Modéliser les SLCI

Table des matières

Modéliser les entrées

Pour étudier le comportement d'un système, il n'est pas toujours simple de traduire sous forme d'équations les lois de la physique qui régissent son comportement. Il est souvent plus efficace de le soumettre à des signaux tests et d'observer sa sortie.

De plus, la définition des critères de performances se fait majoritairement à partir de ces signaux. On se propose ici de présenter les signaux les plus couramment utilisés.

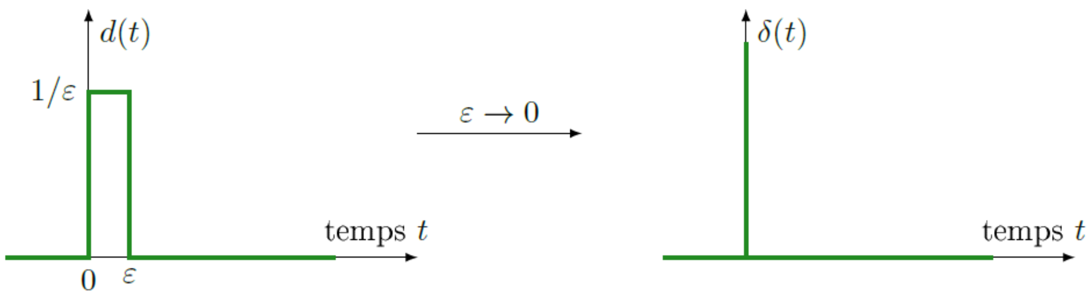
Pour les temps négatifs, les signaux seront toujours considérés à valeur nulle.

1. Impulsion de Dirac

Impulsion de Dirac — ***Définition***

Si $t \neq 0,\ \delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$

L'impulsion de Dirac est une entrée qui modélise une excitation du système sur un temps extrêmement court, au regard du temps d'observation, mais suffisamment significatif pour que les effets puissent être observables.



Impulsion de Dirac

Exemple

Coup de marteau sur une plaque métallique, frappe piquée sur une corde de piano...

Remarque

Mathématiquement, l'impulsion de Dirac n'est pas une fonction mais une distribution, définie comme nulle pour tout temps différent de zéro et telle que l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Son utilisation mathématique ne relève pas du programme de classes préparatoires.

L'impulsion de Dirac peut néanmoins être considérée comme la limite d'un créneau $d(t)$ de largeur ε et de hauteur $\frac{1}{\varepsilon}$ quand ε tend vers zéro.

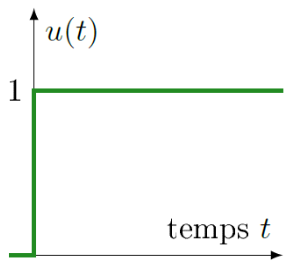
2. Fonction échelon unité u(t)

Fonction échelon unité u(t) *Définition*

si $t < 0,\ u(t) = 0$ mais si $t \geq 0,\ u(t) = 1$

Cette fonction respecte le principe de causalité, c'est-à-dire qu'elle est nulle pour les temps négatifs. En effet, l'ensemble des paramètres est supposé être au repos dans les temps négatifs.

Cette fonction modélise un signal qui passe de la valeur nulle à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constamment égal à 1.



Fonction échelon unité

Exemple

Fermeture d'un interrupteur électrique

Attention

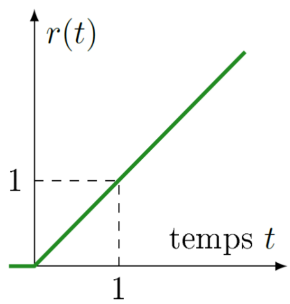
Ne pas confondre la notation u(t) avec la notion de tension électrique !

3. Fonction rampe unitaire r(t)

Fonction rampe unitaire r(t) *Définition*

si $t < 0,\ r(t) = 0$ mais si $t \geq 0,\ r(t) = t$

La fonction rampe peut donc s'exprimer à l'aide de la fonction échelon unitaire : $r(t) = t\ u(t)$.



Fonction rampe unitaire

Exemple

Déplacement imposé à vitesse constante.

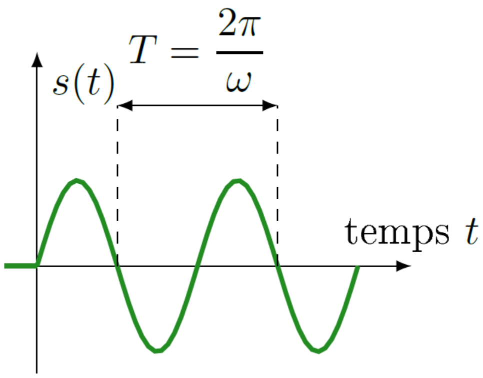
4. Fonction sinus causale s(t)

Définition

- si $t < 0, \;\; s(t) = 0$
- si $t \geq 0, \;\; s(t) = \sin(\omega t)$

Cela peut être simplifié en utilisant la fonction échelon : $s(t) = \sin(\omega t)\; u(t)$.

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ est appelée **pulsation** du sinus, et T la **période**.



Fonction sinus causale

Remarque

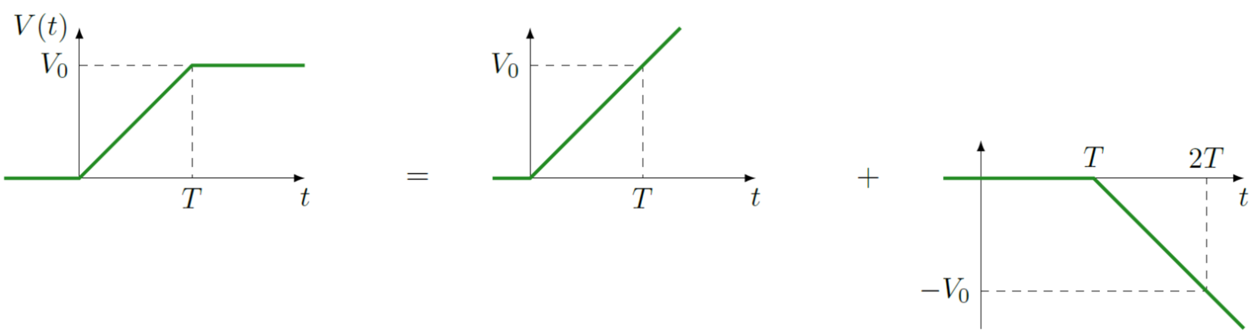
Cette fonction caractérise une consigne oscillant à une fréquence précise. Elle présente surtout un intérêt théorique, qui sera développé dans le chapitre d'analyse fréquentielle des SLCI.

5. Signaux composés de signaux élémentaires

Tout **signal affine par morceaux** peut s'écrire comme la **somme de signaux élémentaires** en utilisant des fonctions échelon et rampe, éventuellement retardées.

Ces signaux composés sont souvent utilisés pour la commande des systèmes.

Exemple



Consigne de vitesse de déplacement d'un ascenseur

Ce signal peut être décomposé en une somme de deux signaux élémentaires : $V(t) = \frac{V_0}{T} t\ u(t) - \frac{V_0}{T}(t - T)\ u(t - T)$, où $u(t - T)$ est la fonction échelon retardée d'un temps T (la fonction passe à 1 lorsque $t = T$).

Équation d'un droite *Rappel*

L'équation d'une droite dans le plan est usuellement définie par : $y = ax + b$ avec a : coefficient directeur de la droite et b : ordonnée à l'origine

Une expression plus intéressante (car adaptée à tous les cas) est celle utilisant les valeurs en deux points quelconques : $y = a(x - x_1) + y_1$ avec : $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ les coordonnées de deux points quelconques de la droite.

Le coefficient directeur de la droite pourra s'obtenir par : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Hypothèses : Systèmes Linéaires Continus Invariants

II

On choisit de représenter un système ou sous-système sous la forme d'un bloc pour lequel les **entrées** (ou causes) du système sont situées à **gauche** et les **sorties** (effets) sont situées à **droite**. L'intérieur du bloc contient une description du système étudié en terme de comportement.

On ne s'intéresse ici qu'aux systèmes mono-variables, c'est à dire aux systèmes qui ne possèdent qu'une seule entrée et qu'une seule sortie.

1. Système linéaire

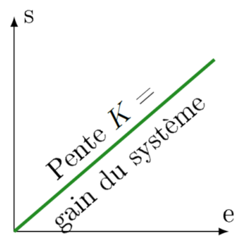
Définition

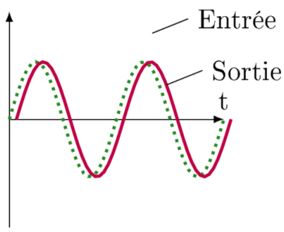
Un système est dit **linéaire** si la fonction qui le décrit est elle même linéaire. Cette fonction vérifie alors le principe de **proportionnalité** et de **superposition**.

Remarque

- En relevant la valeur asymptotique de la sortie (régime établi ou permanent) pour différentes entrées échelon, on peut obtenir la caractéristique du système : sortie=f(entrée).

  Dans le cas d'un système linéaire, cette courbe est une droite de pente **K** appelé **gain du système**.
- La réponse d'un système linéaire en régime établi est de même nature que l'entrée.

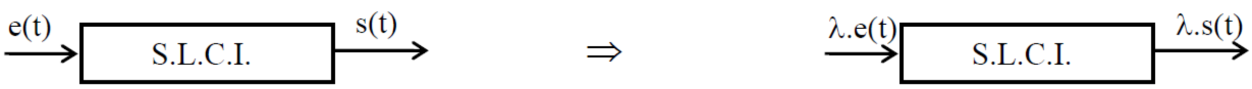




1.1. Principe de proportionnalité

Principe de proportionnalité ***Définition***

Si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$, alors $\lambda s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda e(t)$.

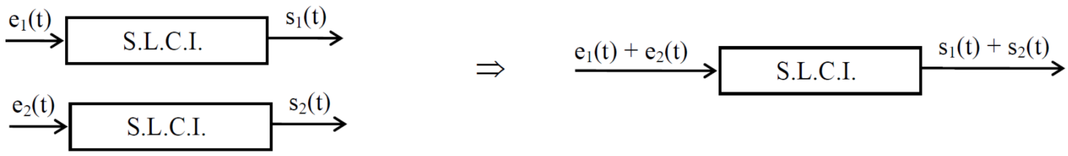


Proportionnalité

1.2. Principe de superposition

Principe de superposition *Définition*

Si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les réponses respectives des entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1(t) + s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t)+e_2(t)$



Superposition

En étudiant les réponses du système pour des entrées simples (comme les signaux tests), et en utilisant les propriétés de linéarité (proportionnalité et superposition), il est alors possible d'obtenir la réponse du système à des signaux plus complexes.

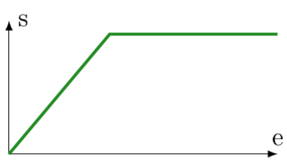
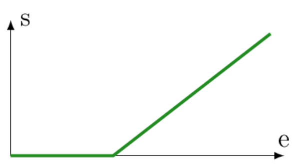
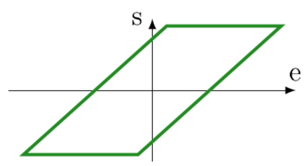
Attention

Ne pas confondre la caractéristique d'un système $s = f(e)$ avec la courbe $s(t)$ qui représente l'évolution temporelle de la sortie et qui est très souvent non-linéaire.

1.3. Non linéarités

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'utilisation.

Ci-après, quelques exemples de non-linéarités couramment rencontrés avec leur courbe caractéristique $s = f(e)$ associée.

	Saturation	**Seuil**	**Hystérésis**
Courbe caractéristique			
Exemple	Butée mécanique, alimentation, moteur électrique...	Frottement dans un moteur	Jeux mécaniques, élastomères, cycles magnétiques...

Linéarisation

Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de "linéariser" la réponse du système dans cette zone autour d'un point de fonctionnement de la caractéristique.

Il s'agit souvent en pratique d'une approximation par la tangente au point de fonctionnement, appelée "linéaire tangente". Le système est alors dit linéarisé.

Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point

2. Système continu

Définition

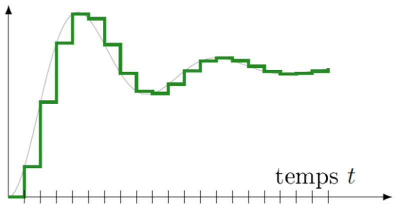
Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations de ses grandeurs physiques sont définies à chaque instant (elles sont caractérisées par des fonctions continues). On parle aussi de systèmes analogiques.

La plupart des systèmes physiques, d'un point de vue macroscopique, sont continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée, le plus souvent, par des systèmes informatiques ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets.

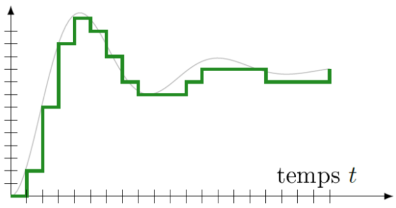
Remarque

Lorsqu'un signal continu est numérisé pour être traité par un micro-contrôleur il subit deux discrétisations :

- un **échantillonnage en temps** : la valeur du signal est prélevée tous les pas de temps (elle est considérée comme constante au cours du pas de temps par le système de commande)



- une **quantification** : la mesure est mémorisée de façon discrète dans le contrôleur. L'intervalle de mesure est décomposé en N pas de mesure, la valeur retenue étant le pas le plus proche de la valeur mesurée



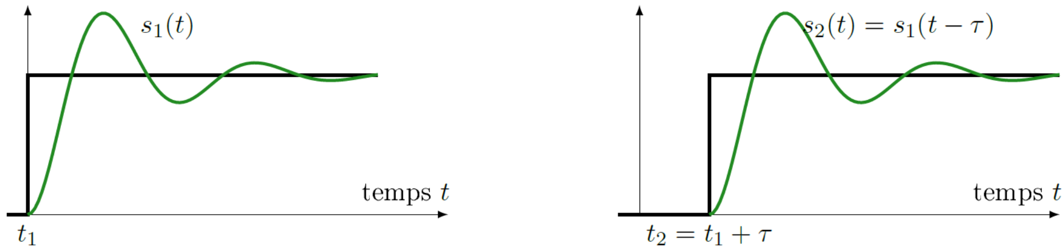
Très souvent, la période d'échantillonnage est très inférieure au temps de réponse du système (5 µs pour l'échantillonnage contre quelques millisecondes pour le processus), si bien qu'il est alors possible d'assimiler le comportement à celui d'un système continu.

3. Système invariant

Système invariant ***Définition***

Un système invariant est un système dont le **comportement** est **indépendant du temps**.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et $t_2 = t_1 + \tau$), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.



Invariance dans le temps

Modélisation des SLCI

1. Introduction

Pour les systèmes automatisés réels, on se ramène au cas des SLCI en faisant des **hypothèses simplificatrices**. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées et d'affiner celui-ci si nécessaire.

Pour modéliser un SLCI, il est nécessaire de déterminer une équation reliant l'entrée $e(t)$ (ou les entrées) et la sortie $s(t)$. Dans tout ce qui suit, l'entrée e et la sortie s sont quelconques : elles peuvent être des tensions, des vitesses, des positions, des forces, etc... Elles ne sont pas non plus nécessairement de même dimension.

Fondamental

Sous les hypothèses de continuité, de linéarité et d'invariance dans le temps, la relation de comportement d'un système peut se mettre sous la forme d'une **équation différentielle linéaire à coefficients constants**. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.

Deux types de modélisation

Pour obtenir cette équation, deux types de modélisation sont envisageables :

- un **modèle de connaissance** établi à partir de lois physiques permet d'aboutir généralement à une telle équation. L'équation obtenue peut être plus ou moins complexe en fonction du système.
- à l'inverse, à partir d'un résultat expérimental sur une partie du système, il est possible de proposer un modèle simple dit **modèle de comportement** d'un constituant qui sera ensuite utilisé dans le modèle global du système. C'est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une "boîte noire".

2. Systèmes modélisables par un gain pur

La grande majorité des systèmes peuvent être modélisés par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie :

$$s(t) = K\ e(t)$$

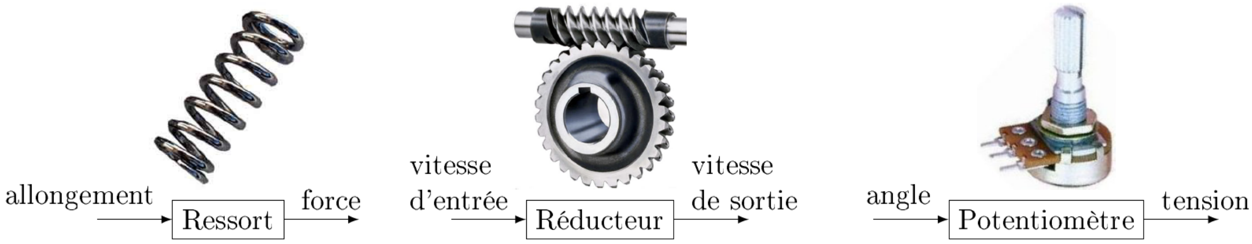
La constante de proportionnalité est alors appelée le **gain** du système.

Remarque

Dans ce type de système, l'entrée et la sortie peuvent être inversées : il n'y a pas de notion de causalité.

On peut ainsi modéliser par une constante les composants suivants :

- ceux qui transmettent l'énergie sans changer sa nature : les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou...),
- ceux qui distribuent l'énergie : préactionneurs (variateur),
- les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique)...



Exemples de systèmes modélisables par un gain pur

Gain d'un ressort

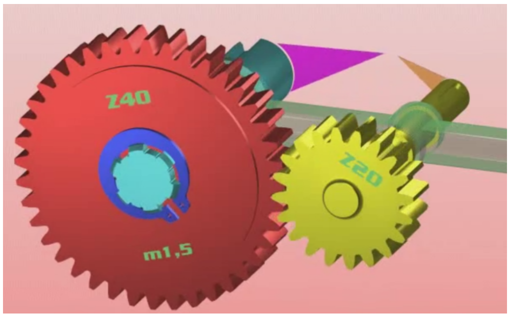
Exemple

La relation reliant la force exercée sur le ressort $F(t)$ (sortie) à l'allongement $\Delta x(t)$ (entrée) est donnée par la relation : $F = k\ \Delta x$ où k est la **raideur** du ressort. Le **gain K** du système est alors égal à k.

Gain d'un réducteur de vitesse à engrenages

Exemple

On cherche à déterminer le rapport entre les vitesses angulaires (en tour/mn ou rad/s) des roues dentées ou la relation $\omega_2(t) = K\ \omega_1(t)$.



La petite roue possède Z_1 dents (20 dents) et la grande roue en possède Z_2 (40 dents).

On observe que la petite roue tourne plus vite que la grande roue. Ainsi lorsque la petite roue tourne d'un tour, elle pousse Z_1 dents de la grande roue qui ne tourne alors que de Z_1/Z_2 tour.

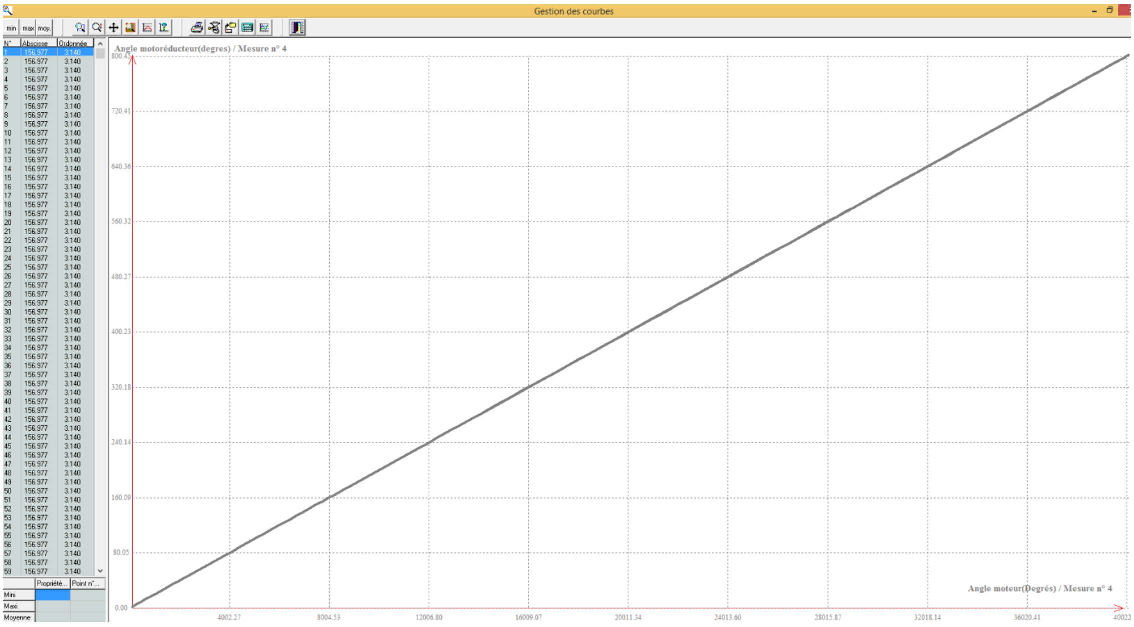
Le rapport de transmission entre les rotations est donc de Z_1/Z_2.

On a alors (au signe près) pour les vitesses de rotation : $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{Z_1}{Z_2}$

Le **gain K** du système est alors égal à Z_1/Z_2.

En Travaux Pratiques : cordeuse de raquettes

Exemple



Courbe caractéristique du réducteur de la cordeuse de raquettes

3. Systèmes modélisables par un intégrateur

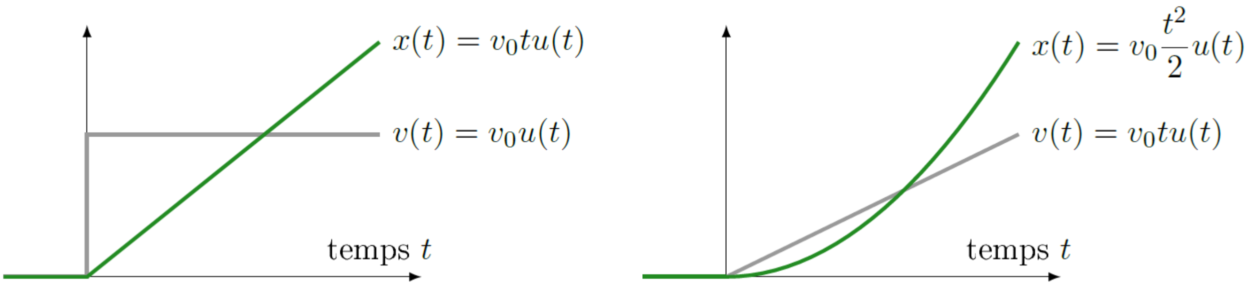
Fondamental

Une relation fondamentale lors de la modélisation des systèmes mécaniques est la relation permettant de passer de la vitesse $v(t)$ à la position $x(t)$ (ou de l'accélération $a(t)$ à la vitesse $v(t)$) :

$$v(t) = \frac{d\ x(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

Ainsi la position $x(t)$ est donnée par la relation : $x(t) = \int_0^t v(t)\ dt$.

Réponse temporelle à une entrée en échelon, et en rampe.



Réponse temporelle de la position pour une entrée en vitesse donnée

En supposant que les conditions initiales sont nulles :

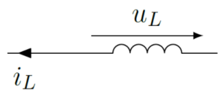
- quand la vitesse est constante, la position est une droite
- quand la vitesse est une droite, la position est une parabole.

On notera que pour $t \leq 0$, la position est nulle.

D'autres systèmes sont modélisables par un intégrateur :

Domaine électrique *Exemple*

Relation entre le courant et la tension dans une bobine : $u_L(t) = L\dfrac{d\,i(t)}{dt}$ (avec L l'**inductance** de la bobine)



Domaine thermique *Exemple*

relation entre la température et la puissance fournie par un radiateur dans une pièce sans perte : $C\dfrac{d\,T(t)}{dt} = P_{recue}(t)$ (avec C la **capacité thermique** de la pièce, $P_{recue}(t) = \dfrac{U(t)^2}{R}$ où U est la tension d'alimentation du radiateur et R la résistance du radiateur)

Remarque

Même si on parle de relation intégrale, on utilise souvent la forme dérivée entre les paramètres afin de faire apparaître des équations différentielles.

4. Systèmes de premier ordre

4.1. Forme de l'équation différentielle

Forme de l'équation différentielle *Définition*

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

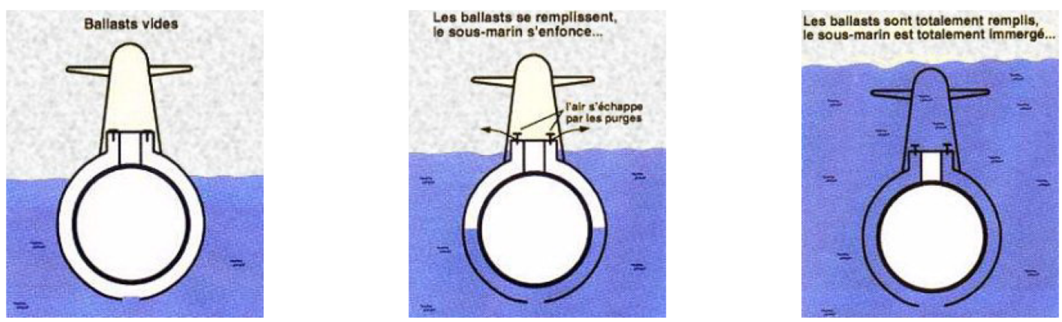
$$\tau\,\frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = K\,e(t)$$

avec :

- τ la **constante de temps** du système (en secondes)
- K le **gain statique** du système (unité [s]/[e])

Sous-marin *Exemple*

Pour s'immerger ou remonter à la surface, les sous-marins utilisent des ballasts qui peuvent être plus ou moins remplis d'eau ou d'air. La poussée d'Archimède est alors modifiée et permet de ne plus s'opposer au poids du sous-marin et ainsi de gérer le déplacement vertical du sous-marin.



Principe d'immersion d'un sous-marin à ballast

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au sous-marin soumis à la poussée d'Archimède, à la pesanteur et aux frottements visqueux de l'eau, s'écrit :

$$m \frac{d\,v(t)}{dt} = -f\,v(t) + P\,a(t) - m\,g$$

On pose $P(t) = Pa(t) - mg$ la force permettant de gérer la vitesse verticale du sous-marin. On obtient alors une équation différentielle du premier ordre entre l'entrée $P(t)$ et la sortie $v(t)$:

$$\frac{m}{f} \frac{d\,v(t)}{dt} + v(t) = \frac{P(t)}{f}$$

Nous pouvons ainsi définir la constante de temps du système $\tau = \frac{m}{f}$ et le gain $K = \frac{1}{f}$.

Chauffage d'une pièce ***Exemple***

Le comportement d'une pièce chauffée dont les murs sont mal isolés peut être décrit par les équations suivantes :

- équation de la chaleur du système pièce : $C \frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - P_{perdue}(t)$
- puissance fournie par le radiateur : $P_{recue}(t) = \frac{U^2(t)}{R}$
- pertes de puissance à travers les murs : $P_{perdue}(t) = h\,(T(t) - T_{ext}(t))$

En combinant ces équations pour ne faire apparaître que la température de la pièce T et les grandeurs externes au système (température extérieure T_{ext} et puissance reçue dépendant de la tension de commande des radiateurs $U(t)$), on obtient la relation :

$$C \frac{dT(t)}{dt} = P_{recue}(t) - h\,(T(t) - T_{ext}(t))$$

soit

$$C \frac{dT(t)}{dt} + h\,T(t) = P_{recue}(t) + h\,T_{ext}(t)$$

Ainsi on trouve également une équation différentielle du premier ordre, de constante de temps $\tau = \frac{C}{h}$.

Sachant qu'il y a deux entrées et que l'équation est linéaire, on étudiera par **superposition** la réponse à l'entrée $U(t)$ d'une part puis à l'entrée $T_{ext}(t)$ d'autre part.

Remarque

La résolution de l'équation différentielle est habituellement obtenue (cf. mathématiques) en sommant :

- une solution particulière $s_p(t)$ qui caractérise le comportement du système pendant le régime permanent ou établi et qui est de la même forme que l'entrée du système
- une solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) $s_g(t)$ qui correspond au comportement du système pendant le régime transitoire.

En Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, nous utiliserons la *transformée de Laplace* pour obtenir **si nécessaire** l'expression de la sortie du système $s(t)$.

4.2. Réponse impulsionnelle (i.e. à un Dirac)

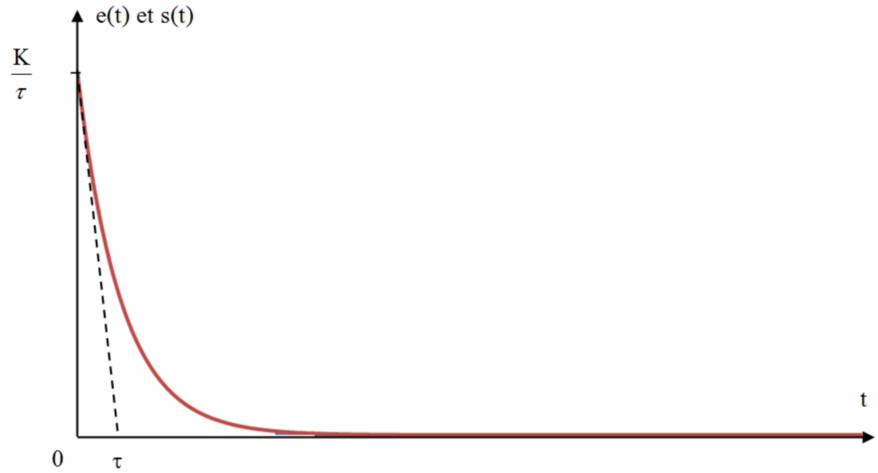
Réponse impulsionnelle — *Définition*

La réponse **impulsionnelle** est celle du système à une entrée $e(t) = \delta(t)$.

La réponse temporelle à une entrée de type distribution de Dirac (réponse impulsionnelle) d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = \frac{K}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

Allure de la réponse impulsionnelle — *Fondamental*



Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables — *Fondamental*

- Pour $t = \tau : s(\tau) = \frac{K}{\tau}(1 - 0.63)$
- Pour $t = 3 \cdot \tau : s(3\tau) = \frac{K}{\tau}(1 - 0.95)$
- La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses pour $t = \tau$.

4.3. Réponse indicielle (i.e. à un échelon)

Réponse indicielle — *Définition*

La réponse **indicielle** est celle du système à une entrée $e(t) = e_0\ u(t)$, avec :

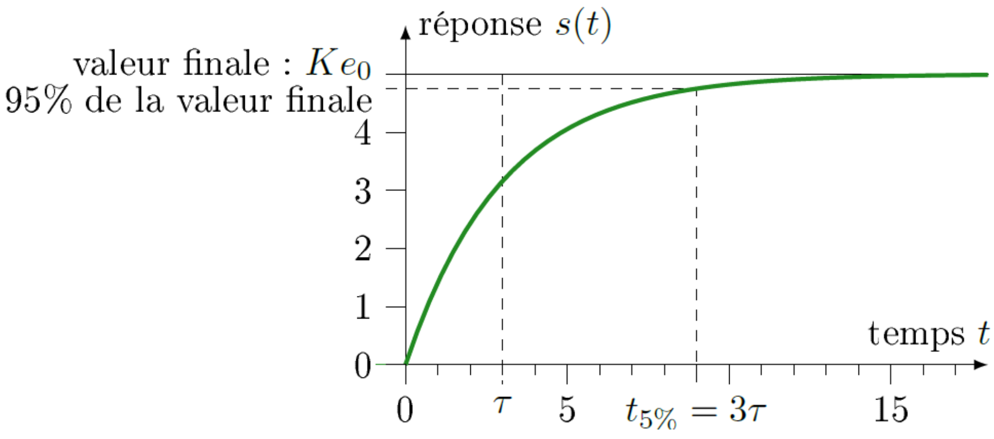
- e_0 : amplitude constante
- $u(t)$: fonction échelon

La réponse temporelle à une entrée en échelon (réponse indicielle) d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right] u(t)$$

Allure de la réponse indicielle

Fondamental

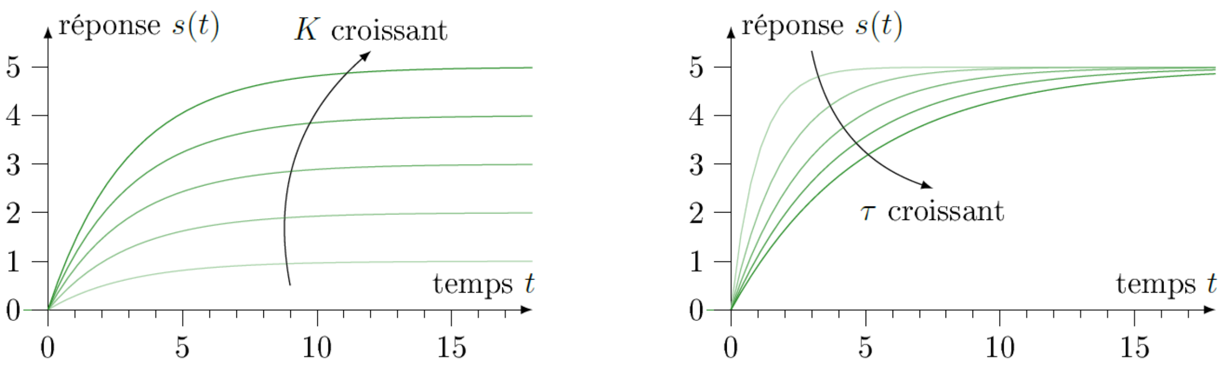


Réponse indicielle d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables

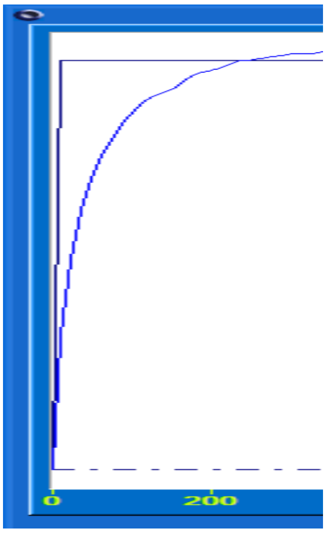
Fondamental

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\,e_0$
- Pour $t = \tau$, la réponse atteint environ **63%** de la valeur finale car $s(\tau) = K\,e_0\,(1 - e^{-1}) = 0.6321\ s_\infty$
- Pour $t = 3\tau$, la réponse atteint **95%** de la valeur finale car $s(3\tau) = K\,e_0\,(1 - e^{-3}) = 0.9502\ s_\infty$; **on a donc** $t_{r5\%} = 3\tau$.
- La réponse indicielle **ne présente pas d'oscillations**. En effet, $s'(t) = \dfrac{Ke_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) > 0\ \forall t$, donc $s(t)$ est **strictement croissante**.
- La **pente de la tangente à l'origine est non nulle** : $s'(0) = \dfrac{Ke_0}{\tau}$
- Plus τ est élevée, plus le système est lent.



Influence des paramètres du modèle du premier ordre sur la réponse indicielle

En travaux pratiques : articulation de bras robot Maxpid — *Exemple*



Réponse indicielle du moteur du Maxpid

4.4. Réponse à une rampe

Réponse à une rampe — *Définition*

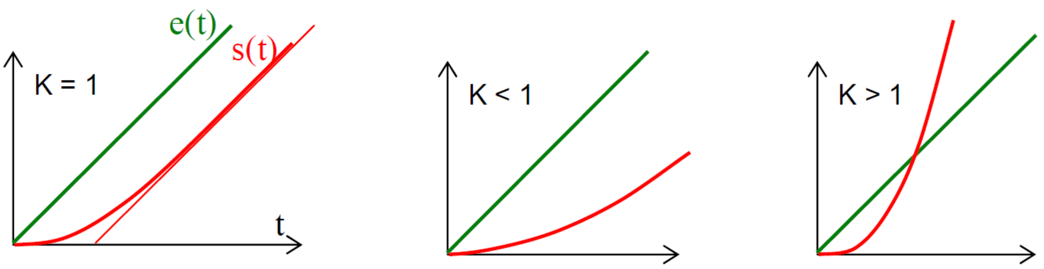
La réponse **à une rampe** est celle du système à une entrée $e(t) = a_0\ t\ u(t)$, avec :

- a_0 : pente constante
- $u(t)$: fonction échelon

La réponse temporelle à une entrée de type rampe d'un système du premier ordre est :

$$s(t) = K\ a_0\ \left(t - \tau + \tau\ e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)\ u(t)$$

Réponse à une rampe — *Fondamental*



Réponse à une rampe d'un système de premier ordre

Tracé et propriétés remarquables — *Fondamental*

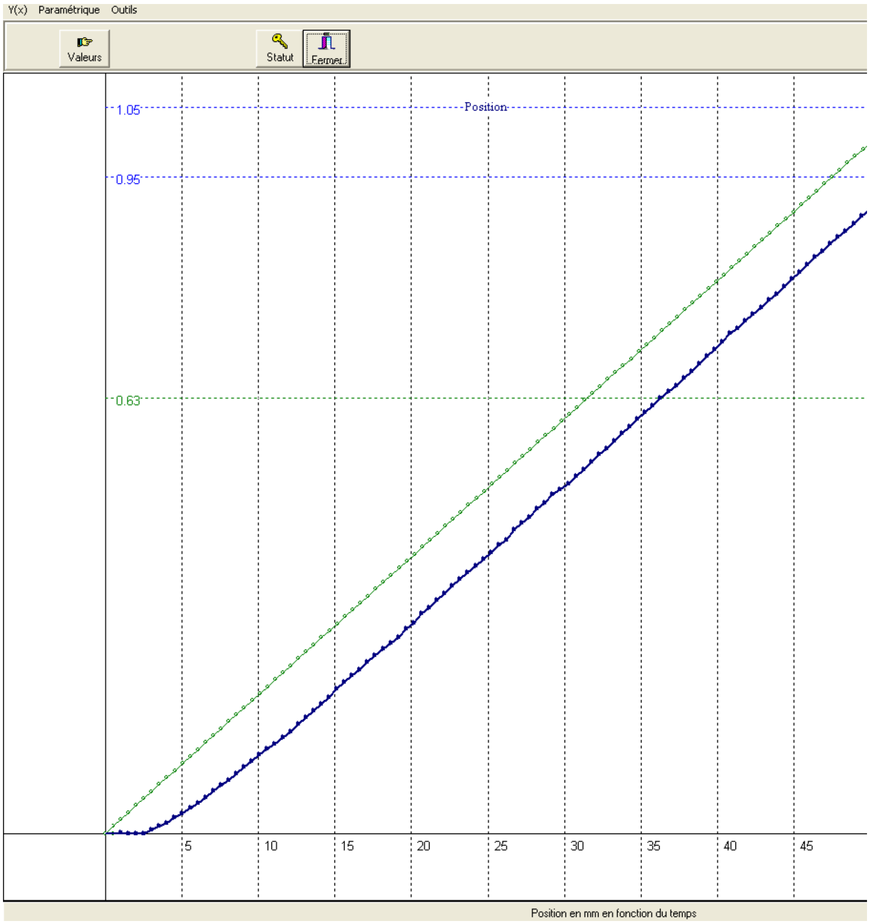
- La valeur finale (valeur asymptotique) est : $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = \lim\limits_{t\to\infty} K\ a_0\ \left(t - \tau + \tau\ e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)\ u(t) = +\infty$
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle** : $s'(0) = K\ a_0\ \left(1 - e^{-\dfrac{0}{\tau}}\right) = 0$
- Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme $\tau\ e^{-\dfrac{t}{\tau}}$ tend vers 0 ; ainsi l'asymptote de la réponse est $y(t) = K\ a_0\ (t - \tau)$.

Cette droite est de pente $K\ a_0$, et coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.

- Suivant la valeur du gain statique $K\ a_0$, la sortie peut "suivre" la rampe de l'entrée (avec un écart non nul mais constant), ou s'en écarter continuellement.

(se reporter à la version web de ce cours pour observer l'animation)

En travaux pratiques : plateforme six axes Stewart — *Exemple*



Réponse du moteur de la tige de vérin de la plateforme Stewart

5. Systèmes de second ordre

5.1. Forme de l'équation différentielle

Définition

La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du second ordre est :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\ e(t)$$

avec :

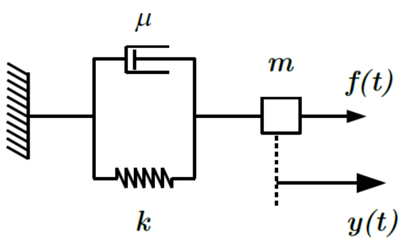
- ω_0 la pulsation propre (non amortie) en rad/s
- m le coefficient d'amortissement, **positif et sans unité**
- K le gain statique (unité [s]/[e])

Remarque

Le coefficient d'amortissement peut être décrit par d'autres lettres : ξ, ζ, ϵ ou z. Le but est surtout d'**éviter la confusion** avec une autre grandeur qui pourrait avoir la même notation.

Mouvement d'une roue par rapport au châssis d'un véhicule **Exemple**

La roue d'un quad est reliée au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et d'un ressort montés en parallèle. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle. On note $f(t)$ la force exercée sur la masse m, et $y(t)$ la position de cette masse par rapport à la position d'équilibre.



Modélisation d'une des deux suspensions arrière du quad

En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique sur la masse m soumise à l'action du ressort ($-k\ y(t)$), de l'amortisseur ($-\mu\ \dot{y}(t)$) et à la force $f(t)$, on obtient l'équation :

$$m\ \ddot{y}(t) + \mu\ \dot{y}(t) + k\ y(t) = f(t)$$

En posant $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}, \frac{2m}{\omega_0} = \frac{\mu}{k}$ et $K = \frac{1}{k}$, l'équation correspond à celle d'un système de second ordre :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{y}(t) + \frac{2m}{\omega_0}\dot{y}(t) + y(t) = K\ f(t)$$

Remarque

Lors de la résolution "mathématique traditionnelle" (solution particulière + solution homogène) de l'équation du système de second ordre, on obtiendra différents résultats suivant la valeur de m. En effet, les racines - notées p_1 et p_2 - du polynôme caractéristique associé à l'équation homogène pourront être :

- différentes et réelles si $m > 1$
- identiques et réelles ("racine double") si $m = 1$
- complexes conjuguées si $m < 1$

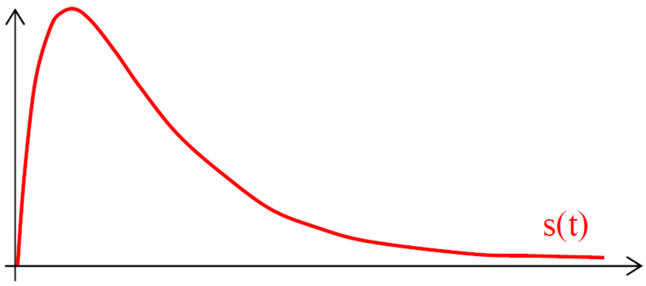
Les réponses d'un système de second ordre seront donc différentes suivant la valeur du coefficient d'amortissement m.

5.2. Réponse impulsionnelle

a) m > 1 : régime apériodique (ou amorti)

Si l'amortissement m est suffisamment grand (> 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right) u(t)$$



Réponse impulsionnelle d'un second ordre amorti

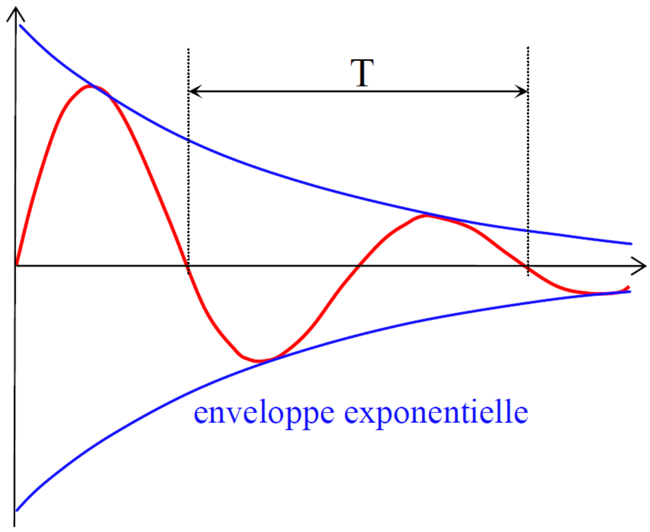
b) m = 1 : régime critique

L'allure de la réponse obtenue sera comparable à celle du régime apériodique. Il sera en revanche impossible dans la réalité d'avoir m exactement égal à 1.

c) m < 1 : régime pseudo-périodique

Si l'amortissement m est trop faible (< 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\ \omega_0\ t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2}\ t\right) u(t)$$



Réponse impulsionnelle d'un second ordre oscillant

La pseudo-période des oscillations vaut $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$.

Cas où m=0 (pas d'amortissement) — *Remarque*

L'allure de la réponse obtenue serait une sinusoïde de pulsation ω_0.

5.3. Réponse indicielle

Réponse indicielle — *Définition*

La réponse **indicielle** est celle du système à une entrée $e(t) = e_0\ u(t)$, avec :

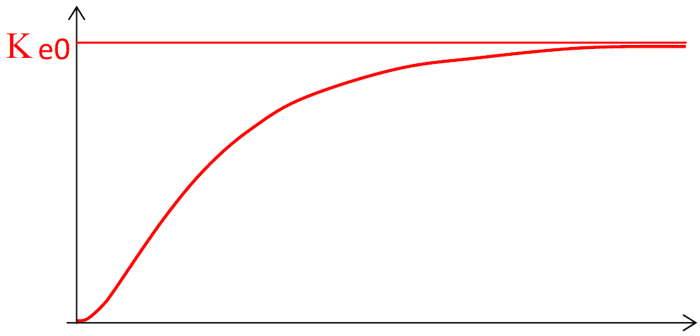
- e_0 : amplitude constante
- $u(t)$: fonction échelon

a) m > 1 : régime apériodique (ou amorti)

Si l'amortissement m est suffisamment grand (> 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = K\,e_0 \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\,e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2}\,e^{p_2 t}\right) \cdot u(t)$$
$$= K\,e_0 \left[1 + \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right] u(t)$$

Réponse indicielle si m>1 *Fondamental*

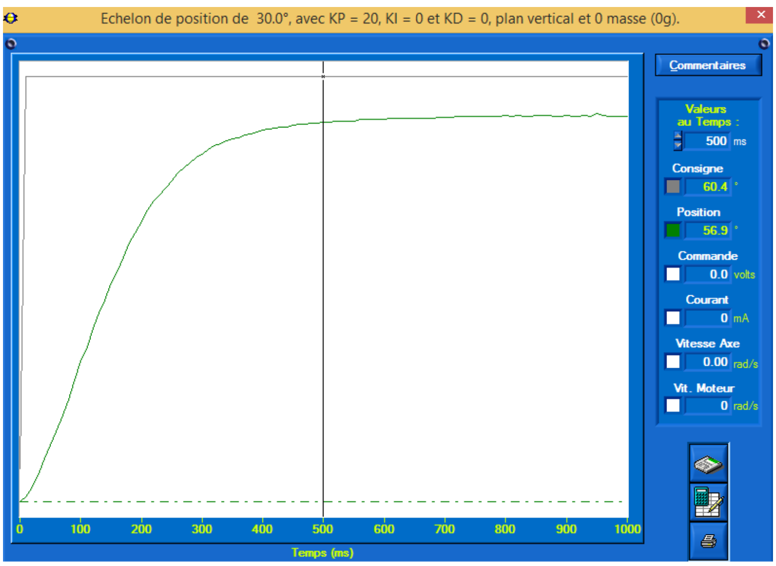


Réponse indicielle d'un système de second ordre amorti

Tracé et propriétés remarquables *Fondamental*

- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\,e_0$
- La réponse indicielle **ne présente pas d'oscillations ni de dépassement**.
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle** : $\lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{t\to 0} K\,e_0 \left[\frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)\right] u(t) = 0$
- Plus m est **proche de 1**, plus le système est **rapide**.

Réponse indicielle de l'articulation de bras Maxpid *Exemple*



Complément

Avec $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$, l'expression $s(t) = K\ e_0 \left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\ e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2}\ e^{p_2 t}\right) \cdot u(t)$ devient $s(t) = K\ e_0 \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}\ e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\ e^{-t/\tau_2}\right) \cdot u(t)$

Cela permet d'assimiler la réponse du système à celle d'un premier ordre si $\tau_1 \gg \tau_2$

b) m = 1 : régime critique

La solution complète est $s(t) = K\ e_0[1 - (\omega_0\ t + 1)e^{-\omega_0\ t}]\ u(t)$.

Fondamental

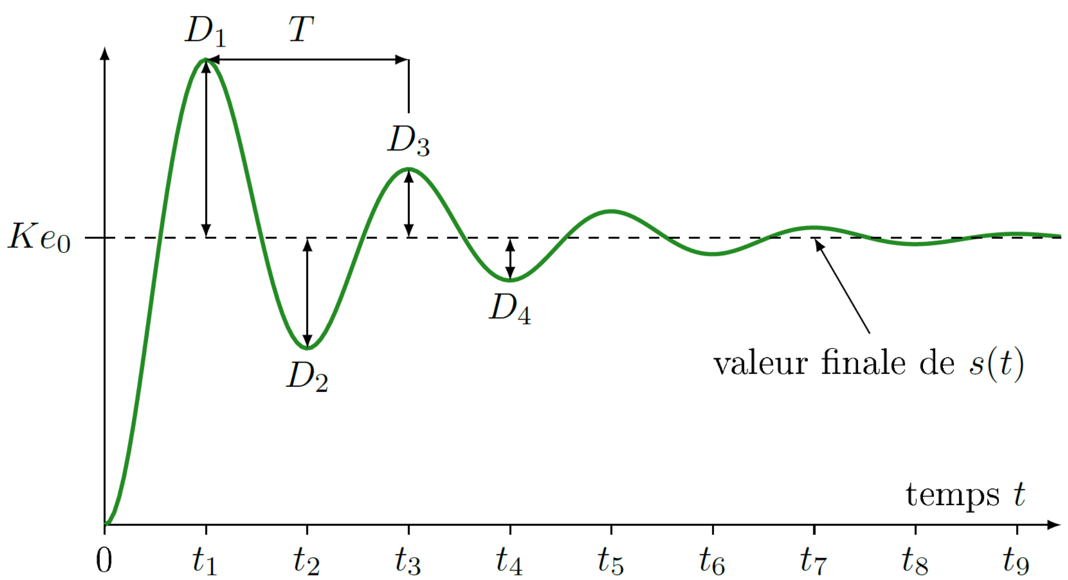
Les propriétés sont identiques à celles du régime apériodique, le régime critique étant le cas limite quand $m \to 1$. Il sera en revanche impossible dans la réalité d'avoir m exactement égal à 1.

c) m < 1 : régime pseudo-périodique

Si l'amortissement m est trop faible (< 1), alors la réponse du système de second ordre est de la forme :

$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - m^2}\ t + \arccos m\right)\right]$$

Réponse indicielle si m<1 — **Fondamental**



Réponse indicielle d'un système de second ordre sous-amorti

Tracé et propriétés remarquables — **Fondamental**

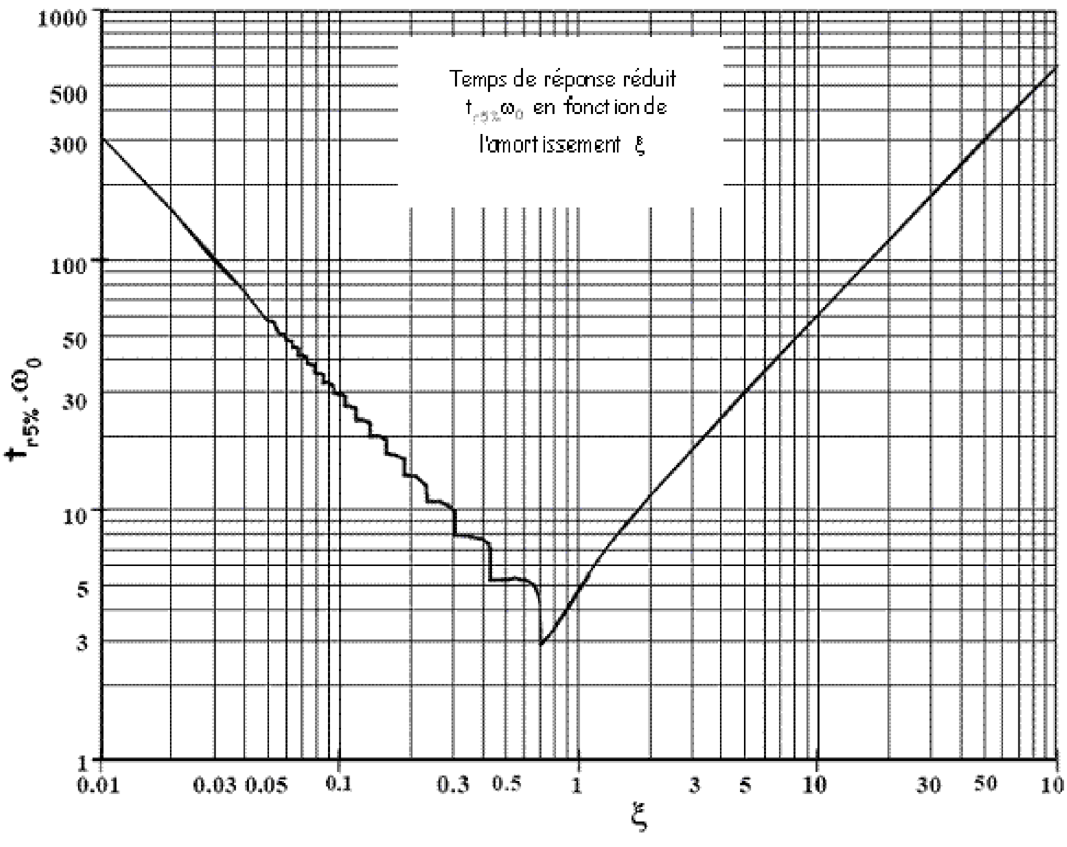
- La valeur finale (valeur asymptotique) est $s_\infty = K\ e_0$
- La réponse **présente des oscillations**. On note :
  - $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ la pseudo-pulsation
  - $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$ la pseudo-période

- La réponse **présente des dépassements**. Ils sont caractérisés par :
  - l'instant du k^{eme} dépassement : $t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$
  - le k^{eme} dépassement relatif $D_k^{\%} = \left|\dfrac{s(t_k) - s(\infty)}{s(\infty)}\right| = e^{\dfrac{-k\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$
- La **pente de la tangente à l'origine est nulle**

Temps de réponse d'un système de second ordre — ***Remarque***

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement m et de la pulsation propre non amortie du système ω_0. On utilise alors un *abaque* *(cf. p.23)* (fourni par les énoncés) donnant la valeur du temps de réponse réduit $t_{5\%} \cdot \omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement m.

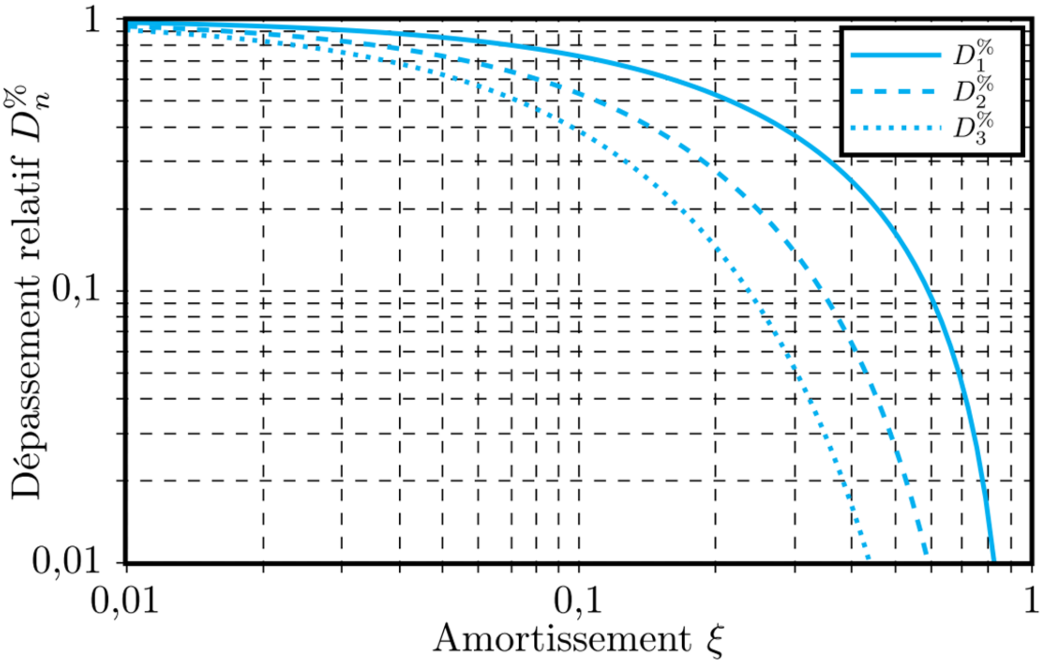
Le temps de réponse à 5% le plus faible est cependant obtenu pour $m = 0.69$. En effet, pour cette valeur, le premier dépassement relatif vaut $D_1^{\%} \approx 0.05$.



Abaque temps de réponse réduit pour second ordre

Évolution des dépassements en fonction de l'amortissement *Remarque*

Les dépassements relatifs **ne dépendent que de m** !



Abaque des dépassements relatifs selon l'amortissement

Évolution de la réponse indicielle d'un second ordre suivant le coefficient d'amortissement *Complément*

(Se reporter à la version web du cours afin d'accéder à l'animation)

Dans l'animation, le coefficient d'amortissement est désigné par la lettre ξ et non m.

5.4. Réponse à une rampe

De manière similaire au système de premier ordre, la valeur de K conditionne la tendance de la réponse.

Si $K = 1$, la réponse restera parallèle à la rampe de l'entrée, et la valeur du coefficient d'amortissement aura les influences suivantes :

- la présence ou non d'oscillations ($m < 1$ ou $m > 1$)
- l'écart entre la rampe d'entrée et la rampe asymptotique de la réponse.

6. Différentes modélisations d'un même système

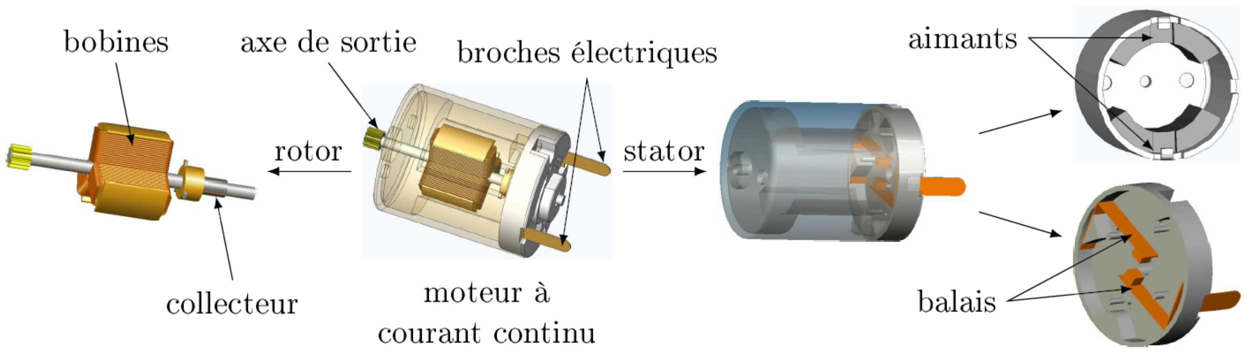
On peut adopter différentes modélisations d'un même système ; par exemple le moteur à courant continu.

6.1. Description d'une machine à courant continu

Une machine à courant continu est un convertisseur électro-mécanique composée généralement :

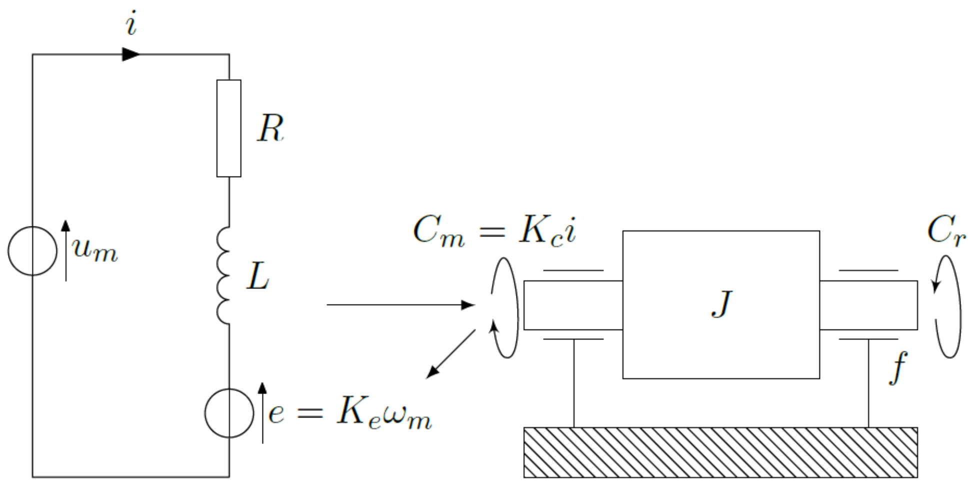
- d'aimants permanents sur le stator (puissance faible) ou d'un inducteur bobiné (forte puissance)
- d'un bobinage au rotor soumis à une tension continue

Un collecteur à balais permet d'alimenter une partie du bobinage du rotor de façon à ce que la force de Laplace exercée sur les conducteurs impose un couple moteur sur le rotor (action mécanique ayant tendance à faire tourner le rotor).



Architecture d'une machine à courant continu

La machine à courant continu est le siège de phénomènes électriques, magnétiques et mécaniques :



Modélisation électrique et mécanique d'une machine à courant continu

La modélisation des phénomènes conduit aux équations suivantes :

- $u_m(t) = R\ i(t) + L\ \dfrac{di(t)}{dt} + E(t)$ (loi des mailles)
- $J\ \dfrac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\ \omega_m(t)$ (principe fondamental de la dynamique)
- $e(t) = K_e\ \omega_m(t)$ (couplage électromagnétique)
- $C_m(t) = K_c\ i(t)$ (couplage électromagnétique)

avec :

R : résistance du bobinage d'induit

L : inductance du bobinage d'induit

U_m : tension aux bornes de la machine à courant continu

i : intensité du courant absorbé par la machine

E : force contre-électromotrice due à la rotation

J : inertie mécanique à vaincre par la machine

f : frottement visqueux

C_m : couple électro-magnétique exercé par le stator sur le rotor

C_r : couple résistant en sortie

ω_m : vitesse de rotation

K_e et K_c : constantes de couplage électro-magnétique ($K_c = K_e$ généralement)

6.2. Différents niveaux de modélisation

Inductance négligée

Si l'on considère que l'établissement du régime permanent dans le circuit électrique est bien plus rapide que l'établissement du régime permanent mécanique, on néglige l'inductance L et l'on obtient :

$$u_m(t) = K\ \omega_m(t) + \frac{R}{K}\left(J\ \frac{d\omega_m(t)}{dt}\right)$$

Cela correspond à un système de premier ordre.

Inductance non négligée

En revanche, si L n'est pas négligée :

$$u_m(t) = K\ \omega_m(t) + \frac{R}{K}\left(J\ \frac{d\omega_m(t)}{dt}\right) + \frac{L}{K}\left(J\ \frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2}\right)$$

Cela correspond à un système de second ordre.

Angle de rotation

Par ailleurs, si l'on souhaite obtenir l'angle θ_m plutôt que la vitesse ω_m pour traduire le mouvement de rotation du rotor, cela donne (avec $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$) :

$$u_m(t) = K\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \frac{R}{K}\left(J\ \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}\right) + \frac{L}{K}\left(J\ \frac{d^3\theta_m(t)}{dt^3}\right)$$

Cela correspond à un système de troisième ordre.

Remarque

L'**ordre** de l'équation différentielle d'un système dépendra :

- du choix de l'entrée et de la sortie
- de la **finesse** de la modélisation

Tout n'est que question de compromis : c'est la **comparaison** entre le **modèle** et des **résultats expérimentaux** qui validera les choix adoptés.