalakon vett integrálok szintén zérussal egyenlők, mert ott n_y merőleges $(x - y)$ -ra. Ezért:

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} d\Gamma = 0$$

A bal oldal első integrálja épp a Γ_0 íven definiált egységnyi sűrűségű kettősréteg potenciál értéke az x pontban. A második integrált polárkoordináták szerinti integrálással egyszerűen kiszámíthatjuk:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} d\Gamma = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} 1 d\Gamma = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot \Theta(x),$$

miel Γ_ε mentén $n_y = -\frac{y - x}{\|y - x\|}$, és $\|x - y\| = \varepsilon$. Innen a lemma állítása már következik.

A tétel bizonyítása: Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Γ poligon, x pedig egyik csúcspontja (esetlegesen akár π törésszöggel). Jelölje Γ_ε a peremnek azt a részét, melynek pontjai az $x \in \Gamma$ peremponttól ε távolságnál nincsenek messzebb. Legyen Θ a Γ_ε peremdarab látószöge a $\xi \in \Omega$ belső pontból nézve, és legyen α a perem belső törésszöge x -ben (11. ábra). Jelölje

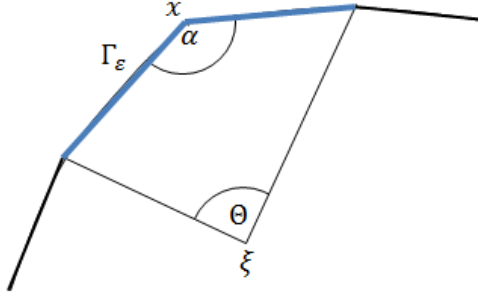


Figure 11: A kettősréteg potenciál ugrásának bizonyításához.

$$U(\xi) := \int_{\Gamma} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y$$

és

$$U(x) := \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y$$

Akkor

$$\begin{aligned} U(\xi) - U(x) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} - \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \right) \cdot u(y) d\Gamma_y + \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y \end{aligned}$$

A jobb oldali második integrálban $u(y)$ -t írjuk fel $u(y) - u(x) + u(x)$ alakban, innen:

$$\begin{aligned} U(\xi) - U(x) &= \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} - \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \right) \cdot u(y) d\Gamma_y + \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \cdot (u(y) - u(x)) d\Gamma_y - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y + \end{aligned}$$

$$+u(x) \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} d\Gamma_y$$

A jobb oldali utolsó integrál a lemma alapján számítható:

$$u(x) \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} d\Gamma_y = -\Theta \cdot u(x),$$

amit átviszünk a bal oldalra. Innen az alábbi becslést kapjuk:

$$\begin{aligned} |U(\xi) - U(y) + u(x) \cdot \Theta| &\leq \left| \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} - \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \right) \cdot u(y) d\Gamma_y \right| + \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \right| \cdot |u(y) - u(x)| d\Gamma_y - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \right| \cdot |u(y)| d\Gamma_y =: \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

A jobb oldali három integrált külön-külön becsüljük.

I_1 becslése. Az integrandusz regularitása miatt nyilván

$$I_1 \rightarrow 0,$$

midőn $\xi \rightarrow x$.

I_2 becslése. Kihhasználva u folytonosságát:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \max_{y \in \Gamma_\varepsilon} |u(y) - u(x)| \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} \left| \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \right| \cdot d\Gamma_y \leq 2\pi \cdot \max_{y \in \Gamma_\varepsilon} |u(y) - u(x)| =: \\ &=: C_\varepsilon, \end{aligned}$$

ahol $C_\varepsilon \rightarrow 0$, midőn $\varepsilon \rightarrow 0$.

I_3 becslése. Mivel Γ poligon, azért feltehető, hogy az $(x - y)$ különbségvektor érintőirányú, így minden $y \in \Gamma_\varepsilon$ esetén merőleges n_y -ra. Ezért az I_3 integrál zérus:

$$I_3 = 0$$

Kaptuk tehát, hogy ha $\xi_n \rightarrow x$, akkor alkalmas, (n -től független) C_ε konstans mellett:

$$\limsup |U(\xi_n) - U(y) + u(x) \cdot \Theta| \leq C_\varepsilon$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$ -ra, így a bal oldalon a limesz is létezik (nemcsak a limesz superior), és mivel nyilván $\Theta \rightarrow 2\pi - \alpha$, azért:

$$\lim |U(\xi_n) - U(x) + (2\pi - \alpha) \cdot u(x)| = 0,$$

azaz $U(\xi_n) \rightarrow U(x) - (2\pi - \alpha) \cdot u(x)$. \square

Megjegyezzük, hogy a fenti potenciálok Ω belsejében is folytonosak, de a későbbiekben számunkra elsősorban a peremen való viselkedés lesz szükséges.

5.3 Perem-integrálegyenlet a 2D Poisson-egyenletre

Tekintsük az $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ korlátos, elég sima (pl. szakaszonként folytonosan differenciálható peremű) tartományon kitűzött Poisson-egyenletet:

$$\Delta U = f$$

melyet az alábbi kevert peremfeltétellel látunk el. Legyen $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ a $\Gamma := \partial\Omega$ perem egy diszjunkt felbontása, és definiáljuk a peremfeltételt a következőképp:

$$U|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0,$$

ahol u_0, v_0 adott függvények.

Legyen $\xi \in \Omega$ tetszőleges *belső* pont, akkor a 3. Green-formula értelmében:

$$\begin{aligned} U(\xi) = & -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle \xi - y, n_y \rangle}{\|\xi - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log \|\xi - y\|) \cdot v(y) d\Gamma_y + \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log \|\xi - y\|) \cdot f(y) d\Omega_y \end{aligned}$$

ahol az

$$u := U|_{\Gamma}, \quad v := \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma}$$

jelölésekkel éltünk.

Most legyen $x \in \Gamma$ tetszőleges *perempont*. Elvégezve a $\xi \rightarrow x$ határátmenetet, az előző szakasz tételei alapján az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{\|x - y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi} \cdot (u(x) \cdot (2\pi - \alpha(x))) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Gamma} (\log \|x - y\|) \cdot v(y) d\Gamma_y + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\Omega} (\log \|x - y\|) \cdot f(y) d\Omega_y, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \alpha(x) \cdot u(x) + \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{\|x-y\|^2} \cdot u(y) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} \left(\log \frac{1}{\|x-y\|} \right) \cdot v(y) d\Gamma_y &= \\ &= - \int_{\Omega} \left(\log \frac{1}{\|x-y\|} \right) \cdot f(y) d\Omega_y, \end{aligned}$$

A kapott formulát a fenti Poisson-egyenlethez tartozó *perem-integrálegyenletnek* nevezzük.

Definiáljuk az alábbi magfüggvényeket:

$$K(x, y) := \frac{\langle x-y, n_y \rangle}{\|x-y\|^2}, \quad R(x, y) := \log \frac{1}{\|x-y\|},$$

és vezessük be az alábbi integráloperátorokat:

$$(Ku)(x) := \int_{\Gamma} K(x, y) \cdot u(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Gamma)$$

$$(Rv)(x) := \int_{\Gamma} R(x, y) \cdot v(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Gamma)$$

$$(Lf)(x) := \int_{\Omega} R(x, y) \cdot f(y) d\Omega_y \quad (x \in \Gamma)$$

K és R valódi *perem-integráloperátorok*: peremen értelmezett függvényekhez peremen értelmezett függvényeket rendelnek, míg L tartományon értelmezett függvényhez peremen értelmezett függvényt rendel.

Ezekkel a jelölésekkel a perem-integrálegyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\alpha \cdot u + Ku - Rv = -Lf$$

Speciálisan, ha Γ sima, akkor $\alpha \equiv \pi$. Ha pedig Laplace-egyenletből indulunk ki, azaz $f \equiv 0$, akkor a jobb oldal zérus:

$$\alpha \cdot u + Ku - Rv = 0$$

A perem-integrálegyenlethez csatolva még a (szintén peremen értelmezett) peremfeltételi egyenleteket is, az $u = U|_{\Gamma}$ és $v = \frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma}$ peremfüggvények már (általában) meghatározhatók. Ezek ismeretében pedig a 3. Green-formula segítségével most már valóban, explicit formában előállítható az U megoldás Ω belsejében.

A fentiek mintájára, vezessük be a hasonló formulával definiált integrál-operátorokat: az egyetlen különbség, hogy ezek *tartományon értelmezett* függvényeket állítanak elő:

$$(\tilde{K}u)(x) := \int_{\Gamma} K(x, y) \cdot u(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Omega)$$

$$(\tilde{R}v)(x) := \int_{\Gamma} R(x, y) \cdot v(y) d\Gamma_y \quad (x \in \Omega)$$

$$(\tilde{L}f)(x) := \int_{\Omega} R(x, y) \cdot f(y) d\Omega_y \quad (x \in \Omega)$$

Ezen integráloperátorok segítségével a 3. Green-formula egyszerűen és áttekinthetően felírható:

$$U = -\frac{1}{2\pi} \cdot \tilde{K}u + \frac{1}{2\pi} \cdot \tilde{R}v - \frac{1}{2\pi} \cdot \tilde{L}f$$

Megjegyzés: Numerikus szempontból sokszor komoly nehézséget jelent az L operátor megfelelő kezelése: ez ugyanis *tartományon definiált* f függvényhez rendel hozzá egy peremfüggvényt, azaz minden $x \in \Gamma$ esetén egy-egy *kétváltozós* integrált kell (numerikusan) kiértékelni, ami sokszor problematikus lehet. Szerencsére feltehető, hogy $f \equiv 0$, pontosabban, az eredeti Poisson-egyenletet Laplace-egyenletre lehet visszavezetni. Az alábbi eljárás a *partikuláris megoldások módszere* néven ismert. Legyen U_0 az eredeti Poisson-egyenlet egy partikuláris megoldása, azaz $\Delta U_0 = f$ (semmilyen peremfeltételt nem követelünk meg). Keressük az U megoldást $U = U_0 + W$ alakban, akkor W kielégíti a

$$\Delta W = 0$$

Laplace-egyenletet, és az alábbi, módosított peremfeltételeket:

$$W|_{\Gamma_D} = u_0 - U_0|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial U_0}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$

Ha tehát egy U_0 partikuláris megoldást elő tudunk állítani, akkor a probléma leegyszerűsödik, mert akkor a még meghatározandó W függvény már a Laplace-egyenletet elégíti ki, így a perem-integrálegyenletben elkerülhető az L integráloperátor alkalmazása. A partikuláris megoldások előállításának néhány technikáját később vázoljuk.

5.4 A perem-integrálegyenlet numerikus megoldása kollokációs módszerrel

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Laplace-egyenlethez tartozó perem-integrálegyenletet kell megoldani (az előzőek alapján a Poisson-egyenlet megoldása mindig visszavezethető Laplace-egyenletre). Helyezzünk el a Γ peremen N db *perem-kollokációs pontot*, legyenek ezek x_1, x_2, \dots, x_N . Jelölje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ a perem belső törésszögeit a perem-kollokációs pontokban.

Definiáljuk a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ valamint a $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ lineárisan független peremfüggvényeket. Keressük a

$$\alpha \cdot u + Ku = Rv$$

perem-integrálegyenlet közelítő megoldását, azaz az u, v peremfüggvényeket e peremfüggvények lineáris kombinációjaként, mégpedig:

$$u \approx \sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j, \quad v \approx \sum_{j=1}^N v_j \cdot \psi_j,$$

és követeljük meg a perem-integrálegyenlet teljesülését csak az x_1, x_2, \dots, x_N *kollokációs pontokban*. Akkor az egyelőre ismeretlen u_j, v_j együtthatókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\alpha_k \cdot \sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j(x_k) + \sum_{j=1}^N K_{k,j} u_j = \sum_{j=1}^N R_{k,j} v_j \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

ahol

$$K_{k,j} := (K\varphi_j)(x_k), \quad R_{k,j} := (R\psi_j)(x_k)$$

A fenti egyenletrendszerhez még csatoljuk a peremfeltételek diszkrét alakját is:

$$\sum_{j=1}^N u_j \cdot \varphi_j(x_k) = u_0(x_k), \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_D,$$

$$\sum_{j=1}^N v_j \cdot \psi_j(x_k) = v_0(x_k), \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_N$$

Ezzel $2N$ diszkrét egyenletünk van $2N$ ismeretlenre. Az egyenletrendszer (sokszor) egyértelműen megoldható: megjegyezzük mindazonáltal, hogy az egyenletrendszer mátrixa általában teljesen kitöltött mátrix, nem szimmetrikus, és sokszor rosszul kondicionált.

Megjegyzések:

- Mivel az u peremfüggvény "simább" v -nél (nem részletezzük, milyen értelemben), sokszor szokásos ehhez igazodni már a φ_k, ψ_k bázisfüggvények megválasztásakor is. Így pl. egy kézenfekvő választás u -t szakaszonként lineáris, v -t pedig szakaszonként konstans alakban keresni.
- Megkönnyíti a részletszámításokat, ha a φ_k, ψ_k bázisfüggvények Kronecker-tulajdonságúak a kollokációs pontokra nézve, azaz

$$\varphi_k(x_k) = 1, \text{ és minden } j \neq k \text{ esetén } \varphi_j(x_k) = 0$$

és hasonlóan

$$\psi_k(x_k) = 1, \text{ és minden } j \neq k \text{ esetén } \psi_j(x_k) = 0$$

Ez esetben az u_k, v_k együtthatóknak szemléletes jelentése is van: u_k (ill. v_k) a közelítő u (ill. v) megoldás helyettesítési értéke az x_k kollokációs pontban.

A legegyszerűbb, de a gyakorlatban is működő eljárás a következő. Tegyük fel, hogy a Γ perem poligon (ill. azzal közelíthető). Jelölje $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ az oldalakat (megengedve π nagyságú belső szögeket is), x_1, x_2, \dots, x_N pedig az oldalfelező pontokat. u -t és v -t egyaránt szakaszonként konstans alakban keressük: mind a φ_k mind a ψ_k bázisfüggvény legyen azonosan 1 a Γ_k oldalon, másutt pedig azonosan 0:

$$\varphi_k(x), \psi_k(x) := 1, \quad \text{ha } x \in \Gamma_k,$$

és

$$\varphi_k(x), \psi_k(x) := 0, \quad \text{ha } x \in \Gamma_j, \quad j \neq k$$

Ekkor az u, v függvényeket az alábbi alakban keressük:

$$u \approx \sum_{j=1}^N u_j \cdot \psi_j, \quad v \approx \sum_{j=1}^N v_j \cdot \psi_j,$$

A belső törésszögek a kollokációs pontokban mind π -vel egyenlők, és a diszkrétizált perem-integrálegyenlet az alábbi alakú lesz:

$$\pi \cdot u_k + \sum_{j=1}^N K_{k,j} u_j = \sum_{j=1}^N R_{k,j} v_j \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

ahol most

$$K_{k,j} := (K\psi_j)(x_k), \quad R_{k,j} := (R\psi_j)(x_k)$$

A peremfeltételek diszkrét alakja is leegyszerűsödik:

$$u_k := u_0(x_k), \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_D, \quad v_k := v_0(x_k), \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_N$$

A peremfeltételekből N db ismeretlen azonnal kiküszöbölhető (tudniillik a peremfeltételben adott u_k, v_k értékek). A diszkrétizált perem-integrálegyenlet viszont ekkor nem "szokványos" alakú egyenletrendszer: minden egyes kollokációs pontról számon kell tartani, hogy milyen típusú peremszakaszhoz tartozik (azaz, hogy Dirichlet- vagy Neumann peremen van-e), és a megfelelő u_k ill. v_k ettől függően adat avagy ismeretlen.

A fenti esetben – amikor a ψ_k bázisfüggvények szakaszonként konstans alakúak – a diszkrét perem-integrálegyenlet mátrixának elemei egyszerűen számíthatók. Minden egyes Γ_j oldal esetén válasszuk meg az alkalmazott lokális koordinátarendszert úgy, hogy a Γ_j oldalnak az adott (pozitív) körüljárás szerinti első végpontja az origóba, második végpontja az $(a, 0)$ pontba essék: ekkor a Γ_j oldalból kifelé mutató normálvektor $n = (0, -1)$. Legyen A és B az x_k pont két koordinátája ebben a koordinátarendszerben (12. ábra).

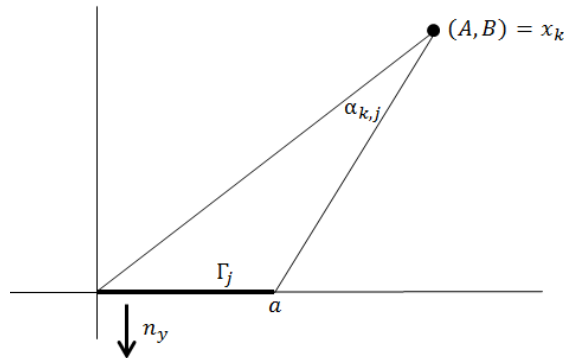


Figure 12: A diszkrétizált perem-integrálegyenlet mátrixelemeinek számításához..

Mivel a bázisfüggvények szakaszonként konstans alakúak, azért a mátrix-

elemek felírása különösen egyszerű:

$$K_{k,j} = (K\psi_j)(x_k) = \int_{\Gamma_j} \frac{\langle x_k - y, n_y \rangle}{\|x_k - y\|^2} d\Gamma_y$$

és

$$R_{k,j} = (R\psi_j)(x_k) = \int_{\Gamma_j} \log \frac{1}{\|x_k - y\|} d\Gamma_y$$

A Γ_j oldal paraméterezése ebben a koordináta-rendszerben értelemszerűen $y := (t, 0)$, ahol t befutja a $[0, a]$ intervallumot. Továbbá $x_k - y = (A - t, B)$, és ezért $\|x_k - y\|^2 = (t - A)^2 + B^2$.

$K_{k,j}$ kiszámítása: A $K_{k,j}$ -t definiáló integrál nyilván zérus, ha $B = 0$. Ha pedig $B \neq 0$ akkor

$$K_{k,j} = \int_{\Gamma_j} \frac{\langle x_k - y, n_y \rangle}{\|x_k - y\|^2} d\Gamma_y = -B \cdot \int_0^a \frac{1}{(t - A)^2 + B^2} dt$$

A jobb oldali integrál $w := \frac{t - A}{B}$ helyettesítéssel nehézség nélkül kiszámítható. A következőt kapjuk (ellenőrizzük!):

$$K_{k,j} = - \left(\operatorname{arctg} \frac{A}{B} - \operatorname{arctg} \frac{A - a}{B} \right) = -\alpha_{k,j}$$

$R_{k,j}$ kiszámítása:

$$R_{k,j} = \int_{\Gamma_j} \log \frac{1}{\|x_k - y\|} d\Gamma_y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a \log((t - A)^2 + B^2) dt$$

A jobb oldalon integráljunk parciálisan (a parciális integrálás szokásos $\int f g' = f g - \int f' g$ formalizmusában most legyen $f(t) := \log((t - A)^2 + B^2)$, $g(t) := t - A$, $f'(t) = \frac{2(t - A)}{(t - A)^2 + B^2}$, $g'(t) = 1$):

$$\begin{aligned} R_{k,j} &= -\frac{1}{2} \cdot [(t - A) \cdot \log((t - A)^2 + B^2)]_0^a + \int_0^a \frac{(t - A)^2 + B^2 - B^2}{(t - A)^2 + B^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (A - a) \cdot \log((A - a)^2 + B^2) - \frac{1}{2} \cdot A \cdot \log(A^2 + B^2) + a - \\ &\quad - \int_0^a \frac{B^2}{(t - A)^2 + B^2} dt \end{aligned}$$

A jobb oldal utolsó integrálja 0, ha $B = 0$. Ha pedig $B \neq 0$, akkor az integrál ismét csak a $w := \frac{t-A}{B}$ helyettesítéssel számítható. A következőt kapjuk (ellenőrizzük!):

$$R_{k,j} = \frac{1}{2} \cdot (A-a) \cdot \log((A-a)^2 + B^2) - \frac{1}{2} \cdot A \cdot \log(A^2 + B^2) + a - \\ - B \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{A}{B} - \operatorname{arctg} \frac{A-a}{B} \right)$$

6 A véges elem módszer

6.1 Elmélet dióhéjban

Most röviden összefoglaljuk a véges elem módszer megalapozásának legfőbb elméleti vonatkozásait. E szakaszban a legtöbb állítás, tétel ismertnek tekinthető fel, így bizonyítás nélkül mondjuk ki őket.

Mindenekelőtt felidézzük a legfontosabb fogalmakat.

6.1.1 Emlékeztető

Normált terek. Egy X vektorteret *normált térnek* nevezünk ha X -en értelmezett egy $\|\cdot\|$ -val jelölt függvény X (*norma*), mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- Minden $x \in X$ vektorra: $\|x\| \geq 0$ és $\|x\| = 0$ akkor, és csak akkor, ha $x = \mathbf{0}$.
- Minden $x \in X$ vektor és minden $\alpha \in \mathbf{R}$ skalárra: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- Tetszőleges $x, y \in X$ vektorra: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ("háromszög-egyenlőtlenség").

Az $x, y \in X$ vektorok *távolsága* alatt a különbségvektor normáját, azaz az $\|x - y\|$ számot értjük.

Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset X$ vektorsorozat *konvergens* és *az $x \in X$ vektorhoz tart*, ha $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, midőn $n \rightarrow \infty$. Minden konvergens vektorsorozatnak csak egy limesze van.

Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset X$ sorozat *Cauchy-sorozat* ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van oly N index, hogy minden $n, m \geq N$ esetén $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ teljesül (szemléletesen: "az elég nagy indexű sorozatelemek akármilyen közel lehetnek").

Tetszőleges normált térben: ha egy sorozat konvergens, akkor szükségképp Cauchy-sorozat is. A fordított állítás általában nem igaz.

Az X normált teret *teljesnek* vagy *Banach-térnek* nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Minden normált tér teljessé tehető bizonyos extra vektorok hozzávételével, és a műveleteknek valamint a normának ezen új vektorokra való alkalmas kiterjesztésével.

A leggyakrabban előforduló példák normált terekre az alábbiak. mindenekelőtt \mathbf{R} maga az abszolút értékkel, mint normával, valamint \mathbf{R}^N a következő, leginkább használatos normákkal:

- $\|x\|_{\max} := \max_{1 \leq k \leq N} |x_k|$ (maximum-norma)

- $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^N |x_k|$ (összeg-norma)
- $\|x\| := \sqrt{\sum_{k=1}^N |x_k|^2}$ (euklideszi norma)

ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. E terek mind véges dimenziós terek; minden véges dimenziós normált tér automatikusan teljes is, azaz Banach-tér. Végtelen dimenziós terek esetében ez nem így van. A legfontosabb végtelen dimenziós terek a gyakorlatban bizonyos *függvényterek*:

- A véges, zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos, valós függvények $C[a, b]$ tere a maximum-normával:

$$\|f\|_{\max} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- A véges, zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett m -szer folytonosan differenciálható függvények $C^m[a, b]$ tere a maximum-normával:

$$\|f\|_{C^m[a,b]} := \sum_{k=0}^m \max_{a \leq x \leq b} |f^{(k)}(x)|$$

- A (véges vagy végtelen) (a, b) intervallumon értelmezett integrálható függvények $L_1(a, b)$ tere az L_1 -normával:

$$\|f\|_{L_1(a,b)} := \int_a^b |f(x)| dx$$

- A (véges vagy végtelen) (a, b) intervallumon értelmezett négyzetesen integrálható függvények $L_2(a, b)$ tere az L_2 -normával:

$$\|f\|_{L_2(a,b)} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

A fenti függvényterek értelemszerűen bevezethetők többváltozós függvényekre is. Az (a, b) intervallum szerepét ekkor egy N -dimenziós Ω tartomány veszi át.

A fenti függvényterek mind teljesek, azaz Banach-terek. Jegyezzük meg azonban, hogy pl. a $C[a, b]$ tér normált tér az $L_1(a, b)$ -normával is, de e normával nem teljes: teljessé tétele pontosan megegyezik az $L_1(a, b)$ térrel.

Euklideszi terek. Azt mondjuk, hogy az X valós vektortér *euklideszi tér*, ha értelmezett rajta egy kétváltozós, valós értékű $\langle \cdot, \cdot \rangle$ függvény (*skaláris szorzat*), melyre az alábbiak teljesülnek:

- Tetszőleges $x \in X$ vektorra: $\langle x, x \rangle \geq 0$ és $\langle x, x \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $x = \mathbf{0}$
- Tetszőleges $x, y \in X$ vektorokra: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Tetszőleges $x, y \in X$ vektorra és $\alpha \in \mathbf{R}$ skalárra: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$
- Tetszőleges $x, y, z \in X$ vektorokra: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Megjegyezzük, hogy ezekből a tulajdonságokból az is következik, hogy tetszőleges $x, y \in X$ vektorra és $\alpha \in \mathbf{R}$ skalárra: $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$, továbbá tetszőleges $x, y, z \in X$ vektorokra: $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Minden euklideszi tér maga is normált tér a skaláris szorzat által indukált normával:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Ebben az állításban csak a háromszög-egyenlőtlenség fennállta nem magától értetődő: ez utóbbi a következő fontos egyenlőtlenség folyománya:

Tétel (Cauchy-egyenlőtlenség): Ha X euklideszi tér, akkor tetszőleges $x, y \in X$ vektorokra:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha x és y lineárisan összefüggők, azaz egyikük a másiknak konstansszorososa.

Bizonyítás: Tetszőleges $\alpha \in \mathbf{R}$ skálár esetén nyilván $\|x - \alpha y\|^2 \geq 0$, azaz:

$$\begin{aligned} \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \|y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Most definiáljuk α -t így: $\alpha := \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (feltéve, hogy $y \neq \mathbf{0}$, máskülönben az állítás a $0 = 0$ triviális egyenlőségre egyszerűsödik). Azt kapjuk, hogy:

$$\|x\|^2 - 2 \frac{\|x\|}{\|y\|} \langle x, y \rangle + \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \cdot \|y\|^2 \geq 0.$$

Ez az alábbi egyenlőtlenségre egyszerűsíthető:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Ez tetszőleges $x, y \in X$ vektorokra fennáll. Ha tehát y helyébe $(-y)$ -t írunk, az egyenlőtlenség továbbra is fennáll:

$$\langle x, -y \rangle \leq \|x\| \cdot \|-y\| = \|x\| \cdot \|y\|,$$

ahonnan $\langle x, y \rangle \geq -\|x\| \cdot \|y\|$. Kaptuk tehát, hogy

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

azaz $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\|x - \alpha y\|^2 = 0$, azaz $x = \alpha y$.

A Cauchy-egyenlőtlenségből a háromszög-egyenlőtlenség már egyszerűen következik:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Véve mindkét oldal négyzetgyökét, a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. \square

Érdemes megemlíteni a következő egyszerű, de hasznos egyenlőségeket is:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

tetszőleges $x, y \in X$ -re.

Az X euklideszi teret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha teljes a skaláris szorzat által indukált normával.

Az egyik legfontosabb Hilbert-tér a már említett $L_2(a, b)$ tér, azaz a négyzetesen integrálható függvények teret az

$$\langle f, g \rangle_{L_2(a,b)} := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

skaláris szorzattal, és a megfelelő többváltozós függvények $L_2(\Omega)$ tere az

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx$$

skaláris szorzattal.

Ortogonalitás. Az X euklideszi térben az $x, y \in X$ vektorokat *ortogonálisoknak* nevezzük, ha skaláris szorzatuk zérus: $\langle x, y \rangle = 0$. Ilyen vektorokra érvényes a Pitagorász-tétel:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

ami általánosítható több vektorra is: ha $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ páronként ortogonálisak, akkor:

$$\left\| \sum_{j=1}^m x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^m \|x_j\|^2.$$

Korlátos lineáris operátorok. Legyenek X, Y normált terek, és legyen $A : X \rightarrow Y$ egy lineáris leképezés (operátor). Az A operátort *korlátosnak* nevezzük, ha van oly K konstans, hogy minden $x \in X$ esetén az

$$\|Ax\| \leq K \cdot \|x\|$$

egyenlőtlenség érvényes. Egy ilyen K számot az A operátor egy *korlátjának* nevezzük. A korlátosság az A operátor folytonosságával ekvivalens: A pontosan akkor korlátos, ha megőrzi a limeszt tetszőleges konvergens sorozatra, azaz $x_n \rightarrow x$ -ből következik, hogy $Ax_n \rightarrow Ax$. Az A operátor korlátjainak minimumát A *normájának* nevezzük, és $\|A\|$ -val jelöljük. Így tetszőleges $x \in X$ esetén:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

érvényes. Az operátornorma a következő extrémális tulajdonsággal rendelkezik:

$$\|A\| = \max_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Ha az A lineáris operátor számértékű, azaz $Y = \mathbf{R}$, akkor A -t *lineáris funkcionálnak* nevezzük.

Az operátornorma valóban norma, ami az $X \rightarrow Y$ korlátos lineáris operátorok vektorteret normált térré teszi. (Ez a tér teljes is, amennyiben Y teljes.) Speciálisa, ha $A, B : X \rightarrow Y$ korlátos lineáris operátorok, akkor:

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Továbbá ha Z egy újabb normált tér, $A : X \rightarrow Y$, $B : Y \rightarrow Z$ korlátos lineáris operátorok, akkor a BA kompozíciójuk is az: $BA : X \rightarrow Z$, és:

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

Fontos speciális esetként jegyezzük meg, hogy egy $N \times M$ -es mátrix maga is korlátos, lineáris $\mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^N$ operátornak tekinthető. Operátornormája nyilván függ az \mathbf{R}^M ill. az \mathbf{R}^N terekben definiált vektornormáktól. A leggyakrabban használt (vektornorma által indukált) mátrixnormák a következők:

- *Sor-norma*: Ha \mathbf{R}^N -ben és \mathbf{R}^M -ben is a maximum-norma adott, akkor

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=1}^M |A_{kj}|$$

- *Oszlop-norma*: Ha \mathbf{R}^N -ben és \mathbf{R}^M -ben is az összeg-norma adott, akkor

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq M} \sum_{k=1}^N |A_{kj}|$$

- *Az euklideszi norma által indukált mátrixnorma*: Ha \mathbf{R}^N -ben az euklideszi norma adott, akkor tetszőleges négyzetes $A \in \mathbf{M}_{N \times N}$ mátrixra:

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq N} \sqrt{\mu_k},$$

ahol μ_1, \dots, μ_N az (önadjungált, pozitív szemidefinit) A^*A mátrix sajátértékei.

Következésképp, ha A maga is önadjungált, akkor az euklideszi norma által indukált normája a következő:

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k|,$$

ahol itt $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ az A mátrix sajátértékei. Speciálisan, ha A még pozitív definit is, akkor

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq N} \lambda_k, \quad \text{és} \quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq N} \lambda_k}.$$

6.1.2 Absztrakt variációs problémák

Legyen H valós Hilbert-tér, és legyen $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ egy *szimmetrikus, korlátos és koercív bilineáris funkcionál*, azaz:

- a mindkét változójában lineáris

- $a(u, v) = a(v, u)$ minden $u, v \in H$ -ra (szimmetria)
- $|a(u, v)| \leq M \cdot \|u\| \cdot \|v\|$ teljesüljön alkalmas $M \geq 0$ -ra minden $u, v \in H$ esetén (korlátosság)
- $a(u, u) \geq m \cdot \|u\|^2$ teljesüljön alkalmas $m > 0$ -ra minden $u \in H$ esetén (koercivitás)

Megjegyezzük, hogy ekkor

$$m \cdot \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq M \cdot \|u\|^2$$

teljesül minden $u \in H$ esetén.

Legyen $\ell : H \rightarrow \mathbf{R}$ adott, *korlátos lineáris funkcionál*.

Variációs probléma: Keressünk olyan $u \in H$ vektort, hogy minden $v \in H$ esetén az

$$a(u, v) = \ell v$$

egyenlőség teljesül.

A variációs problémák és módszerek alapvető jelentőségű tétele a következő tétel (bizonyítás nélkül):

Tétel (Lax-Milgram): Az a -ra és ℓ -re tett fenti feltételek teljesülése esetén a variációs problémának egyetlenegy megoldása létezik.

Az a bilineáris funkcionál valójában egy *skaláris szorzat* a H Hilbert-térben, mely az alábbi normát indukálja:

$$\|u\|_a := \sqrt{a(u, u)}$$

(*energetikai norma*, vagy egyszerűen csak a -norma).

Megjegyzés: A gyakorlatban az a bilineáris funkcionál egy elliptikus differenciálegyenletből jön, melyet épp meg szeretnénk oldani.

Jelölje u^* a variációs probléma (egyértelműen létező) megoldását. Legyen $V_h \subset H$ egy véges dimenziós altér, melynek N dimenzióját a h paraméterrel jellemezzük (a gyakorlatban ez hosszúságot fog jelenteni). A V_h altér elemeit gyakran *próbafüggvényeknek* nevezzük.

Hogy az u^* pontos megoldás egy közelítését előállítsuk, a variációs problémát leszűkítjük a V_h altérre.

A V_h altéren értelmezett variációs probléma: Keressünk olyan $u_h \in V_h$ vektort, hogy az alábbi

$$a(u_h, v_h) = \ell v_h$$

variációs egyenlőségek teljesüljenek minden $v_h \in V_h$ vektorra.

A Lax-Milgram-tétel azonnali következményeként, ennek a variációs problémának is létezik, éspedig egyetlenegy megoldása, jelölje ezt $u_h \in V_h$. Az u_h vektort az eredeti variációs probléma egy közelítő megoldásaként interpretáljuk. Természetes módon vetődik fel az alábbi két kérdés:

1. Hogyan tudjuk u_h -t kiszámítani?
2. Hogyan tudjuk az $(u^* - u_h)$ hibát megbecsülni?

Ami az első kérdést illeti, jelölje N a V_h altér dimenzióját, és legyen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ egy bázis V_h -ban. Keressük az u_h megoldást a bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$u_h = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k$$

A variációs egyenlőségeket nyilván elég a $v_h = \varphi_k$ vektorokra megkövetelni ($k = 1, 2, \dots, N$). Így jutunk a **diszkrét variációs problémához**:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot a(\varphi_j, \varphi_k) = \ell \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Tömör formában: $A\alpha = b$. Az A mátrixot *merevségi mátrixnak* nevezzük. Ennek elemei: $A_{kj} := a(\varphi_j, \varphi_k)$. A jobb oldal komponensei: $b_k := \ell \varphi_k$.

Az a bilineáris funkcionál szimmetriája miatt az A merevségi mátrix önadjungált. Ezenfelül:

Állítás: Az A mátrix pozitív definit.

Bizonyítás: Elég vizsgálni A kvadratikus alakját. Legyen $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ tetszőleges nemzérus vektor, akkor:

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N A_{kj} x_k x_j = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_k) x_k x_j =$$

$$= a \left(\sum_{k=1}^N x_k \varphi_k, \sum_{j=1}^N x_j \varphi_j \right) = a(w_h, w_h),$$

ahol $w_h := \sum_{j=1}^N x_j \varphi_j$. A φ_j vektorok lineáris függetlensége miatt a w_h vektor zérustól különbözik. Az állítás most már az a bilineáris funkcionál koercivitásából következik. \square

A diszkrét megoldás fontos jellemzője egy speciális *ortogonalitási tulajdonság*:

Állítás: A közelítés hibája, azaz az $(u^* - u_h)$ vektor a -ortogonális a V_h altérre, azaz

$$a(u^* - u_h, v_h) = 0 \quad \text{for all } v_h \in V_h$$

Bizonyítás: Tekintsük az eredeti variációs problémát. Akkor, speciálisan, minden $v_h \in V_h \subset H$ esetén:

$$a(u^*, v_h) = \ell v_h$$

A diszkrét variációs problémára pedig definíció szerint teljesül, hogy:

$$a(u_h, v_h) = \ell v_h$$

Kivonva egymásból a fenti két egyenlőséget, az állítást kapjuk. \square

Az ortogonalitási tulajdonság alapján az alábbi becsléshez jutunk:

Állítás: Tetszőleges $v_h \in V_h$ vektor esetén

$$\|u^* - u_h\|_a \leq \|u^* - v_h\|_a$$

Bizonyítás: Legyen $v_h \in V_h$ tetszőleges. Akkor:

$$\begin{aligned} \|u^* - v_h\|_a^2 &= \|(u^* - u_h) + (u_h - v_h)\|_a^2 = \\ &= \|u^* - u_h\|_a^2 + 2 \cdot a(u^* - u_h, u_h - v_h) + \|u_h - v_h\|_a^2 \end{aligned}$$

Az ortogonalitási tulajdonság miatt $a(u^* - u_h, u_h - v_h) = 0$. Másrészt nyilvánvalóan $\|u_h - v_h\|_a^2 \geq 0$. Kapjuk tehát, hogy:

$$\|u^* - v_h\|_a^2 \geq \|u^* - u_h\|_a^2,$$

ahonnan az állítás következik. \square

A fenti állítás hibabecslésként is interpretálható. A bal oldal a *közelítő megoldás hibája* a -normában mérve. A jobb oldal egy *approximációs hiba*, mely megmutatja, hogy az u^* vektort milyen pontossággal lehet közelíteni a V_h altér elemeivel. Az állítás azt fejezi ki, hogy az u_h vektor eredményezi a legkisebb távolságot (az a -norma szerint):

$$\|u^* - u_h\|_a = \min_{v_h \in V_h} \|u^* - v_h\|_a$$

A fentihez hasonló becslés a H Hilbert-tér eredeti normája szerint is érvényes:

Tétel (Céa-lemma): Tetszőleges $v_h \in V_h$ vektorra:

$$\|u^* - u_h\| \leq \frac{M}{m} \cdot \|u^* - v_h\|$$

Bizonyítás: Legyen $v_h \in V_h$ tetszőleges. Felhasználva az $m \cdot \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq M \cdot \|u\|^2$ egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} m \cdot \|u^* - u_h\|^2 &\leq a(u^* - u_h, u^* - u_h) = a(u^* - u_h, u^* - v_h + v_h - u_h) = \\ &= a(u^* - u_h, u^* - v_h) + a(u^* - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

Az ortogonalitási tulajdonság miatt a jobb oldal utolsó tagja eltűnik, így:

$$m \cdot \|u^* - u_h\|^2 \leq a(u^* - u_h, u^* - v_h) \leq M \cdot \|u^* - u_h\| \cdot \|u^* - v_h\|,$$

ahonnan a tétel állítása már következik. \square

A jobb oldali becslés standard eszközökkel elvégezhető, *anélkül, hogy ismernénk az u_h diszkrét variációs megoldást.*

Megjegyzések:

1. A megelőző állítást

$$\|u^* - u_h\|_a \leq \|u^* - v_h\|_a,$$

és az $m \cdot \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq M \cdot \|u\|^2$ egyenlőtlenséget használva, a Céa-lemma egy élesebb változatához jutunk:

$$m \cdot \|u^* - u_h\|^2 \leq \|u^* - u_h\|_a^2 \leq \|u^* - v_h\|_a^2 \leq M \cdot \|u^* - v_h\|^2,$$

ahonnan:

$$\|u^* - u_h\| \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot \|u^* - v_h\|$$

minden $v_h \in V_h$ esetén.

2. A fenti technika (mikor ugyanazt a V_h alteret használtuk a variációs egyenlőségekben) *Galjorkin-módszer* néven is ismert. Mindazonáltal definiálhatunk más W_h véges dimenziós alteret is (*tesztfüggvények tere*) valamilyen $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M$ bázissal (az N és M dimenziók akár különbözhetnek is). Ez az úgynevezett *Petrov-Galjorkin-módszer*. Ez esetben a variációs egyenlőségeket a ψ_k ($k = 1, 2, \dots, M$) vektorokra kényszerítjük ki. Így egy másik diszkrét variációs problémához jutunk:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot a(\varphi_j, \psi_k) = \ell \psi_k \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

Ámde ennek az egyenletrendszernek a mátrixa már nem feltétlen önadjungált, és a megoldhatóság sincs előre biztosítva.

6.2 Végés elem módszer az 1D Poisson-egyenletre

Legyen $(a, b) \subset \mathbf{R}$ egy véges intervallum. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ egy adott (négyzetesen integrálható) függvény, és tekintsük a legegyszerűbb 1D Poisson-egyenletet:

$$-u'' = f \quad (a, b)\text{-ben,}$$

melyet homogén Dirichlet-feltétellel látunk el:

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Mindenekelőtt egy alkalmas H Hilbert-teret kell definiálnunk, amiben majd kitűzzük az egyenlethez tartozó variációs problémát.

Vezessük be az alábbi függvényteret:

$$H := H_0^1(a, b) := \{w \in L_2(a, b) : w' \in L_2(a, b), w(a) = w(b) = 0\}$$

az alábbi skaláris szorzattal:

$$\langle u, v \rangle_H := \int_a^b u'(x) \cdot v'(x) dx$$

Az egyszerűség kedvéért az $L_2(a, b)$ térhez tartozó skaláris szorzatot ill. normát a következőképp fogjuk jelölni:

$$\langle u, v \rangle_0 := \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx, \quad \|u\|_0 := \sqrt{\int_a^b |u(x)|^2 dx}$$

Könnyel ellenőrizhető, hogy a fenti H -ban definiált skaláris szorzat teljesíti a skaláris szorzattól elvárt tulajdonságokat, ezért H euklideszi tér. A teljesség nem nyilvánvaló. Bizonyítás nélkül kimondjuk az alábbi tételt:

Tétel: A fenti H tér Hilbert-tér. \square

A H Hilbert-tér normája az alábbi fontos tulajdonsággal rendelkezik:

Tétel (Poincaré-egyenlőtlenség): Létezik olyan $c > 0$ szám, hogy minden $u \in H_0^1(a, b)$ esetén :

$$\int_a^b |u'(x)|^2 dx \geq c \cdot \int_a^b |u(x)|^2 dx,$$

azaz:

$$\|u\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|u\|_H$$

Bizonyítás: Mivel $u(a) = 0$, azért tetszőleges $x \in (a, b)$ mellett nyilván:

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt$$

Az $L_2(a, b)$ térben alkalmazva a Cauchy-egyenlőtlenséget, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_a^x 1 \cdot u'(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^x 1^2 dt \right) \cdot \left(\int_a^x |u'(t)|^2 dt \right) \leq \\ &\leq (x - a) \cdot \int_a^b |u'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Mindkét oldalon x szerint integrálva:

$$\int_a^b |u'(x)|^2 dx \leq \left(\int_a^b (x - a) dx \right) \cdot \left(\int_a^b |u'(t)|^2 dt \right) = \frac{(b - a)^2}{2} \cdot \int_a^b |u'(t)|^2 dt,$$

ahonnan a tétel már következik. \square

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a bizonyításban nem használtuk ki, hogy u az intervallum *mindkét* végpontján eltűnik. A bizonyítás lényegében változatlan marad, ha csak azt tesszük fel, hogy $u(a) = 0$ vagy $u(b) = 0$.

Most az a bilineáris és az ℓ lineáris funkcionálokat fogjuk definiálni. Az eredeti differenciálegyenlet mindkét oldalát egy $v \in H_0^1(a, b)$ függvénnyel szorozva, és az intervallumon integrálva kapjuk, hogy:

$$- \int_a^b u''(x) \cdot v(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

A bal oldalon parciálisan integrálva:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v'(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

Ezt az eredeti Poisson-probléma *gyenge alakjának* nevezzük.

Most már definiálhatjuk a kívánt funkcionálokat:

$$a(u, v) := \langle u, v \rangle_H = \int_a^b u'(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\ell v := \langle f, v \rangle_{L_2(a, b)} = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

Ellenőrizni kell, hogy e funkcionálok rendelkeznek-e a megkívánt tulajdonságokkal. A válasz igenlő:

- a mindkét változójában lineáris;
- $a(u, v) = a(v, u)$ minden $u, v \in H$ esetén, azaz a szimmetrikus;
- $|a(u, v)| = |\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \cdot \|v\|_H$, azaz a korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk);
- $a(u, u) = \|u\|_H^2$, azaz a koercív;
- $|\ell v| = |\langle f, v \rangle_0| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|f\|_0 \cdot \|v\|_H$, azaz ℓ korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget és a Poincaré-egyenlőtlenséget alkalmaztuk).

Az absztrakt eredményeknek köszönhetően már tudjuk, hogy a megfelelő variációs problémának létezik éspedig egyetlenegy megoldása a H Hilbert-térben. Hangsúlyozzuk, hogy a variációs problémában *nem fordul elő másodrendű derivált*. Ez egyszerűsíti a közelítő megoldás meghatározását is.

6.2.1 Végeelemes alterek

A következő feladat a véges dimenziós V_h altér alkalmas definíciója. Legegyszerűbb példaként legyen V_h *a homogén Dirichlet-feltételt kielégítő szakaszokként lineáris függvények altere*. Evégett definiáljuk az (a, b) intervallum egy (nem feltétlen ekvidisztáns) felbontását az $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ rácspontok segítségével. Jelölje $h_k := x_{k+1} - x_k$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) a k -edik részintervallum hosszát.

Tekintsük a szakaszokként (azaz részintervallumokként) lineáris függvényeket (nyilván elegendő ezeket a rácspontokban definiálni):

$$\varphi_k(x_k) := 1, \quad \text{and} \quad \varphi_k(x_j) := 0 \quad \text{if } j \neq k$$

($k = 1, 2, \dots, N-1$). Akkor

$$V_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}\}$$

Világos, hogy V_h egy $(N-1)$ -dimenziós altere H -nak, és a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}$ függvények bázist alkotnak V_h -ban. A φ_k függvényeket gyakran *kalapfüggvényeknek* is nevezik, utalva ezzel a grafikonjuk alakjára (13. ábra). Az absztrakt eredmények biztosítják, hogy a diszkrét variációs problémának szintén egyértelmű megoldása van a V_h altérben, és ez kifejezhető az

$$u_h = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \varphi_j,$$

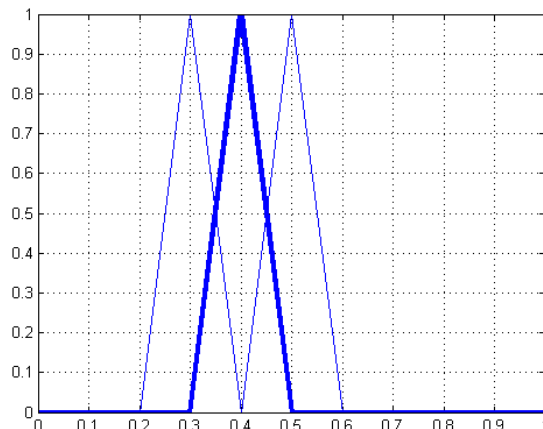


Figure 13: Kalapfüggvények.

alakban, ahol az $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ együtthatók kielégítik a diszkrét egyenletrendszert:

$$A\alpha = b,$$

ahol

$$A_{k,j} = a(\varphi_j, \varphi_k), \quad b_k = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx$$

A φ_k bázisfüggvények definíciója miatt, az A merevségi mátrix *tridiagonális*. Mivel a kalapfüggvények deriváltjai szakaszonként konstans függvények, nevezetesen:

$$\varphi'_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{k-1}} & (x \in (x_{k-1}, x_k)) \\ -\frac{1}{h_k} & (x \in (x_k, x_{k+1})) \end{cases}$$

azért a merevségi mátrix elemeinek számítása különösen egyszerű:

$$A_{k,k} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} (\varphi'_k(x))^2 dx = \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k}$$

$$A_{k,k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi'_{k-1}(x) \cdot \varphi'_k(x) dx = -\frac{1}{h_{k-1}}$$

$$A_{k,k+1} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi'_{k+1}(x) \cdot \varphi'_k(x) dx = -\frac{1}{h_k}$$

Az A mátrix minden további eleme zérussal egyenlő.

A jobb oldal komponenseit általában csak közelítően határozhatjuk meg (ha az integrálok nem számíthatók analitikusan). Példaképpen, a trapéz-szabályt alkalmazva, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} b_k &= \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \varphi_k(x) dx \approx \\ &\approx \frac{0 + f(x_k)}{2} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \frac{f(x_k) + 0}{2} \cdot (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \frac{h_{k-1} + h_k}{2} \cdot f(x_k) \end{aligned}$$

6.2.2 Hibabecslések

A Céa-lemmának köszönhetően, elegendő azt vizsgálni, hogy a H tér elemei milyen pontossággal közelíthetők szakaszonként lineáris függvényekkel.

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az x_0, x_1, \dots, x_N pontok ekvidisztánsak: $x_k = a + k \cdot h$, ahol $h = \frac{b-a}{N}$ a lépésköz. Itt N egy előre megadott szám, ami a V_h altér "felbontását" jellemzi.

Legyen egyelőre $F \in C^2[a, b]$ egy tetszőleges sima függvény, Jelölje S az elsőfokú spline függvényt (azaz szakaszonként lineáris függvényt), mely $F_k := F(x_k)$ értéket vesz fel az x_k pontban ($k = 0, 1, \dots, N$). Az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon, definíció szerint:

$$S(x) = F_k + \frac{F_{k+1} - F_k}{h} \cdot (x - x_k)$$

A Lagrange-középértéktételt alkalmazva azt kapjuk, hogy:

$$S(x) = F_k + F'(\xi) \cdot (x - x_k)$$

valamely $\xi \in (x_k, x_{k+1})$ mellett. Azaz:

$$S'(x) \equiv F'(\xi) = \text{const.}$$

az $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallumon. Másrészt, fejtsük az F' függvényt véges Taylor-sorba x_k körül:

$$F'(x) = F'(x_k) + F''(\tau) \cdot (x - x_k)$$

alkalmas $\tau \in (x_k, x_{k+1})$ mellett.

Még egyszer alkalmazva a Lagrange-közéértéktételt (az F' függvényre), kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} |F'(x) - S'(x)|^2 &= |F'(x_k) - F'(\xi) + F''(\tau) \cdot (x - x_k)|^2 = \\ &= |F''(\theta) \cdot (x_k - \xi) + F''(\tau) \cdot (x - x_k)|^2 \leq \\ &\leq \|F''\|_{\max}^2 \cdot (h + |x - x_k|)^2 \leq \|F''\|_{\max}^2 \cdot 4h^2 \end{aligned}$$

Ez a becslés érvényes minden egyes részintervallumon. Integrálva az (a, b) intervallum felett x szerint:

$$\int_a^b |F'(x) - S'(x)|^2 dx \leq 4 \cdot (b - a) \cdot \|F''\|_{\max}^2 \cdot h^2$$

azaz:

$$\|F - S\|_H = \|F - S\|_{H_0^1(a,b)} \leq 2 \cdot \|F''\|_{\max} \cdot \sqrt{b - a} \cdot h = \mathcal{O}(h)$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy az eredeti probléma u^* megoldása a V_h altér elemeivel szintén $\mathcal{O}(h)$ pontossággal közelíthető. Így a Céa-lemma a következő hibabecslést eredményezi:

$$\|u^* - u_h\|_{H_0^1(a,b)} \leq 2 \cdot \|(u^*)''\|_{\max} \cdot \sqrt{b - a} \cdot h = \mathcal{O}(h)$$

feltéve, hogy az u^* pontos megoldás eléggően sima (ami teljesül, ha a f függvény eléggően sima).

Tehát a *diszkrét megoldás hibája* $\mathcal{O}(h)$ a $H_0^1(a, b)$ -norma szerint.

Megjegyzés:

- Ha a hibát a *gyengébb* $L_2(a, b)$ -normában szeretnénk becsülni, egy élesebb becslés kapható (ez "Nitsche-trükk" néven ismert).

Először is, foglaljuk össze, hogy az előző megfontolásokból miféle becslések állnak már rendelkezésre. Létezik egy $C \geq 0$, h -tól független konstans, melyre:

1. $\|u^*\|_H \leq C \cdot \|f\|_0$
2. $\|u^* - u_h\|_H \leq C \cdot h \cdot \|(u^*)''\|_0$

Idézzük fel az ortogonalitási tulajdonságot is:

$$\langle u^* - u_h, v_h \rangle_H = 0 \quad \text{minden } v_h \in V_h\text{-ra}$$

Most tekintsük az alábbi segédfeladatot:

$$-w'' = u^* - u_h, \quad w(a) = 0, \quad w(b) = 0$$

Jelölje w^* a pontos megoldást, és legyen $w_h \in V_h$ a megfelelő diszkrét variációs feladat megoldása.

Alkalmazva az $a(w^*, v) = \int_a^b (u^* - u_h) \cdot v \, dx$ variációs egyenlőséget a $v := u^* - u_h$ függvényre, kapjuk, hogy:

$$a(w^*, u^* - u_h) = \|u^* - u_h\|_0^2$$

Másrészt, az ortogonalitási tulajdonságból következően

$$a(w_h, u^* - u_h) = a(u^* - u_h, w_h) = 0$$

Kivonva ezt az egyenlőséget az előzőből:

$$a(w^* - w_h, u^* - u_h) = \|u^* - u_h\|_0^2,$$

azaz:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_h\|_0^2 &= a(w^* - w_h, u^* - u_h) = \langle w^* - w_h, u^* - u_h \rangle_H \leq \\ &\leq \|w^* - w_h\|_H \cdot \|u^* - u_h\|_H, \end{aligned}$$

ahol a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Most alkalmazzuk a 2. becslést a jobb oldal mindkét tényezőjére, innen:

$$\|u^* - u_h\|_0^2 \leq \text{const.} \cdot h^2 \cdot \|(w^*)''\|_0 \cdot \|(u^*)''\|_0$$

Ámde $\|(w^*)''\|_0 = \|u^* - u_h\|_0$, ahonnan következik, hogy:

$$\boxed{\|u^* - u_h\|_0 \leq \text{const.} \cdot h^2 \cdot \|(u^*)''\|_0 = \mathcal{O}(h^2)}$$

Azaz a diszkrét megoldás hibája $\mathcal{O}(h^2)$ az $L_2(a, b)$ -norma szerint.

6.2.3 Végeelem módszer általánosabb 1D problémákra

Legyen $(a, b) \subset \mathbf{R}$ egy véges intervallum. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ adott (négyzetesen integrálható) függvény, és tekintsük az alábbi 1D elliptikus egyenletet:

$$-(\sigma \cdot u')' + d \cdot u = f \quad (a, b)\text{-ben}$$

melyet homogén Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Itt σ adott pozitív, korlátos függvény, d pedig nemnegatív függvény.

Tegyük fel, hogy

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \quad 0 \leq d(x) \leq d_1$$

A feladatot variációs formára kell hozni. Vezessük be ismét a

$$H := H_0^1(a, b) := \{w \in L_2(a, b) : w' \in L_2(a, b), w(a) = w(b) = 0\}$$

Hilbert-teret az alábbi skaláris szorzattal:

$$\langle u, v \rangle_H := \int_a^b u'(x) \cdot v'(x) dx$$

Most az a bilineáris funkcionált és az ℓ lineáris funkcionált kell definiálni. megszorozva az eredeti differenciálegyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H_0^1(a, b)$ függvénnyel, és integrálva az (a, b) intervallumon:

$$- \int_a^b ((\sigma(x) \cdot u'(x))' + d \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

A bal oldalon parciálisan integrálunk. Innen:

$$\int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

Ezt az eredeti elliptikus feladat *gyenge alakjának* nevezzük. Definiáljuk az alábbi funkcionálokat:

$$a(u, v) := \int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx$$

$$\ell v := \langle f, v \rangle_{L_2(a, b)} = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

Ellenőrizzük, hogy ezek a funkcionálok rendelkeznek-e a megkívánt tulajdonságokkal. Közvetlen számításokkal igazolható, hogy:

- a mindkét változójában lineáris
- $a(u, v) = a(v, u)$ minden $u, v \in H$ -re, azaz a szimmetrikus

- $|a(u, v)| \leq \text{const.} \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H$, azaz a korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk)
- $a(u, u) \geq \sigma_0 \cdot \|u\|_H^2$, azaz a koercív
- $|\ell v| = |\langle f, v \rangle_0| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|f\|_0 \cdot \|v\|_H$, azaz ℓ korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget és a Poincaré-egyenlőtlenséget alkalmaztuk).

Definiáljuk a V_h alteret ugyanúgy, mint korábban: legyen V_h a homogén Dirichlet-peremfeltételeket kielégítő, szakaszonként lineáris függvények altere. Definiáljuk az (a, b) intervallum egy felbontását a nem feltétlen ekvidisztáns $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ rácspontokkal, és vezessük be ismét az alábbi bázisfüggvényeket:

$$\varphi_k(x_k) := 1, \quad \text{és} \quad \varphi_k(x_j) := 0 \quad \text{ha } j \neq k$$

($k = 1, 2, \dots, N - 1$).

Az absztrakt eredmények most is mindig biztosítják, hogy a diszkrét variációs problémának is egyetlenegy megoldása létezik a V_h altérben, és ez az alábbi alakba írható:

$$u_h = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \varphi_j,$$

ahol az $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ együtthatók kielégítik az alábbi diszkrét egyenletrendszert:

$$A\alpha = b,$$

ahol

$$A_{k,j} = a(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b (\sigma(x) \varphi_j'(x) \varphi_k'(x) + d(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x)) dx$$

és

$$b_k = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx$$

A gyakorlatban az a jellemző, hogy a σ függvény szakaszonként konstans. A merevségi mátrix és a jobb oldal komponenseinek kiszámítása épp úgy (bár esetleg összetettebb számolások árán) történik, mint a korábbi egyszerű példában.

6.2.4 1D elliptikus feladatok, inhomogén Dirichlet-feltétel mellett

Legyen $(a, b) \subset \mathbf{R}$ egy véges intervallum. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ adott (négyzetesen integrálható) függvény, és tekintsük az alábbi 1D elliptikus egyenletet:

$$-(\sigma \cdot u')' + d \cdot u = f \quad (a, b)\text{-ben}$$

melyet inhomogén peremfeltétellel látunk el:

$$u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Itt σ ismét adott, pozitív, korlátos függvény, d pedig nemnegatív függvény. Tegyük fel, hogy

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \quad 0 \leq d(x) \leq d_1$$

A pontos megoldás *elvben* a következőképp fejezhető ki. Legyen g egy elegendően sima függvény, mely kielégíti a homogén peremfeltételt:

$$g(a) = A, \quad g(b) = B,$$

és keressük a megoldást $u := w + g$ alakban, ahol w kielégíti az alábbi módosított elliptikus egyenletet:

$$-(\sigma \cdot u')' + d \cdot u = f + (\sigma \cdot g')' + d \cdot g \quad (a, b)\text{-ben}$$

melyet homogén peremfeltétellel látunk el:

$$w(a) = 0, \quad w(b) = 0.$$

Innentől kezdve a már megismert technika alkalmazható.

A *gyakorlatban*, az algoritmus sokkal egyszerűbb. Vezessük be az "egyoldali" szakaszonként lineáris φ_0 és φ_N kalapfüggvényeket ezzel a definícióval: $\varphi_0(x_0) = 1$ és $\varphi_N(x_N) = 1$ (14. ábra). Most keressük a diszkrét u_h megoldást a következő alakban:

$$u_h := \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \varphi_j + A \cdot \varphi_0 + B \cdot \varphi_N,$$

és a diszkrét variációs egyenletek a következők lesznek:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_k) + A \cdot a(\varphi_0, \varphi_k) + B \cdot a(\varphi_N, \varphi_k) = \ell \varphi_k$$

minden $k = 1, 2, \dots, N - 1$ -re.

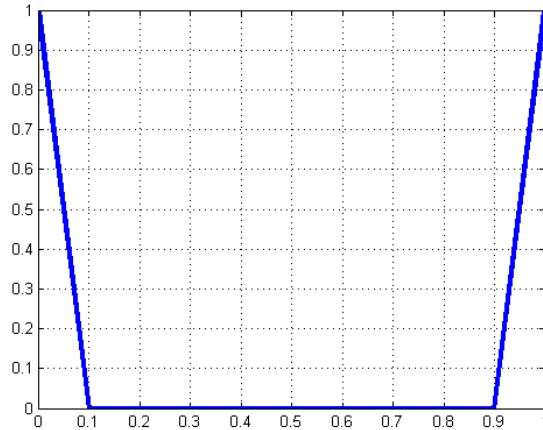


Figure 14: Egyoldali kalapfüggvények.

6.2.5 1D problémák kevert peremfeltétellel

Legyen $(a, b) \subset \mathbf{R}$ egy véges intervallum. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ adott (négyzetesen integrálható) függvény, és tekintsük az alábbi 1D elliptikus egyenletet:

$$-(\sigma \cdot u)' + d \cdot u = f \quad (a, b)\text{-ben,}$$

melyet az alábbi kevert peremfeltétellel látunk el:

$$u(a) = 0, \quad \sigma(b) \cdot u'(b) = C$$

azaz az intervallum jobb oldali végpontján Neumann peremfeltételt írunk elő.

Mint korábban is, σ adott, pozitív korlátos függvény, d pedig nemnegatív függvény. Tegyük fel ismét, hogy

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \quad 0 \leq d(x) \leq d_1$$

A tiszta Dirichlet-peremfeltétellel ellentétben, ahol a peremfeltétel a H Hilbert-tér definíciójában játszik szerepet, a Neumann peremfeltétel az ℓ funkcionál definícióját érinti.

Vezessük be az alábbi Hilbert-teret:

$$H := \{w \in L_2(a, b) : w' \in L_2(a, b), w(a) = 0\}$$

a következő skaláris szorzattal:

$$\langle u, v \rangle_H := \int_a^b u'(x) \cdot v'(x) dx$$

Látjuk, hogy a Dirichlet-feltétel H definíciójában fordul elő. Nem magától értetődő, hogy H ismét Hilbert-tér (ezt nem bizonyítjuk). Ahogy korábban is megjegyeztük, a Poincaré-egyenlőtlenség e térben is érvényes marad: van oly $c > 0$ konstans, melyre

$$\int_a^b |u'(x)|^2 dx \geq c \cdot \int_a^b |u(x)|^2 dx$$

teljesül tetszőleges $u \in H$ mellett.

Hogy az a bilineáris és az ℓ lineáris funkcionált megfelelőképp definiálhassuk, szorozzunk meg az eredeti differenciálegyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H$ függvénnyel, és integráljunk az (a, b) intervallumon:

$$-\int_a^b ((\sigma(x) \cdot u'(x))' + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

A bal oldalon parciálisan integrálva:

$$[-\sigma u'v]_a^b + \int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx$$

azaz, mivel $v(a) = 0$, de általában $v(b) \neq 0$:

$$\int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx + (\sigma u')(b) \cdot v(b)$$

A Neumann-peremfeltétel miatt $\sigma(b) \cdot u'(b) = C$. Ily módon megkaptuk az eredeti probléma *gyenge alakját*:

$$\int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx + C \cdot v(b)$$

Most már definiálhatjuk a kívánt funkcionálokat:

$$a(u, v) := \int_a^b (\sigma(x) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + d(x) \cdot u(x) \cdot v(x)) dx$$

$$\ell v := \langle f, v \rangle_{L_2(a,b)} + C \cdot v(b) = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx + C \cdot v(b)$$

Ellenőrizni kell, hogy ezek a funkcionálok rendelkeznek-e a megkívánt tulajdonságokkal. Körültekintően kell eljárni, mert a H és ℓ definíciója megváltozott. Itt összefoglaljuk a szükséges állításokat:

- a mindkét változójában lineáris
- $a(u, v) = a(v, u)$ minden $u, v \in H$ -re, azaz a szimmetrikus
- $|a(u, v)| \leq \text{const.} \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H$, azaz a korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget alkalmaztuk)
- $a(u, u) \geq \sigma_0 \cdot \|u\|_H^2$, azaz a koercív
- $|\ell v| = |\langle f, v \rangle_0| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|f\|_0 \cdot \|v\|_H$, azaz ℓ korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget és a Poincaré-egyenlőtlenséget alkalmaztuk).

Megjegyzés: Az utolsó egyenlőtlenségben felhasználtuk azt a tényt, hogy a $v \rightarrow v(b)$ funkcionál korlátos H normája szerint. Valóban:

$$v(b) = \int_a^b 1 \cdot v'(x) dx \leq \sqrt{(b-a) \cdot \int_a^b |v'(x)|^2 dx} = \sqrt{b-a} \cdot \|v\|_H.$$

Legyen most már a V_h altér a szakaszonként lineáris függvények altére, melyek kielégítik a homogén Dirichlet-peremfeltételt, de csak az $x = a$ pontban. Definiáljunk az (a, b) egy felbontását a (nem feltétlen ekvidisztáns) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ rácspontokkal. Vezessük be ismét az alábbi bázisfüggvényeket:

$$\varphi_k(x_k) := 1, \quad \text{és} \quad \varphi_k(x_j) := 0 \quad \text{ha } j \neq k$$

($k = 1, 2, \dots, N$). Vegyük észre, hogy az "egyoldali" φ_N függvény is szerepel V_h bázisában; ezért V_h dimenziója N (szemben a tiszta Dirichlet-peremfeltétel esetével).

A diszkrét variációs problémának most is egyetlenegy megoldása van a V_h altérben, és ez a következő alakban fejezhető ki:

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j,$$

ahol az $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ együtthatók kielégítik az alábbi diszkrét egyenletrendszert:

$$A\alpha = b,$$

ahol

$$A_{k,j} = a(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b (\sigma(x)\varphi_j'(x)\varphi_k'(x) + d\varphi_j(x)\varphi_k(x)) dx$$

és

$$b_k = \int_a^b f(x) \cdot \varphi_k(x) dx + C \cdot \varphi_k(b)$$

($k, j = 1, 2, \dots, N$).

Megjegyzés: Ha a Dirichlet-feltétel inhomogén, ez a korábbi módon kezelhető. Ha pl.

$$u(a) = A$$

előírt, akkor az u_h diszkrét variációs megoldás a következő alakú lesz:

$$u_h = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j + A \cdot \varphi_0,$$

ami a diszkrét egyenletek jobb oldalában okoz változást.

Összefoglalva a végelelemes technikákban alkalmazott fogásokat és konstrukciós elveket, a fő lépések a következők:

- Írjuk fel a parciális differenciálegyenletet és a peremfeltételeket a hagyományos formában.
- Definiáljunk egy alkalmas H Hilbert-teret, melynek elemei kielégítik a megfelelő *homogén* Dirichlet-peremfeltételt.
- Szorozzuk meg az differenciálegyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges v tesztfüggvénnyel, és alkalmazzunk integrálátalakítási tételt (parciális integrálást). Definiáljuk megfelelően az a bilineáris és az ℓ lineáris funkcionálokat. Megjegyezzük, hogy a Neumann-típusú peremfeltétel mindig az ℓ funkcionál definíciójában lép fel, míg a Dirichlet-típusú peremfeltétel a H tér definícióját befolyásolja.
- Ellenőrizzük, hogy a fentebb definiált funkcionálok megkívánt tulajdonságai teljesülnek-e (koercivitas, korlátosság).
- Definiáljuk a próbafüggvények V_h alterét.
- Állítsuk össze és oldjuk meg a diszkrét variációs egyenletrendszer.
- Ha lehetséges, próbáljuk meg megbecsülni a módszer hibáját.

6.3 Véges elem módszer 2D Poisson-problémákra

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ egy korlátos tartomány, jelölje Γ a tartomány peremét. Legyen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ adott (négyzetesen integrálható) függvény, és tekintsük az alábbi 2D Poisson-egyenletet:

$$-\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}$$

melyet homogén Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Vezessük be az alábbi függvényteret:

$$H := H_0^1(\Omega) := \left\{ w \in L_2(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in L_2(\Omega), w|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

az alábbi skaláris szorzattal:

$$\langle u, v \rangle_H := \int_{\Omega} \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dx dy$$

A rövidség kedvéért az $L_2(\Omega)$ tér skaláris szorzatát ill. normáját a következőképp fogjuk jelölni:

$$\langle u, v \rangle_0 := \int_{\Omega} u(x, y) \cdot v(x, y) \, dx dy, \quad \|u\|_0 := \sqrt{\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy}$$

A H -skaláris szorzattól megkövetelt tulajdonságok teljesülnek, azaz H euklideszi tér. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy:

Tétel: A H euklideszi tér teljes is, azaz Hilbert-tér. \square

A Poincaré-egyenlőtlenség itt is igaz marad. A bizonyítás lényegi gondolatai változatlanok:

Tétel (Poincaré-egyenlőtlenség): Létezik olyan $c > 0$ pozitív konstans, hogy minden $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén:

$$\int_{\Omega} \|\text{grad } u\|^2 \, dx dy \geq c \cdot \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy$$

azaz:

$$\|u\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|u\|_H$$

Bizonyítás: Mivel $u|_{\Omega} = 0$, azért az u függvény kiterjeszhető egy bővebb téglalagra úgy, hogy Ω -n kívül zérus legyen; kiterjesztett függvény négyzetesen integrálható marad ezen a bővebb téglalapon. Feltehető, hogy ez a téglalap épp $(0, a) \times (0, b)$. Legyen $y \in (0, b)$ tetszőleges, rögzített szám. Mivel $u(0, y) = 0$, azért:

$$u(x, y) = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(t, y) dt$$

Innen:

$$\begin{aligned} |u(x, y)|^2 &= \left(\int_0^x 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(t, y) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^x 1^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, y) \right)^2 dt \right) = \\ &= x \cdot \int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, y) \right)^2 dt \end{aligned}$$

Mindkét oldalon integrálva x szerint a $(0, a)$ intervallumon:

$$\int_0^a |u(x, y)|^2 dx \leq \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 dx$$

Mindkét oldalon integrálva y szerint a $(0, b)$ intervallumon:

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a |u(x, y)|^2 dx dy &\leq \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^b \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

Hasonlóan:

$$\int_0^b \int_0^a |u(x, y)|^2 dx dy = \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy \leq \frac{b^2}{2} \cdot \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 dx dy$$

Összeadva a két egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 dx dy &= \int_0^b \int_0^a |u(x, y)|^2 dx dy \leq \\ &\leq \frac{a^2 + b^2}{4} \cdot \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right)^2 \right) dx dy, \end{aligned}$$

ahonnan a tétel már következik. \square

Megjegyzés: Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, megjegyezzük, hogy a tétel akkor is igaz marad, ha H definíciójában csak annyit követelünk meg, hogy $u|_{\Gamma_0} = 0$ legyen ($u|_{\Gamma} = 0$ megkövetelése helyett), ahol Γ_0 a peremnek egy nemüres, nyílt darabja. Azaz elég megkövetelni, hogy u a peremnek csak egy részén tűnjön el.

Most definiálni fogjuk az a bilineáris és az ℓ lineáris funkcionált. Szorozzuk meg az eredeti differenciálegyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ függvénnyel, és integráljunk a tartományon:

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x, y) \cdot v(x, y) \, dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) \, dx dy$$

Felhasználva az első Green-formulát, azt kapjuk, hogy:

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad}(u, y), \text{grad} v(x, y) \rangle \, dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) \, dx dy$$

Ezt az eredeti Poisson-feladat *gyenge alakjának* nevezzük. Definiáljuk a szóban forgó funkcionálokat az alábbi módon:

$$a(u, v) := \langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} \langle \text{grad} u(x, y), \text{grad} v(x, y) \rangle \, dx dy$$

$$\ell v := \langle f, v \rangle_0 = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v(x, y) \, dx dy$$

Most ellenőrizni kell, hogy vajon ezek a funkcionálok rendelkeznek-e a kívánt tulajdonságokkal. A válasz igenlő:

- a mindkét változójában lineáris
- $a(u, v) = a(v, u)$ minden $u, v \in H$ -ra, azaz a szimmetrikus
- $|a(u, v)| = |\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \cdot \|v\|_H$, azaz a korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget használtuk)
- $a(u, u) = \|u\|_H^2$, azaz a koercív
- $|\ell v| = |\langle f, v \rangle_0| \leq \|f\|_0 \cdot \|v\|_0 \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \|f\|_0 \cdot \|v\|_H$, azaz ℓ korlátos (itt a Cauchy-egyenlőtlenséget és a Poincaré-egyenlőtlenséget használtuk).

Az absztrakt eredményeknek köszönhetően már tudjuk, hogy a variációs problémának egyetlen megoldása létezik a H Hilbert-térben. Hangsúlyozzuk, hogy a variációs problémában már *csak elsőrendű deriváltak* fordulnak elő, ami megkönnyíti a közelítő megoldás meghatározását is.

6.3.1 Végelelemes alterek

A véges dimenziós V_h altér megfelelő definíciója sokkal nehezebb, mint az 1D problémák esetében, ahol egy intervallumot kellett csak felbontani részintervallumokra. 2D problémák esetén az Ω tartomány bonyolult alakú lehet, és a V_h altérnek bizonyos értelemben jól kell illeszkednie a tartományhoz.

Talán a legtermészetesebb megközelítés az, ha az Ω tartományt háromszögekkel fedjük le (a továbbiakban: "háló"). A következő megszorítások oka nyilvánvaló:

- a háromszögek belseje páronként diszjunkt kell, hogy legyen;
- a háromszögek egyesítése olyan pontosan ki kell, hogy adja az eredeti tartományt, amennyire az csak lehetséges;
- a háromszögek olyan pontosan kell, hogy illeszkedjenek a tartomány peremre, amennyire az csak lehetséges;
- a háromszögek teljes oldallal kell, hogy csatlakozzanak egymáshoz;
- a háromszögek szögei nem lehetnek "túl kicsik".

A háromszögháló háromszögeit *véges elemeknek* nevezzük. A háromszögek csúcspontjait *csomópontoknak* fogjuk nevezni. Illusztrációként ld. a 15. ábrát. Két dimenzióban (és különösen három dimenzióban) a bázisfüggvények

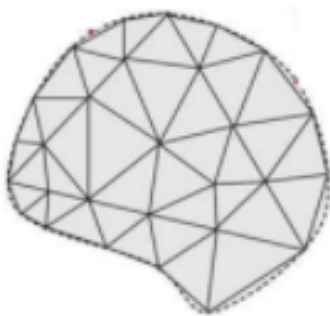


Figure 15: Egy 2D tartomány lefedése háromszöghálóval.

(próba)függvények) definiálása sokkal körülményesebb, mint 1 dimenzióban. Az egyik legegyszerűbb példa a próba)függvényekre a *szakaszonként lineáris (kétváltozós)* függvények használata. Az ilyen függvények alterében egy tipikus bázis a "sátorfüggvények" rendszere. Egy ilyen függvény értéke 1

egy kiválasztott csomópontban, és zérus minden más csomópontban. Ez az 1D "kalapfüggvények" egy kézenfekvő általánosítása (16. ábra). Mivel egy

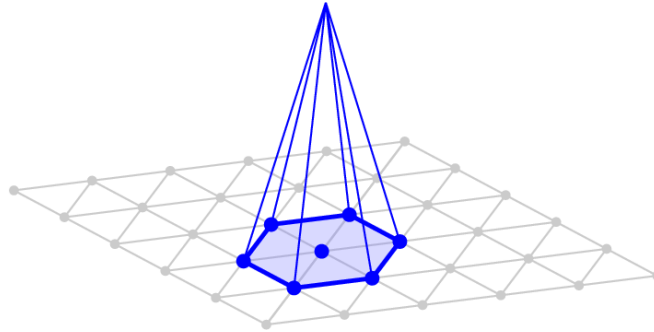


Figure 16: Egy tipikus sátorfüggvény grafikonja.

kétváltozós, szakaszonként lineáris függvény gradiense szakaszonként konstans vektorfüggvény, a merevségi mátrix és a jobb oldali vektor összeállítása elvben egyszerű. A gyakorlatban mindazonáltal ez a következőkkel jár. Definiálni kell

- egy csomópontlistát;
- egy elemlistát (az elemekre a megfelelő csomópontok indexeivel hivatkozva);
- minden csomóponthoz a rá illeszkedő elemek listáját.

A merevségi mátrix ritka mátrix lesz, mivel minden csomópont esetén csak azok a próbafüggvények adnak zérustól különböző mátrixelemet, melyek az adott csomóponttal szomszédos csomópontokhoz tartoznak. Így a diszkrét variációs egyenletek numerikus megoldásához célszerűen valamilyen iterációs (lehetőleg Krylov-altereken alapuló) módszer használata javasolt.

Ami a Neumann-peremfeltételeket illeti, ismét hangsúlyozzuk, hogy a H Hilbert-tér megfelelő definiálása a Dirichlet-peremfeltételek alapján történik (a H -ba tartozó függvényeknek el kell tűnniük azon peremszakaszokon, ahol Dirichlet-peremfeltétel adott). A Neumann-peremfeltételek az ℓ lineáris funkcionálok konkrét formáját befolyásolják.

Szemléltető példaként tekintsünk egy négyzet alakú tartományt, melyet egy ekvidisztáns ráccsal fedtünk le, melynek lépésköze mindkét koordináta-irányba ugyanaz, h . Bontsunk fel minden cellát két egybevágó háromszögre a bal alsó saroktól a jobb felső sarokig terjedő átlóval. A centrális C ponthoz

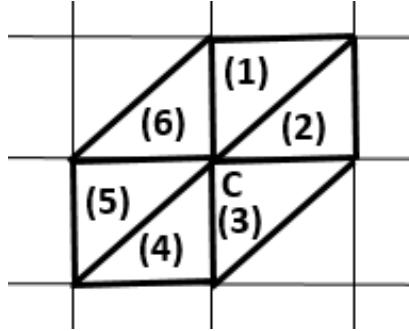


Figure 17: A φ_C bázisfüggvény tartója.

tartozó φ_C bázisfüggvény tartóját a 17. ábra szemlélteti. A φ_C függvény gradiensvektora konstans mindegyik háromszögön, melyek φ_C tartójához tartoznak. Mégpedig:

- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (0, -1)$ az 1. háromszögön
- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (-1, 0)$ a 2. háromszögön
- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (-1, 1)$ a 3. háromszögön
- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (0, 1)$ a 4. háromszögön
- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (1, 0)$ az 5. háromszögön
- $\text{grad } \varphi_C = \frac{1}{h} \cdot (1, -1)$ a 6. háromszögön

Mindegyik háromszög területe $\frac{h^2}{2}$. Így a merevségi mátrix φ_C -hez tartozó diagonáleleme:

$$\int_{\Omega} \|\text{grad } \varphi_C\|^2 dx dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 4.$$

Ami a diagonálison kívüli mátrixelemeket illeti, csak azok a bázisfüggvények adnak zérustól különböző adalékot, melyek egy C -vel szomszédos csomóponthoz tartoznak. Az N helyzetű csomópont esete látható a 18 ábrán: Könnyen látható, hogy a megfelelő mátrixelem:

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_N \rangle dx dy = -1,$$

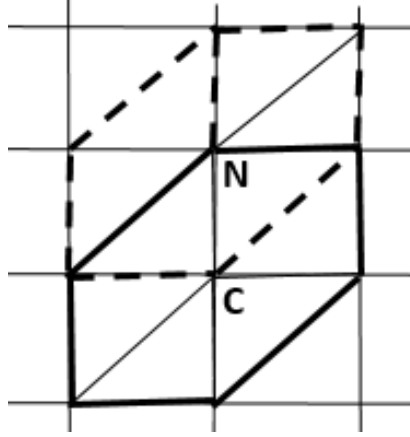


Figure 18: A φ_C és φ_N bázisfüggvények tartói.

és ugyanez igaz a többi, W , S és E főirányok esetében is:

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_W \rangle dx dy = -1,$$

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_S \rangle dx dy = -1,$$

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_E \rangle dx dy = -1.$$

Van még két szomszédos bázisfüggvény, melyek az NE és SW irányokhoz tartoznak. Az első eset a 19. ábrán látható: Itt a két háromszög adaléka kiejti egymást (ellenőrizzük!):

$$\int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_{NE} \rangle dx dy = \int_{\Omega} \langle \text{grad } \varphi_C, \text{grad } \varphi_{SW} \rangle dx dy = 0.$$

Így tehát a C csomópontához tartozó diszkrét variációs egyenlet a következő:

$$4\alpha_C - \alpha_N - \alpha_W - \alpha_S - \alpha_E = b_C,$$

ahol

$$b_C := \int_{\Omega} f(x, y) \cdot \varphi_C(x, y) dx dy$$

Látható, hogy a diszkrét variációs egyenletek összeállítása meglehetősen bonyolult lehet, különösen, ha a hálóstruktúra összetettebb.

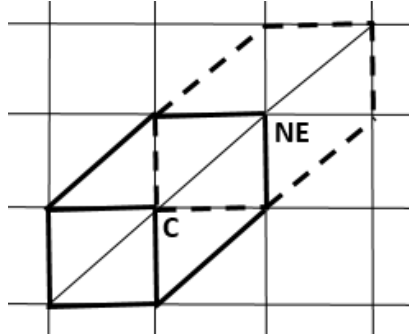


Figure 19: A φ_C és a φ_{NE} bázisfüggvények tartói.

Gyakorlati szempontból kényelmesebb a próbafüggvényeket *elemenként* kezelni, azaz kiszámítani azokat a tagokat, melyek a kiválasztott elemekkel kapcsolatban álló merevségi mátrixelemekhez (és persze a jobb oldal komponenseihez) adnak adalékot.

Az elemekre leszűkített bázisfüggvényeket *formafüggvényeknek* is nevezik. A diszkrét variációs egyenletrendszer generálásához elegendő csupán a formafüggvényeket ismerni (a próbafüggvények helyett).

6.3.2 Néhány 2D végeelem-típus

A formafüggvények leírása sokszor egyszerűbb, ha a szokásos x, y koordináták helyett baricentrikus koordinátákat használunk. Mindenekelőtt röviden felidézzük a definíciót:

Baricentrikus koordináták: Legyenek $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbf{R}^2$ nem kollineáris pontok. Jelöljön (x, y) egy tetszőleges pontot a síkon. Akkor az (x, y) pont egyértelműen kifejezhető $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ *konvex kombinációjaként*, azaz léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ együtthatók, melyekre:

$$x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 = x$$

$$y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3 = y$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ számokat az (x, y) pont *baricentrikus koordinátáinak* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy x és y függvényeként ezek elsőfokú polinomok. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\lambda_k(x_k, y_k) = 1, \quad \lambda_k(x_j, y_j) = 0 \quad \text{ha } j \neq k$$

$(k, j = 1, 2, 3)$.

Courant-elem (vagy *T3-elem*): Tekintsünk egy háromszögelemet, melynek csúcsai (csomópontjai) (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) a

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

baricentrikus koordinátafüggvényekkel mint formafüggvényekkel (20. ábra). Akkor V_h az elemenként lineáris függvényekből (a korábban már említett "sátorfüggvényekből") áll.

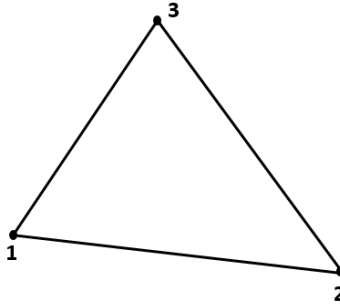


Figure 20: Courant- (T_3 -) elem

Másodrendű háromszögelem (vagy *T6-elem*): Tekintsünk egy háromszög-elemet az (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) csúcspontokkal (csomópontokkal) (21. ábra). Jelölje (x_4, y_4) , (x_5, y_5) , (x_6, y_6) a háromszögek oldalfelező pontjait. Definíáljuk az alábbi formafüggvényeket:

$$w_1 := \lambda_1 \cdot (2 \cdot \lambda_1 - 1), \quad w_2 := \lambda_2 \cdot (2 \cdot \lambda_2 - 1), \quad w_3 := \lambda_3 \cdot (2 \cdot \lambda_3 - 1)$$

$$w_4 := 4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2, \quad w_5 := 4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \quad w_6 := 4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_1$$

Akkor

$$w_k(x_k, y_k) = 1, \quad w_k(x_j, y_j) \text{ ha } j \neq k$$

$(k, j = 1, 2, \dots, 6)$. Továbbá a V_h altér elemenként kvadratikus függvényekből áll, melyek a háromszögek oldalai mentén folytonosan csatlakoznak egymáshoz.

A fenti elemek természetes módon általánosíthatók 3D problémákra (tetraéderhálók). Megjegyezzük azonban, hogy egy valóban jó hálógeneráló

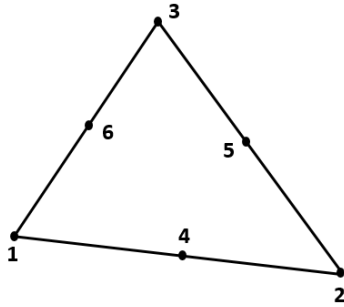


Figure 21: Márodrendű (T_6 -) háromszögelem

eljárás megalkotása, ami bonyolult alakú tartományokra is jól illeszkedik (különösen 3D-ben) a gyakorlatban még ma is nehéz feladat, és speciális eszközöket és algoritmusokat igényel.

7 Kitekintés – egyéb technikák

7.1 A Fourier-módszer

A módszert a 2D Poisson-egyenlet példáján mutatjuk be. Ebben a szakaszban a szokásos x, y jelöléseket fogjuk használni a térváltozók jelölésére: ezek tehát itt nem vektorokat fognak jelenteni.

7.1.1 A Fourier-módszer a 2D Poisson egyenletre

Tekintsük a

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}$$

Poisson-egyenletet, melyet homogén Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

Tegyük fel, hogy az Ω tartomány téglalap alakú: $\Omega = (0, A) \times (0, B)$.

A módszer alap gondolata, hogy a megoldást szinuszos Fourier-sor alakban keressük:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B},$$

ahol az $a_{k,j}$ Fourier-együtthatók egyelőre ismeretlenek.

Először is, fejtsük szinuszos Fourier-sorba a jobb oldalon álló f függvényt:

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B},$$

ahol a Fourier-együtthatók az alábbi integrálok kiszámításával határozhatók meg:

$$c_{k,j} = \frac{4}{AB} \int_{\Omega} f(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B} dx dy$$

Bizonyítás emlékeztető (egyszerűsítésekkel): Szorozzuk meg az

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B},$$

egyenlőség mindkét oldalát $\sin \frac{p\pi x}{A} \sin \frac{q\pi y}{B}$ -vel, és integráljunk az Ω téglalapon.

A következőt kapjuk:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \cdot \sin \frac{p\pi x}{A} \sin \frac{q\pi y}{B} dx dy =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{k,j} \cdot \left(\int_0^A \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{p\pi x}{A} dx \right) \cdot \left(\int_0^B \sin \frac{j\pi y}{B} \sin \frac{q\pi y}{B} dy \right)$$

Közvetlen számolásokkal látható, hogy ha $k \neq p$, akkor:

$$\int_0^A \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{p\pi x}{A} dx = 0,$$

és hasonlóan, ha $j \neq q$, akkor:

$$\int_0^B \sin \frac{j\pi y}{B} \sin \frac{q\pi y}{B} dy = 0.$$

A fenti egyenlőség tehát az alábbira egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x, y) \cdot \sin \frac{p\pi x}{A} \sin \frac{q\pi y}{B} dx dy = \\ & = c_{p,q} \cdot \left(\int_0^A \sin^2 \frac{p\pi x}{A} dx \right) \cdot \left(\int_0^B \sin^2 \frac{q\pi y}{B} dy \right) \end{aligned}$$

A jobb oldali integrálások könnyen elvégezhetők a $t := \frac{\pi x}{A}$ helyettesítéssel, ahonnan:

$$\int_0^A \sin^2 \frac{p\pi x}{A} dx = \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 pt dt = \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2pt}{2} dt = \frac{A}{2}$$

Hasonlóan:

$$\int_0^B \sin^2 \frac{q\pi y}{B} dy = \frac{B}{2}.$$

Innen az adódik, hogy:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \cdot \sin \frac{p\pi x}{A} \sin \frac{q\pi y}{B} dx dy = c_{p,q} \cdot \frac{AB}{4},$$

ahonnan az állítás már következik.

Most *definiáljuk* az u függvényt a következőképp:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B},$$

az alábbi Fourier-együtthatókkal:

$$a_{k,j} := -\frac{c_{k,j}}{\frac{k^2\pi^2}{A^2} + \frac{j^2\pi^2}{B^2}} \quad (k, j = 1, 2, \dots)$$

Az u függvény eltűnik a tartomány peremén, azaz az $y = 0$, $x = A$, $y = B$, $x = 0$ egyenesek mentén (ellenőrizzük!). Továbbá u kielégíti a Poisson-egyenletet a tartomány belsejében, mert:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{k,j} \cdot \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{k\pi x}{A} \right) \sin \frac{j\pi y}{B} + \sin \frac{k\pi x}{A} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \sin \frac{j\pi y}{B} \right) \right) = \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{c_{k,j}}{\frac{k^2\pi^2}{A^2} + \frac{j^2\pi^2}{B^2}} \cdot \left(\frac{k^2\pi^2}{A^2} + \frac{j^2\pi^2}{B^2} \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B} = \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} c_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B} = f(x, y)\end{aligned}$$

Összefoglalva a fenti számításokat, az algoritmus a következő:

- Számítsuk ki az f függvény szinuszos Fourier-együtthatóit:

$$c_{k,j} := \frac{4}{AB} \int_{\Omega} f(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B} dx dy \quad (k, j = 1, 2, \dots)$$

- Számítsuk ki az alábbi Fourier-együtthatókat:

$$a_{k,j} := -\frac{c_{k,j}}{\frac{k^2\pi^2}{A^2} + \frac{j^2\pi^2}{B^2}} \quad (k, j = 1, 2, \dots)$$

- Állítsuk elő u -t szinuszos Fourier-sor alakban:

$$u(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \sin \frac{j\pi y}{B}$$

A gyakorlatban a módszer ritkán alkalmazható, mivel fel kellett tennünk, hogy:

- az Ω tartomány téglalap;
- a megoldandó probléma egy Poisson-egyenlet.

A módszert nehéz általánosítani. Ha viszont a módszer alkalmazható, akkor numerikus szempontból igen gazdaságos, feltéve, hogy a fellépő Fourier-sorokat csonkítjuk az első N tag összegére, és a Fourier-sorfejtéseket ill. -kiértékeléseket a gyors Fourier-transzformációs algoritmussal (Fast Fourier Transform, FFT) végezzük. Ez esetben a szükséges aritmetikai műveletek száma csak $\mathcal{O}(N^2 \log N)$, ami majdnem ideális.

Az algoritmusnak már a Laplace-egyenletre való általánosítása sem magától értetődő. Az alábbiakban ezt a technikát vázoljuk.

7.1.2 A Fourier-módszer a 2D Laplace-egyenletre

Tekintsük az

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}$$

Laplace-egyenletet, melyet inhomogén Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u|_{\Gamma} = u_0,$$

ahol az Ω tartomány ismét egy téglalap: $\Omega = (0, A) \times (0, B)$.

Az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy az u_0 peremfeltételi függvény eltűnik a téglalap csúcspontjaiban. Ha ugyanis ez nem így van, keressük az u megoldást az alábbi alakban: $u(x, y) = w(x, y) + w_0(x, y)$, ahol $w_0(x, y) = a + bx + cy + dxy$, és az a, b, c, d együtthatónégyes az alábbi egyszerű egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} a &= u_0(0, 0) \\ a + b \cdot A &= u_0(A, 0) \\ a + b \cdot A + c \cdot B + d \cdot AB &= u_0(A, B) \\ a + c \cdot B &= u_0(0, B) \end{aligned}$$

Akkor definíció szerint u_0 és w_0 értékei megegyeznek a csúcspontokban. Mivel pedig a w_0 függvény nyilván harmonikus, azért w megoldása az alábbi Dirichlet-feladatnak:

$$\Delta w = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad w|_{\Gamma} = u_0 - w_0|_{\Gamma},$$

ahol a peremfeltételi függvény már eltűnik a csúcspontokban.

Innentől feltesszük, hogy az u_0 peremfeltételi függvény maga is rendelkezik a fenti tulajdonsággal, azaz eltűnik az Ω tartomány csúcspontjaiban. Jelölje $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ és Γ_4 az Ω téglalap oldalait:

$$\Gamma_1 := \{(x, 0) : 0 \leq x \leq A\}$$

$$\Gamma_2 := \{(A, y) : 0 \leq y \leq B\}$$

$$\Gamma_3 := \{(x, B) : 0 \leq x \leq A\}$$

$$\Gamma_4 := \{(0, B) : 0 \leq y \leq B\}$$

Fejtsük szinuszos Fourier-sorba az u_0 függvényt mind a négy oldal mentén:

- Γ_1 mentén:

$$u_0(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A}$$

- Γ_2 mentén:

$$u_0(A, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \sin \frac{j\pi y}{B}$$

- Γ_3 mentén:

$$u_0(x, B) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(3)} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A}$$

- Γ_4 mentén:

$$u_0(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(4)} \cdot \sin \frac{k\pi y}{B}$$

Mivel az u_0 függvény ismert, az $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ Fourier-együtthatók – elvben – nehézség nélkül számíthatók.

Most definiáljuk az alábbi kétváltozós függvényeket:

$$u^{(1)}(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi B}{A}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi(B-y)}{A}$$

$$u^{(2)}(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi A}{B}} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{B} \cdot \sin \frac{k\pi y}{B}$$

$$u^{(3)}(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(3)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi B}{A}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{A}$$

$$u^{(4)}(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(4)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi A}{B}} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi(A-x)}{B} \cdot \sin \frac{k\pi y}{B}$$

Egyszerű számítások mutatják, hogy $\Delta u^{(j)} = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$ -re). Valóban, tetszőleges k indexre:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sin \frac{k\pi x}{A} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{A} \right) &= \\ &= -\frac{k^2\pi^2}{A^2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{A} + \frac{k^2\pi^2}{A^2} \cdot \sin \frac{k\pi x}{A} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{A} \equiv 0 \end{aligned}$$

(a fenti Fourier-sorok által definiált másik három függvény hasonlóan kezelhető). Ha pedig az u_0 függvény elég sima, akkor a Laplace-operátor tagonként alkalmazható a Fourier-sorokra.

Közvetlen számításokkal ellenőrizhető, hogy mindegyik $j = 1, 2, 3, 4$ indexre:

$$u^{(j)}|_{\Gamma_j} = u_0|_{\Gamma_j},$$

azaz a Γ_j oldal mentén $u^{(j)}$ azonosan egyenlő az u_0 peremfeltételi függvénnyel, és eltűnik a többi három oldal mentén:

$$u^{(j)}|_{\Gamma_k} \equiv 0$$

$k \neq j$ -re.

Ezért az

$$u := u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)}$$

függvény harmonikus Ω belsejében, kielégíti a Γ mentén tett peremfeltételeket.

Röviden tehát az algoritmus a következő:

- Számítsuk ki az u_0 függvény szinuszos Fourier-együtthatóit Ω oldalai mentén: így nyerjük az $a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, a_k^{(3)}, a_k^{(4)}$ számokat ($k = 1, 2, \dots$).
- Definiáljuk az $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}$ függvényeket a fenti szinuszos Fourier-sorokkal.
- Az eredeti Dirichlet-feladat megoldása ezek után a következő függvény lesz: $u := u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + u^{(4)}$.

A módszer alkalmazhatósága a téglalapon kitűzött Laplace-egyenletre korlátozódik (ill. néhány, kicsit általánosabb elliptikus egyenletre). A gyakorlatban a Fourier-sorfejtések és -kiértékelések legcélszerűbben a gyors Fourier-transzformációs algoritmussal hajthatók végre. Ekkor az $a_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, 3, 4$) Fourier-együtthatók kiszámításának műveletigénye mindössze $\mathcal{O}(N \log N)$. Ám a kapott megoldás kiértékelése *minden egyes* (x, y) *pontban* szintén $\mathcal{O}(N \log N)$ műveletet igényel. Ha a kiértékelési pontok egy

$h := \frac{\text{konst.}}{N}$ lépésközű rács pontjai, akkor a teljes műveletigény $\mathcal{O}(N^3 \log N)$. Ha viszont a megoldás értékeire leginkább csak a perem környékén van szükség (ami gyakran előfordul a gyakorlatban), akkor a műveletigény jelentősen lecsökkenthető, tipikusan $\mathcal{O}(N^2 \log N)$ nagyságrendre.

Megjegyzés:

- Abban a látszólag általánosabb esetben, amikor egy *inhomogén* Poisson egyenletet kell megoldani:

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad u|_{\Gamma} = u_0,$$

a megoldás egyszerűen előállítható a következő két probléma megoldásainak összegeként:

$$\Delta v = f \quad \Omega\text{-ban}, \quad v|_{\Gamma} = 0,$$

$$\Delta w = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \quad w|_{\Gamma} = u_0.$$

Nyilvánvaló, hogy az így definiált $u := v + w$ függvény mind a Poisson-egyenletet, mind a peremfeltételt kielégíti.

7.2 A véges differenciák módszere

A parciális differenciálegyenletek megoldásának legrégebbi, hagyományos módszere a véges differenciák módszere. Ennek fő gondolata az, hogy az egyenletben előforduló parciális deriváltakat differenciasémákkal közelítjük. Ezért a legelső feladat egy *számítási rácsot* azaz egy véges ponthalmazt definiálni. Minden függvény kiértékelése ill. (közelítő) kiszámítása csak a rácspontokban történik. Az egyes rácspontok közti közelítő megoldásértékek számítása egy teljesen más (lényegében interpolációs) probléma, ami nem tartozik a véges differenciák módszerének témakörébe.

7.2.1 A véges differenciák módszere 1D elliptikus problémákra

Legyen Ω egy véges intervallum: $\Omega := (0, A)$. Tekintsük az

$$u'' = f \quad \Omega\text{-ban}$$

1D Poisson-egyenletet, melyet Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u(0) = a, \quad u(A) = b$$

ahol a, b adott számok, f adott, az Ω intervallumon értelmezett függvény.

Definiáljunk egy számítási rácsot az $[0, A]$ intervallumon a következőképp:

$$x_k := k \cdot h \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

ahol h a rács *lépésközét* jelöli: $h := \frac{A}{N}$. Az N (adott) szám jelzi, hogy az eredeti intervallumot hány részintervallumra osztjuk fel. Az x_0, x_1, \dots, x_N számokat *rácspontoknak* fogjuk nevezni. A fentebb definiált rács *egyenkőzű* (*ekvidisztáns*), azaz az egymást követő rácspontok távolsága állandó. A rács egy részlete a 22. ábrán látható:

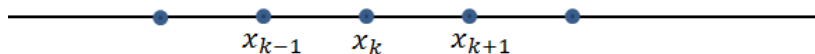


Figure 22: 1D ekvidisztáns rács.

A differenciasémák definiálásának egy természetes segédeszköze a Taylor-sorfejtés. Emlékeztetünk, hogy a u elegendően sima (pontosabban: négyszer folytonosan differenciálható), akkor x_k körül véges Taylor-sorba fejthető:

$$u(x_{k+1}) = u(x_k + h) = u(x_k) + \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 + \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

ahol a jobb oldalon a maradéktagnak csak a nagyságrendje szerepel ($\mathcal{O}(h^4)$). Hasonlóan:

$$u(x_{k-1}) = u(x_k - h) = u(x_k) - \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 - \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

Egyszerű számítások mutatják, hogy:

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (\text{előrelépő séma})$$

$$u'(x_k) = \frac{u(x_k) - u(x_{k-1}))}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (\text{visszalépő séma})$$

$$u'(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{centrális séma})$$

$$u''(x_k) = \frac{u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (\text{centrális séma})$$

A jobb oldali $\mathcal{O}(h)$ ill. $\mathcal{O}(h^2)$ tagok jellemzik a sémák hibáját. Azt mondjuk, hogy egy séma p -edrendű, ha a hibatag (a pontos derivált és a séma értékének különbsége) $\mathcal{O}(h^p)$ nagyságrendű. Látható tehát, hogy az előrelépő és a visszalépő sémák elsőrendűek, míg a két utolsó centrális séma másodrendű.

A gyakorlatban a lépésköz előre adott. Kisebb lépésköz nagyobb pontosságot biztosít, különösen, ha a séma magas rendű. Ugyanakkor a kisebb lépésköz használata megnöveli a rácspontok számát, így a számításigény is megnő. Hangsúlyozzuk, hogy az alkalmazott séma pontossága *nem* a differenciálegyenlet közelítő megoldásának pontosságát jelenti: a hibaanalízis sokkal bonyolultabb, és speciális eszközöket igényel.

Visszatérve a modellfeladatra:

$$u'' = f \quad u(0) = a, \quad u(A) = b,$$

jelölje u_0, u_1, \dots, u_N a közelítő megoldás értékei a rácspontokban. Az x_k rácspontban a másodrendű $u''(x_k)$ deriváltat a hárompontos, centrális sémával helyettesítve az alábbi *diszkrét problémát* kapjuk:

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} = f_k := f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Az u_0 és u_N értékek a peremfeltételből adóttak: $u_0 = a, u_N = b$. Kaptunk tehát egy $(N-1)$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer a megoldásnak a belső rácspontokban vett közelítő értékeire.

Hogy a pontosságot vizsgálhassuk, vezessük be az alábbi hibatagokat. Jelölje u a pontos megoldást, és:

$$g_k := \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}))}{h^2} - f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1).$$

A g_k számokat *lokális hibatagoknak* nevezzük. Vezessük be a *globális hibatagokat* is, a pontos és a közelítő megoldások különbségeként:

$$e_k := u(x_k) - u_k \quad (k = 0, 2, \dots, N).$$

Nyilván $e_0 = e_N = 0$.

A lokális hibatagok Taylor-soros technikával viszonylag könnyen becsülhetők. Ám a gyakorlatban nem a lokális, hanem a globális hibatagoknak van közvetlen jelentőségük. A következőkben egy egyszerű hibabecslést vezetünk le.

Vegyük észre, hogy a lokális hibatagokra a következő egyenlőségek érvényesek:

$$\frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}))}{h^2} = f_k - g_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1).$$

Tekintsük újra a diszkrét egyenletrendszert:

$$\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2} = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Kivonva egymásból a két egyenletet, azonnal adódik, hogy a globális hibatagok egy, az eredetihez hasonló egyenletrendszert elégítenek ki, melynek jobb oldalán a lokális hibatagok lesznek:

$$\frac{e_{k-1} - 2e_k + e_{k+1}}{h^2} = g_k \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

és $e_0 = e_N = 0$.

Jelölje $A_h \in \mathbf{M}_{(N-1) \times (N-1)}$ az egyenletrendszer mátrixát. Nyilvánvaló, hogy minden $w \in \mathbf{R}^{N-1}$ esetén:

$$(A_h w)_k = \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{h^2} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

(ahol definíció szerint legyen $w_0 := w_N := 0$).

Így a lokális és globális hibatagok közti összefüggést az alábbi tömör formába írhatjuk:

$$A_h e = g$$

ahol $e := (e_1, \dots, e_{N-1})$, és $g := (g_1, \dots, g_{N-1})$. Innan azonnal következik, hogy:

$$\|e\| \leq \|A_h^{-1}\| \cdot \|g\|,$$

ahol $\|\cdot\|$ jelöli az euklideszi normát \mathbf{R}^{N-1} -ben.

Ez a becslés gyakorlati célokra még nem alkalmas, mert az euklideszi norma közvetlenül függ h -tól (N -en keresztül). Jobb választás a *négyzetes középhiba* használata:

$$\|e\|_{RMS} := \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_{N-1}^2}{N-1}}$$

(Megjegyezzük, hogy egy csupa 1-esekből álló vektor négyzetes közepe mindig 1-gyel egyenlő, függetlenül a vektor méretétől). Az imént kapott becslésből nyomban következik, hogy:

$$\|e\|_{RMS} \leq \|A_h^{-1}\| \cdot \|g\|_{RMS}$$

Megmutatjuk, hogy az inverz mátrix A_h^{-1} normája egyenletesen korlátos, azaz h -ból függetlenül becsülhető felülről. Pontosabban:

$$\|A_h^{-1}\| \leq C$$

alkalmas C , h -tól független konstans mellett. Ezt gyakran a séma *stabilitásának* is nevezik, és nyilván az alábbi becslést adja:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot \|g\|_{RMS},$$

ami azt jelenti, hogy a globális hiba felülről becsülhető a lokális hibával. A lokális hibatagok pedig (Taylor-sorfejtéseket használva) viszonylag könnyen becsülhetők, és így kaphatjuk a kívánt hibabecslést.

A stabilitási becslés a következő tétel folyománya lesz:

Tétel: Az A_h mátrix önadjungált és negatív definit. A_h sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$, a megfelelő sajátvektorok pedig: $s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(N-1)}$, ahol:

$$\lambda_k = -\frac{4}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N}, \quad s_j^{(k)} = \sin \frac{kj\pi}{N} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Bizonyítás: A_h definíciójából adódóan A_h önadjungált, ez nyilvánvaló. Csak azt kell belátni, hogy: $A_h s^{(k)} = \lambda_k \cdot s^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N-1$). Definíció szerint:

$$\begin{aligned} \left(A_h s^{(k)} \right)_j &= \frac{1}{h^2} \cdot \left(\sin \frac{k(j-1)\pi}{N} - 2 \sin \frac{kj\pi}{N} + \sin \frac{k(j+1)\pi}{N} \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot \left(\sin \frac{kj\pi}{N} \cos \frac{k\pi}{N} - \cos \frac{kj\pi}{N} \sin \frac{k\pi}{N} - 2 \sin \frac{kj\pi}{N} + \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{kj\pi}{N} \cos \frac{k\pi}{N} + \cos \frac{kj\pi}{N} \sin \frac{k\pi}{N} \right) = \\ &= -\frac{2}{h^2} \cdot \sin \frac{kj\pi}{N} \cdot \left(1 - \cos \frac{k\pi}{N} \right) \end{aligned}$$

Felhasználva az elemi $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ trigonometrikus azonosságok, kapjuk, hogy:

$$\left(A_h s^{(k)} \right)_j = -\frac{4}{h^2} \cdot \sin \frac{kj\pi}{N} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N},$$

ahonnan a tétel állítása már következik. \square

Az A_h mátrix önadjungáltságból következik, hogy A_h normája és A_h^{-1} normája is A_h sajátértékeivel fejezhető ki:

Következmény:

$$\|A_h\| = |\lambda|_{\max} = |\lambda_{N-1}| = \frac{4}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{(N-1)\pi}{2N} \leq \frac{4}{h^2}$$

és

$$\|A_h^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|_{\min}} = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{h^2}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2N}} \sim \frac{h^2}{4 \frac{\pi^2}{4N^2}} = \frac{A^2}{\pi^2}$$

h -tól függetlenül (ahol \sim jelöli az aszimptotikus egyenlőséget, midőn $N \rightarrow \infty$, azaz $h \rightarrow 0$).

A séma stabilitását tehát igazoltuk, és az alábbi hibabecslés érvényes:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot \|g\|_{RMS},$$

A jobb oldal becslése sokkal egyszerűbb. Az u pontos megoldást x_k körül véges Taylor-sorba fejtve kapjuk, hogy:

$$u(x_{k+1}) = u(x_k + h) = u(x_k) + \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 + \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

és

$$u(x_{k-1}) = u(x_k - h) = u(x_k) - \frac{u'(x_k)}{1!} \cdot h + \frac{u''(x_k)}{2!} \cdot h^2 - \frac{u'''(x_k)}{3!} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

Összeadva ezt a két egyenlőséget:

$$u(x_{k-1}) + u(x_{k+1}) = 2u(x_k) + u''(x_k) \cdot h^2 + \mathcal{O}(h^4),$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}))}{h^2} - f_k = \\ &= \frac{u(x_{k-1}) - 2u(x_k) + u(x_{k+1}))}{h^2} - u''(x_k) = \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

azaz

$$|g_k| \leq C_0 \cdot h^2$$

($k = 1, 2, \dots, N - 1$) alkalmas C_0 konstans mellett, mely konstans független h -tól és k -tól. Következésképp:

$$\|g\|_{RMS} \leq C_0 \cdot h^2,$$

ahonnan következik, hogy a globális hibára hasonló becslés érvényes:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot C_0 \cdot h^2$$

A fenti eredményeket az alábbi tételben foglaljuk össze:

Tétel: A fentebb definiált, a centrális sémára alapozott véges differencia módszer másodrendű pontosságú, azaz a globális hiba $\mathcal{O}(h^2)$ nagyságrendű (a négyzetes középhiba értelmében, feltéve, hogy a pontos megoldás elég sima).

Megjegyzések:

1. A fenti 3-pontos séma általánosítható az általánosabb

$$\frac{d}{dx} \left(\sigma \cdot \frac{du}{dx} \right) = f,$$

problémára is, ami az 1D megfelelője a $\text{div}(\sigma \cdot \text{grad } u) = f$ elliptikus egyenletnek. A leginkább használatos séma:

$$\frac{1}{h^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{k-1} + \sigma_k}{2} u_{k-1} - \frac{\sigma_{k-1} + 2\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2} u_k + \frac{\sigma_k + \sigma_{k+1}}{2} u_{k+1} \right)$$

2. Ha pl. az x_0 pontban, Neumann-típusú peremfeltétel adott: $u'(x_0) = a$, akkor u első deriváltját kell közelíteni x_0 -ban. A naiv megoldás az egyszerű egyoldali séma alkalmazása:

$$u'(x_0) \approx \frac{u_1 - u_0}{h} = a$$

Ám ez a séma csak elsőrendű, ami a teljes $(0, A)$ intervallumon lecsökkenteti a pontosságot. Ennek egy lehetséges megkerülése, ha egy magasabb rendű sémát alkalmazunk az $u'(x_0)$ derivált közelítésére. Egy elegánsabb eljárás a következő. Fejtsük véges Taylor-sorba u' -t az $x_0 + \frac{h}{2}$ pont körül:

$$\begin{aligned} u'(x_0) &= u' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{2} u'' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) + \mathcal{O}(h^2) = \\ &= \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{1}{2} \cdot f \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

És mivel $f \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = f(x_0) + \mathcal{O}(h)$, azért:

$$u'(x_0) = \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h}{2} \cdot f(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

Így az x_0 -ban tett Neumann-peremfeltétel a következő *másodrendű* sémával közelíthető:

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = a + \frac{h}{2} \cdot f(x_0)$$

7.2.2 A véges differenciák módszere 2D elliptikus problémákra

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ egy téglalap $\Omega := (0, A) \times (0, B)$. Tekintsük az Ω -n kitűzött Poisson-egyenletet:

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}$$

melyet Dirichlet-peremfeltétellel látunk el:

$$u|_{\Gamma} = u_0$$

ahol Γ jelöli az Ω tartomány peremét, f pedig egy adott, az Ω tartományon értelmezett függvény.

Definiáljuk a számítási rácsot Ω lezárásán így:

$$(x_{k,j}, y_{k,j}) := (k \cdot h_x, j \cdot h_y) \quad (k = 0, 1, \dots, N; \quad j = 0, 1, \dots, M)$$

ahol h_x, h_y jelöli a rács lépésközeit: $h_x := \frac{A}{N}$, $h_y := \frac{B}{M}$. Az adott N, M számok azt jelzik, hogy hány (egyenlő hosszúságú) részre osztottuk az eredeti téglalap oldalait. Az $(x_{k,j}, y_{k,j})$ pontokat *rácspontoknak* nevezzük. A fenti rács egyenközű (ekvidisztáns). A h_x, h_y lépésközök nem feltétlen egyenlők. A rács egy részletét a 23. ábra szemlélteti.

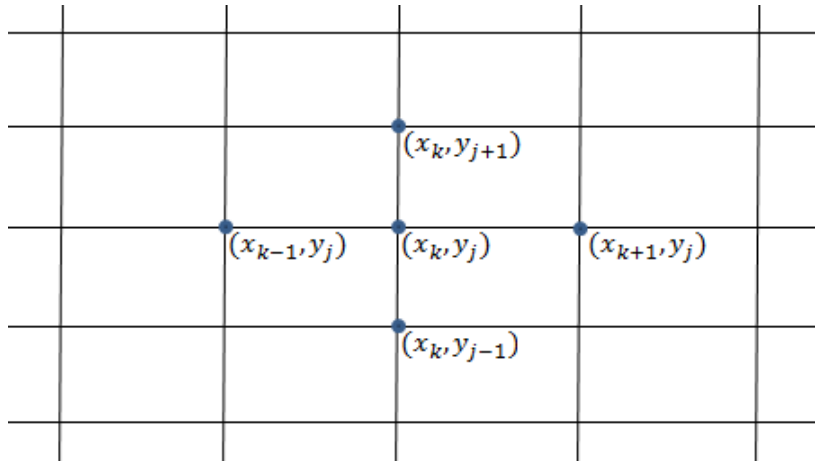


Figure 23: Egy 2D ekvidisztáns rács részlete.

A 2D differenciaséma egyszerűen származtatható az 1D sémákból, a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ és $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ parciális deriváltakat külön-külön közelítve. Ez a következő diszkrét egyenletrendszert adja:

$$\frac{u_{k-1,j} - 2u_{k,j} + u_{k+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{k,j-1} - 2u_{k,j} + u_{k,j+1}}{h_y^2} = f_{k,j} := f(x_k, y_j)$$

ahol $u_{k,j}$ jelöli a megoldás közelítő értékét az (x_k, y_j) rácspontban ($k = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$).

Megjegyzés:

- Ha a különböző irányú lépésközök egyenlők: $h_x = h_y =: h$, akkor a fenti 5-pontos séma még egyszerűbb alakot ölt:

$$\frac{u_N + u_W + u_S + u_E - 4u_C}{h^2} = f_C$$

ahol a C index egy centrálisnak tekintett rácspontra utal, melynek a fő égtájak szerinti szomszédjai az N, W, S és E indexekkel jelölt rácspontok.

Legyen u a probléma pontos megoldása. Az 1D esethez hasonlóan, vezessük be a lokális hibatagokat:

$$g_{k,j} := \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - f_{k,j},$$

és a globális hibatagokat is:

$$e_{k,j} := u(x_k, y_j) - u_{k,j}$$

Definíció szerint, a globális hibatagok most is kielégítik az alábbi egyenletrendszert:

$$\frac{e_{k-1,j} - 2e_{k,j} + e_{k+1,j}}{h_x^2} + \frac{e_{k,j-1} - 2e_{k,j} + e_{k,j+1}}{h_y^2} = g_{k,j},$$

és $e_{k,j} = 0$ az $x_{k,j}$ perem-rácspontokon (azaz, amikor $k = 0$ vagy $k = N$ vagy $j = 0$ vagy $j = M$).

Jelöljük A_{h_x, h_y} -nal a diszkrét Laplace-operátort, azaz azt az operátort amely minden, a perem-rácsponatokon eltűnő w rácsfüggvényekre a következő rácsfüggvényt rendeli:

$$(A_{h_x, h_y})_{k,j} = \frac{w_{k-1,j} - 2w_{k,j} + w_{k+1,j}}{h_x^2} + \frac{w_{k,j-1} - 2w_{k,j} + w_{k,j+1}}{h_y^2}$$

Tétel: Az A_{h_x, h_y} leképezés önadjungált és negatív definit. Az A_{h_x, h_y} leképezés sajátértékei $\lambda_{k,j}$, a hozzá tartozó sajátvektorok pedig az $s^{(k,j)}$ rácsfüggvények, ahol:

$$\lambda_{k,j} = -\frac{4}{h_x^2} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N} - \frac{4}{h_y^2} \cdot \sin^2 \frac{j\pi}{2M}, \quad s_{p,q}^{(k,j)} = \sin \frac{kp\pi}{N} \cdot \sin \frac{jq\pi}{M}$$

ahol $k, p = 1, \dots, N-1$ és $j, q = 1, \dots, M-1$.

Bizonyítás: Az A_{h_x, h_y} leképezés önadjungált (ellenőrizzük!). Csak azt kell igazolni, hogy $A_{h_x, h_y} s^{(k,j)} = \lambda_{k,j} \cdot s^{(k,j)}$. Definíció szerint:

$$\begin{aligned} & \left(A_{h_x, h_y} s^{(k,j)} \right)_{p,q} = \\ &= \frac{1}{h_x^2} \cdot \left(\sin \frac{k(p-1)\pi}{N} - 2 \sin \frac{kp\pi}{N} + \sin \frac{k(p+1)\pi}{N} \right) \cdot \sin \frac{jq\pi}{M} + \\ &+ \frac{1}{h_y^2} \cdot \left(\sin \frac{j(q-1)\pi}{M} - 2 \sin \frac{jq\pi}{M} + \sin \frac{j(q+1)\pi}{M} \right) \cdot \sin \frac{kp\pi}{N} \end{aligned}$$

Használva ugyanazokat a trigonometrikus azonosságokat, mint az 1D esetben, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} & \left(A_{h_x, h_y} s^{(k,j)} \right)_{p,q} = \\ &= -\sin \frac{kp\pi}{N} \cdot \frac{4}{h_x^2} \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N} \cdot \sin \frac{jq\pi}{M} - \sin \frac{jq\pi}{M} \cdot \frac{4}{h_y^2} \cdot \sin^2 \frac{j\pi}{2M} \cdot \sin \frac{kp\pi}{N} = \\ &= -\sin \frac{kp\pi}{N} \sin \frac{jq\pi}{M} \cdot \left(\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{j\pi}{2M} \right) \end{aligned}$$

amivel a bizonyítás kész. \square

Következmény:

$$\begin{aligned} \|A_{h_x, h_y}^{-1}\| &= \frac{1}{|\lambda|_{\min}} = \frac{1}{|\lambda_{1,1}|} = \frac{1}{\frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N} + \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi}{2M}} \sim \\ &\sim \frac{1}{\frac{4}{h_x^2} \cdot \frac{\pi^2}{4N^2} + \frac{4}{h_y^2} \cdot \frac{\pi^2}{4M^2}} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

h_x -től és h_y -től függetlenül (\sim ismét az aszimptotikus egyenlőséget jelenti, midőn $N, M \rightarrow \infty$, azaz $h_x, h_y \rightarrow 0$).

Ez a 2D séma stabilitása. Az egydimenziós esethez hasonlóan, ebből következik, hogy a

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot \|g\|_{RMS}$$

becslés a kétdimenziós esetben is érvényes marad. A lokális hibatagok az x_k ill. y_j körüli Taylor-sorfejtések alapján könnyen becsülhetők. Felhasználva az egydimenziós eredményeket, azt kapjuk, hogy:

$$u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, y_j) \cdot h_x^2 + \mathcal{O}(h_x^4),$$

és

$$u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_k, y_j) \cdot h_y^2 + \mathcal{O}(h_y^4),$$

ahonnan

$$\begin{aligned} g_{k,j} &= \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \\ &+ \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - f_{k,j} = \\ &= \frac{u(x_{k-1}, y_j) - 2u(x_k, y_j) + u(x_{k+1}, y_j)}{h_x^2} + \\ &+ \frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1})}{h_y^2} - \Delta u(x_k, y_j) = \\ &= \mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2) \end{aligned}$$

Következésképp:

$$|g_{k,j}| \leq C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2)$$

alkalmas, h_x -től és h_y -től valamint k, j -től független C_0 konstans mellett. Ezért:

$$\|g\|_{RMS} \leq C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2),$$

és hasonló becslés igaz a globális hibára is:

$$\|e\|_{RMS} \leq C \cdot C_0 \cdot (h_x^2 + h_y^2)$$

A fenti eredményeket az alábbi tételben foglaljuk össze:

Tétel: A fentebb definiált, a centrális sémára alapozott véges differencia módszer másodrendű pontosságú, azaz a globális hiba $\mathcal{O}(h^2)$ nagyságrendű (a négyzetes középhiba értelmében, feltéve, hogy a pontos megoldás elég sima).

Megjegyzés:

- Tegyük fel, hogy a perem egy részén, pl. a keleti oldala mentén Neumann-peremfeltétel adott (24. ábra):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = a$$

Itt $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$, úgyhogy u első deriváltját kell közelíteni az (x_k, y_j)

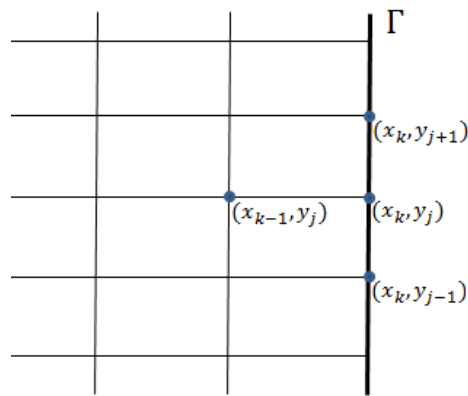


Figure 24: Egy 2D ekvidisztáns rács egy részlete, Neumann-peremfeltétel adott a keleti oldal mentén.

pontban. A naiv megoldás egy egyoldalú séma alkalmazása:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_k, y_j) \approx \frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{h_x}$$

Ámde ez a séma csak elsőrendű, ami lecsökkenti a pontosságot az egész Ω tartományon. Ennek egy lehetséges megkerülése, ha egy magasabb rendű sémát alkalmazunk az $\frac{\partial u}{\partial n}(x_k, y_j)$ derivált közelítésére. Egy elegánsabb eljárás a következő. Fejtsük Taylor-sorba u -t az (x_k, y_j) pont körül:

$$u(x_{k-1}, y_j) = u(x_k, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_k, y_j) \cdot h_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, y_j) \cdot h_x^2 + \mathcal{O}(h_x^3)$$

Ámde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, y_j) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_k, y_j) + f(x_k, y_j),$$

és u -nak y szerinti másodrendű parciális deriváltját közelítsük 3-pontos centrális sémával, mely $\mathcal{O}(h_y^2)$ pontosságú. Azt kaptuk, hogy:

$$\begin{aligned} u(x_{k-1}, y_j) &= u(x_k, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_k, y_j) \cdot h_x + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{u(x_k, y_{j-1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j+1}))}{h_y^2} + f(x_k, y_j) + \mathcal{O}(h_y^2) \right) \cdot h_x^2 + \\ &\quad + \mathcal{O}(h_x^3), \end{aligned}$$

ahonnan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_k, y_j) &= \frac{u(x_k, y_j) - u(x_{k-1}, y_j)}{h_x} - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{u(x_k, y_{j+1}) - 2u(x_k, y_j) + u(x_k, y_{j-1}))}{h_y^2} \cdot h_x + \frac{1}{2} \cdot f(x_k, y_j) \cdot h_x + \\ &\quad + \mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2) \end{aligned}$$

Így a következő, *másodrendű* sémát kaptuk a Neumann-peremen:

$$\frac{u_{k,j} - u_{k-1,j}}{h_x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{k,j+1} - 2u_{k,j} + u_{k,j-1}}{h_y^2} \cdot h_x + \frac{1}{2} \cdot f_{k,j} \cdot h_x = a_{k,j}$$

Végül megjegyezzük, hogy a véges differencia módszer nem téglalap alakú tartományokon is működik (jóllehet, a hibaanalízis sokkal bonyolultabb lehet). Ez esetben minden rácsponthoz meg kell állapítani, hogy az most belső pont, perempont vagy külső pont. A belső rácspontokra differenciasémát írunk fel, míg a perem-rácspontokban a peremfeltétel közelítése szükséges. Ez végül is egy nagyméretű lineáris egyenletrendszerre vezet, de ennek mátrixa ritka mátrix, ami lehetővé teszi a valóban hatékony megoldási technikákat (pl. a Krylov-alterek módszerét). Megjegyezzük mindamellett, hogy a perem közelítése durva, ami a pontosságot csökkenti. Egy lehetséges kompromisszum az lehet, ha olyan pontokat definiálunk, melyek *pontosan* illeszkednek a peremre, és a peremközeli rácspontokban külön definiálunk nemekvidisztáns sémákat. Meg kell azt is jegyezni, hogy a véges differenciás rácstruktúra általában nem követi a megoldás jellemző tulajdonságait: sok esetben a megoldás sokkal simább a tartomány középső részén, mint a perem közelében, úgyhogy ott durvább rács is elegendő lenne, ami jelentős számítási költség megtakarítást eredményezhetne. A fenti hátrányok és nehézségek rávilágítanak a klasszikus véges differencia módszer alkalmazhatóságának határait. Ezen hátrányok részben kiküszöbölhetők nemegyenletes rácscok és speciális megoldó technikák alkalmazásával, de ezek már messze túlmutatnak a jegyzet keretein.

7.3 Az alapmegoldások módszere

Az alapmegoldások módszere (Method of Fundamental Solutions, MFS) viszonylag új technika bizonyos *homogén* elliptikus parciális differenciálegyenletekre. Bizonyos szempontból a perem-integrálegyenlet módszer egyszerűsített változatának is tekinthető. Előre megjegyezzük, hogy a módszer *hálónélküli* (meshless) módszer, azaz a véges differencia és a véges elem módszerekkel ellentétben az alapmegoldások módszere nem igényli semmiféle speciális struktúra kialakítását sem a tartomány belsejében, sem annak peremén: ilyen szempontból a perem-integrálegyenlet módszernél is előnyösebb, mert ott a peremen szükséges valamiféle elemstruktúrát definiálni, bár a tartományban nem. Mindössze bizonyos véges ponthalmazok definiálása szükséges, ám mindenféle rács- vagy elemstruktúra nélkül.

Modellfeladatként tekintsük a 2D Laplace-egyenletet:

$$\Delta u = 0$$

egy korlátos Ω tartományban kitűzve. A differenciálegyenletet lássuk el

kevert peremfeltétellel:

$$u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

ahol Γ_D és Γ_N az eredeti tartomány Γ peremének egy diszjunkt felbontását adják.

Az alapmegoldások módszere a közelítő megoldást az alábbi formában szolgáltatja:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ egyelőre ismeretlen együtthatók, Φ pedig a 2D Laplace-operátor egy *alapmegoldása* (konstans szorzótól eltekintve):

$$\Phi(x) := \log \|x\|$$

Az $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ előre definiált külső pontok (*forráspontok*), N pedig adott egész.

A módszer azon alapul, hogy a Φ függvény harmonikus (az origó kivételével):

$$\Delta \Phi(x) = 0 \quad (x \neq \mathbf{0})$$

Valóban, egyszerű vektoranalízisbeli számolások mutatják, hogy ha $x \neq \mathbf{0}$, akkor:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(x) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} \log \|x\|^2 \right) = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\|x\|^2} \cdot x \right) = \\ &= \left\langle \operatorname{grad} \frac{1}{\|x\|^2}, x \right\rangle + \frac{1}{\|x\|^2} \cdot (\operatorname{div} x) = \\ &= \left\langle -\frac{2x}{\|x\|^4}, x \right\rangle + \frac{2}{\|x\|^2} = 0. \end{aligned}$$

Az origó nyilván szinguláris pontja a Φ függvénynek.

Megjegyzés: Alapmegoldásnak olyan függvényt nevezünk általában, amelyre a szóbanforgó lineáris differenciáloperátort (jelen esetben a Laplace-operátort) alkalmazva (disztribúció-értelemben) az origóra koncentrált Dirac-disztribúciót kapjuk. A Laplace-operátor alapmegoldása tehát az origó kivételével mindenütt harmonikus, de az origóban szingularitása van: az egész síkon harmonikus függvények nem alapmegoldások.

Következésképp, az

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j),$$

formulával definiált függvény az Ω tartomány minden pontjában kielégíti a Laplace-egyenletet. Az $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ együttthatók azáltal határozhatók meg, hogy a peremfeltételeket kikényszerítjük bizonyos, szintén előre definiált $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Gamma$ perem-kollokációs pontokban (25. ábra).

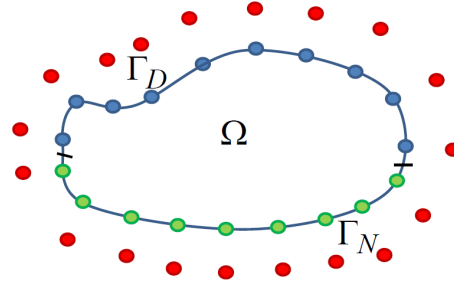


Figure 25: Forráspontok és perem-kollokációs pontok.

Innen az együttthatókra a következő lineáris egyenletrendszerre kapjuk:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - \tilde{x}_j) = u_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_D$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - \tilde{x}_j) = v_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_N$$

ahol n_k jelöli a kifelé mutató normális irányú egységvektort az x_k perem-kollokációs pontban. A Φ függvény normális irányú deriváltja könnyen számítható:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x) = \frac{\langle x, n_k \rangle}{\|x\|^2}$$

A módszer alapalgorithmusa tehát rendkívül egyszerű:

- Definiáljuk az $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ külső forráspontokat.
- Definiáljuk az x_1, x_2, \dots, x_N perem-kollokációs pontokat.

- Állítsuk össze és oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - \tilde{x}_j) = u_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_D$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial \Phi}{\partial n_k}(x_k - \tilde{x}_j) = v_0(x_k) \quad \text{ha } x_k \in \Gamma_N$$

- A közelítő megoldás ezek után:

$$u(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \Phi(x - \tilde{x}_j)$$

Az algoritmus rendkívül egyszerűen programozható. Mindazonáltal a kapott egyenletrendszer mátrixa általában nonszimmetrikus és teljesen kitöltött mátrix, és sokszor rendkívül rosszul kondicionált. Minél nagyobb távolságra vannak a forráspontok a peremtől, annál nagyobb lesz a kondíciószám. Megjegyezzük, hogy a forráspontok megfelelő elhelyezése távolról sem magától értetődő: nincs "optimális" elhelyezkedésűnek tekinthető forráspont-együttes.

Megjegyzés:

- A forráspontok és a perem-kollokációs pontos száma nem kell, hogy megegyezzenek. Ha ezek különböznek, akkor a kapott lineáris egyenletrendszernek nem négyzetes a mátrixa. Ez esetben legkisebb négyzetes megoldást lehet keresni vagy szinguláris értékek szerinti felbontást (Singular Value Decomposition, SVD) alkalmazni.

A módszer Poisson-egyenlet esetére is általánosítható, egy radiális bázisfüggvényeken (RBF) alapuló szórt pontú interpolációs technikát alkalmazva. Tekintsük az alábbi Poisson-egyenletet:

$$\Delta u = f$$

az Ω tartományban kitűzve, és kevert peremfeltétellel ellátva:

$$u|_{\Gamma_D} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0$$

A megoldás egy *partikuláris megoldás* és egy *homogén megoldás* összegeként kereshető:

$$u = u_P + u_H,$$

ahol az u_P függvény kielégíti a

$$\Delta u_P = f$$

Poisson-egyenletet *mindenféle peremfeltétel megkövetelése nélkül*. Ha már egy u_P partikuláris megoldást megtaláltunk, a homogén megoldás a

$$\Delta u_H = 0$$

Laplace-egyenlet megoldásával állítható elő, melyet az alábbi módosított peremfeltétellel látunk el:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$

Nyilvánvaló, hogy az $u = u_P + u_H$ formulával definiált u függvény már kielégíti a Poisson-egyenletet és az eredeti peremfeltételeket is. Ezt a technikát *a partikuláris megoldások módszerének* nevezik.

A homogén egyenlet az alapmegoldások módszerével oldható meg, úgy-hogy az egyetlen fennmaradó kérdés az, hogy hogyan tudunk előállítani egy partikuláris megoldást.

Definiáljunk most az Ω tartomány *belsejében* további $w_1, w_2, \dots, w_M \in \Omega$ pontokat (rács- vagy elemstruktúra nem szükséges). Legyen Ψ egy radiális bázisfüggvény, és közelítsük az f függvényt egy, a Ψ függvényre mint radiális bázisfüggvényre alapozott szórt pontú interpolációval (pl. multikvadrikus módszerrel, vékony lemez módszerrel stb.). Emlékeztetünk rá, hogy az interpolációs függvény az alábbi alakba írható:

$$f(x) = \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Psi(x - w_j),$$

ahol a β_1, \dots, β_M együtthatók az interpolációs feltételekből számíthatók:

$$\sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Psi(w_k - w_j) = f(w_k) \quad (k = 1, \dots, M)$$

A módszer fő gondolata ezekután az, hogy találjunk egy *másik*, Θ *radiális bázisfüggvényt*, melyre

$$\Delta \Theta = \Psi$$

teljesül. Ha Θ egy ilyen radiális bázisfüggvény, akkor az

$$u_P(x) := \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Theta(x - w_j)$$

formulával definiált függvény egy (közelítő) partikuláris megoldás, mivel a belső interpolációs pontokban

$$\begin{aligned} \Delta u_P(w_k) &= \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Delta \Theta(w_k - w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Psi(w_k - w_j) = f(w_k) \quad (k = 1, \dots, M) \end{aligned}$$

teljesül.

A teljes algoritmus tehát a következőképp foglalható össze:

- Definiáljunk w_1, w_2, \dots, w_M interpolációs pontokat az Ω tartomány belsejében.
- Válasszunk egy Ψ radiális bázisfüggvényt, és hajtsunk végre egy interpolációt a Ψ radiális bázisfüggvényel, a w_1, w_2, \dots, w_M interpolációs pontokra és az $f(w_1), f(w_2), \dots, f(w_M)$ értékekre támaszkodva. Számítsuk ki az interpoláció $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M$ együtthatóit az interpolációs egyenletrendszer megoldásával.
- A most kiszámított β_j együtthatókkal definiáljuk az

$$u_P(x) := \sum_{j=1}^M \beta_j \cdot \Theta(x - w_j)$$

partikuláris megoldást, ahol a Θ radiális bázisfüggvényre teljesül, hogy $\Delta \Theta = \Psi$.

- Az alapmegoldások módszerével oldjuk meg a

$$\Delta u_H = 0$$

Dirichlet-feladatot, melyet az alábbi, módosított peremfeltétellel látunk el:

$$u_H|_{\Gamma_D} = u_0 - u_P|_{\Gamma_D}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial n}|_{\Gamma_N} = v_0 - \frac{\partial u_P}{\partial n}|_{\Gamma_N}$$

- Az eredeti kevert probléma (közelítő) megoldása az alábbi alakban írható fel:

$$u = u_H + u_P$$

Most már az egyetlen probléma, hogy adott Ψ radiális bázisfüggvény esetén hogyan határozható meg a megfelelő Θ radiális bázisfüggvény. Itt három konkrét választást mutatunk. Az egyszerűség kedvéért polárkoordinátákat használunk. Az alábbi formulák kézenfekvő, bár olykor hosszabb számításokkal ellenőrizhetők. A részleteket az Olvasóra bízunk.

1. Legyen Ψ a következő:

$$\Psi(r) := 1 + r$$

Akkor:

$$\Theta(r) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{9}r^3$$

2. (Vékony lemez spline.) Legyen Ψ a következő:

$$\Psi(r) := r^2 \cdot \log r$$

Akkor:

$$\Theta(r) = \frac{1}{16}r^4 \log r - \frac{1}{32}r^4$$

3. (Multikvadrikus függvény.) Legyen Ψ a következő:

$$\Psi(r) := \sqrt{r^2 + c^2}$$

Akkor

$$\Theta(r) = \frac{1}{9} \cdot (4c^2 + r^2) \cdot \sqrt{r^2 + c^2} - \frac{c^3}{3} \cdot \log \left(c + \sqrt{r^2 + c^2} \right)$$