Στοιχεία Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων (5ου εξαμήνου, χειμερινό 2013-14)

Τμήμα Τ3: Κ. Κορδάς & Χ. Πετρίδου

Μάθημα 6

β-διάσπαση – Β' μέρος
(διατήρηση σπίν, parity, επιτρεπτές και απαγορευμένες διασπάσεις)

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σήμερα

- **β-διάσπαση -** διατήρηση σπίν, parity, επιτρεπτές και απαγορευμένες διασπάσεις
  - Βιβλίο C&G:

    Κεφ. 4, παρ. 4.6.,

    Κεφ. 2, παρ. 2.4-2.6 (σελ. 31-35),

    Κεφ. 12, παρ. 12.1, παρ 12.6 (σελ. 194-195)
  - Σημειώσεις Πυρηνικής, Κεφ. 5, παρ. 5.2, 5.2.1 – 5.2.3, και ειδικά για σήμερα σελ. 40-41

- **Ιστοσελίδα:** http://www.physics.auth.gr/course/show/125

Κοιλάδα β-σταθερότητας

Σχήμα 4.6 στο βιβλίο σας

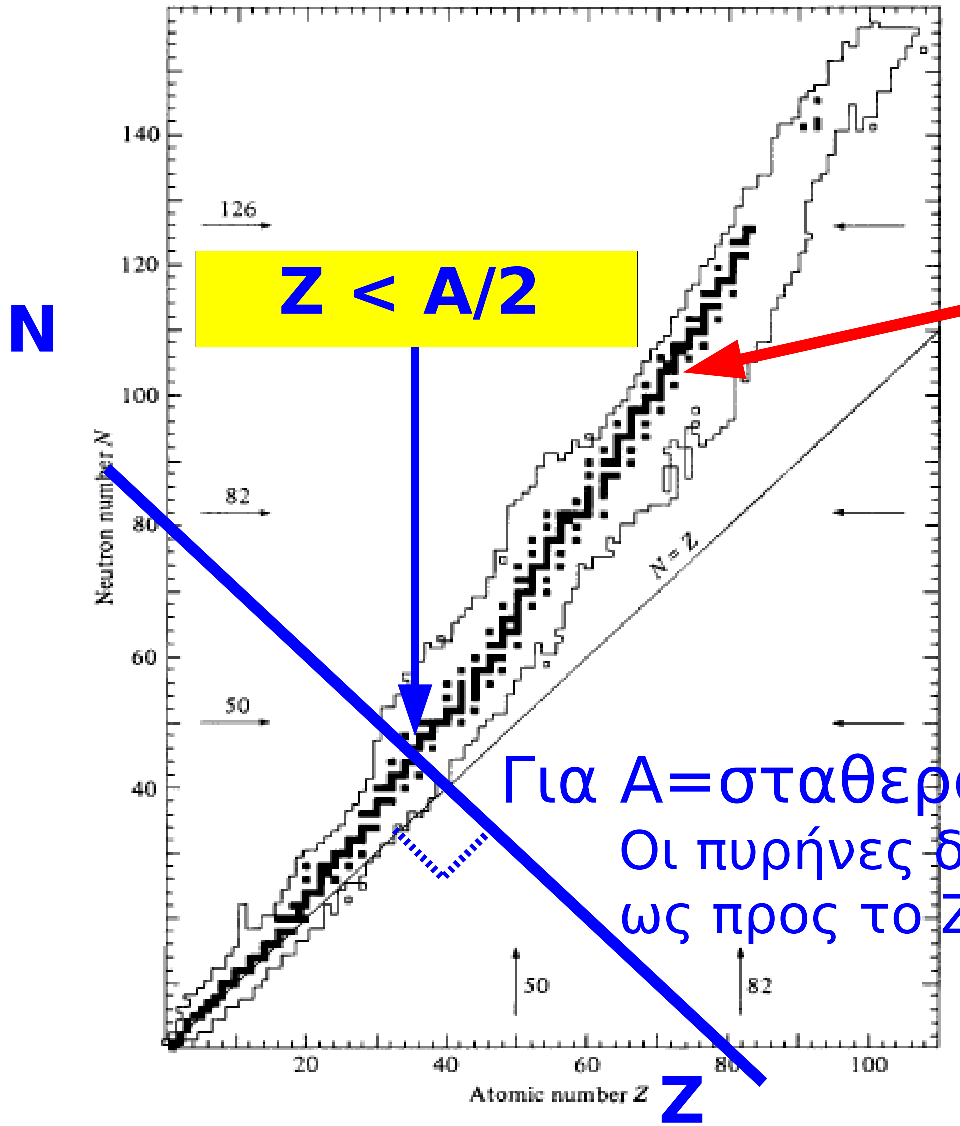
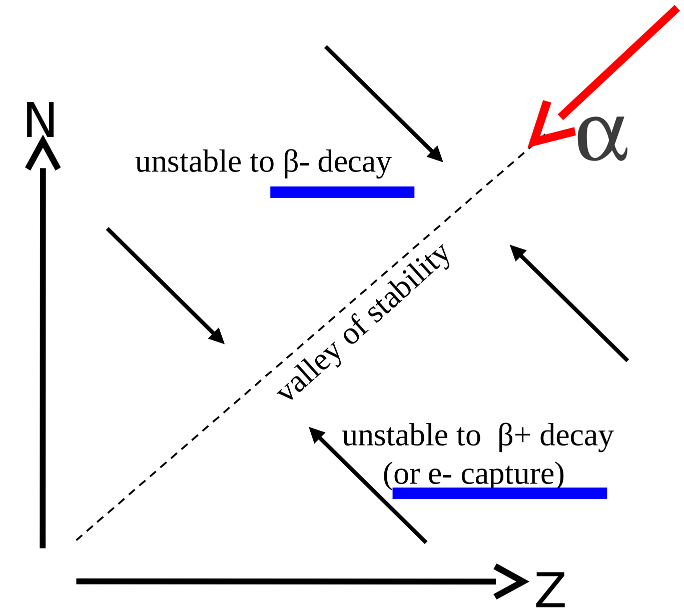


Fig. 4.6 The *β*-stability valley. Filled squares denote the stable nuclei and long-lived nuclei occurring in nature. Neighbouring nuclei are unstable. Those for which data on masses and mean lives are known fill the area bounded by the lines. For the most part these unstable nuclei have been made artificially. (Data taken from *Chart of the Nuclides* (1977), Schenectady: General Electric Company.)

Για A=σταθερό:

Οι πυρήνες διαφέρουν ως προς το Z (και N)

- Για κάθε A, τα β-σταθερά νουκλίδια είναι στη μαύρη ζώνη (“κοιλάδα σταθερότητας” - “valuey of stability”). Αυτά που είναι μακρυά απ'την κοιλάδα, πάνε προς αυτήν με διασπάσεις β^+ (= e^+) ή β^- (= e^-)



β-διασπάσεις: ενεργειακές συνθήκες

β⁻ $\quad {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + e^{-} + \bar{\nu}_e$

β⁺ $\quad {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z-1}Y + e^{+} + \nu_e$

EC $\quad {}^{A}_{Z}X + e^{-} \to {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_e$

➔

$n \to p + e^{-} + \bar{\nu}_e$

$p \to n + e^{+} + \nu_e$

$p + e^{-} \to n + \nu_e$

1) Ενεργειακή συνθήκη β⁻ :

Σημείωση: $M_{\text{ατόμου}}({}^{A}_{Z}X) = \mathbf{M}(A,Z)$

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+1}Y + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Θα πρέπει Q>0 → $Q = (M(A,Z) - M(A,Z+1) - m_\nu)c^2$

$$\approx \boxed{(M(A,Z) - M(A,Z+1))c^2 \geq 0,}$$

2) Ενεργειακή συνθήκη β⁺ :

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z-1}Y + e^{+} + \nu_e$$

$$Q = (M_P - M_D - m_e - m_\nu)c^2$$

$$= (M(A,Z) - M(A,Z-1) - 2\,m_e - m_\nu)c^2$$

$$\approx \boxed{(M(A,Z) - M(A,Z-1) - 2\,m_e)c^2}$$

3) Ενεργειακή συνθήκη σύλληψης ηλεκτρονίου (EC, “K-σύλληψη”):

$${}^{A}_{Z}X + e^{-} \to {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_e$$

$$Q = (M_P + m_e - M_D - m_\nu)c^2$$

$$= (M(A,Z) - M(A,Z-1) - m_\nu)c^2$$

$$\approx \boxed{(M(A,Z) - M(A,Z-1))c^2 \geq 0.}$$

β-διάσπαση:
εκτός από το να έχουμε
διατήρηση φορτίου και ενέργειας,
έχουμε κι άλλες συνθήκες:
διατήρηση σπιν και πάριτυ

που είναι κβαντικοί αριθμοί,
οπότε ας δούμε λίγο τι είναι αυτοί

Εξίσωση Schroedinger, κυματοσυναρτήσεις, στροφορμή, σπίν και παριτυ

Το σωματίδιο ως κύμα - κυματοσυνάρτηση

- **De Broglie:**

$$E = h f \to E = \hbar \omega \to \omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \to p = \hbar k \to k = \frac{p}{\hbar}$$

- Ένα κύμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα επίπεδων κυμάτων σαν κι αυτό:

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} = e^{i(px - Et)/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi \to i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{ip}{\hbar} \psi \to -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi = p \psi$$

“Τελεστής” ενέργειας
= μια “πράξη” πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ, που δίνει πάλι την ψ, αλλά πολλαπλασιασμένη με την ενέργεια E.
Η E είναι μια ιδιοτιμή της ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιο-συνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

“Τελεστής” ορμής

Περιγραφή ενός συστήματος με κυματοσυναρτήσεις

Έστω ψ μια κυματοσυμάρτηση που περιγράφει ένα σύστημα.

$$A\psi = \alpha\psi$$

"Τελεστής"
= μια "πράξη" πάνω στην κυματοσυνάρτηση ψ που αν δίνει πάλι την ψ, αλλά πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά α, τότε λέμε ότι
Το α είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή Α, και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Α

Παράδειγμα:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$$

"Τελεστής" ενέργειας

Η Ε είναι μια ιδιοτιμή του τελεστή ενέργειας, και η ψ είναι μια ιδιοσυνάρτηση του τελεστή της ενέργειας.

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi = p\psi$$

"Τελεστής" ορμής

Εξισώσεις Schroedinger

- Schroedinger: ψάχνει κυματική εξίσωση που ικανοποιεί:

$$E=\frac{p^2}{2\mathrm{m}} \qquad (\acute{o}\pi o\upsilon\ p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2)$$

$$E\psi=\frac{p^2}{2\mathrm{m}}\psi\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2\psi$$

Χρονοεξαρτώμενη Εξίσωση Schroedinger. την εφαρμόζουμε σε οποιαδήποτε συνάρτηση ψ

Όπου: $\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\equiv$ ο Λαπλασιανός τελεστής $=$η Λαπλασιανή

$|\psi|^2$ = πυκνότητα πιθανότητας = πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρούμε το σωματίδιο σε μιά περιοχή του χώρου

* Για να βρούμε την ενέργεια E, δεν βαζουμε τον τελεστη της ενέργειας, κι έτσι λύνουμε τη **χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schroendinger**:

$$E=\frac{p^2}{2\mathrm{m}}+V(\vec{r})\rightarrow E\psi=[\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2+V(\vec{r})]\psi\rightarrow\nabla^2\psi+\frac{2\mathrm{m}}{\hbar}(E-V(\vec{r}))\psi=0$$

$$H\psi=E\psi,\ \acute{o}\pi o\upsilon: H\equiv\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2+V(\vec{r})\equiv \text{ο Χαμιλτονιανός τελεστής} \equiv\text{η Χαμιλτονιανή}$$

$$H\equiv T+V=\kappa\iota\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}+\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{\eta}\ \varepsilon\nu\acute{\varepsilon}\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha$$

Ιδιοσυναρησεις και ιδιοτιμές ενέργειας από την εξίσωση Schroedinger

- Λύνουμε πρώτα τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schroedinger, και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές ενέργειας E_i και τις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_i(x)$ του συστήματος:

$$E=\frac{p^2}{2m}+V(\vec{r})\rightarrow E\psi=[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})]\psi\rightarrow \boxed{\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar}(E-V(\vec{r}))\psi=0}$$

- Κατόπιν βάζουμε και τη χρονική εξάρτηση κάθε ιδιοσυνάρτησης ως εξής:

$$\psi_i(x,t)=\psi_i(x)e^{-iE_it/\hbar}$$

- Μετά, οποιαδήποτε κυματοσυνάρτηση ψ που περιγράφει το σύστημά μας, μπορούμε να τη γράφουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ψ_i

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2+c_3\psi_3+\ldots$$

Εξίσωση Schroedinger για κεντρικά δυναμικά

- Η εξίσωση Schroedinger $$\nabla^2\psi+\frac{2\mathrm{m}}{\hbar}\left(E-V(\vec{r})\right)\psi=0$$

με κεντρικό δυναμικό $V(\vec{r})=V(r)$ [π.χ., το δυναμικό Coulomb -e²/r], όπου χωρίζουμε ακτινικό και γωνιακό μέρος κυματοσυνάρτησης:

$$\psi(\vec{r})=R(r)\,Y(\theta\,,\varphi)\,,\kappa\alpha\iota\ \ y=r\,R(r)$$

γίνεται: $$\frac{\partial^2}{\partial r^2}y+\frac{2\mathrm{m}}{\hbar}\left(E-V_l(r)\right)y=0$$

Οπότε έχουμε να λύσουμε την πιό πάνω μονοδιάστατη εξίσωση του Schroedinger, όπου το “ενεργό δυναμικό” είναι ίσο με το άθροισμα του κεντρικού δυναμικού κι ενός όρου στροφορμής

$$V_l(r)=V(r)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_e r^2}$$

Άτομο υδρογόνου με εξ. Schroedinger

- Λύση της εξίσωσης Schroedinger $\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar}(E - V(\vec{r}))\psi = 0$

  με το δυναμικό Coulomb: $V(\vec{r}) = V(r) = \frac{q_1 q_2}{r} = e\frac{(-e)}{r} = \frac{-e^2}{r}$

  και $\psi(\vec{r}) = R(r)Y(\theta, \varphi)$

  Παράδειγμα κεντρικού δυναμικού
  Όπου ΔΕΝ υπάρχει εξάρτηση από θ, φ

- Δίνει:

  συναρτήσεις R(r) και Y(θ,φ), όπου ψ = R(r) Y(θ,φ) είναι **ιδιοσυναρτήσεις**

  α) της Χαμιλτονιανής, με ιδιοτιμές ενέργειας $E = (\frac{1}{2} a^2 m c^2)\frac{1}{n^2}$

  β) του τελεστή **L**^{2} της τροχιακής στροφορμής με ιδιοτιμές:

  $\vec{L} = \vec{r} \, x \, \vec{p} = \vec{r} \, x \, (-i\hbar\nabla)$

  $όπου: \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

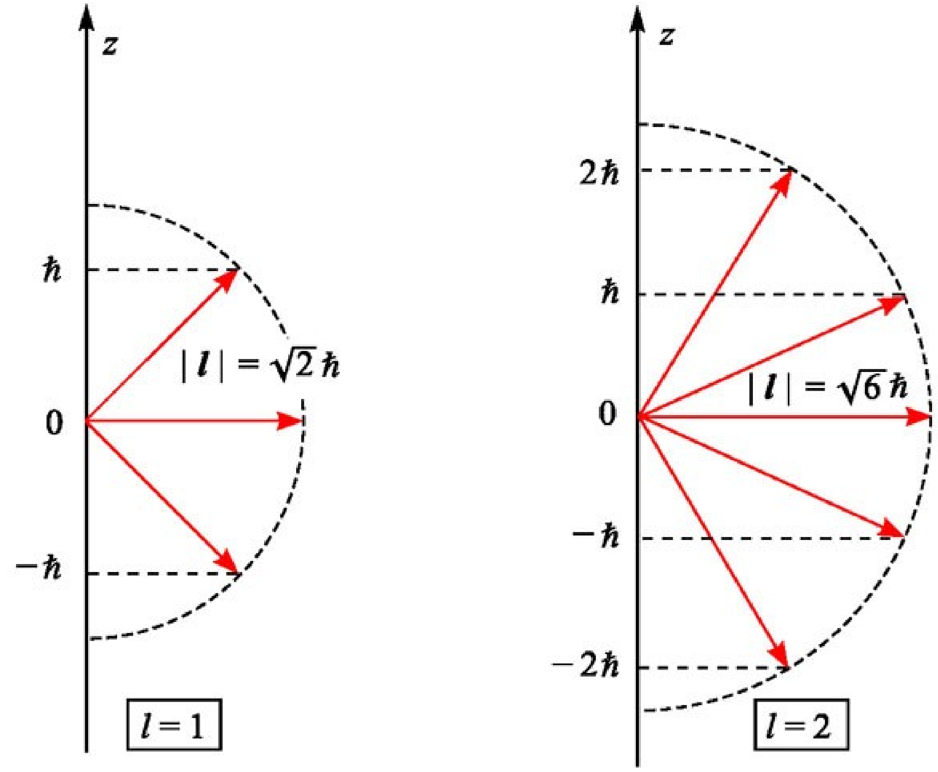
  $L^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}, \; όπου: l = 0, 1, \ldots, n-1$

  γ) του τελεστή L_z, προβολής της L σ'έναν άξονα, με ιδιοτιμές:

  $L_z Y_{lm} = m_l \hbar Y_{lm}, \; όπου: m_l = -l, \ldots, 0, \ldots l$

Ίδιες Y_{lm}, l, και m_l λύσεις για
ΟΛΑ τα κεντρικά δυναμικά

Κβάντωση στροφορμής



$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar\,,\ \text{όπου}: l=0,1,\ldots,n-1$$

Σχημα 9.9: *Το κβαντωμένο διάνυσμα της στροφορμής για* $\ell=1$ *και* $\ell=2$. Λόγω της κβάντωσης της προβολής του πάνω σε έναν άξονα, το «διάνυσμα» της στροφορμής —αν η σχεδίασή του ως διανύσματος έχει νόημα— μπορεί να έχει μόνο ορισμένους διάκριτους προσανατολισμούς στον χώρο. Φαινόμενο που αποδίδεται με τον όρο «κβάντωση προσανατολισμού» ή «κβάντωση χώρου». Σημειώστε επίσης —γιατί αυτό είναι το πιο *προκλητικό* από όλα— ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\ell}$ ουδέποτε ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z. Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του σε αυτόν τον άξονα σχηματίζει γωνία μαζί του αφού είναι πάντα $(\ell_z)_{\max} = \hbar\ell < |\boldsymbol{\ell}| = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$.

Άθροισμα στροφορμών: $$l_{z(1+2)}=l_{z(1)}+l_{z(2)}\ \kappa\alpha\iota\ |l_1-l_2|\le l_{1+2}\le |l_1+l_2|$$

Υδρογόνο: Ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις $R_{n\ell}(r)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.3. *Οι ακτινικές συναρτήσεις $R_{n\ell}$ μέχρι $n = 3$*

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$n = 1$	$R_{10} = 2e^{-r}$		
$n = 2$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r}{2}\right)e^{-r/2}$	$R_{21} = \frac{r}{2\sqrt{6}}e^{-r/2}$	
$n = 3$	$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - \frac{2r}{3} + \frac{2r^2}{27}\right)e^{-r/3}$	$R_{31} = \frac{8r}{27\sqrt{6}}\left(1 - \frac{r}{6}\right)e^{-r/3}$	$R_{32} = \frac{4r^2}{81\sqrt{30}}e^{-r/3}$

Υδρογόνο: Γωνιακές ιδιοσυναρτήσεις Υ(θ,φ)

ΠΙΝΑΚΑΣ 9.2. *Οι σφαιρικές αρμονικές μέχρι $\ell = 2$*

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = 2$			$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}$
$m = 1$		$Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$	$Y_{21} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{i\phi}$
$m = 0$	$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$
$m = -1$		$Y_{1,-1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}$	$Y_{2-1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{-i\phi}$
$m = -2$			$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{-2i\phi}$

Άτομο υδρογόνου με ενέργεια και στροφορμή

E, L^2, L_z είναι τελεστές που αντιμετίθονται με τη Χαμιλτονιανή, άρα τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη διατηρούνται, άρα
οι αριθμοί *n*, *ℓ*, m_ℓ χαρακτηρίζουν την κατάσταση του συστήματος
→ είναι καλοί κβαντικοί αριθμοί

$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar\,,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ l=0,1,\ldots,n-1$$

Συμβολισμός καταστάσεων:

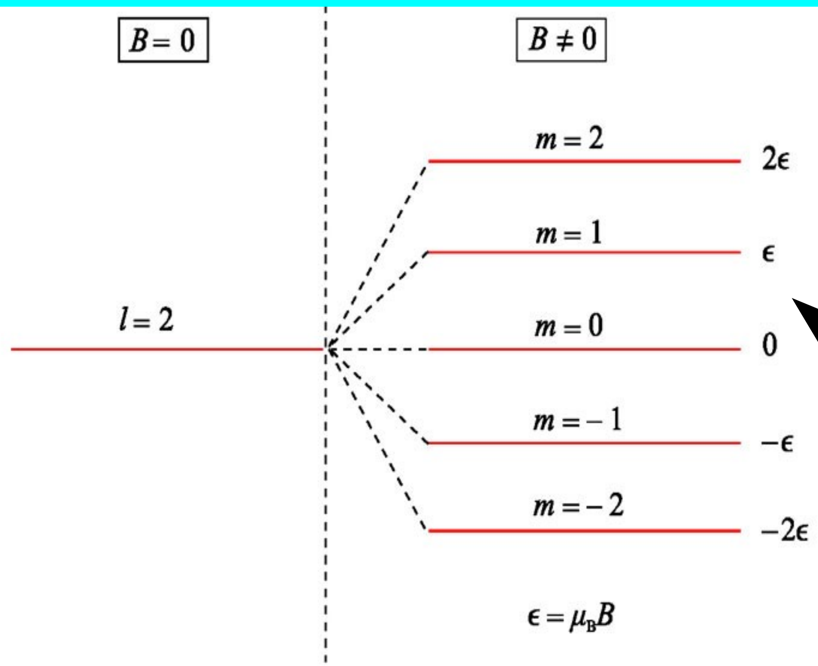
$$ns\,,np\,,nd\,,nf\,,\ldots\ \Pi.\chi,2\mathrm{p}:(n=2,l=1)$$

$$s:l=0;\ p:l=1;\ d:l=2;\ f:l=3,\ldots$$

Διαφορετικές καταστάσεις {***n*, *ℓ*, m_ℓ**} με ίδια ενέργεια:
εκφυλισμένες καταστάσεις

Κάτω όμως από κάποιες συνθήκες, μπορώ να τις... αποκαλύψω;
(και έτσι να διαπιστώσω ότι δεν είναι απλά μιά μαθηματική υπόθεση;)

Τροχ. Στροφορμή: διαχωρισμός εκφυλισμένων ενεργειακών σταθμών H σε μαγνητικό πεδίο



Σχημα 10.4: *Ο διαχωρισμός Zeeman για μια στάθμη με $\ell = 2$.* Η τοποθέτηση του ατόμου σε ένα μαγνητικό πεδίο προκαλεί άρση του περιστροφικού εκφυλισμού μιας στάθμης με κβαντικό αριθμό ℓ, και δημιουργία $2\ell+1$ νέων σταθμών συμμετρικά διατεταγμένων ως προς την αρχική και με σταθερή μεταξύ τους απόσταση ίση με $\epsilon = \mu_B B$.

Ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης του ηλεκτρονίου (της τροχιακής μαγνητικής ροπής του, μ) με το μαγνητικό πεδίο B:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad \vec{B}=B\,\hat{z}$$

Το ηλεκτρόνιο συμπεριφέρεται σαν μαγνήτης με διπολική μαγνητική ροπή:

$$\vec{\mu}=\frac{q}{2m_e c}\vec{L}=\frac{-e}{2m_e c}\vec{L}$$

$$\mu=\frac{-e}{2m_e c}\hbar\sqrt{l(l+1)}$$

Μαγνητόνη του Bohr, μ_B : $\mu_B\equiv\frac{e\hbar}{2m_e c}$

$$\mu=-\mu_B\sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_z=-\mu_B m_l$$

$$U=m_l(\mu_B B)$$

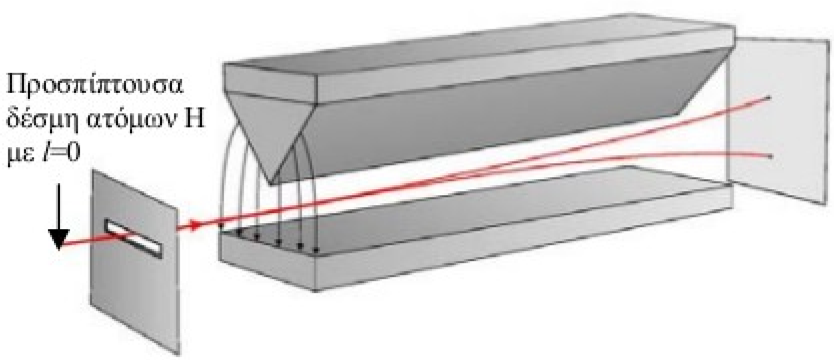
! Από τον προκαλούμενο διαχωρισμό των ενεργειακών επιπέδων, μπορούμε π.χ να μετρήσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός αστεριού

Η ανάδυση του **σπιν**: μια “εσωτερική στροφορμή”, “ιδιοστροφορμή”

Το σπιν: Μια καθαρά κβαντική στροφορμή

Οι πειραματικές ενδείξεις για την ύπαρξη μιας εσωτερικής στροφορμής του ηλεκτρονίου

Πείραμα Stern-Gerlach με άτομα Υδρογόνου στη θεμελιώδη τους κατάσταση



Πειραματικό αποτέλεσμα: Ο αριθμός των κηλίδων στο πέτασμα είναι ίσος με δύο. Η προσπίπτουσα δέσμη χωρίζεται πάντα σε δύο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Ο μόνος τρόπος να εξηγηθεί το πειραματικό αποτέλεσμα είναι να υποτεθεί ότι το ηλεκτρόνιο είναι φορέας και μιας εσωτερικής στροφορμής (≡σπιν) με παρόμοιες ιδιότητες και πειραματικές εκδηλώσεις όπως η τροχιακή στροφορμή αλλά με τιμή του κβαντικού αριθμού s (το ανάλογο του ℓ) ίση με ½.

ΜΕΛΕΤΗ: *Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική Ι, σελ. 428-437.*

Μαγνητική ροπή λόγω ιδιοστροφορμής (spin) και συνεισφορά στην ενέργεια όταν σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}=B\,\hat{z}$

- Στην προηγούμενη σελίδα είδαμε τη μαγνητική ροπή που έχει το ηλεκτρόνιο λόγω περιστροφής γύρω από τον πυρήνα (λόγω τροχιακής στροφορμής, ℓ).

- Το ηλεκτρόνιο έχει όμως και μια εσωτερική στροφορμή, μια ιδιοστροφορμή (= spin = σπίν) ανεξάρτητα από το αν κινείται ή όχι. Το σπίν είναι μια ιδιότητα του ηλεκτρονίου, όπως το φορτίο που έχει

$$S=\sqrt{s(s+1)}\,\hbar\,,\ \acute{o}\pi o\upsilon:\ s=1/2$$

$$S_z=m_s\hbar\,,\ \acute{o}\pi o\upsilon:\ m_s=-1/2,+1/2$$

Λόγω του σπίν, το υδρογόνο έχει μια μαγνητική ροπή μ_s:

$$\vec{\mu}_s=g_e\frac{q}{2m_e c}\vec{S}=g_e\frac{-e}{2m_e c}\vec{S}=-g_e\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar}$$

Το ηλεκτρόνιο είναι στοιχειώδες → $g_e=2$

$$\mu_B\equiv\frac{e\hbar}{2m_e c}\qquad \mu_s=-g_e\mu_B\sqrt{s(s+1)}\qquad \boxed{\mu_{s,z}=-g_e\mu_B m_s}$$

Δυναμική ενέργεια λόγω σπιν: $\boxed{U_s=-\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}}$ → $\boxed{U_s=\pm\mu_B B,\ \gamma\iota\alpha\ m_s=\mp 1/2}$

Ολική στροφορμή (J) = τροχιακή (L) + σπίν (S) **= “το σπίν” του συστήματος** (π.χ., του ατόμου)

- Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από 5 κβαντικούς αριθμούς {n , *ℓ* , ***s***, $\boldsymbol{m_\ell}$, m_s }
  - Για κάθε συγκεκριμένο *ℓ* , υπάρχουν (2*ℓ* + 1)*(2s + 1) ανεξάρτητες καταστάσεις, Y_{lm}

- Ολική στροφορμή J ενός σωματιδίου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \kappa\alpha\iota\ J_z = L_z + S_z, \acute{o}\pi o\upsilon: J_z^{max} = l + s$$

- J^2 και J_z μπορούν να έχουν ιδιοκαταστάσεις ίδιες με L^2 και S^2, οπότε να χαρακτηρίζω μιά κατάσταση από τους κβαντικούς αριθμούς:

{n , *ℓ* , s , j , m_j }

$$J^2 Y_{lm} = j(j+1)\hbar^2 Y_{lm}, \acute{o}\pi o\upsilon: j = l \pm 1/2$$

$$J_z Y_{lm} = m_j \hbar Y_{lm}, \acute{o}\pi o\upsilon: m_j = -j, \ldots, 0, \ldots j$$

Ενέργεια: εξάρτηση κι από τροχιακή στροφορμή κι από σπίν

Κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής κ' σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς $\{n\,,\ \ell\,,\ s,\ j\,,\ m_j\}$

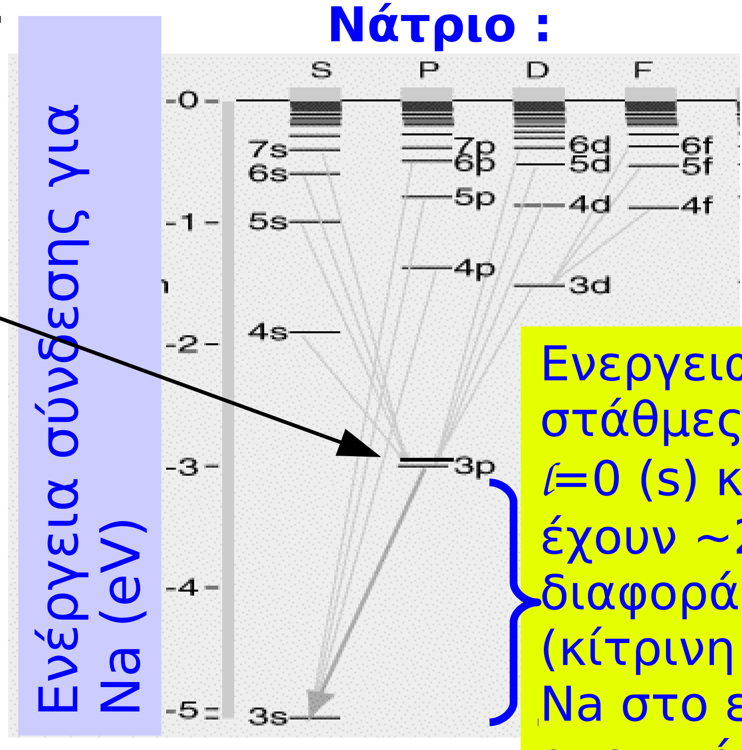
Ολική στροφορμή ατόμου: άθροισμα τροχιακής στροφορμής και σπίν

$$\pi.\chi\,, \gamma\iota\alpha\ s=1/2:\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}\,,\ j=l\pm 1/2$$

$$\Gamma\iota\alpha\ l=1\rightarrow j=1\pm 1/2=3/2\ \acute{\eta}\ 1/2$$

Διπλή κίτρινη γραμμή του Νατρίου (θυμάστε στο εργαστήριο ατομικής;) Αποτέλεσμα της **σύζευξης σπίν-τροχιάς (Spin-orbit coupling = L·S coupling)**: σύζευξη του σπιν του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πρωτόνιο, το οποίο θεωρούμε σαν περιστρεφόμενο γύρω από το ηλεκτρόνιο, όταν βρίσκόμαστε πάνω στο ηλεκτρόνιο)

Νάτριο :



Ενεργειακές στάθμες με n=3, ℓ=0 (s) και ℓ=1 (p) έχουν ~2 eV διαφορά (κίτρινη γραμμή Na στο εργαστήριο ατομικής)

Συμβολισμός καταστάσεων:

$$ns_J\,, np_J\,, nd_J\,, nf_J\,, \ldots$$

$$\Pi.\chi\,, 2\mathrm{p}_{1/2}:(n=2, l=1,\ j=1/2)$$

Ακόμα ένας κβαντικός αριθμός: Ομοτιμία (parity)

- Είδαμε ότι κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας, στροφορμής και σπιν στο άτομο χαρακτηρίζεται από κβαντικούς αριθμούς {**n , ℓ , s, m$_\ell$, m$_s$** }. **Ο τρόπος που συμπεριφέρεται η αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση σε αναστροφή του χώρου** (που είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της ομοτιμίας/partiy, P, πάνω της) μπορεί να ορίσει κι άλλον έναν κβαντικό αριθμό: την **ομοτιμία ή parity**

$$P(\vec{r}) = -\vec{r} \quad \begin{cases} P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = \psi(\vec{r}) : \text{άρτια συνάρτιση} \rightarrow Parity = +1 \\ P(\psi(\vec{r})) = \psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r}) : \text{περιττή συνάρτιση} \rightarrow Parity = -1 \end{cases}$$

- Κι έτσι γράφουμε το σπίν και την ομοτιμία ως **J$^\pi$**

$$\pi.\chi., \text{κατάσταση } \frac{3}{2}^{+}$$

- Σημείωση: για κεντρικά δυναμικά, όπου $\psi(\vec{r}) = R(r)\, Y(\theta, \varphi)$, η πάριτυ της ψ οφείλεται μόνο στις σφαιρικές συναρτήσεις **Y$_{l\,m}$** :

$$\vec{r} \rightarrow -\vec{r} : P(Y(\theta, \varphi)) = Y(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l\, Y(\theta, \varphi), \text{οπότε}: \boxed{Parity = (-1)^l}$$

Αντίστοιχοι κβαντικοί αριθμοί ορίζονται και στο δέσμιο σύστημα που μας απασχολεί – τους πυρήνες

Spin και πάριτυ ενός πυρήνα (J και πάριτυ: J^p)

- Σπιν πυρήνα, J = ολικό τροχιακό σπίν των νουκλεονίων + το άθροισμα των σπιν τους.

$$\vec{J}_{\pi\upsilon\rho\acute{\eta}\nu\alpha} \equiv \sum_{\nu o\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\acute{o}\nu\iota\alpha} \vec{L} + \sum_{\nu o\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\acute{o}\nu\iota\alpha} \vec{S} = \sum_{\nu o\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\acute{o}\nu\iota\alpha} \left(\vec{L} + \vec{S}\right)$$

- Parity = +1 ή -1

- Οπότε για κάθε πυρήνα δίνουμε σπιν (J) και parity (π): **J^π**

$\pi.\chi.,\ 2^+$

Είδαμε ότι η ενέργεια ενός συστήματος εξαρτάται και από το σπιν του: OK.

Ερώτηση:

Η ομοτιμία / πάριτυ / parity επηρεάζει κάτι μετρήσιμο/παρατηρίσιμο;

→ Βεβαίως και ναι.

α) Parity #1: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli (1)

Η απαγορευτική αρχή του Pauli
και η μη διακρισιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντομηχανική

Στην «ρίζα» της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντομηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα διότι περιγράφονται από αλληλοεπικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις, κι επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιό είναι το #1 ποιο είναι το #2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται κβαντομηχανικά μόνο με κύματοσυναρτήσεις $\psi(x_1,x_2)$ που είναι συμμετρικές [$\psi(x_2,x_1)=\psi(x_1,x_2)$] ή αντισυμμετρικές [$\psi(x_2,x_1)=-\psi(x_1,x_2)$] κι επομένως οδηγούν σε πιθανότητα $|\psi(x_1,x_2)|^2$ που είναι συμμετρική στην εναλλαγή $x_1 \leftrightarrow x_2$ κι άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δύο σωματιδίων.

ΜΕΛΕΤΗ: *Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική Ι, σελ. 468 – 480.*

- Όλα τα σωματίδια με ακέραιο σπιν (s=0, 1, 2, …) - τα αποκαλούμενα **μποζόνια** – περιγράφονται από **συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = +1)**, ενώ

  όλα τα σωματίδια με ημι-ακέραιο σπιν (s=1/2, 3/2, …) - τα αποκαλούμενα **φερμιόνια** – περιγράφονται από **αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις (Parity = -1)**

  ως προς την εναλλαγή των μεταβλητών τους (=αναστροφή του χώρου)

α) Parity #1: η αναστροφή του χώρου και η Αρχή του Pauli (2)

Το σπιν και η γενικευμένη αρχή του Pauli

Φερμόνια και Μποζόνια:
Οι δύο θεμελιώδεις κατηγορίες σωματιδίων και ο ρόλος τους στη φύση

	Σπιν	Είδος συμπεριφοράς	Ποια είναι ποια	...και γιατί
Φερμιόνια	**Ημιακέραιο** $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$	**«Ατομικιστική»** Υπόκεινται στην αρχή του Pauli (είναι αδύνατη η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση). Περιγράφονται από αντισυμμετρικές κυμ/σεις.	Όλα τα σωματίδια δομικοί λίθοι της ύλης. (e, p, n, ν κουάρκς). Όλα έχουν $s = \frac{1}{2}$	Διαφορετικά θα ήταν δυνατή η απεριόριστη συσσώρευσή τους στην ίδια περιοχή του χώρου υπό την επίδραση των αμοιβαίων έλξεων, με αποτέλεσμα την πλήρη κατάρρευση της ύλης σε μια «σταγόνα» άπειρης πυκνότητας.
Μποζόνια	**Ακέραιο** $s = 0, 1, 2, \ldots$	**«Κολλεκτιβιστική»** Δεν υπόκεινται στην αρχή του Pauli (Είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση) περιγράφονται από συμμετρικές κυμ/σεις.	Όλα τα σωματίδια φορείς δυνάμεων της φύσης (γ, $w^{\pm}$, z, γλοιόνια, βαρυτόνιο). Όλα έχουν $s = 1$ πλήν του βαρυτονίου που (εικάζεται ότι) έχει $s = 2$.	Έτσι είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση και η δημιουργία μ' αυτό τον τρόπο ενός μακροσκοπικού πεδίου δυνάμεων (ΗΜ πεδίο, πεδίο βαρύτητας, πυρηνικά πεδία).

α) Parity #1: η αναστροφή του χώρου και η Απαγορευτική Αρχή του Pauli

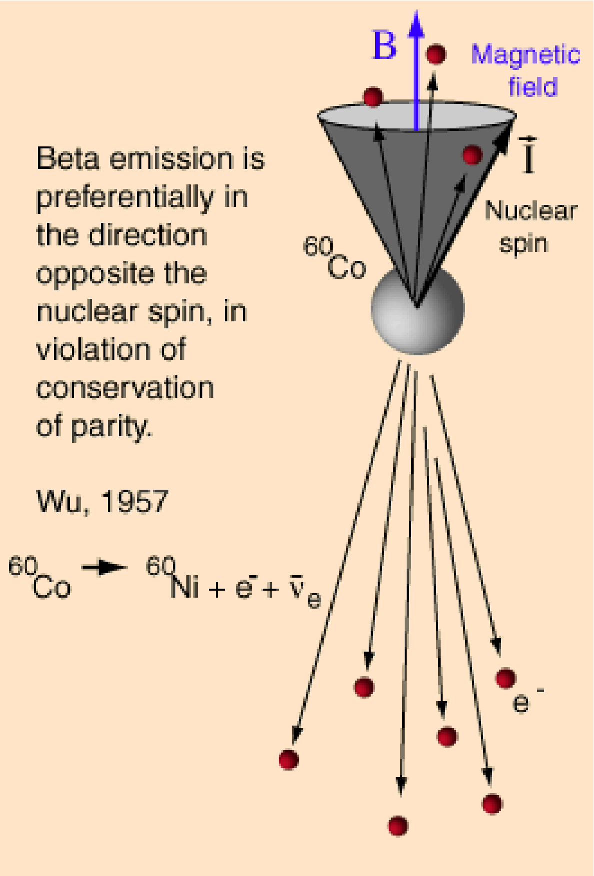
Η απαγορευτική αρχή του Pauli για τα ατομικά ηλεκτρόνια: Μια ειδική συνέπεια της γενικευμένης αρχής

Έχοντας σπιν $s = \frac{1}{2}$ τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια και επομένως η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση ενός ατόμου θα είναι αδύνατη. Και δεδομένου ότι μια κβαντική κατάσταση σ' ένα άτομο καθορίζεται μονοσήμαντα από την τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s, η εφαρμογή της γενικής αρχής του Pauli στα άτομα οδηγεί στην:

ΑΠΑΓΟΡΕΥΤΙΚΗ ΑΡΧΗ ΤΟΥ PAULI: Δύο ηλεκτρόνια σ' ένα άτομο είναι αδύνατον να έχουν την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών n, ℓ, m_ℓ, m_s. Θα διαφέρουν τουλάχιστον σε ένα κβαντικό αριθμό.

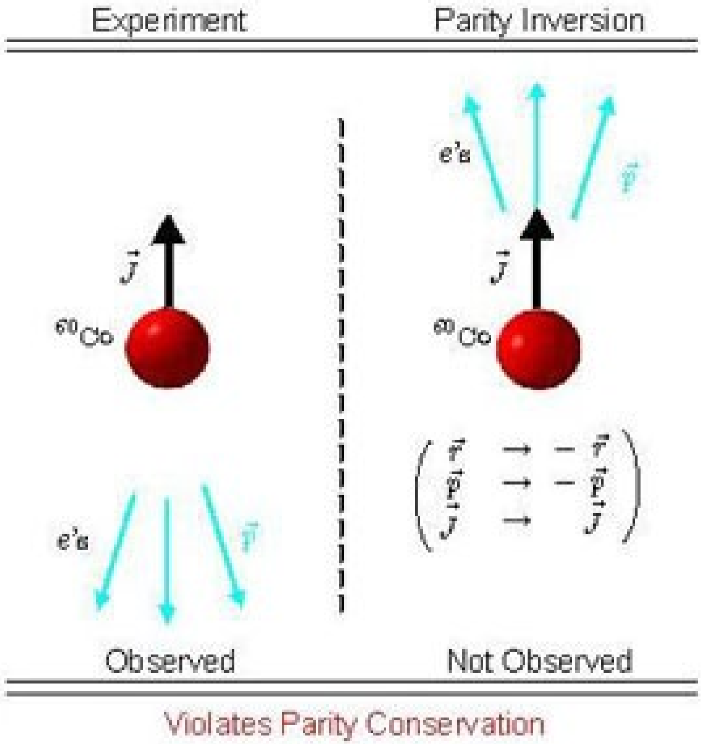
Παρατηρίσιμο;
Μα, έτσι ακριβώς εξηγούμε τη δομή των ατόμων!!!

β) Parity #2: Πείραμα της Wu: 1957



Αν υπάρχει προτίμηση στην κατεύθυνση των ηλεκτρονίων, τότε η πάριτυ δεν είναι καλή συμμετρία (δηλ. παραβιάζεται)

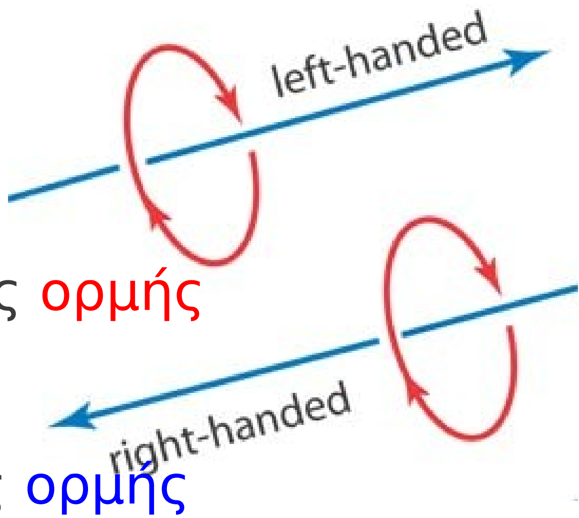
Γιατί η προτιμητέα κατεύθυνση έχει σχέση με την πάριτυ;



Πείραμα: ΟΛΑ τα ηλεκτρόνια πήγαιναν αντίθετα από το σπίν του πυρήνα. → Όχι μόνο υπήρχε ασυμμετρία, αλλά **μέγιστη ασυμμετρία**. Όχι μόνο **η πάριτυ** δεν διατηρείται, αλλά **παραβιάζεται στο μέγιστο βαθμό!**

γ) Parity #3: Σε τί διαφέρουν τα νετρίνα (ν) από τα αντινετρίνα ($\bar{\nu}$) που είδαμε στις β-διασπάσεις);

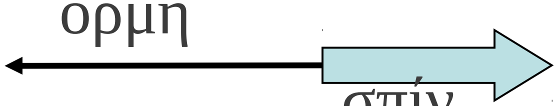
Δεν έχουν φορτίο => Δεν έχουν ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις



Τα νετρίνα είναι ‘αριστερόστροφα’ =>
Το σπίν έχει διέυθυνση αντίθετη από το διάνυσμα της ορμής

Τα αντι-νετρίνα είναι ‘δεξιόστροφα’ =>
το σπιν έχει διεύθυνση ομόρροπη με το διάνυσμα της ορμής

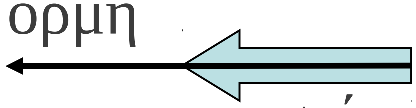
ορμή



σπίν

νετρίνο

ορμή



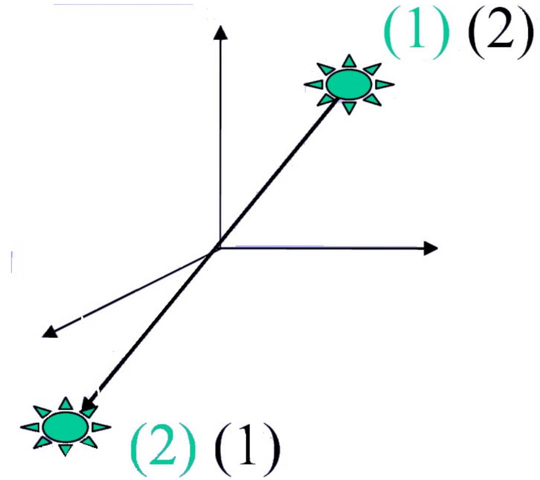
σπίν

αντι-νετρίνο

γ) Parity #3: νετρίνο (ν) και αντινετρίνο ($\bar{\nu}$)

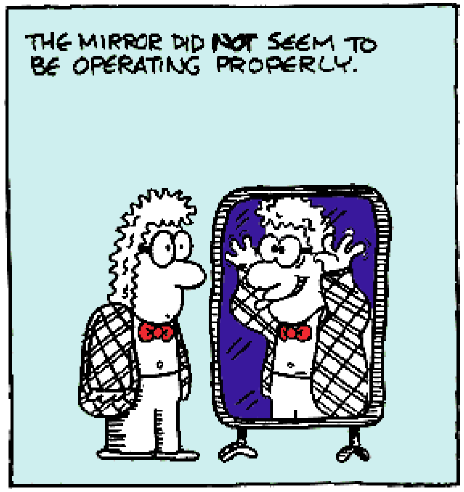
Μετασχηματισμός Parity (P): αντιστροφή του χώρου

$$P : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$



Η β-διάσπαση, έχοντας είτε μόνο νετρίνα (στις διασπάσειςβ+) , είτε μόνο αντινετρίνα (στις β-), παραβιάζει τη συμμετρία της Parity, αφού υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά του νετρίνο και αντινετρίνο:

Σε αντιστροφή του χώρου, το νετρίνο γίνεται αντινετρίνο, αλλά το σπίν δεν αλλάζει φορά.



Έτσι, η αντιστροφή του χώρου δημιουργεί δεξιόστροφα νετρίνα και αριστερόστροφα αντι-νετρίνα. **Κάτι που όμως ΔΕΝ παρατηρείται**, οπότε ***η φύση*** (όσον αφορά τις β-διασπάσεις) ***δεν θεωρεί την Parity "καλή συμμετρία", οπότε λέμε ότι "παραβιάζει την Parity"***

Όλα τα προηγούμενα ήταν μια εισαγωγή για τους επιπλέον κανόνες για τη β-διάσπαση που αφορούν το σπιν και την ομοτιμία (πάριτυ) των πυρήνων.

β-διάσπαση:

Επιτρεπτές και "απαγορρευμένες" διασπάσεις

Επιτρεπτές: Fermi ή Gamow-Teller

β-διασπάσεις: “Επιτρεπτές” και “απαγορευμένες” ως προς τη διατήρηση της στροφορμής

Οι αποδιεγέρσεις β κατηγοριοποιούνται σε

“επιτρεπτές” ή “απαγορευμένες” όσον αφορά τη διατήρηση του σπίν κατά τη διάσπαση:

- **“Επιτρεπτές”** σημαίνει ότι έχουν πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα να γίνουν, σε σχέση με άλλες που είναι πιό σπάνιες και λέγονται **“απαγορευμένες”**.

- Όσο μεγαλύτερου βαθμού “απαγόρευση” έχει μια διάσπαση, τόσο πιό σπάνιο είναι να γίνει.

Διατήρηση στροφορμής (σπιν)

Γενικά, με διατήρηση του σπίν, γράφουμε για τη β-διάσπαση: $i \rightarrow f + e + \nu$ ➤ $\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{S}_{e\nu} + \vec{l}_{e\nu}$

Όπου:

$\vec{J}_i$ και $\vec{J}_f$ είναι το ολικό σπίν του αρχικού και του τελικού πυρήνα, αντίστοιχα,

$\vec{S}_{e\nu}$ είναι το ολικό σπίν του συστήματος ηλεκτρονίου-αντινετρίνο πού μπορεί να είναι **0 ή 1**

(αφού συνδυάζω το ηλεκτρόνιο και το αντινετρίνο που έχουν σπίν 1/2 το καθένα), και

$\vec{l}_{e\nu}$ είναι η σχετική στροφορμή ηλεκτρονίου-αντινετρίνο.

Μεταβολή σπιν μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα και σχετική τροχιακή στροφορμή ηλεκτρονίου-νετρίνο

Οπότε γράφουμε: $\vec{J}_i - \vec{J}_f = \vec{S}_{ev} + \vec{l}_{ev}$ $\longrightarrow$ $\vec{\Delta J} = \vec{S}_{ev} + \vec{l}_{ev}$

όπου η μεταβολή $\vec{\Delta J}$ του σπιν (αρχικού πυρήνα - τελικού) μπορεί να έχει μέτρο οποιαδήποτε τιμή μέσα στα όρια:

$$\left|J_i - J_f\right| \leq \Delta J \leq \left|J_i + J_f\right|$$

και το ολικό σπίν ηλετρονίου-νετρίνο (καθένα με σπίν 1/2):

$$\left|1/2 - 1/2\right| \leq S_{ev} \leq \left|1/2 + 1/2\right| \rightarrow S_{ev} = 0 \text{ ή } 1$$

Όσο μικρότερο το $\vec{l}_{ev}$ **τόσο πιό εύκολα γίνεται η μετάβαση** (δηλ. τόσο πιό "επιτρεπτή" είναι).

Οπότε, από όλα τα ΔJ, το πιό πιθανό είναι αυτό με τη μικρότερη τιμή, δηλαδή το $\left|\left(J_i - J_f\right)\right|$

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: Fermi ή Gamow-Teller ανάλογα με $S_{e\nu}$ =0 ή 1

ΚΑΝΟΝΑΣ #1: Οι **επιτρεπτές** μεταπτώσεις έχουν $\vec{l}_{e\nu}=0$

Άν:

- **$S_{e\nu}$=0** (που έχει μόνο έναν τρόπο να γίνει, Sz=0), τότε η β-διάσπαση/μετάπτωση λέγεται μετάπτωση Fermi .
- **$S_{e\nu}$=1** (που έχει τρείς τρόπους να γίνει, έναν με Sz = +1, έναν με Sz = 0, έναν με Sz = -1),

  τότε η β-διάσπαση/μετάπτωση λέγεται μετάπτωση Gamow-Teller.

Οπότε αφού το σπίν διατηρείται, σύμφωνα με τα παραπάνω, το ΔJ στις επιτρεπτές β-διασπάσεις είναι 0 ή 1, όσο και το $S_{e\nu}$.

Επιτρεπτές μεταπτώσεις: μεταβολή της partity

Εκτός από το σπιν, έχουμε να σκεφτούμε και την πάριτυ.

Η πάριτυ του συστήματος ηλεκτρονίου-αντινετρίνο είναι:

$$(-1)^{l_{e\nu}}$$

που για τις επιτρεπτές μεταπτώσεις ($l_{e\nu}$ =0) δίνει:

$$(-1)^{l_{e\nu}} = (-1)^0 = +1$$

Άρα, επειδή: Parity(i) = Parity(f) * Parity(eν) ,

$$i \to f + e + \nu$$

ΚΑΝΟΝΑΣ #2:

οι **επιτρεπτές** μεταπτώσεις **[που έχουν $\ell_{e\nu}$ =0** , και άρα έχουν Parity(eν) = $(-1)^0$ = +1] **δεν έχουν μεταβολή της πάριτυ** μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα.

Απαγορευμένες β-διασπάσεις

Όταν **δεν έχουμε** $\Delta J = 0$ ή 1 **και** $\Delta\pi\acute{\alpha}\rho\iota\tau\upsilon = \Delta\pi = +1$, τότε η β-διάσπαση είναι **απαγορευμένη.**

Ερώτηση: **Μια απαγορευμένη μετάπτωση**

(δηλαδή που δεν είναι $\Delta J^{\Delta\pi} = 1^{+}$ ή $\Delta J^{\Delta\pi} = 0^{+}$),

τι τάξης απαγορευμένη είναι;

Απάντηση:

όση η **ελάχιστη τιμή της** $\ell_{e\nu}$ που μας χρειάζεται για να εξηγήσουμε τη μετάπτωση που μας δίνεται.

Βρίσκουμε την τιμή αυτή δοκιμάζοντας:

1) ποιό $\ell_{e\nu}$ χρειάζεται (άρτιο ή περιττό) για να εξηγήσει την Δπάριτυ, και

2) πόσο να είναι αυτό το $\ell_{e\nu}$ για να μας δώσει το ΔJ (σε συνδυσαμό με το $S_{e\nu} = 0$ ή 1)

Τάξη β-διάσπασης

Οπότε:

ΚΑΝΟΝΑΣ #3:

- η τάξη της β-διαπασης είναι το μικρότερο $\ell_{εν}$ που εξηγεί

  και την μεταβολή της παριτυ [Δπάριτυ = $(-1)^{\ell}$]

  και τη μεταβολή του σπιν ΔJ μεταξύ αρχικού και τελικού πυρήνα.

- Αν αυτό το ℓ είναι το ℓ**=0**, τότε η β-διάσπαση είναι **επιτρεπτή**,
- αλλιώς είναι **απαγορευμένη τάξης ℓ**.

Άσκηση: αντιδράσεις β-διάσπασης: Q-values, επιτρεπτές, τάξη απαγόρευσης

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω διασπάσεις β (π.χ. απαγορευμένες ή όχι, β+ ή ε, κλπ.) και υπολογίστε τις τιμές Q

$$^{66}\mathrm{Ga}\left[0^{+}\right] \rightarrow {}^{66}\mathrm{Zn}\left[2^{+},\ \Delta E = 1039.2\ \mathrm{KeV}\right]$$

$$^{72}\mathrm{As}\left[2^{-}\right] \rightarrow {}^{72}\mathrm{Ge}\left[0^{+}\right]$$

Για να βρίσκετε τις ατομικές μάζες των στοιχείων που σας χρειάζονται, χρησιμοποιείτε:

$$M(A,Z) = 931.478 * A + \Delta \ \ (\mathrm{MeV}),$$

Όπου το Δ το βρίσκεται για κάθε στοιχείο και τα ισότοπά του στο:

http://skiathos.physics.auth.gr/atlas/Nuclear_Physics/wallarge.pdf

- $\Delta(^{66}\mathrm{Ga}) = -63.724$ MeV, $\Delta(^{66}\mathrm{Zn}) = -68.899$ MeV
- $\Delta(^{72}\mathrm{As}) = -68.230$ MeV, $\Delta(^{72}\mathrm{Ge}) = -72.586$ MeV
- $m(e) = 0.511$ MeV, $m(\nu) = 0$

Άσκηση – σημείωση για επιτρεπτή ή όχι

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω διασπάσεις β (π.χ. απαγορευμένες ή όχι, β+ ή ε, κλπ.) και υπολογίστε τις τιμές Q

$$^{66}\mathrm{Ga}\left[0^{+}\right]\rightarrow{}^{66}\mathrm{Zn}\left[2^{+},\ \Delta E=1039.2\ \mathrm{KeV}\right]$$

$$^{72}\mathrm{As}\left[2^{-}\right]\rightarrow{}^{72}\mathrm{Ge}\left[0^{+}\right]$$

α) με $\Delta J^{\Delta\pi} = 2+$

έχουμε αναγκαστικά ℓ=άρτιο γιατί $(-1)^{\ell} = +1$.

* Αφού το Sev γίνεται το πολύ Sev=1, δεν μπορεί να γίνει η μετάβαση με ℓ=0.

→ Άρα δεν είναι επιτρεπτή η μετάβαση.

* Η επόμενη άρτια τιμή είναι ℓ=2. Με S=0, δίνουν ΔJ=2.
Με S=1, δίνουν από ΔJ = 2-1 =1 μέχρι και 2+1=3,
→ οπότε όντως το ℓ=2 (και με S=0 και με S=1) μπορεί να εξηγήσει το ΔJ=2+ → “απαγορευμένη” 2ης τάξης

Σχετικιστική κινηματική:

$E = mc^2$ = η ενέργεια πού έχω επειδή απλά και μόνο έχω μάζα m

ενέργεια (E), μάζα (m), c = ταχύτητα του φωτός

$$\text{γενικά, με κινητική ενέργεια } K \text{, έχουμε: } E = K + mc^2$$

$$E = m\gamma c^2 \text{, όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{, και } \beta = \upsilon / c \text{, με } \upsilon = \text{ταχύτητα σωματιδίου}$$

$$p = m\gamma\upsilon = m\gamma\beta c \text{, όπου } p = \text{ορμή}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

→ E [MeV], p [MeV/c], m [MeV/c^2]

$$\text{Σημείωση: με } c=1\text{, γράφουμε: } E^2 = p^2 + m^2 \text{, κλπ}$$

Μονάδες

$$c = 3 \times 10^{8}\ m/s \equiv μονάδα\ \ ταχύτητας \equiv 1$$

$$μονάδα\ ενέργειας \equiv eV = 1.6 * 10^{-19}\ Cb * V = 1.6 * 10^{-19}\ Joule$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το MeV (= 10^{9} eV)

Σταθερά του Plank = **h** = 6.626 x 10^{-34} J s

$$\hbar c = 197\ MeV\ fm,\ \ όπου\ \ \hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv μονάδα\ δράσης \left(ενέργειας \times χρόνου \right) \equiv 1$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}[mks] = \frac{e^2}{\hbar c}[cgs] = \frac{1}{137}$$

α = η σταθερά λεπής υφής = 1/137

Θα χρησιμοποιούμε παντού:
eV για ενέργεια (ή MeV στην πυρηνική**),**
$1/4\pi\varepsilon_0$ = 1 σε όλους τους τύπους,
και θα βάζουμε:

$$e^2 = \alpha \hbar c,\ όπου\ \alpha = 1/137$$

$$\hbar c = 197\ MeV\ fm$$

Μετράμε:

Μάζα: MeV/c^2 (αφού E = mc^2)
Ορμή: MeV/c (αφού p = mγβc)
Χρόνο σε: 1/MeV (αφού η μονάδα δράσης = Ενέργεια * Χρόνος = 1)
Μήκος σε: μονάδες χρόνου = 1/MeV (αφού η μονάδα ταχύτητας=1)

1 amu = 1/12 μάζας ουδέτρου ατόμου ^{12}C = 931.5 MeV/c^2
Μάζα ηλεκτρονίου = 0.511 MeV/c^2
Μάζα πρωτονίου = 938.3 MeV/c^2, Μάζα νετρονίου = 939.6 MeV/c^2