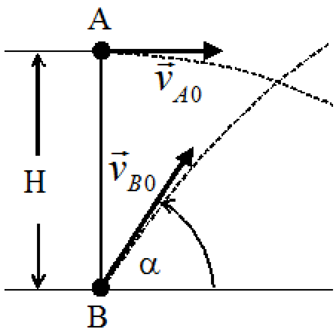
HOCHSCHULE HANNOVER	Name..
Fakultät II Abt. M SS 2017	Matrikelnummer..
Grünemaier, Götschel, Harja, Mafi, Schrewe	**Experimentalphysik 1**...............Übungsaufgaben

1. **Kinematik:** Ein Flugzeug besitzt eine Geschwindigkeit von $v = 280\,m\,s^{-1}$. Die Flugbahn ist nach unten gerichtet, d. h. der Winkel zwischen der Flugbahn und der Horizontalen ist negativ. In einer Höhe von 2150 m wirft der Pilot ein Hilfspaket ab. Die geradlinige Entfernung zwischen dem Abwurfpunkt und dem Aufprallpunkt beträgt 3250 m.
Bestimmen Sie den Abwurfwinkel.
Hinweis: Es gilt $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$



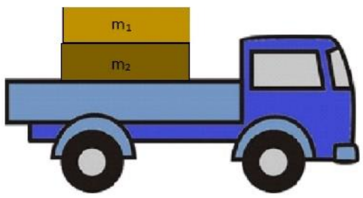
2. **Kinematik:** Ein Ball **A** besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit von $15 ms^{-1}$ in der Höhe $H = 25m$ und befindet sich lotrecht über dem Abschusspunkt eines zweiten Balls **B** (siehe Skizze). Dieser wird zum Zeitpunkt $t = 0$ unter dem Winkel $\alpha = 60°$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_{B0}$ abgeschossen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

a. Wie lauten die Bewegungsgleichungen der beiden Bälle **A** und **B** unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen?

b. Welche Anfangsgeschwindigkeit $v_{B0} = |\vec{v}_{B0}|$ muss der Ball **B** haben, um den Ball **A** zu treffen?

c. Zu welchem Zeitpunkt t_{treff} und an welchem Ort (x_{treff}, z_{treff}) treffen sich die Bälle?

d. Hat der Ball **B** beim Treffpunkt seine maximale Höhe schon erreicht? (mit Begründung!). Skizzieren Sie maßstäblich die Bahnkurven der beiden Bälle.

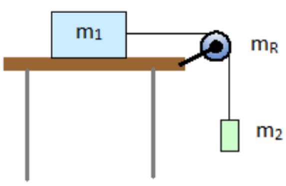


3. **Dynamik:** Auf der Ladefläche eines LKW stehen zwei Kisten mit den Massen $m_1 = 100\,kg$ und $m_2 = 200\,kg$ ohne Ladungssicherung übereinander. Die Reibungszahlen für die Kontaktflächen zwischen den beiden Kisten betragen $\mu_H = 0,3$ und $\mu_G = 0,2$. Die Reibungszahlen zwischen der unteren Kiste und der LKW-Pritsche sind $\mu_H = 0,3$ und $\mu_G = 0,25$. Der LKW fährt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit.

a. Berechnen Sie die Beschleunigungen der Massen m_1 und m_2 relativ zur Ladefläche des LKW, wenn dieser mit konstanter Beschleunigung $a_B = -2\,m\,s^{-2}$ bremst.

b. Berechnen Sie die Beschleunigungen der Massen m_1 und m_2 relativ zur Ladefläche des LKW, wenn dieser mit der Beschleunigung $a_B = -3,2\,m\,s^{-2}$ bremst.

c. Berechnen Sie die Beschleunigungen der Massen m_1 und m_2 $m_3$relativ zur Ladefläche des LKW, wenn dieser mit der Beschleunigung $a_B = -3,6\,m\,s^{-2}$ bremst.



4. **Dynamik:** Auf einem Tisch liegt ein Quader mit der Masse m_1 die über ein Seil mit der Zugmasse $m_2 = 2\,kg$ verbunden ist. Das Seil läuft über eine Umlenkrolle (homogener Vollzylinder) mit der Masse $m_R = 1\,kg$. Die Reibungszahlen für die Kontaktfläche zwischen Quader und Tisch betragen $\mu_H = 0,4$ und $\mu_G = 0,3$.

a. Welchen Wert darf die Masse m_1 nicht überschreiten, damit sie durch die Zugmasse m_2 beschleunigt werden kann?
b. Welchen Wert muss die Masse m_1 besitzen, um von der Zugmasse mit $a = 2\,ms^{-2}$ beschleunigt zu werden?

5. **Erhaltungssätze:** Eine Walze (Vollzylinder mit Radius $r = 5\,cm$) rollt schlupffrei auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel $\alpha = 10°$) eine Strecke $s = 2\,m$ herunter (Rollreibungszahl $\mu_{RR} = 0,05$) Welche Drehzahl hat die Walze am Ende der Strecke s und welche Zeit benötigt sie für das Herunterrollen?

6. **Erhaltungssätze:** Eine Lok ($m_L = 10\,t$), die sich mit einer Geschwindigkeit von $2ms^{-1}$ bewegt, stößt auf einen Waggon ($m_W = 40\,t$) und kuppelt automatisch an.
a. Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Lok und Waggon nach dem Ankuppeln.
b. Berechnen Sie die im Mittel während des Kuppelungsvorgangs in der Kupplung wirkende Kraft, wenn der Kupplungsvorgang eine Zeit von 0,5 s gedauert hat.

7. **Erhaltungssätze:** Ein Körper der Masse $m = 10\,kg$ gleitet aus der Ruhelage heraus eine unter 45° gegen die Waagerechte geneigte schiefe Ebene herab und trifft nach dem Weg $l = 1m$ auf eine ungespannte Schraubenfeder (Federkonstante $D = 50\,N\,cm^{-1}$), die er um den Weg Δs zusammendrückt. Die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,3$.
a. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf die Feder?
b. Wie groß ist der Federwegbei Berücksichtigung von Reibungsarbeit und Lageenergie?

8. **Drehimpuls:** Ein Vollzylinder ($m_V = 840\,kg$, $r_V = 1{,}5m$) rotiert reibungsfrei um die vertikale Achse durch den Mittelpunkt. Seine Winkelgeschwindigkeit beträgt $\omega_0 = 7\,s^{-1}$. Ein Albatros ($m_a = 12\,kg$, als Massenpunkt zu behandeln) landet von oben kommend auf dem Zylinder im Abstand $s = 70\,cm$ vom Mittelpunkt (Zustand **A**). Nach kurzer Rast trippelt der Vogel zum Rand des Zylinders und verharrt dort erneut bewegungslos (Zustand **B**).
a. Welche Winkelgeschwindigkeit hat der Zylinder in Zustand A und in Zustand **B**?
b. Welche Rotationsenergie hat der Zylinder in Zustand A und in Zustand **B**?
c. Nun wirkt tangential eine äußere Kraft F ein. Wie lange dauert es, bis das System (Zustand **B**) zum Stillstand kommt?

Lösungen:

1. Annahme: Das Hilfspaket löst sich vom Flugzeug mit der Relativgeschwindigkeit Null. Es besitzt also denselben Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{H0}$, wie das Flugzeug $\vec{v}_{F0}$.

Zum Zeitpunkt $t=0$ (Abwurf) gilt: $v_{H0} = |\vec{v}_{H0}| = |\vec{v}_{F0}| = 280\,ms^{-1}$ (1)

x-Komponente für $t=0$: $v_{H,x0} = v_{H0} \cdot \cos(\alpha_0)$ (2)

x-Komponente als Fkt. von *t*: $v_{H,x}(t) = v_{H,x0}$ (3)

Weg in x-Richtung als Fkt. von t: $s_{H,x}(t) = v_{H,x0} \cdot t$ (4)

z-Komponente für $: t=0$ $v_{H,z0} = v_{H0} \cdot \sin(\alpha_0)$ (5)

z-Komponente als Fkt. von *t*: $v_{H,z}(t) = -v_{H,z0} - g \cdot t$ mit $v_{H,z0} = |\vec{v}_{H,z0}| > 0$ (6)

Weg in –z Richtung als Fkt. von t: $s_{H,z}(t) = -v_{H,z0} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $v_{H,z0} = |\vec{v}_{H,z0}| > 0$ (7)

α_0 bezeichnet den Winkel zwischen der Waagerechten und dem nach unten gerichteten Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{H0}$ des Hilfspakts im Abwurfpunkt.

Die senkrechte Fallstrecke $s_{H,z\max} = -2150\,m$ wird in der Zeit $t = t_1$ zurückgelegt.

Die geradlinige Entfernung von Abwurfpunkt zum Aufprallpunkt beträgt: $s_H(t_1) = 3250\,m$.

Für $\left(s_H(t_1)\right)^2$ gilt: $\left(s_H(t_1)\right)^2 = s^2_{H,x\max} + s^2_{H,z\max}$ (8)

Einsetzen: $\left(s_H(t_1)\right)^2 = v^2_{H0} \cdot \cos^2(\alpha_0) \cdot t_1^2 + s^2_{H,z\max}$ (9)

$$t_1^2 = \frac{\left(s_H(t_1)\right)^2 - \left(s_{H,z\max}\right)^2}{v^2_{H0}} \frac{1}{\cos^2(\alpha_0)} \quad (10)$$

Zur Erleichterung der Übersichtlichkeit werden Zahlenwert eingesetzt:

Es folgt: $t_1^2 = \frac{75,7653\,s^2}{\cos^2(\alpha_0)} = 75,7653\,s^2\left(1 + \tan^2(\alpha_0)\right)$ (11

und $t_1 = \frac{8,7043\,s}{\cos(\alpha_0)}$ (12)

Für die z-Komponente gilt: $s_{H,z\max} = s_{H,z}(t_1) = -v_{H,z0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$ (13)

$$s_{H,z\max} = -v_{H0} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \quad (14)$$

Es folgt: $-2150\,m = -2437,21\,m \cdot \tan(\alpha_0) - 378,83\,m \cdot \left(1 + \tan^2(\alpha_0)\right)$ (15)

$$378,83\,m \cdot \tan^2(\alpha_0) + 2437,21\,m \cdot \tan(\alpha_0) = 1771,17\,m \quad (16)$$

$$\tan^2(\alpha_0) + 6,4335 \cdot \tan(\alpha_0) = 4,6754 \quad (17)$$

$$\tan(\alpha_0) = -3,2168 \pm \sqrt{15,0229} \quad (18)$$

Erste Lösung: $\left(\tan(\alpha_0)\right)_- = -7,0927$ mit $\alpha_0 = -81,2°$ scheidet aus, da der Winkel nach oben gerichtet ist.

Zweite Lösung: $\left(\tan(\alpha_0)\right)_+ = +0,6591$ und $\alpha_0 = +33,4°$ nach unten.

Ergebnis: $\alpha_0 = 33,4°$

2a. x-Komponente von Ball **A**: $s_{xA}(t) = v_{A0} \cdot t = 15\,ms^{-1} \cdot t$ (1)

z-Komponente von Ball **A**: $s_{zA}(t) = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 25\,m - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (2)

x-Komponente von Ball **B**: $s_{xB}(t) = v_{B0x} \cdot t = v_{B0} \cdot \cos(60°) \cdot t$ (3)

z-Komponente von Ball **B**: $s_{zB}(t) = v_{B0z} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_{B0} \cdot \sin(60°) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (4)

b. Die beiden Bälle treffen sich zum Zeitpunkt $t = t_1$.

Für die x-Komponenten gilt: $s_{xA}(t_1) = s_{xB}(t_1)$ (5)

$v_{A0} \cdot t_1 = v_{B0} \cdot \cos(60°) \cdot t_1$ (6)

Es folgt: $v_{A0} = v_{B0} \cdot \cos(60°)$ (7)

Ergebnis: $v_{B0} = \frac{v_{A0}}{\cos(60°)} = \frac{15\,ms^{-1}}{0{,}5} = 30\,ms^{-1}$ (8)

c. Für die z-Komponenten gilt: $s_{zA}(t_1) = s_{zB}(t_1)$ (9)

$H - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 = v_{B0} \cdot \sin(60°) \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot t_1^2$ (10)

Aus Gl. (10) folgt: $H = v_{B0} \cdot \sin(60°) \cdot t_1$ (11)

$t_1 = \frac{H}{v_{B0} \cdot \sin(60°)} = \frac{25\,m}{30\,ms^{-1} \cdot 0{,}8660} = 0{,}96228\,s$ (12)

Zeitpunkt des Treffens: $t_{treff} = t_1 = 0{,}96228\,s$ (13)

x-Komponente: $s_{xA}(t_{treff}) = v_{A0} \cdot t_{treff} = 15\,ms^{-1} \cdot 0{,}96228\,s = 14{,}43\,m$ (14)

Kontrolle: $s_{xB}(t_{treff}) = v_{B0} \cdot \cos(60°) \cdot t_{treff}$ (15)

$s_{xB}(t_{treff}) = 30\,ms^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}96228\,s = 14{,}43\,m$ (16)

z-Komponente: $s_{zA}(t_{treff}) = H - \frac{1}{2} g \cdot t_{treff}^2$ (17)

$s_{zA}(t_{treff}) = 25\,m - \frac{1}{2} 10\,ms^{-2} \cdot 0{,}96228^2\,s^2 = 20{,}37\,m$ (18)

Kontrolle: $s_{zB}(t_{treff}) = v_{B0} \cdot \sin(60°) \cdot t_{treff} - \frac{1}{2} g \cdot t_{treff}^2$ (19)

$s_{zB}(t_{treff}) = 30\,ms^{-1} \cdot 0{,}8660 \cdot 0{,}96228\,s - \frac{1}{2} \cdot 10\,ms^{-2} \cdot 0{,}96228^2\,s^2$ (20)

$s_{zB}(t_{treff}) = 20{,}37\,m$ (21)

d. Am höchsten Punkt der Bahnkurve des Balls B ist die Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung gleich Null.

$v_{zB}(t_{BH\max}) = 0 = v_{B0z} - g \cdot t_{BH\max}$ (22)

Zeit zum Erreichen des Maximums: $t_{BH\max} = \frac{v_{B0z}}{g} = \frac{30\,ms^{-2} \cdot \sin(60°)}{10\,ms^{-2}} = 2{,}59\,s$ (23)

Da $t_{BH\,\max} = 2{,}59\,s > 0{,}96\,s = t_{treff}$ wird das Maximum der Bahnkurve erst später erreicht.

3. Reibungskräfte:

Max. Haftreibungskraft zwischen m_1 und m_2:

$$F_{H,\max}(1,2) = \mu_H \cdot F_n = \mu_H \cdot m_1 \cdot g = 0{,}3 \cdot 100\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 300\,N \qquad (1)$$

Gleitreibungskraft zwischen m_1 und m_2:

$$F_G(1,2) = \mu_G \cdot F_n = \mu_G \cdot m_1 \cdot g = 0{,}2 \cdot 100\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 200\,N \qquad (2)$$

Max. Haftreibungskraft zwischen m_2 und der LKW-Pritsche:

$$F_{H,\max}(2,LKW) = \mu_H \cdot F_n = \mu_H \cdot (m_1 + m_2) \cdot g = 0{,}3 \cdot 300\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 900\,N \qquad (3)$$

Gleitreibungskraft zwischen m_2 und der LKW-Pritsche:

$$F_G(2,LKW) = \mu_G \cdot F_n = \mu_G \cdot (m_1 + m_2) \cdot g = 0{,}25 \cdot 300\,kg \cdot 10\,m\,s^{-2} = 750\,N \qquad (4)$$

a. Der LKW bremst mit $a_B = -2\,m\,s^{-2}$:

Auf die Masse $m_1 = 100\,kg$ wirkt die Trägheitskraft:

$$F_{Tr}(1) = -m_1 \cdot a_B = 200\,N \qquad (5)$$

Da $$200\,N = F_{Tr}(1) < F_{H,\max}(1,2) = 300\,N \qquad (6)$$

bleibt m_1 in Haftung mit m_2.

Auf die zusammen haftenden Massen $m_1 + m_2 = 300\,kg$ wirkt die Trägheitskraft:

$$F_{Tr}(1,2) = -(m_1 + m_2) \cdot a_B = 600\,N \qquad (7)$$

Da $$600\,N = F_{Tr}(1,2) < F_{H,\max}(2,LKW) = 900\,N \qquad (8)$$

bleibt $m_1 + m_2$ in Haftung mit der Pritsche des LKW.

Beschleunigungen der Massen m_1 und m_2 relativ zum LKW:

Ergebnis: $$a_{1,a.} = 0 \qquad (9)$$

$$a_{2,a.} = 0 \qquad (10)$$

Keine der Kisten verrutscht.

b. Der LKW bremst mit $a_B = -3{,}2\,m\,s^{-2}$:

Auf die Masse $m_1 = 100\,kg$ wirkt die Trägheitskraft:

$$F_{Tr}(1) = -m_1 \cdot a_B = 320\,N \qquad (11)$$

Da $$320\,N = F_{Tr}(1) > F_{H,\max}(1,2) = 300\,N \qquad (12)$$

bleiben m_1 und m_2 **<u>nicht mehr in Haftung</u>**.

Folge: m_1 gleitet relativ zu m_2 in Richtung des LKW Fahrerhauses (also nach rechts).

Es gilt: $$a_{1,b.} = \frac{F_{Tr}(1) - F_G(1,2)}{m_1} = \frac{320 - 200\,N}{100\,kg} = 1{,}2\,ms^{-2} \qquad (13)$$

Hinweis: $F_{Tr}(1)$ *zeigt nach rechts, die Gleitreibungskraft* $F_G(1,2)$ *nach links.*

Auf die Masse $m_2 = 200\,kg$ wirkt einerseits die Trägheitskraft und zusätzlich die <u>Gegenkraft</u> der auf m_1 wirkenden Gleitreibungskraft:

$$F_{Tr}(2) = -m_2 \cdot a_B = 200\,kg \cdot 3{,}2\,ms^{-2} = 640\,N \qquad (14)$$

$$F_{Tr}(2)+F_G(1,2)=-m_2\cdot a_B+F_G(1,2)=640\,N+200\,N=840\,N \quad (15)$$

Da $$840\,N=\left[F_{Tr}(2)+F_G(1,2)\right]<F_{H,\max}(2,LKW)=900\,N \quad (16)$$

bleibt m_2 in Haftung mit der Pritsche des LKW.

Hinweis: $F_{Tr}(2)$ *zeigt nach rechts, die Gegenkraft zur Gleitreibungskraft* $F_G(1,2)$ *zeigt ebenfalls nach rechts.*

Ergebnis: $$a_{1,b.}=1,2\,m\,s^{-2} \quad (17)$$

$$a_{2,b.}=0 \quad (18)$$

Es verrutscht also nur die oberste Kiste m_1.

c. **Der LKW bremst mit $a_B=-3,6\,m\,s^{-2}$:**

Auf die Masse $m_1=100\,kg$ wirkt die Trägheitskraft:

$$F_{Tr}(1)=-m_1\cdot a_B=360\,N \quad (19)$$

Da $$360\,N=F_{Tr}(1)>F_{H,\max}(1,2)=300\,N \quad (20)$$

bleiben m_1 und m_2 **nicht mehr in Haftung**.

Folge: m_1 gleitet relativ zu m_2.

Es gilt: $$a_{1,c.}=\frac{F_{Tr}(1)-F_G(1,2)}{m_1}=\frac{360\,N-200\,N}{100\,kg}=1,6\,ms^{-2} \quad (21)$$

Hinweis: $F_{Tr}(1)$ *zeigt nach rechts, die Gleitreibungskraft* $F_G(1,2)$ *nach links.*

Auf die Masse $m_2=200\,kg$ wirkt einerseits die Trägheitskraft

$$F_{Tr}(2)=-m_2\cdot a_B=200\,kg\cdot 3,6\,ms^{-2}=720\,N \quad (22)$$

und zusätzlich die Gegenkraft der auf m_1 wirkenden Gleitreibungskraft:

$$F_{Tr}(2)+F_G(1,2)=-m_2\cdot a_B+F_G(1,2)=720\,N+200\,N=920\,N \quad (23)$$

Da $$920\,N=\left[F_{Tr}(2)+F_G(1,2)\right]>F_{H,\max}(2,LKW)=900\,N \quad (24)$$

bleibt auch m_2 gegenüber der LKW-Pritsche **nicht mehr in Haftung.**

Hinweis: $F_{Tr}(2)$ *zeigt nach rechts, die Gegenkraft zur Gleitreibungskraft* $F_G(1,2)$ *zeigt ebenfalls nach rechts.*

Folge: m_2 gleitet relativ zur LKW Pritsche.

Es gilt:

$$a_{2,c.}=\frac{F_{Tr}(2)+F_G(1,2)-F_G(2,LKW)}{m_2}=\frac{720\,N+200\,N-750\,N}{200\,kg}=0,85\,ms^{-2} \quad (25)$$

Hinweis: $F_{Tr}(2)$ *zeigt nach rechts, die Gegenkraft zur Gleitreibungskraft* $F_G(1,2)$ *zeigt ebenfalls nach rechts, die Gleitreibungskraft* $F_G(2,LKW)$ *zeigt nach links.*

Ergebnis: $$a_{1-ges,c.}=1,6\,m\,s^{-2} \quad (27)$$

$$a_{2,c.} = 0{,}85\,ms^{-2} \tag{28}$$

Beide Kisten gleiten also nach rechts in Richtung des LKW-Fahrerhauses.

4.a. Um den auf dem Tisch liegenden Quader beschleunigen zu können, muss die maximale Haftreibungskraft überwunden werden. Die auf m_1 wirkende Seilkraft muss also größer sein, als die maximale Haftreibungskraft. Im statischen Fall ist die Seilkraft gleich der Gewichtskraft der Masse m_2.

$$F_{g,2} > F_{H\max,1} \tag{1}$$

$$m_2 \cdot g > \mu_H \cdot m_1 \cdot g \tag{2}$$

Ergebnis:

$$m_1 < \frac{m_2}{\mu_H} = \frac{2\,kg}{0{,}4} = 5\,kg \tag{3}$$

b. D'Alembertsches Prinzip für

die Masse m_1:

$$\left(F_{S,1} - F_{G,1}\right) - m_1 \cdot a = 0 \tag{4}$$

die Masse m_2:

$$\left(F_{g,2} - F_{S,2}\right) - m_2 \cdot a = 0 \tag{5}$$

die Umlenkrolle m_R:

$$\left(F_{S,2} - F_{S,1}\right) \cdot R - J \cdot \alpha = 0 \tag{6}$$

Massenträgheitsmoment:

$$J = \frac{1}{2} m_R \cdot R^2 \tag{7}$$

Da das Seil gegenüber der Umlenkrolle keinen Schlupf hat, gilt die Rollbedingung:

$$\alpha = \frac{a}{R} \tag{8}$$

Einsetzen von Gl. (7) und (8) in Gl. (6):

$$F_{S,2} = \frac{1}{2} m_R \cdot a + F_{S,1} \tag{9}$$

Aus Gl. (4) folgt:

$$F_{S,1} = F_{G,1} + m_1 \cdot a \tag{10}$$

Aus Gl. (5) folgt:

$$F_{S,2} = F_{g,2} - m_2 \cdot a \tag{11}$$

Einsetzen von Gl. (10) und Gl. (11) in Gl. (9):

$$F_{g,2} - m_2 \cdot a = \frac{1}{2} m_R \cdot a + F_{G,1} + m_1 \cdot a \tag{12}$$

$$m_2 \cdot g - m_2 \cdot a - \frac{1}{2} m_R \cdot a = m_1 \left(\mu_G \cdot g + a\right) \tag{13}$$

Lösung:

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot g - \left(m_2 + \frac{1}{2} m_R\right) \cdot a}{\mu_G \cdot g + a} \tag{14}$$

Ergebnis:

$$m_1 = \frac{2 \cdot 10 - \left(2 + 0{,}5\right) \cdot 2}{0{,}3 \cdot 10 + 2}\,kg = \frac{15}{5} = 3\,kg \tag{15}$$

Probe: (nicht gefordert)

Aus Gl. (13) folgt:

$$m_2 \cdot g - \mu_G \cdot m_1 \cdot g = \left(\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2\right) \cdot a \tag{16}$$

$$a = \frac{m_2 \cdot g - \mu_G \cdot m_1 \cdot g}{\frac{1}{2} m_R + m_1 + m_2} \tag{17}$$

Beschleunigung: $$a=\frac{2\cdot 10-0,3\cdot 3\cdot 10}{0,5+3+2,0}ms^{-2}=\frac{11}{5,5}ms^{-2}=2\,ms^{-2} \qquad (18)$$

5. Gesamtenergie im Ausgangszustand: $E_{ges,A}=E_{pot,A}$ (1)

Gesamtenergie im Endzustand: $E_{ges,E}=E_{kin-trans,E}+E_{kin-rot,E}+W_{G,A\to E}$ (2)

Energieerhaltungssatz: $E_{ges,A}=E_{ges,E}$ (3)

Potentielle Energie: $E_{pot,A}=m\cdot g\cdot H=m\cdot g\cdot s\cdot \sin(\alpha)$ (4)

Translationsenergie: $E_{kin-trans,E}=\frac{1}{2}m\cdot v^2$ (5)

Rotationsenergie: $E_{kin-rot,E}=\frac{1}{2}J\cdot\omega^2$ (6)

Rollbedingung: $\omega=\frac{v}{R}$ (7)

Massenträgheitsmoment: $J=\frac{1}{2}m\cdot R^2$ (8)

Rollreibungsarbeit: $W_{G,A\to E}=\mu_{RR}\cdot F_n\cdot s=\mu_{RR}\cdot m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot s$ (9)

Einsetzen von Gl. (1) und Gl. (2) in Gl. (3):

$$E_{pot,A}=E_{kin-trans,E}+E_{kin-rot,E}+W_{G,A\to E} \qquad (10)$$

Einsetzen von Gl. (4) und Gl. (5) und Gl. (6) in Gl. (10):

$$m\cdot g\cdot s\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}m\cdot v^2+\frac{1}{2}J\cdot\omega^2+\mu_{RR}\cdot m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot s \qquad (11)$$

Einsetzen von Gl. (7) und Gl. (8) in Gl. (11):

$$m\cdot g\cdot s\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}m\cdot(R\cdot\omega)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\cdot R^2\right)\cdot\omega^2+\mu_{RR}\cdot m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot s \qquad (12)$$

Es folgt: $$g\cdot s\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{2}R^2\cdot\omega^2+\frac{1}{4}R^2\cdot\omega^2+\mu_{RR}\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot s \qquad (13)$$

$$\left(\sin(\alpha)-\mu_{RR}\cdot\cos(\alpha)\right)g\cdot s=\frac{3}{4}R^2\cdot\omega^2 \qquad (14)$$

Lösung: $$\omega=\frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}\left(\sin(\alpha)-\mu_{RR}\cdot\cos(\alpha)\right)g\cdot s} \qquad (15)$$

Ergebnis: $$\omega=\frac{1}{0,05\,m}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}(0,173648-0,05\cdot 0,984807)\cdot 10\,ms^{-2}\cdot 2m} \qquad (16)$$

$$\omega=20m^{-1}\cdot\sqrt{3,3175\,m^2s^{-2}}=36,43\,s^{-1} \qquad (17)$$

Drehzahl: $$n=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{36,43\,s^{-1}}{2\pi}=5,79\,s^{-1} \qquad (18)$$

Probe: (nicht gefordert) zur Vereinfachung wurde $m=1kg$ gesetzt.

Potentielle Energie: $E_{pot,A} = 1 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \sin(\alpha) = 3,4729\,J$ (19)

Translationsenergie: $E_{kin-trans,E} = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \omega^2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,05^2 \cdot 36,43^2\,J = 1,6589\,J$ (20)

Rotationsenergie: $E_{kin-rot,E} = \frac{1}{4} m \cdot R^2 \cdot \omega^2 = 0,25 \cdot 1 \cdot 0,05^2 \cdot 36,43\,J = 0,8295\,J$ (21)

Rollreibungsarbeit: $W_{G,A\to E} = \mu_{RR} mg \cos(\alpha) s = 0,05 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0,984807 \cdot 2\,J = 0,9848\,J$ (22)

Die Summe der Energien aus Gl. (20), (21) und (22) beträgt 3,473 J. Dies entspricht der potentiellen Energie von 3,473 J.

Zeit zum Herunterrollen:
Für die beschleunigte Bewegungen entlang der Wegstrecke $s = s_{\mathrm{m}} = 2\,m$ gilt:

$$s = s_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_m^2 \tag{23}$$

und $s = v_{\mathrm{m}} = a \cdot t_m$ (24)

Einsetzen von Gl. (24) in Gl. (23) ergibt:

$$s = s_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_m}{t_m} a \cdot t_m^2 = \frac{1}{2} \cdot v_m \cdot t_m \tag{25}$$

Ergebnis: $t_m = \frac{2 \cdot s_m}{v_m} = \frac{2 \cdot s_m}{r \cdot \omega_m}$ (26)

$$t_m = \frac{2 \cdot 2m}{0,05\,m \cdot 36,43\,s^{-1}} = 2,1960\,s \tag{27}$$

6. Der Ankuppelungsvorgang zwischen Lok und Waggon ist ein vollkommen unelastischer Stoß.

Impulserhaltungssatz: $m_L v_L = (m_L + m_W) u$ (1)

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_L v_L^2 = \frac{1}{2} (m_L + m_W) u^2$ (2)

a. Geschwindigkeit nach dem Ankuppeln:

Aus Gl. (1) folgt: $u = \frac{m_L v_L}{m_L + m_W} = \frac{10\,t}{(10+40)\,t} \cdot 2\,ms^{-1} = 0,4\,ms^{-1}$ (3)

b. Es gilt: Kraftstoß = Impulsänderung $\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dt = \bar{F} \cdot \Delta t = \Delta p$ (4)

Impulsänderung der Lok: $\Delta p_L = m_L (u - v_0) = 10\,t \cdot (0,4 - 2)\,ms^{-1} = -16000\,kg\,m\,s^{-1}$ (5)

Impulsänderung des Waggon: $\Delta p_W = m_W (u - 0) = 40\,t \cdot 0,4\,ms^{-1} = +16000\,kg\,m\,s^{-1}$ (6)

Mittlere Kraft in der Kupplung: $\bar{F} = \frac{16000\,kg\,m\,s^{-1}}{0,5\,s} = 32\,kN$ (7)

7a. Gesamtenergie im Ausgangszustand: $E_{ges,A} = E_{pot,A} = m \cdot g \cdot h$ (1)

Gesamtenergie im Zwischenzustand, direkt vor der ungespannten Feder: (2)

$$E_{ges,Z} = E_{kin,Z} + W_R = \frac{1}{2} m \cdot v_Z^2 + \mu_G \cdot F_n \cdot l \tag{3}$$

Energieerhaltungssatz: $E_{ges,A} = E_{ges,Z}$ (4)

Daraus ergibt sich die kinetische Energie vor der ungespannten Feder:

$$E_{kin,Z} = E_{pot,A} - W_R \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_Z^2 = m \cdot g \cdot h - \mu_G \cdot F_n \cdot l \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_Z^2 = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(45°) - \mu_G \cdot m \cdot g \cdot \cos(45°) \cdot l \quad (7)$$

Lösung:

$$v_Z = \sqrt{2\, g \cdot l \left(\cdot \sin(45°) - \mu_G \cdot \cos(45°) \right)} \quad (8)$$

$$v_Z = \sqrt{2 \cdot 10\, ms^{-2} \cdot 1m \left(0,7071 - 0,3 \cdot 0,7071\right)} \quad (9)$$

Ergebnis:

$$v_Z = 3,146\, m\, s^{-1} \quad (10)$$

b. Die kinetische Energie des Zwischenzustands kann in Spannarbeit an der Feder umgewandelt werden.

$$\frac{1}{2} D\, \Delta s^2 = \frac{1}{2} m\, v_Z^2 \quad (11)$$

$$\Delta s = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot v_Z = \sqrt{\frac{10\, kg \cdot 10^{-2}\, m}{50\, kg\, m\, s^{-2}}} \cdot 3,146\, m\, s^{-1} \quad (12)$$

Ergebnis:

$$\Delta s = 0,1407\, m \quad (13)$$

Hinweis: Die Reibungsarbeit entlang des Federwegs Δs wurde vernachlässigt.

8a. Massenträgheitssystem des Vollzylinders bevor der Albatros landet:

$$J_S = \frac{1}{2} m_V\, r_V^2 = 0,5 \cdot 840 \cdot 1,5^2\, kg\, m^2 = 945\, kg\, m^2 \quad (1)$$

Massenträgheitsmoment des Vollzylinders mit Albatros im Zustand A:

Steinerscher Satz:

$$J_{ges,A} = J_S + m_a \cdot s^2 \quad (2)$$

$$J_{ges,A} = \left(945 + 12 \cdot 0,7^2\right) kg\, m^2 = 950,88\, kg\, m^2 \quad (3)$$

Laut Aufgabenstellung landet der Albatros „von oben kommend“. Dies bedeutet, dass er den Drehimpuls Null hat. Beim Landevorgang wirken nur interne Drehmomente, so dass für das System aus Vollzylinder und Albatros der Drehimpulserhaltungssatz gilt. Der Drehimpuls des Vollzylinders ohne Albatros sei L_V, der des Albatros sei $L_a = 0$. Nach der Landung ist der gemeinsame Drehimpuls des Vollzylinders mit Albatros L_A.

$$L_V + L_a = L_A \quad (4)$$

$$J_V \cdot \omega_0 + 0 = J_{ges,A} \cdot \omega_A \quad (5)$$

$$\omega_A = \frac{J_S}{J_{ges,A}} \cdot \omega_0 = \frac{J_S}{J_S + m_a \cdot s^2} \cdot \omega_0 \quad (6)$$

$$\omega_A = 6,9567\, s^{-1} \quad (7)$$

Im Zustand B befindet sich der Albatros am Rand des Vollzylinders ($r_V = 1,5\, m$). Dies ändert sein Massenträgheitsmoment bezogen auf die Drehachse. Da auch in diesem Fall nur interne Drehmomente wirken, gilt der Drehimpulserhaltungssatz:

$$L_A = L_B \quad (8)$$

$$J_{ges,A} \cdot \omega_A = J_{ges,B} \cdot \omega_B \quad (9)$$

Massenträgheitsmoment des Vollzylinders mit Albatros im Zustand B:

Steinerscher Satz: $$J_{ges,B} = J_S + m_a \cdot r_V^2 \quad (10)$$

$$J_{ges,B} = \left(945 + 12 \cdot 1{,}5^2\right) kg\, m^2 = 972\, kg\, m^2 \quad (11)$$

$$\omega_B = \frac{J_{ges,A}}{J_{ges,B}} \cdot \omega_A = \frac{950{,}88}{972} \cdot 6{,}9567\, s^{-1} \quad (12)$$

$$\omega_B = 6{,}8055\, s^{-1} \quad (13)$$

b. Rotationsenergie im Zustand A: $$E_{rot,A} = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega_A^2 = \left(0{,}5 \cdot 950{,}88 \cdot 6{,}9567^2\right) J \quad (14)$$

$$E_{rot,A} = 23.009\, J \quad (15)$$

Rotationsenergie im Zustand B: $$E_{rot,B} = \frac{1}{2} J_B \cdot \omega_B^2 = \left(0{,}5 \cdot 972 \cdot 6{,}8055^2\right) J \quad (16)$$

$$E_{rot,B} = 22.509\, J \quad (17)$$

Energieverlust: $$\Delta E = \left(23.009 - 22.509\right) J = 500\, J \quad (18)$$

c. Abbremsung des Vollzylinders mit Albatros im Zustand B durch eine äußere tangential Kraft F

Drehmoment: $$M = F \cdot r_V = J_B \cdot \alpha \quad (19)$$

Winkelbeschleunigung: $$\alpha = \frac{F \cdot r_V}{J_B} \quad (20)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit des Vollzylinders gilt allgemein:

$$\omega(t) = \omega_B - \alpha \cdot t \quad (21)$$

Bremszeit t_B: $$\omega(t = t_B) = 0 = \omega_B - \alpha \cdot t_B \quad (22)$$

Lösung: $$t_B = \frac{\omega_B}{\alpha} = \frac{\omega_B \cdot J_B}{F \cdot r_V} = \frac{L_B}{M} \quad (23)$$

Nimmt man an, dass die Kraft, mit der tangential gebremst wir, $F = 100\, N$ beträgt, so beträgt die Bremszeit:

$$t_B = \frac{\omega_B \cdot J_B}{F \cdot r_V} = \frac{6{,}805\, s^{-1} \cdot 972 kg\, m^2}{100\, kg\, m\, s^{-2} \cdot 1{,}5\, m} = 44{,}1 s \quad (24)$$

Hinweis: Um den Zylinder von $\omega_0 = 7\, s^{-1}$ *auf* $\omega_0 = 6.9567\, s^{-1}$ *abzubremsen, muss der Albatros mit seinen Füßen einen Drehimpulsstoß auf den Zylinder ausüben:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M\, dt = \bar{M} \cdot \Delta t = \Delta L$$

Drehimpulsänderung des Zylinders: $$\Delta L_V = J_V \cdot \left(\omega_A - \omega_0\right) = 945\, kg\, m^2 \cdot \left(6{,}9567 - 7\right) s^{-1}$$

$$\Delta L_V = -40{,}91 kg\, m^2 s^{-1}$$

Der Albatros hat bezogen auf die Drehachse des Zylinders das Massenträgheitsmoment J_a.

$$J_a = m_a \cdot s^2 = 12 kg \cdot 0{,}7^2 m^2 = 5{,}88 kg\, m^2$$

Drehimpulsänderung des Albatros: $$\Delta L_a = J_a \cdot \left(\omega_A - 0\right) = 5{,}88\, kg\, m^2 \cdot \left(6{,}9567 - 0\right) s^{-1}$$

$$\Delta L_a = J_a \cdot \left(\omega_A - 0\right) = +40{,}91 kg\, m^2 s^{-1}$$

Drehmomentstoß: $\int_{-\infty}^{+\infty} M\,dt = \overline{M} \cdot \Delta t = 40{,}91\,Nm\,s$

Kraftstoß: $\int_{-\infty}^{+\infty} F\,dt = \overline{F} \cdot \Delta t = \frac{\overline{M}}{s} \cdot \Delta t = 58{,}44\,N\,s$

Energieerhaltungssatz: $E_{rot,V} = E_{rot,A} + Q$

Energieverlust: $Q = E_{rot,V} - E_{rot,A} = \frac{1}{2} J_V \cdot \omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(J_V + J_a\right) \cdot \omega_A^2$

$$Q = \left(0{,}5 \cdot 945 \cdot 7^2 - 0{,}5 \cdot 950{,}88 \cdot 6{,}9567^2\right) J = 143{,}27\,J$$

Dem Drehmomentstoß von $\overline{M} \cdot \Delta t = 40{,}91\,Nm\,s$ entspricht ein Kraftstoß von $\overline{F} \cdot \Delta t = 58{,}44\,N\,s$ an einem Hebelarm $s = 0{,}7\,m$, was bei einer angenommenen Wirkdauer von ca. 1s einer mittleren Kraft von ca. 58 N entsprechen würde (Querbeschleunigung von ca 0,5 g). Gleichzeitig muss der Albatros beim Landevorgang 143,27 J in Form von Reibungsarbeit abbauen. Für den Albatros mit nur 12 kg Masse sind das durchaus sportliche Herausforderungen, die ihm vermutlich warme Füße bereiten werden. Auch das „Trippeln“ des Albatros zum Rand der Scheibe ist nicht so ganz einfach, denn er müsste dabei 500 J in Reibungsarbeit umsetzen. – Es muss sich also um einen ganz besonderen Albatros mit „Superkräften“ handeln.

Ergebnisse:

1. $\alpha_0 = 33,4°$

2a. x-Komponente von Ball **A**: $s_{xA}(t) = v_{A0} \cdot t = 15\,ms^{-1} \cdot t$

z-Komponente von Ball **A**: $s_{zA}(t) = H - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 25\,m - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

x-Komponente von Ball **B**: $s_{xB}(t) = v_{B0x} \cdot t = v_{B0} \cdot \cos(60°) \cdot t$

z-Komponente von Ball **B**: $s_{zB}(t) = v_{B0z} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = v_{B0} \cdot \sin(60°) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

2b. $v_{B0} = 30\,ms^{-1}$; **2c.** $t_{treff} = 0,96228\,s$, $s_{xA}(t_{treff}) = 14,43\,m$, $s_{zA}(t_{treff}) = 20,37\,m$

2d. Da $t_{BH\max} = 2,59\,s > 0,96\,s = t_{treff}$ wird das Maximum der Bahnkurve erst später erreicht.

3a. $a_{1,a.} = 0$ und $a_{2,a.} = 0$ - Keine der Kisten verrutscht.

3b. $a_{1,b.} = 1,2\,m\,s^{-2}$ und $a_{2,b.} = 0$ - Es verrutscht nur die oberste Kiste m_1.

3c. $a_{1,c.} = 1,6\,m\,s^{-2}$ und $a_{2,c.} = 0,85\,ms^{-2}$ - Beide Kisten gleiten mit unterschiedlichen Beschleunigungen nach rechts in Richtung des LKW-Fahrerhauses.

4a. $m_1 < 5\,kg$ **4b.** $m_1 = 3\,kg$

5. $n = 5,79\,s^{-1}$; $t_m = 2,1960\,s$

6a. $u = 0,4\,ms^{-1}$; **6b.** $\bar{F} = 32\,kN$

7a. $3,146\,m\,s^{-1}$; **7b.** $\Delta s = 0,1407\,m$ - Hinweis: Die Reibungsarbeit entlang des Federwegs Δs wurde vernachlässigt.

8a. $\omega_A = 6,9567\,s^{-1}$ und $\omega_B = 6,8055\,s^{-1}$; **8b.** $E_{rot,A} = 23.009\,J$ und $E_{rot,B} = 22.509\,J$

8c. $t_B = \frac{\omega_B}{\alpha} = \frac{\omega_B \cdot J_B}{F \cdot r_V} = \frac{L_B}{M}$. Nimmt man an, dass die Kraft, mit der tangential gebremst wir,

$F = 100\,N$ beträgt, so beträgt die Bremszeit: $t_B = 44,1\,s$.

Bei Unklarheiten oder Fragen können Sie eine E-Mail an ulrich.schrewe@hs-hannover.de senden.

06.06.2017