Approfondissement de l'électronique des systèmes linéaires

Chapitre III : Réponse indicielle d'un système linéaire

Les analyses fréquentielle et temporelle conduisent, l'une et l'autre, à la fonction de transfert $H(p)$ des systèmes. La première utilise les aspects fréquentiels de la réponse $s(t)$ et la seconde ses aspects temporels.

1. Définitions

1.1. Echelon

- On appelle **échelon unité** ou **fonction de Heaviside** que l'on notera $u(t)$, la fonction définie par :

$$u(t) = \begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

- La **réponse indicielle** d'un système est le signal en sortie $s_u(t)$ lorsque l'entrée $e(t)$ est un échelon unité $u(t)$. Selon le nature physique de $e(t)$ on donnera à "1" la dimension nécessaire ou mieux, on utilisera le signal $e(t) = E.u(t)$; la réponse du système est alors $s(t) = E.s_{u(t)}(t)$ car le système est linéaire.
- Etudier la réponse à l'échelon $u(t)$ consiste à observer l'effet d'une discontinuité finie du signal d'entrée. Cette discontinuité n'est qu'un modèle mathématique : elle correpond à un signal d'entrée dont le temps d'établissement est très inférieur aux temps caractéristiques du système. Pour un système stable, la sortie tend vers un état d'équilibre pour $t \to +\infty$; cet état est caractérisé par le fait que les dérivées successives par rapport au temps de $s(t)$ tendent vers 0 (cela correspond au cas pratique de l'établissement d'un régime permanent continu) ; Nous admettons le résultat suivant : **la valeur finale de la réponse $s_{u(t)}(t)$ à l'échelon $u(t)$ est donnée par :**

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} s_{u(t)}(t) = \lim_{p\to 0} H(p)}$$

1.2. Temps de réponse à 5% et temps de monté

- Le **temps de réponse à** 5%, noté t_r, est le temps nécessaire pour que la sortie du système évolue jusqu'à ce que son écart à la valeur finale soit **définitivement** inférieur à 5% de l'écart entre la valeur initiale et la valeur finale.
- Le temps de monté de 10% à 90% est la durée t_m nécessaire pour que la sortie du système passe de 10% à 90% de sa valeur finale.
- Si la sortie du système sort à certains instants de l'intervalle [valeur initiale, valeur finale], on dit qu'il y a **dépassement**. On l'évalue en pourcentage de l'écart entre valeurs initiale et finale.

1.3. Erreur statique

L'**erreur statique** ε_s, ou erreur de position, d'un système est l'écart $e(t) - s(t)$ en régime permanent, lorsque le signal d'entrée est un signal échelon $e(t) = E.u(t)$:

$$\boxed{\varepsilon_s = \lim_{t\to+\infty}[E.u(t) - s(t)]}$$

1.4.Equation différentielle

Soit un système linéaire **stable** dont la fonction de transfert est $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i.p^i}{\sum_{k=0}^{m} b_k.p^k}$; les signaux d'entrée et de sortie sont alors liés par l'équation différentielle $\sum_{i=0}^{n} a_i.\frac{d^i e}{dt^i} = \sum_{k=0}^{m} b_k.\frac{d^k s}{dt^k}$.
Il faut alors résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. Les étapes de cette résolution sont :

- recherche du **régime libre** $s_1(t)$ correspondant à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre ; cette solution tend vers 0 pour un temps infini.
- recherche du **régime forcé** $s_2(t)$ correspondant à une solution particulière de l'équation différentielle complète ; cette solution est constante.

On effectue **tout d'abord la somme** de ces deux solutions $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ **puis** on détermine les **constantes d'intégration** à l'aide des conditions initiales en utilisant éventuellement les propriétés ci-dessous :

- la **tension aux bornes d'un condensateur** est une fonction **continue** du temps,
- le **courant circulant dans une bobine** est une fonction **continue** du temps.

Dans les paragraphes suivants nous rappelons les principaux résultats concernant les réponses indicielles des filtres du 1^{er} et du 2^{nd} ordre.

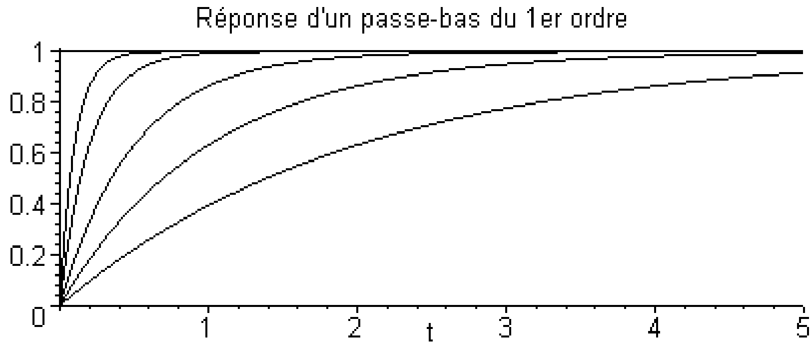
2. Cas du 1^{er} ordre

Revoir le cours de première année et notamment :
- étude générale de la réponse,
- excitation en courant, en tension, cas du circuit RC et RL,
- bilan énergétique.

Les filtres étudiés dans la suite du cours sont supposés être initialement au repos.

2.1. Passe-bas d'ordre un

- La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{H_o}{1+\tau p}$
- ce qui correpond à l'équation différentielle $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = H_o.e(t)$
- la solution est alors $s(t) = H_o.E.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- l'erreur statique est $\varepsilon_s = E(1 - H_o)$
- il n'y a pas de dépassement et le temps de réponse à 5% est $\tau_r \approx 3\tau$.



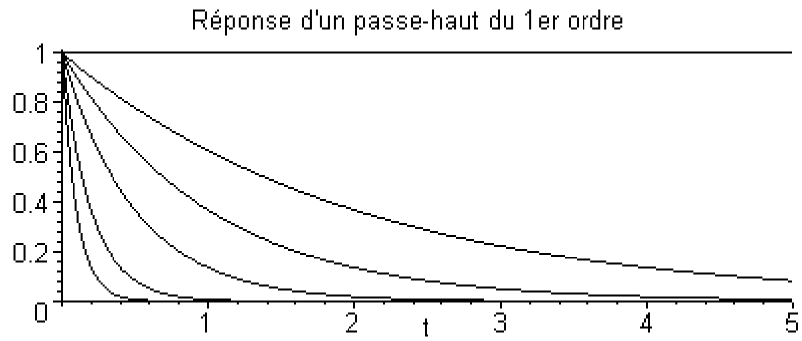
Tracé de $\frac{s(t)}{H_o.E}$en fonction de t/τ

Exercice n° 01 : Démontrer les résultats précédents.

2.2. Passe-haut d'ordre un

- La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{H_o \tau p}{1+\tau p}$
- ce qui correpond à l'équation différentielle $\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = H_o.\tau.\frac{de(t)}{dt}$
- la solution est alors $s(t) = H_o.E.e^{-\frac{t}{\tau}}$
- l'erreur statique est $\varepsilon_s = E$
- il n'y a pas de dépassement et le temps de réponse à 5% est $\tau_r \approx 3\tau$.

On notera la discontinuité de la réponse indicielle en $t = 0$.



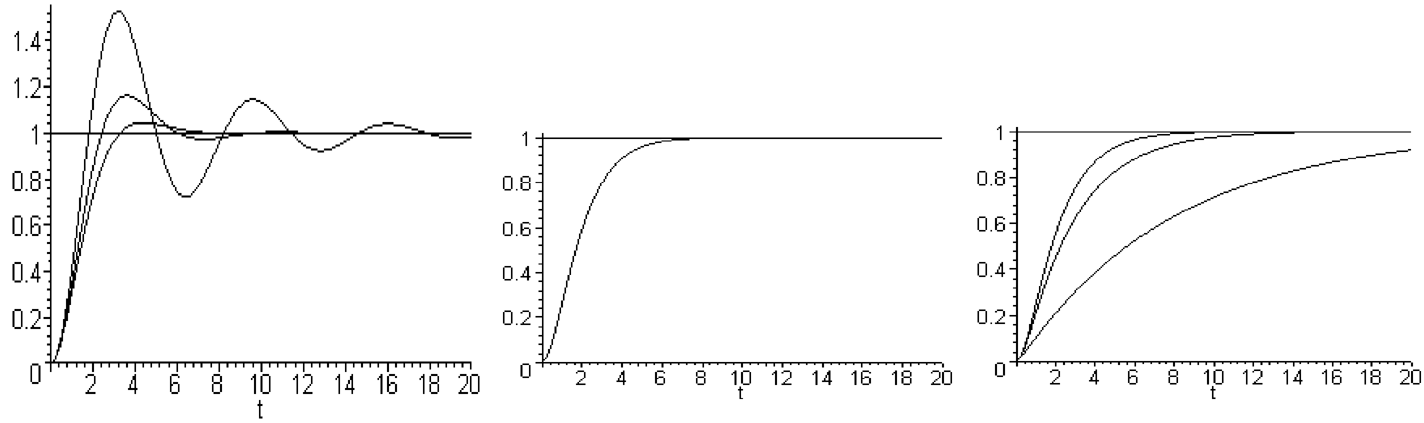
Tracé de $\frac{s(t)}{H_o.E}$en fonction de t/τ

Exercice n° 02 : Soit un filtre linéaire de fonction de transfert $H(p) = \frac{1+\beta p}{1+a \beta p}$ ave $a = 0,2$ et $\beta = 1\,\text{ms}$.
1) Déterminer à partir de l'équation différentielle, puis en utilisant la transformation de Laplace, la réponse indicielle du filtre.
2) Tracer la réponse obtenue et déterminer les limites en 0_+ et en $+\infty$; interpréter.

3. Cas du 2^{nd} ordre

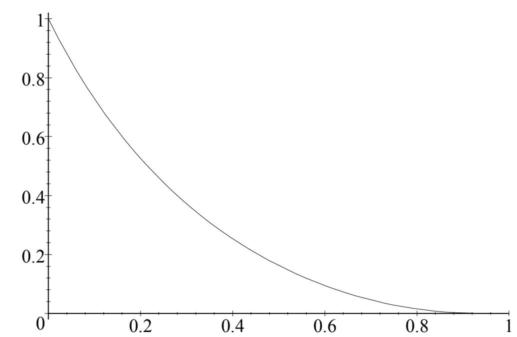
Revoir le cours de première année et notamment : étude générale de la réponse, excitation en courant, en tension, cas du circuit RLC, régime apériodique, critique, pseudopériodique, pseudopériode, décrément logarithmique, bilan énergétique.

Le filtre étudié est un passe bas d'ordre deux supposé être initialement au repos (les filtres passe bas sont plus intéressant pour la réponse indicielle).



Réponse d'un passe-bas du second ordre, initialement au repos, à un échelon
(tracé de $\frac{s(t)}{H_0.E}$ en fct de $\omega_0 t$ avec $\sigma = 0,2\,;\,0,5\,;\,0,7\,;\,1\,;\,1,1\,;\,1,5\,;\,4$)

- La fonction de transfert est de la forme $H(p) = \frac{H_o}{1+2\sigma\tau p+\tau^2 p^2}$ (rappel $2\sigma = 1/Q$)
- ce qui correpond $\forall t > 0$ à l'équation différentielle :
  $\tau^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\sigma\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = H_o.E$ ou $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\sigma\omega_o\frac{ds(t)}{dt} + \omega_o^2 s(t) = H_o.\omega_o^2.E$ avec $\omega_o = 1/\tau$
- la solution est :
  - si $\sigma > 1$ alors $s(t) = H_o.E.[1 - e^{-\sigma\omega_o t}\left(ch\,\omega t + \frac{\sigma\omega_o}{\omega} sh\,\omega t\right)]$ avec $\omega = \omega_o\sqrt{\sigma^2 - 1}$ (régime apériodique)
  - si $\sigma = 1$ alors $s(t) = H_o.E.[1 - e^{-\omega_o t}(1 + \omega_o t)]$ (régime critique)
  - si $\sigma < 1$ alors $s(t) = H_o.E.[1 - e^{-\sigma\omega_o t}\left(\cos\,\omega t + \frac{\sigma\omega_o}{\omega}\sin\,\omega t\right)]$ avec $\omega = \omega_o\sqrt{1 - \sigma^2}$ (régime pseudopériodique)
- l'erreur statique est $\varepsilon_s = E(1 - H_o)$
- dépassement :
  - en régime **apériodique et critique** ($\sigma \geq 1$) la réponse $s(t)$ croît vers sa valeur asymptotique $\lim_{t\to+\infty} s(t) = H_o E$ sans jamais la dépasser. Il n'y a **pas de dépassement**.
  - en régime pseudopériodique ($\sigma < 1$) la réponse $s(t)$ dépasse régulièrement sa valeur asymptotique. Deux pics consécutifs sont séparés par une pseudopériode $T = 2\pi/\omega$. Il en résulte un dépassement $D(\sigma) = \frac{s_{\max} - H_o E}{H_o E} = \exp\left[-\sigma\pi/\sqrt{1-\sigma^2}\right]$



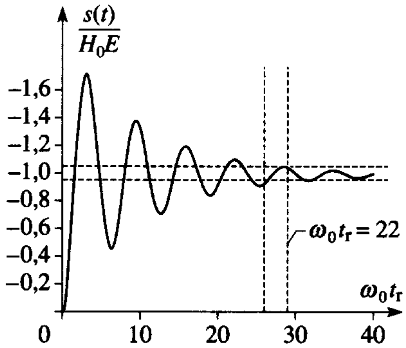
Tracé du dépassement D en fonction de σ

- temps de réponse : le filtre passe bas d'ordre deux, initialement au repos est soumis à un échelon d'amplitude E. On recherche le temps de réponse t_r à 5% en fonction du facteur d'amortissement σ ; Pour chaque valeur de σ, t_r est donné par l'équation

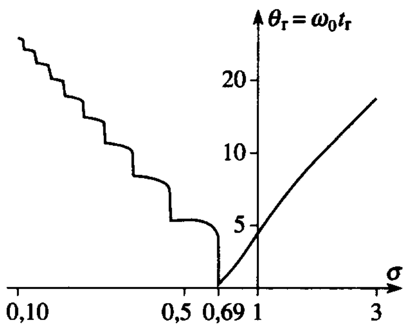
$$\forall t > t_r \text{ on a } 0,95 \leq \frac{s(t)}{H_o E} \leq 1,05$$

cette équation ne peut être résolu que numériquement ; nous obtenons alors les courbes ci-dessous. On remarque que :

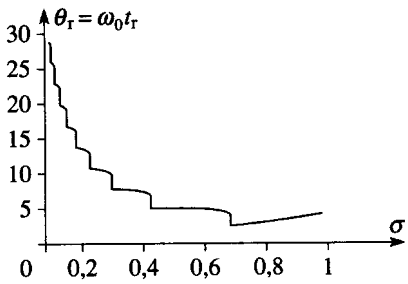
  - le temps de réponse t_r à 5% est minimal pour $\sigma = 0,69^+$
  - pour $\sigma > 0,69$ le temps de réponse t_r à 5% varie continûment avec σ
  - pour $\sigma < 0,69$ le temps de réponse t_r à 5% présente des discontinuité.



Pour $t \geqslant t_r$, la réponse $s(t)$ ne quitte plus la bande $[0,95E\ ;\ 1,05E]$.

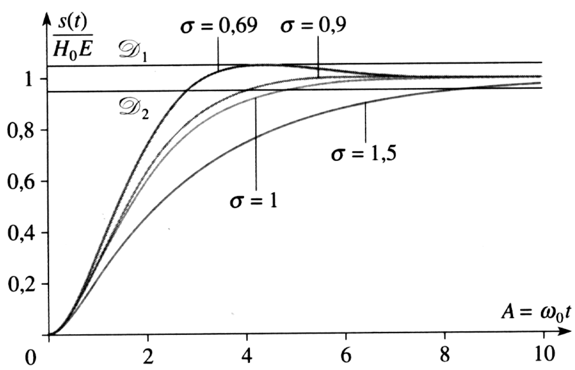


Variations du temps de réponse t_r à 5 % d'un passe-bas d'ordre deux, en **axes logarithmiques.**

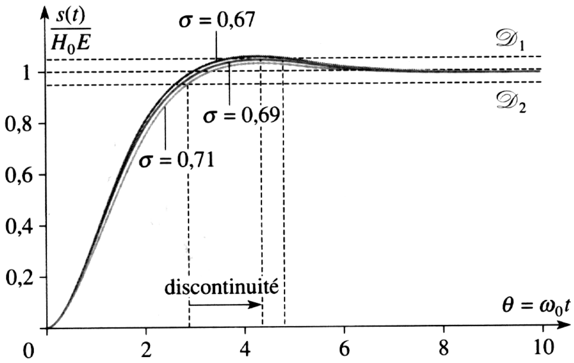


Détail, en axes cartésiens, du temps de réponse t_r à 5 % ($\sigma < 1$).

Justification des discontinuités : elles apparaîssent pour $\sigma = 0,69,\ 0,43$...Elles sont explicables graphiquement en observant les réponses à l'échelon pour deux systèmes d'amortissement proches (figure ci dessous) : dès qu'un des extréma relatifs de la réponse atteint la valeur finale augmentée ou diminuée de 5%, le moindre accroissement du facteur d'amortissement entraîne une diminution brutale du temps de réponse.

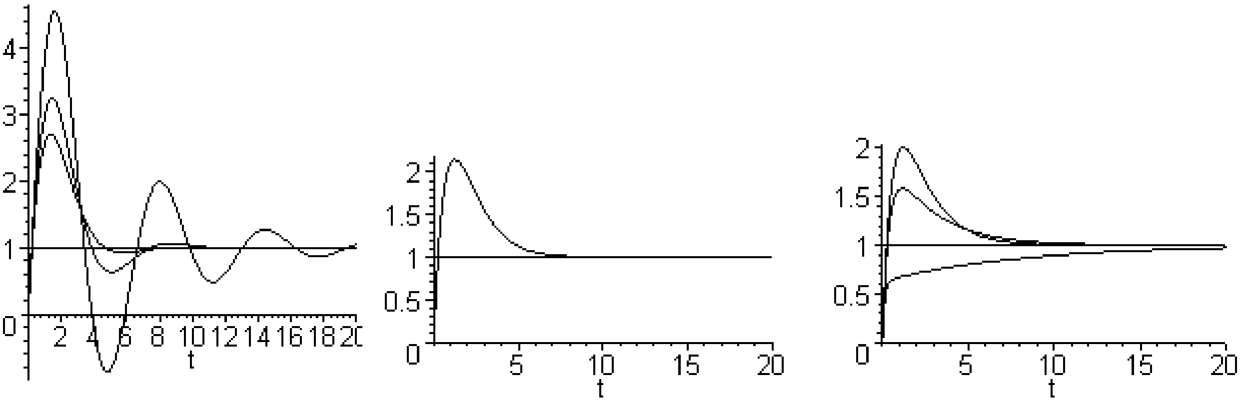


Pour des facteurs d'amortissement $\sigma > 0,69$, le temps de réponse t_r est la date d'intersection de $s(t)$ avec $\mathcal{D}_1$.



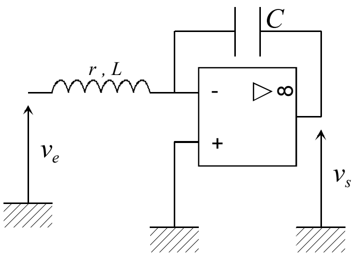
Origine des discontinuités.

Remarque : les tracés de $s(t)$ pour différentes valeurs de σ correspondent au **cas très particulier (mais le plus courant)** où le système est initialement au repos. Dans le cas général on obtient :

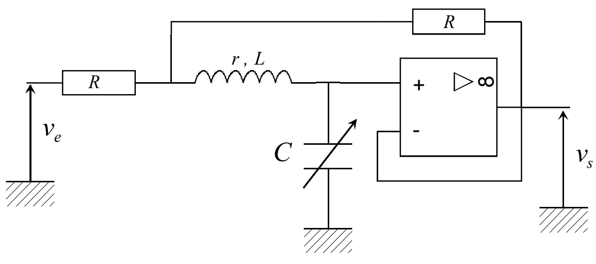


Réponse d'un passe-bas du second ordre, conditions initiales quelconques, à un échelon
(tracé de $\frac{s(t)}{H_0.E}$ en fct de $\omega_0 t$ avec $\sigma = 0,2\,;\,0,5\,;\,0,7\,;\,1\,;\,1,1\,;\,1,5\,;\,4$)

Exercice n° 03 : Démontrer l'expression du dépassement : $D(\sigma) = \frac{s_{\max} - H_o E}{H_o E} = e^{-\frac{\sigma\pi}{\sqrt{1-\sigma^2}}}$
Exercice n° 04 :
On considère le montage ci-dessous. L'amplificateur opérationnel est parfait. Le condensateur étant initialement déchargé, on applique à l'entrée du montage la tension échelon : $v_e(t) = u(t).E$ (u fonction de Heaviside). Déterminer en fonction de E, r, L et C, pour $t > 0$:
1) la loi de variation de l'intensité i d'entrée ; tracer le graphe de $i(t)$.
2) l'équation différentielle qui régit la tension de sortie $v_s(t)$.
3) la loi de variation de la tension de sortie au cours du temps.



exercice n° 4



exercice n° 5

Exercice n° 05 :
Dans le montage à A.O. parfait ci-dessus on applique une tension créneau d'amplitude E.On pose $a = \sqrt{C_0/C - 1}$ et $b = (2r + R)C_0$, où C_0 est défini en 2)
1) Etablir l'équation différentielle du $2^{ème}$ ordre en $v_s(t)$.
2) Exprimer, en fonction de r, R et L 1a valeur minimale C_0 de la capacité C pour laquelle le signal de sortie $v_s(t)$ évolue apériodiquement avec t.
3) Etablir, pour $C < C_0$, 1a loi $v_s(t)$ à l'aide de E et des paramètres a et b. Donner l'allure du graphe $v_s(t)$?

4. Réponse à une impulsion

- Il est parfois utile de savoir déterminer l'évolution d'un système consécutive à une pertubation très brève pour laquelle on ne connaît pas forcément le détail de l'évolution. On recherche un modèle mathématique d'une **impulsion** très brève mais apportant tout de même de l'énergie.

- On considère un système linéaire (stationnaire continu) et on note $s_u(t)$ sa réponse à l'échelon unitaire $u(t)$ (rappel $u(t) = \begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ u(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$).
  On cherche la réponse du système à :

  - **un créneau** $e(t)$ débutant à $t = 0$ avec une amplitude unité pendant une durée t_o:
    $e(t)$ est analysable comme la superposition de deux signaux : $e(t) = u(t) - u(t - t_o)$; le système étant linéaire (il obéit au principe de superposition) et stationnaire, la réponse à l'excitation $e(t)$ est donc

$$s(t) = \begin{cases} s_u(t) & \text{pour } 0 < t < t_o \\ s_u(t) - s_u(t - t_o) & \text{pour } t_o < t \end{cases}$$

– **la limite des créneaux de durée t_o et d'amplitude $1/t_o$:**
comme précédement on écrit $e_{t_o}(t) = \frac{u(t)-u(t-t_o)}{t_o}$ soit $s_{t_o}(t) = \begin{cases} s_u(t)/t_o & \text{pour } 0 < t < t_o \\ \frac{s_u(t)-s_u(t-t_o)}{t_o} & \text{pour } t_o < t \end{cases}$;
par passage à la limite, lorsque t_o tend vers 0, on obtient :
  * $\lim_{t_o \to 0} e_{t_o}(t) = \delta(t)$ est l'**impulsion de Dirac** telle que

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 & \end{cases}$$

  * $\lim_{t_o \to 0} s_{t_o}(t) = \frac{ds_u}{dt}(t)$

- La réponse d'un système à une impulsion unitaire est la dérivée de sa réponse à un échelon unitaire; en effet l'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon unitaire. Ce résultat est généralisable: **si $s(t)$ est la réponse d'un système stationnaire à l'excitation $e(t)$, alors $\frac{ds(t)}{dt}$ est sa réponse à l'excitation $\frac{de(t)}{dt}$**.
- L'impulsion de Dirac permet de modéliser le cas limite d'un créneau de durée t_o quand t_o est petit devant les temps caractéristiques du système.
- **La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac vaut 1 quel que soit p.**
- On appelle **réponse impulsionnelle** d'un système la sortie associée à l'entrée $e(t) = \delta(t)$. Puisque la transformée de Laplace de l'impulsion est unitaire, on peut en déduire que la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle est la fonction de transfert du système. On peut alors retrouver le signal de sortie en appliquant la transformée de Laplace "inverse".

Exercice n° 06 :
1) Déterminer la réponse impulsionnelle d'un système linéaire dont le transfert opérationnel est de la forme $H(p) = \frac{1}{1+\tau p}$
2) En déduire la réponse à une implusion de tension d'un circuit RC initialement au repos (passe-bas du premier ordre en prenant la tension aux bornes du condensateur). Discuter le résultat obtenu.

5. Cas particulier de la réponse libre

La réponse libre d'un système est l'évolution temporelle de sa sortie, son entrée étant nulle à chaque instant. Elle correspond à la solution générale de l'équation différentielle sans second membre. Pour effectuer la résolution il faut connaître les conditions initiales c'est à dire $s(0_+)$ et pour un système du second ordre $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0_+}$.

Remarque : la réponse impulsionnelle d'un système est un cas particulier de régime libre : les conditions initiales étant alors imposées par les caractéristiques de l'impulsion.

6. Conclusion

6.1. Etude expérimentale

Pour étudier expérimentalement un système nous pouvons effectuer :

- une **analyse harmonique** :
  – le système est soumis à des signaux d'entrée sinusoïdaux de différentes fréquences. Pour chacune de ces fréquences, on mesure l'amplitude du signal de sortie ainsi que son déphasage par rapport au signal d'entrée. On obtient alors le tracé expérimental du diagramme de Bode de la fonction de transfert du système ; on peut alors rechercher la fonction de transfert donnant un tracé identique.
- une **analyse temporelle**:
  – on soumet le système à un signal d'entrée de type échelon et à partir de la réponse on retrouve ses paramètres.
  – exemple : pour un passe bas d'ordre deux tel que $\sigma < 1$ nous pouvons déterminer sa fonction de transfert $H(p) = \frac{H_o}{1+2\sigma\tau p+\tau^2p^2}$
    * la valeur finale de la réponse donne le gain statique H_o
    * la valeur relative du premier dépassement donne le coefficient d'amortissement σ
    * la valeur de la pseudo-période donne la pulsation propre ω_o donc $\tau = 1/\omega_o$.

6.2. Etude théorique

Pour obtenir la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque on choisit une représentation :

- fréquentielle : on recherche le spectre du signal d'entrée, la fonction de transfert du système, le spectre du signal de sortie et donc la réponse du système.
- temporelle : recherche de l'équation différentielle (souvent par l'intermédiaire de la fonction de transfert), résolution et donc réponse du système.

6.3. Lien entre les deux représentations

- La fonction de transfert permet de trouver l'équation différentielle du système et inversement.
- Graphiquement, le diagramme de Bode et la réponse indicielle sont tels que
  - le temps nul correspond à une fréquence infinie
  - le temps infini correspond à une fréquence nulle