Diálogos, **66** (1995) pp. 21–29.

LA LÓGICA INTUICIONISTA COMO UNA LÓGICA DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO

JAVIER LEGRIS

En este trabajo presento algunos argumentos en favor de la idea de que la lógica intuicionista es una lógica de la demostrabilidad matemática, o, en otras palabras, una lógica del conocimiento matemático. "Demostrabilidad" quiere decir aquí "demostrabilidad *constructiva*", tal como ésta suele ser entendida en los textos clásicos de matemática intuicionista. Los argumentos a exponer surgirán de una interpretación de la lógica intuicionista en un sistema de lógica epistémica. Este sistema se construye como una extensión de la lógica clásica, de allí que en la interpretación estén implicados los presupuestos de la lógica clásica y sea, por tanto, "externa" a la lógica intuicionista. Además, las ideas aquí expuestas son válidas para la lógica de predicados intuicionista en su totalidad. No obstante, para no extenderme sobre problemas especiales de los cuantificadores intuicionistas, me limitaré al caso de la lógica de enunciados. (Para la lógica de predicados, véase Legris 1990.)

1

A fines de la década de 1920 todavía no era muy claro qué principios o métodos demostrativos de la lógica clásica rechazaban L.E.J. Brouwer y otros matemáticos intuicionistas. La axiomática que A. Heyting formuló en 1930 para el caso de la lógica de enunciados resultó ser una formalización de aceptación más o menos general para lo que se llamó "lógica intuicionista" y sentó las bases para compararla con la lógica clásica. En este contexto, K. Gödel estableció determinadas relaciones entre la lógica de enunciados intuicionista y el sistema modal **S4** de Lewis —una extensión de la lógica clásica— sobre la base de una traducción de las expresiones del lenguaje de enunciados intuicionista en el modal. Las conectivas intuicionistas se interpretaban por medio de conectivas clásicas con el agregado de un operador modal. Esta interpretación le permitió a Gödel llegar al siguiente resultado (Gödel 1931-2):

(1.1) Si un enunciado A del lenguaje intuicionista de enunciados es demostrable en la lógica intuicionista, entonces su traducción $I(A)$ en el lenguaje modal es demostrable en **S4**.[1]

Gödel utilizaba el signo 'B' para expresar el operador modal de necesidad, asignándole el significado intuitivo de "es demostrable" (en alemán *beweisbar*), con lo cual apuntaba a interpretar la lógica intuicionista como una "lógica de la demostrabilidad"; así, los enunciados intuicionistas eran vistos como haciendo referencia a la demostrabilidad de estados de cosas matemáticos.

Con mayor generalidad, es plausible entender el sistema **S4** de Lewis, empleado por Gödel, en términos epistémicos, esto es, en términos de una "lógica del conocimiento" (o "del saber"), en la cual el operador modal recibe la interpretación intuitiva de "se sabe que" o "una persona arbitraria sabe que". En este caso, "saber" se define como "creencia verdadera justificada", es decir como,

(1.2) $SA =_{\mathrm{df}} JA \,\&\, A$

donde SA se lee como "se sabe que A" y JA como "se cree justificadamente que A".

Las creencias justificadas son aquellas creencias obtenidas por medio de estándares intersubjetivos de racionalidad, es decir, criterios o patrones que son normalmente aceptados para la justificación de la convicción de una persona (tal es el caso de, por ejemplo, observaciones, razonamientos deductivos o inductivos a partir de contenidos de conocimientos aceptados, etc.). (Véase Legris 1989).

---

[1] Un resultado equivalente a (1.1) ha podido establecerse también respecto de los sistemas **S3**, **S4Grz** y el sistema **G** de la "lógica modal de la demostrabilidad". No obstante, estas interpretaciones no son relevantes para los objetivos de este trabajo. En especial, la interpretación en **G** implica una traducción diferente del lenguaje intuicionista en el modal y un significado diferente del operador modal de necesidad. (Al respecto, véase Goldblatt 1978).

Los principios mínimamente aceptables para el concepto de creencia justificada son los siguientes:

J0. A, si A es una tautología clásica
J1. $JA \supset \neg J\neg A$
J2. $J(A \supset B) \supset (JA \supset JB)$
J3. $JA \supset JJA$
J4. $J(JA \supset A)$

Los principios J0, J1 y J2 son exigencias para la *racionalidad* del concepto de creencia justificada: J1 impide la creencia en contradicciones; J0 y J2 expresan la idea de "omnicreencia lógica". Se presupone ademas que vale la regla del *modus ponens.* J3 es un principio de iteración, que, pese a algunas objeciones (véase, por ejemplo, Lenzen 1978, pp. 69ss.), es aceptado para todos los conceptos epistémicos racionales. J4 se fundamenta en la pretensión razonable —y justificable— de que a partir de creencias justificadas se concluya la verdad.

Junto con (1.2), estos principios para la creencia justificada dan lugar a versiones epistémicas de los axiomas de **S4**, a saber:

S0. SA, si A es una tautología clásica
S1. $SA \supset A$
S2. $S(A \supset B) \supset (SA \supset SB)$
S3. $SA \supset SSA$

Puede mostrarse además que *únicamente* estos principios se siguen de J0–J4 (Legris 1990, cap. 3). De este modo, queda fundamentado un conjunto de principios para un concepto de saber basado en el de creencia justificada. Llamaré **Ep4** al sistema formado por estos principios y la regla del *modus ponens.* Puesto que **Ep4** es sólo una versión epistémica de **S4**, se puede formular para aquél una versión correspondiente de (1.1), o sea, (1.3) Si un enunciado A del lenguaje intuicionista de enunciados es demostrable en la lógica intuicionista, entonces su traducción $T(A)$ en el lenguaje epistémico es demostrable en **Ep4**.[2]

La traducción de los enunciados intuicionistas en el lenguaje epistémico, para la cual se cumple (1.3), está determinada por la función T, que tiene como dominio enunciados del lenguaje intuicionista y como valores enunciados del lenguaje epistémico, definiéndose como sigue:

(i) $T(p) = Sp$, donde p es un enunciado atómico;

(ii) $T(A \vee_i B) = T(A) \vee T(B)$;

(iii) $T(A \,\&_i\, B) = T(A) \,\&\, T(B)$;

(iv) $T(A \supset_i B) = S(T(A) \supset T(B))$;

(v) $T(\neg_i A) = S\neg T(A)$, para cualesquiera enunciados A y B.

Las expresiones de la forma $T(A)$ son llamadas *fórmulas-I* del lenguaje epistémico.

2

Desde un punto de vista intuitivo, esta interpretación afirma que un enunciado intuicionísticamente válido p puede verse como la expresión del conocimiento de que p, que posee un "matemático ideal". Este conocimiento de que p se equipara con la posibilidad de exhibir una demostración (constructiva) de p: "Saber" significa "poder demostrar (constructivamente)". Así pues, sobre la base de (1.2) se tiene que, si una proposición p es demostrable, entonces se cree justificadamente que p y se da que p. Quedan de manifiesto las actitudes epistémicas subyacentes al concepto de demostrabilidad constructiva y además se ponen de relieve dos ideas típicas del intuicionismo: (i) Una proposición matemática

---

[2] Es importante hacer notar que **Ep4** es el único sistema epistémico obtenible a partir de la definición (1.2) y de los postulados J0–J4. De acuerdo con lo expresado en la nota anterior, también podría pensarse una inmersión de la lógica de enunciados intuicionista en una variante epistémica del sistema modal **G**, pero esto no parece plausible. En efecto, en primer lugar, el sistema **G** carece de un principio como S1, el cual parece característico de toda elucidación del concepto de saber, y, en segundo lugar, la traducción implicaría la definición de un nuevo operador S^{*} del modo siguiente: $S^{*}A =_{df} SA \,\&\, A$.

es aceptable para el sujeto matemático sólo en la medida en que éste puede demostrarla, y (ii) la verdad matemática queda determinada por la posibilidad de una demostración (véase, por ejemplo, Dummett 1977, p. 7). Estos aspectos epistémicos no aparecen, desde luego, en la concepción clásica de la lógica, donde el concepto de verdad es independiente del de demostrabilidad. Debe observarse que aquí "demostrable" no significa "demostrable en un sistema determinado", pues, de otro modo, surgirían paradojas (Gödel 1931-2).

Mas allá de estas apreciaciones generales puede analizarse más específicamente qué ideas acerca de la lógica intuicionista conlleva esta traducción. En primer lugar, los enunciados atómicos intuicionistas son vistos como enunciados epistémicos, en los cuales el operador S afecta a un enunciado atómico. Esto significa que afirmar un enunciado p es lo mismo que afirmar la cognoscibilidad de p —lo que en el caso intuicionista es, como se acaba de señalar, lo mismo que afirmar su demostrabilidad—. Esta idea de considerar los enunciados como referidos a demostraciones lleva a la siguiente consecuencia, mencionada por Heyting de este modo: "Si simbolizamos la proposición 'la proposición p es demostrable' mediante '$+p$', entonces [...] las afirmaciones '$\vdash p$' y '$\vdash +p$' tienen exactamente el mismo significado" (Heyting 1966, p. 60). Así, afirmar, por ejemplo, que la suma entre números naturales es conmutativa es lo mismo que afirmar que es posible para cualesquiera dos números naturales construir una demostración de que su suma es conmutativa.

En segundo lugar, las conectivas intuicionistas conjunción y disyunción tienen, según la traducción, el mismo significado que las correspondientes clásicas, con la salvedad de que vinculan exclusivamente fórmulas-I del lenguaje epistémico, esto es, fórmulas que ya contienen operadores epistémicos. Por el contrario, las traducciones del condicional y la negación tienen el operador epistémico como constante lógica principal.

De este modo, un enunciado $A \supset_i B$ debe traducirse en términos de un análogo epistémico $\Rightarrow$ de la "implicación estricta" de la lógica modal, al que llamaré *implicación epistémica* y que se define como sigue:

(2.1) $A \Rightarrow B =_{df} S(A \supset B)$

Esta implicación epistémica queda caracterizada mediante los siguientes postulados que se obtienen de **Ep4**:

IE-1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$

IE-2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

IE-3. $A \Rightarrow A$

Ahora bien, el condicional intuicionista no queda aquí adecuadamente reflejado. En efecto, de estos tres postulados no se deriva la versión correspondiente de la siguiente "paradoja de la implicación material":

(2.2) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

que sí es válida para la lógica intuicionista. Sin embargo, debe observarse lo siguiente. Si en (2.2) se reemplazan los enunciados A y B por las traducciones $T(p)$ y $T(q)$ de los enunciados atómicos intuicionistas p y q, es decir, Sp y Sq, entonces se obtiene:

(2.3) $Sp \Rightarrow (Sq \Rightarrow Sp)$

que sí es derivable en **Ep4**. Más aun, se puede demostrar por inducción sobre el grado de la fórmula $T(A)$ el enunciado '$T(A) \equiv ST(A)$'.[3] Por consiguiente, si en (2.2) A y B son fórmulas-I cualesquiera, entonces el enunciado

(2.4) $SA \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

es también derivable en **Ep4.**

Esto explica la afirmación de M. Dummett de que el condicional intucionista debe entenderse, de un lado, *extensionalmente*, puesto que en él valen las "paradojas de la implicación material" y, de otro lado, *intensionalmente*, puesto que se afirma que su antecedente es demostrable. (Dummett 1977, pp. 15 ss.) Así pues, la implicación epistémica es condición necesaria, aunque no suficiente, para la caracterización del condicional intuicionista en términos epistémicos, y refleja a éste *sólo* en el contexto de fórmulas-I.

Algo semejante ocurre en el caso de la negación. Un enunciado intuicionista $\neg_i A$ se traduce como una forma de refutación (esto es, A lleva

---

[3] Para la demostración de este enunciado respecto del sistema **S4** el *locus* clásico es Schütte 1968, pp. 37-43.

a una contradicción), a la cual puede llamarse negación epistémica, definible como:

(2.5) $\sim A =_{\text{df}} S\neg A$

La idea de interpretar '$\sim A$' como 'se sabe que de A se sigue una contradicción' queda reflejada en la equivalencia, demostrable en **Ep4**, '$S\neg A \equiv A \Rightarrow \bot$' (donde '$\bot$' es una constante de enunciado que significa 'lo contradictorio' o 'lo falso'). En **Ep4** puede caracterizarse esta negación epistémica mediante los siguientes postulados:

NE-1. $\sim A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
NE-2. $(A \Rightarrow \sim A) \Rightarrow \sim A$

Como en el caso precedente, esta negación epistémica refleja la intuicionista sólo en el contexto de fórmulas-I. A modo de ejemplo, se puede ver el siguiente enunciado, válido en la lógica intuicionista,

(2.6) $A \supset_i (\neg_i A \supset_i B)$

cuyo análogo en **S**,

(2.7) $A \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$

no se sigue de los postulados EN-1 y EN-2, pero es demostrable en **Ep4** sólo cuando A y B son fórmulas-I.

3

Como consecuencia de lo anterior, en primer lugar, la conjunción y la disyunción intuicionistas no son más que sus análogos clásicos, si bien con la importante diferencia de estar referidos exclusivamente a enunciados epistémicos. En segundo lugar, el condicional y la negación intuicionistas poseen un significado que es enteramente diferente del significado del condicional y la negación clásicos. En tercer lugar, resulta además que la lógica intuicionista es empleada para referirse a la cognoscibilidad (aquí, demostrabilidad) de un enunciado matemático, y no para referirse a "estados de cosas" matemáticos o entidades semejantes.

Este es el origen de las conocidas divergencias de la lógica intuicionista con la lógica clásica.

Estas consecuencias obligan a rever la posibilidad de establecer relaciones entre ambas lógicas. Por ejemplo, en varias ocasiones se ha afirmado que la negación intuicionista implica la clásica, siendo la intuicionista una negación "más fuerte". Esta idea se expresa en la traducción aquí presentada del siguiente modo, para el caso de un enunciado atómico *p*:

(3.1) $S\neg Sp \Rightarrow \neg p$

Ahora bien, el añadido de (3.1) al sistema **Ep4** hace que el sistema degenere en la lógica de enunciados, es decir, hace que el operador epistémico *S* se vuelva vacuo, y que el sistema entero se torne indistinguible de la lógica de enunciados. No obstante, el problema se soluciona al ver que esta interpretación de las relaciones entre ambas negaciones es inadecuada. Como señalé, la lógica intuicionista se aplica a enunciados que afirman no estados de cosas matemáticos, sino la demostrabilidad de estados de cosas matemáticos, esto es, no se la ha construido para hablar acerca de una realidad "externa", sino para hablar acerca de la posibilidad de demostrar la existencia de determinadas relaciones matemáticas. Esta es la idea subyacente al pasaje de Heyting citado más arriba y que aparece de manera incluso más precisa en otras interpretaciones de la lógica intuicionista (como ejemplo, véase Prawitz 1980).

Esta situación debe tomarse en cuenta al pretender establecer relaciones entre ambos sistemas lógicos (relaciones que, por otra parte, son posibles al traducir la lógica intuicionista en una *extensión* de la lógica clásica). Los enunciados atómicos intuicionistas *p* deben entenderse como "afirmaciones epistémicas" *Sp* (tal como sucede en la traducción propuesta arriba). En consecuencia, la negación intuicionista implica la clásica, pero *sólo en el contexto de afirmaciones epistémicas*, o, dicho de otro modo, no implica la falsedad clásica, sino la negación de su demostrabilidad (esto es, su refutabilidad), lo que queda expresado así:

(3.2) $S\neg Sp \Rightarrow \neg Sp$

Esta afirmación evita las indeseadas consecuencias que (3.1) implicaba y puede generalizarse sin más para el caso de enunciados cualesquiera (no necesariamente atómicos), debido a la propiedad de las fórmulas citada arriba.

Esta interpretación del lenguaje intuicionista en otro epistémico conlleva la afirmación de una cierta "incomparabilidad" entre las expresiones del lenguaje intuicionista y el clásico: los enunciados de uno y otro hacen referencia a diferentes tipos de entidades. Esta diferencia semántica refleja las conocidas discusiones entre intuicionistas y "realistas" matemáticos acerca de la naturaleza de las entidades matemáticas y explica el hecho de que para el intuicionismo el concepto semántico primario sea el de demostrabilidad y no el de verdad. Del análisis hecho en este trabajo, se sigue que, desde la perspectiva clásica, la lógica intuicionista puede verse como una lógica restringida a afirmaciones acerca de la demostrabilidad de enunciados matemáticos, esto es, como una "lógica del conocimiento matemático".

Universidad de Buenos Aires
CONICET

REFERENCIAS

Dummett, M. [1977]: *Elements of Intuitionism*. With the assistance of Roberto Minio. Oxford: Clarendon Press.

Gödel, K. [1931-32]: "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls", en *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Heft 4, pp. 39-40.

Goldblatt, R. [1978]: "Arithmetical Necessity, Provability and Intuitionistic Logic", en *Theoria* (Lund) **44**: 38-46.

Heyting, A. [1966]: *Intuitionism: An Introduction*. 2ª ed., Amsterdam: North-Holland.

Legris, J. [1989]: "Justificación epistémica", en *Revista de Filosofía* (Buenos Aires), **4**: 3-19.

Legris, J. [1990]: *Eine epistemische Interpretation der intuitionistischen Logik*. Würzburg: Königshausen & Neumann.

Lenzen, W. [1978]: *Recent Work in Epistemic Logic*. Amsterdam: North-Holland.

Prawitz, D. [1980]: "Intuitionistic Logic: A Philosophical Challenge". En G.H. von Wright (comp.): *Logic and Philosophy*. La Haya: Martinus Nijhoof, pp. 1-10.

Schütte, K. [1968]: *Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik*. Berlin: Springer.