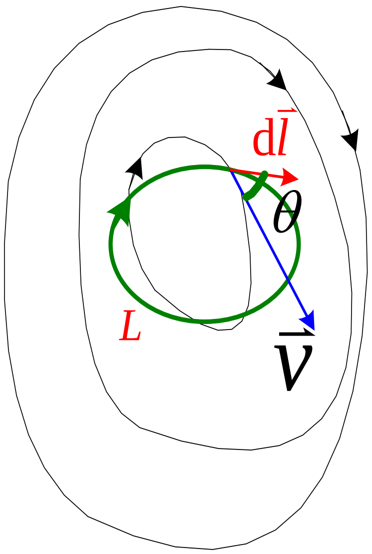
第二章 电势与电场能量

§2.1 静电场的环路定理
§2.2 电势与电势差
§2.3 电容与电容器
§2.4 电介质
§2.5 静电场的能量

§2-1　静电场的环路定理

一、矢量场的环量



$$\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \oint_L v\,\mathrm{d}l\cos\theta = \begin{cases} \oint_L v_l\,\mathrm{d}l \\ \oint_L v\,\mathrm{d}l_v \end{cases}$$

矢量 $\vec{A}$ 沿闭合环路L（环路方向由人为指定）的环量：

$$\Gamma_A \equiv \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

二、静电场的环量 $\Gamma_E = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$

1. 单个点电荷产生的场的环量为零

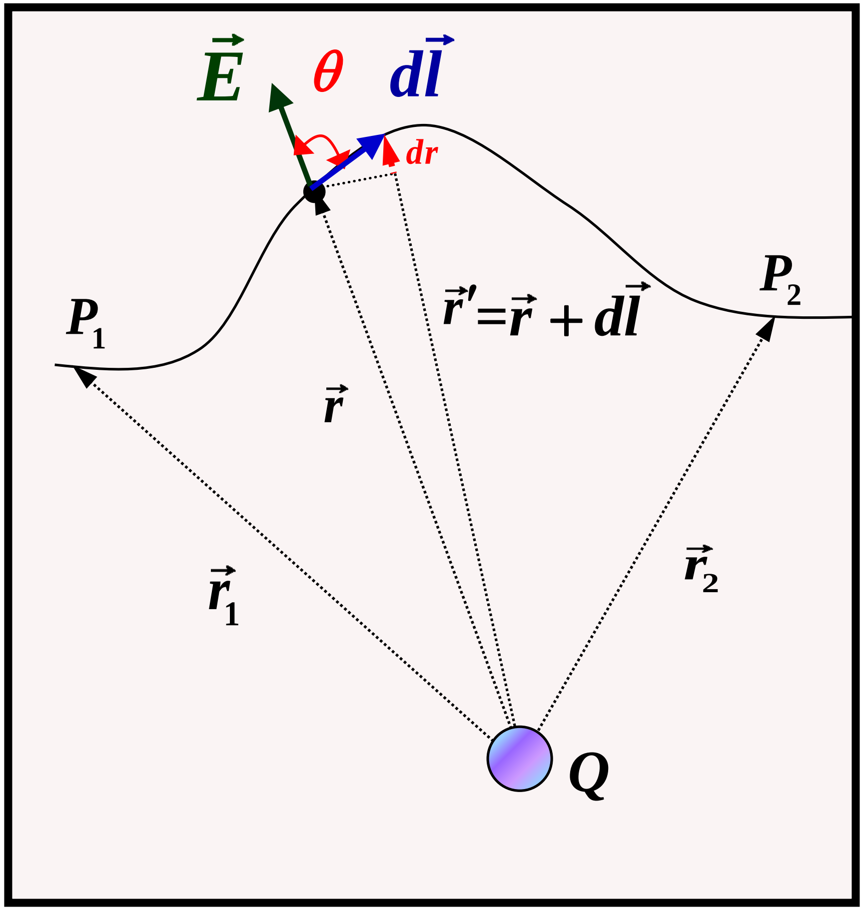
$$\Gamma_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} Edl\cos\theta$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} Edr$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}} = 0}$$



2. 带电体系产生的静电场的环量为零

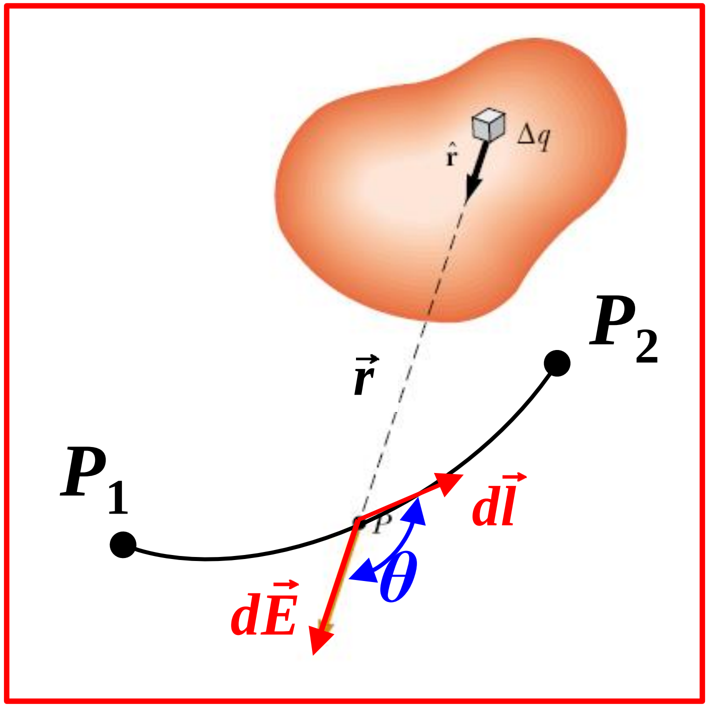
如果场源电荷不是点电荷q，而是一个点电荷系，则：

$$\Gamma_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i} \right) = 0}$$

若场源电荷是一个带电体，则：



$$\Gamma_{\mathrm{E}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2}\left(\iiint_V d\vec{E}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$= \iiint_V \left(\int_{P_1}^{P_2} d\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)$$

$$= \iiint_V \left(\int_{P_1}^{P_2} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{l}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{\Gamma_{E,\text{环路}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = 0}$$

三、静电场的环路定理

环路定理：静电场的环量为零.

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

静电场是无旋场、保守场。

说明：

1、“静电场的环量等于零”源于静电场是有心力场的性质，所有的有心力场，其环量都等于零；

2、“环量等于零”是静电场的一个约束方程，表明静电场的三个分量不是相互独立的，可以用于判断电场是不是静电场。

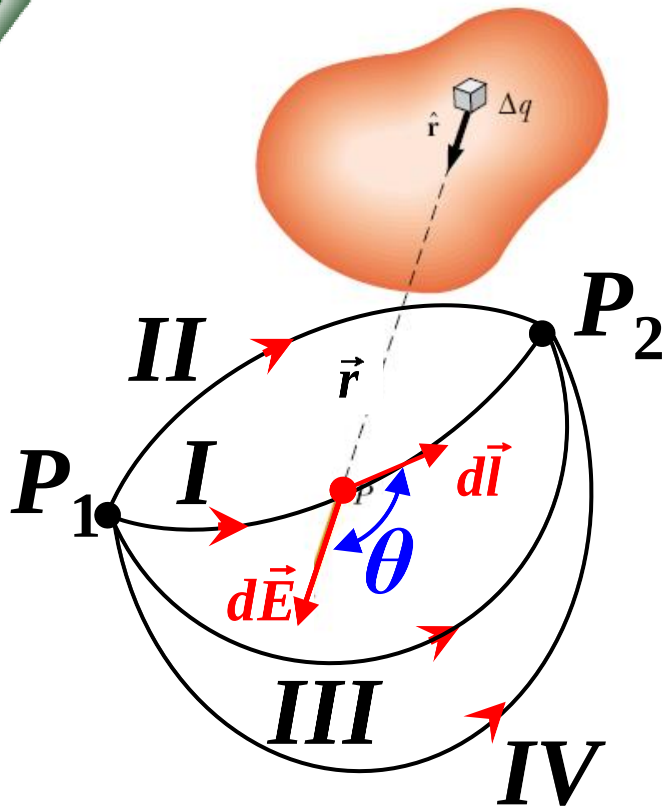
请判断并给出理由：$\vec{E}=y\vec{i}+2x\vec{j}$ 是不是静电场？

§2-2 电势与电势差

一、电势差和电势

1. 电势差

前面的推导过程给出：



$$\Gamma_{P_1P_2}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V dq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

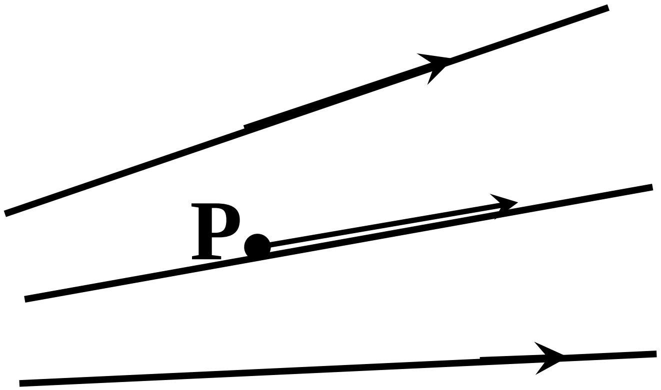
$$\Gamma_{P_1P_2}=\int_{P_1,I}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1,II}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1,III}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1,IV}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\cdots$$

定义： $U_{P_1P_2}\equiv\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 为点P_1、P_2间的电势差。

2. 电势

点P与无穷远处之间的电势差定义为点P的电势.

$$U_P \equiv \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



说明：1)顺着电力线的方向

是电势降落的方向；

2)在此定义下，无穷远处电势为0；

3)电势和积分路径无关，是空间点的函数。

$U = U(\vec{r})$

电势U是标量场

3. 电势差是两点的电势之差

$$U_{P_1P_2}=\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{P_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{\infty}^{P_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{P_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_{P_2}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=U_{P_1}-U_{P_2}$$

$$\boxed{U_{P_1P_2}=U_{P_1}-U_{P_2}}$$

$$\boxed{U_{P_1P_2}=-\left(U_{P_2}-U_{P_1}\right)=-\Delta U}$$

电势差是电势增量的负值！

4. 零电势点

1）原则上，零电势点可以任意选择,零电势点的不同会影响空间各点电势的数值大小，但不会影响两点间的电位差

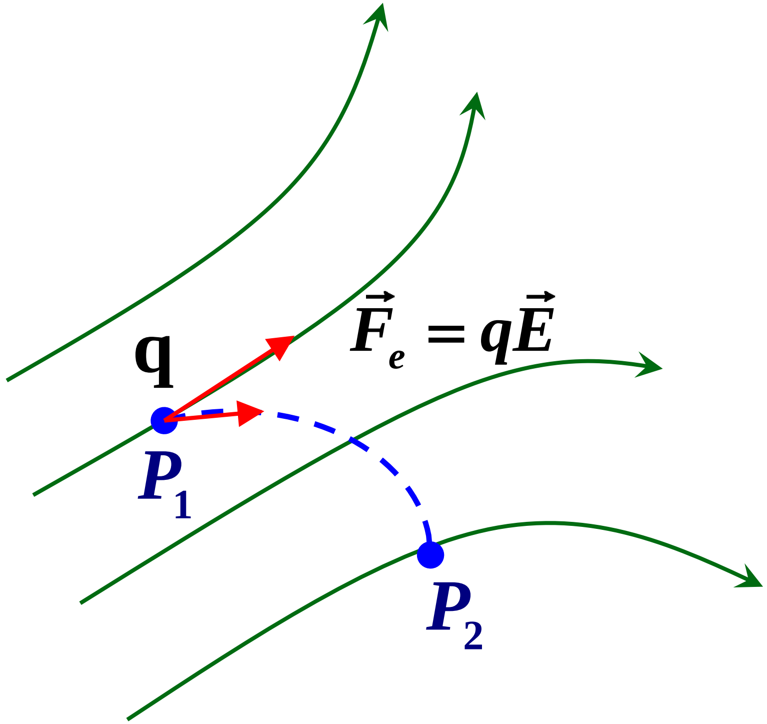
2）选取无穷远处为电势零点会给理论分析带来方便：在无穷远处电场强度的大小趋于零，若$U_{\infty}=0$，则电场中各点的电势可以方便地确定。

3）若电荷分布在无限大区域时，无穷远处电场强度的大小不一定趋于零，若取$U_\infty=0$，则可能导致电场中各点的电势无法确定。

4）不可以同时指定场中两点作为零电势点。

5. 电势差、电势的物理意义

电荷q从P_1点运动到P_2点，电场力做功：



$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = qU_{P_1P_2}$$

$$\boxed{U_{P_1P_2} = \frac{A_{P_1P_2}}{q}}$$

电势差是单位正电荷从一点运动到另一点电场力做功的数值大小。

类似地，某点的电势是单位正电荷从该点运动到无穷远处时电场力做功的数值大小。

二、带电体系的电势

1.点电荷的电势

$$\boxed{U_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

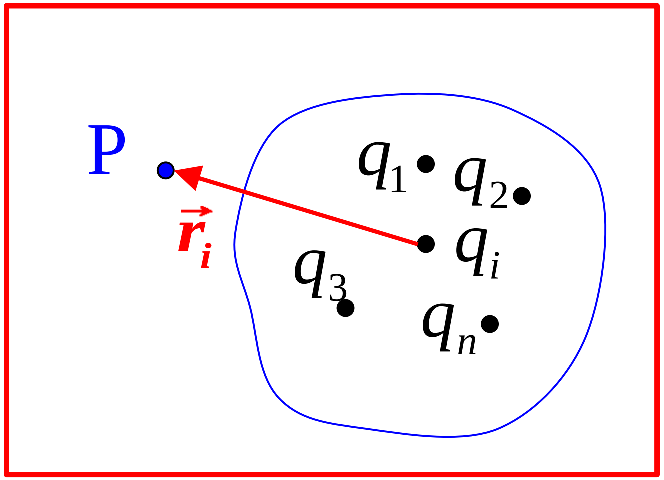
$$\begin{cases} q>0, U_P>0 \\ q<0, U_P<0 \end{cases}$$

2.点电荷系的电势

$$U_P=\int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^\infty\left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i\right)\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^n\left(\int_P^\infty \vec{E}_i\cdot d\vec{l}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^n\frac{q_i}{r_i}$$

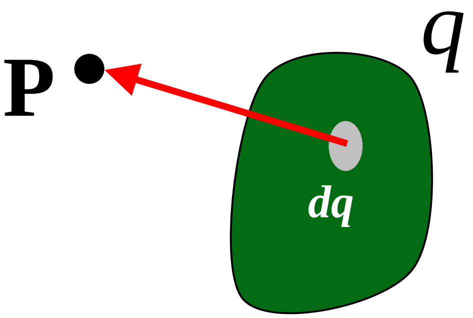
$$=\sum_{i=1}^n U_i$$



3. 连续带电体的电势：

$$dU_P = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{U_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



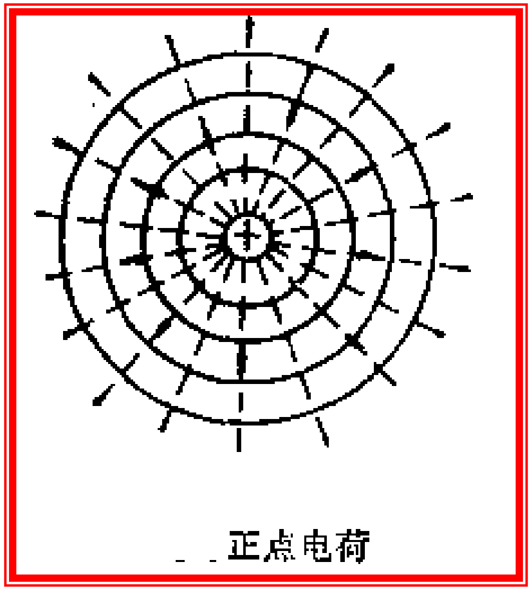
对于线分布、面分布、体分布的带电体，dq分别取： $dq = \lambda dl, \quad dq = \sigma ds, \quad dq = \rho dV$

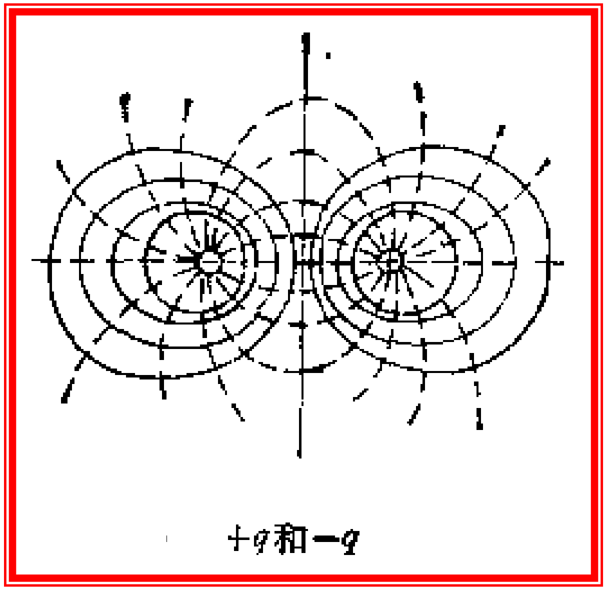
电势的叠加原理：

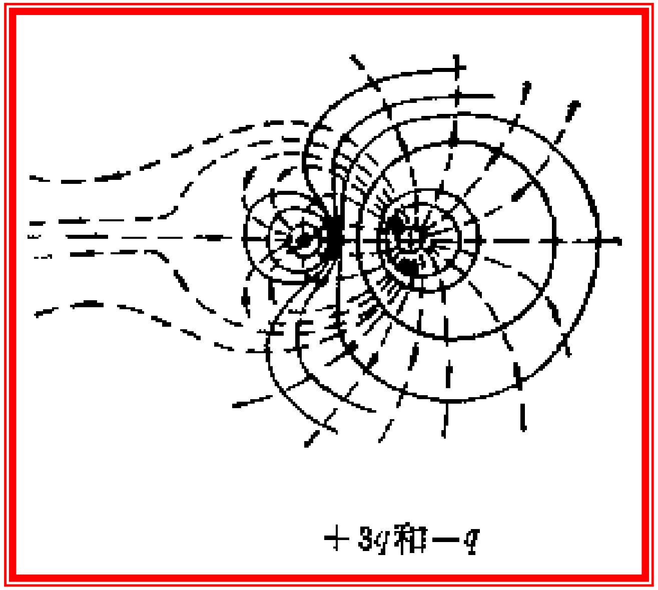
点电荷系的电场中某点的电势，等于各个点电荷单独存在时在该点所产生电势的代数和。

三、 等势面

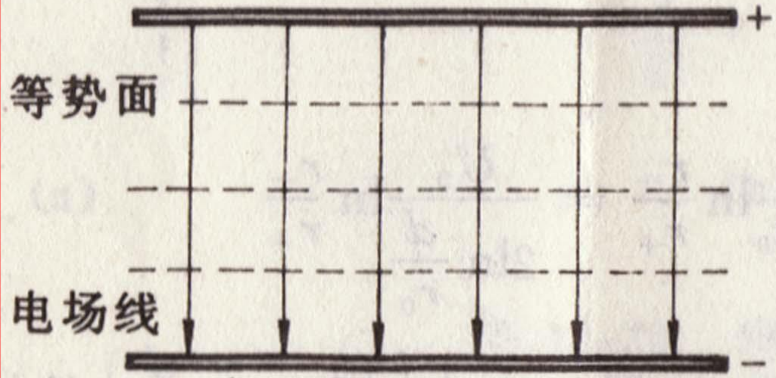
电势是标量场，标量场常用等值面来进行形象的几何描述。电势的等值面称为等电势面，或简称等势面。在同一等势面上，电势处处相等。



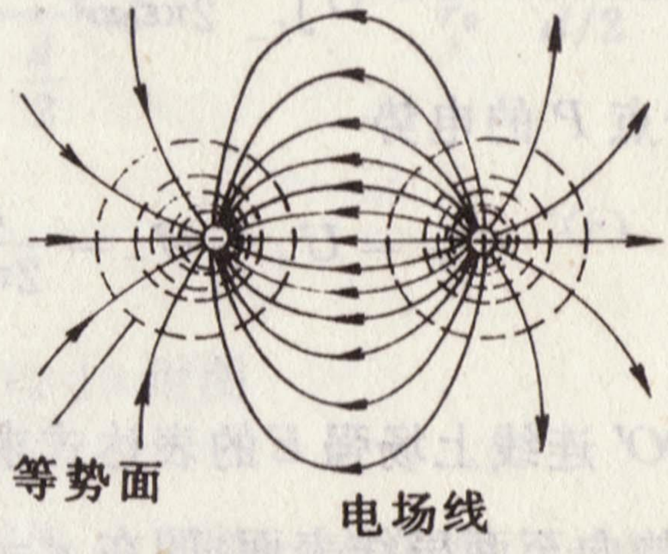




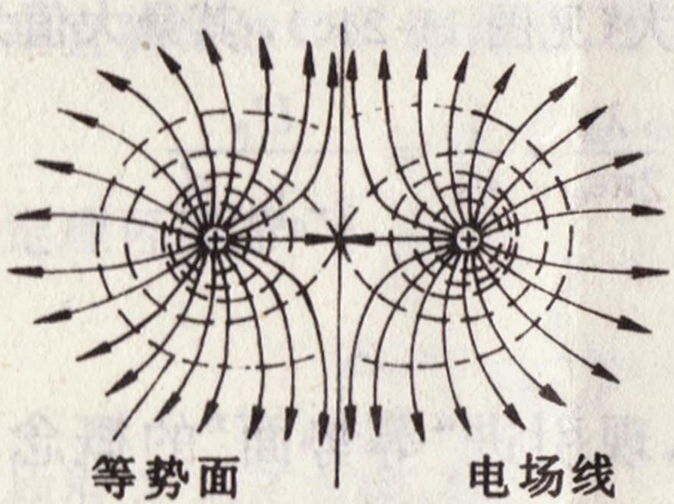
点电荷系统的等势面（实线）和电场线（虚线）



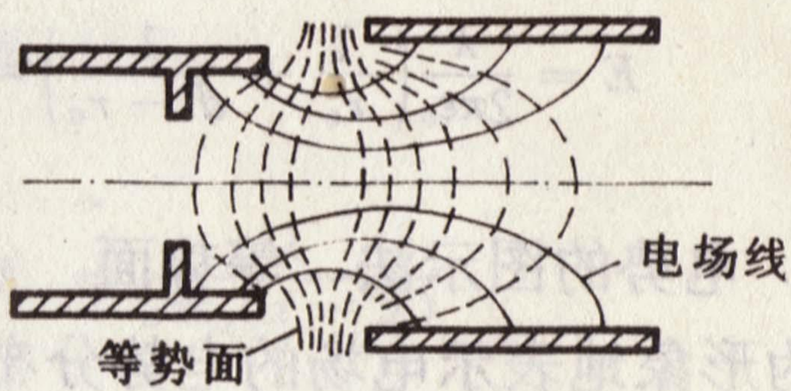
(c) 带电平板电容器



(d) 电偶极子

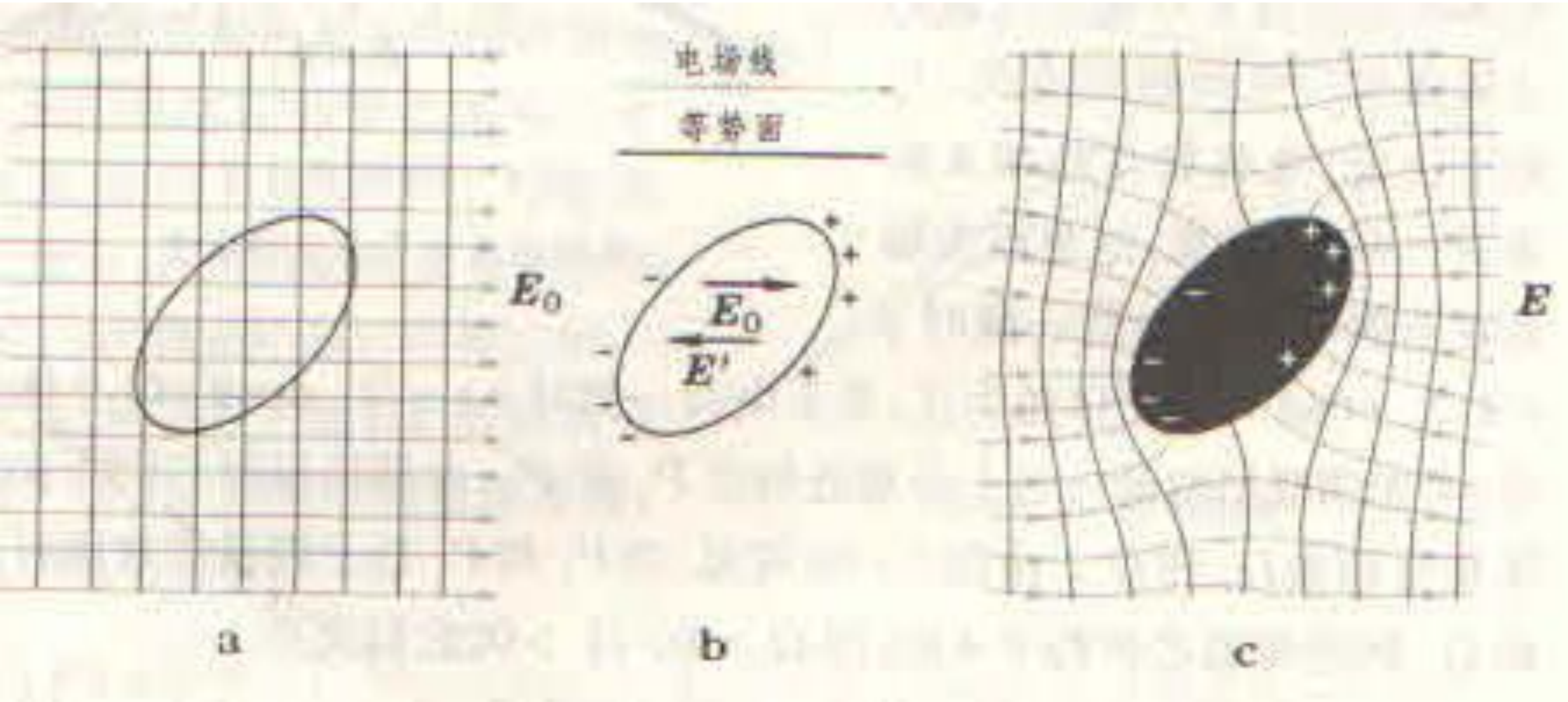


(e) 两个等值正电荷

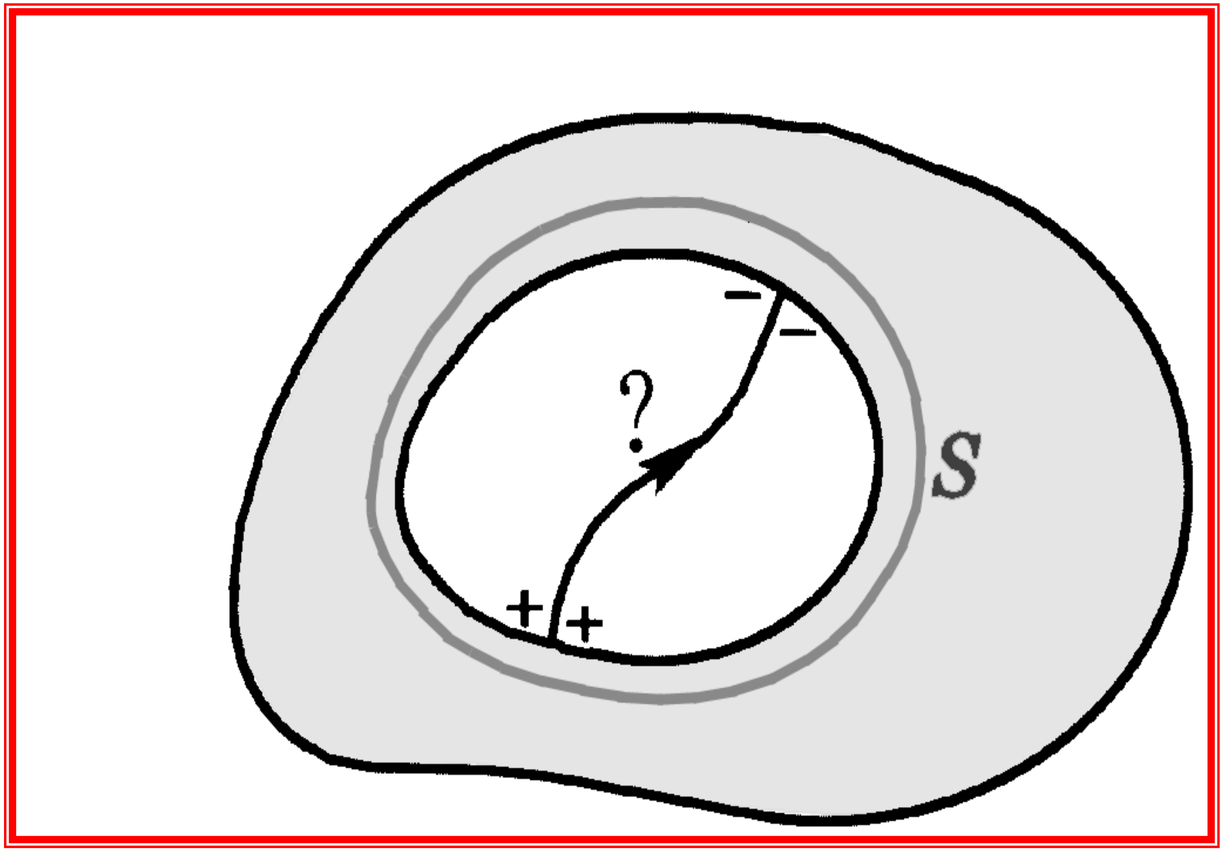


(f) 示波管内部的电场

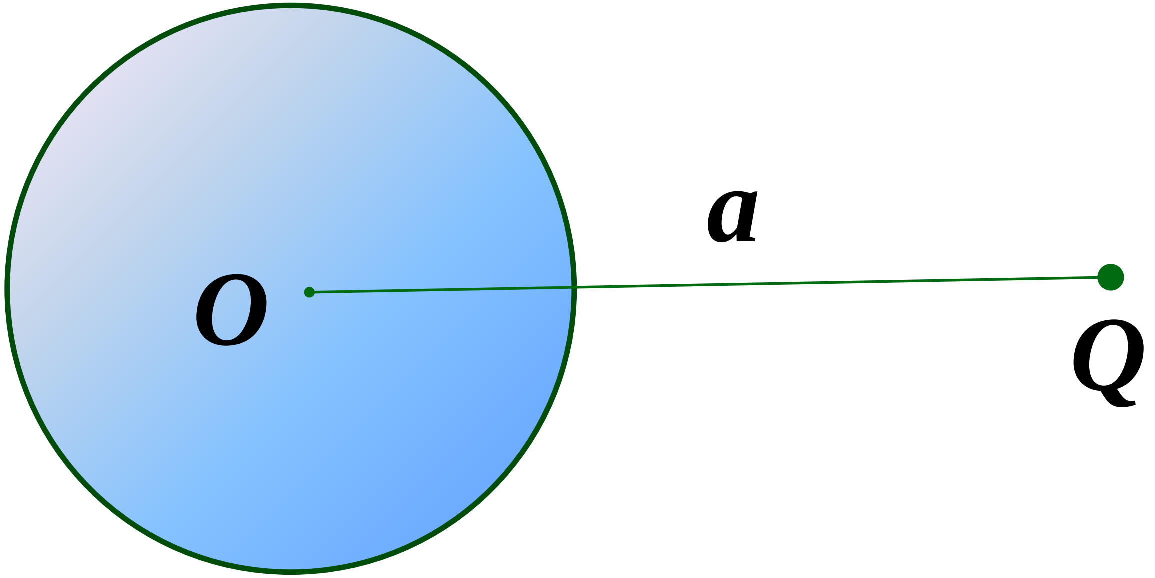
例：静电平衡导体表面是等势面，导体是等势体。



例：空腔内没有电荷的导体内表面不带电荷，
空腔内的电势和导体相同。

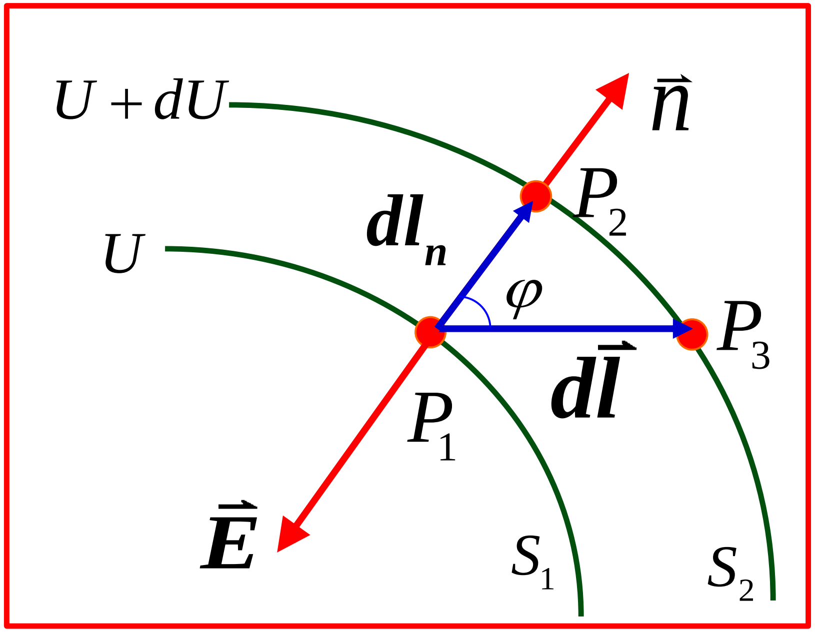


讨论题： 静电感应导体球的电势。



四、场强与电势的微分关系

1. 电势梯度



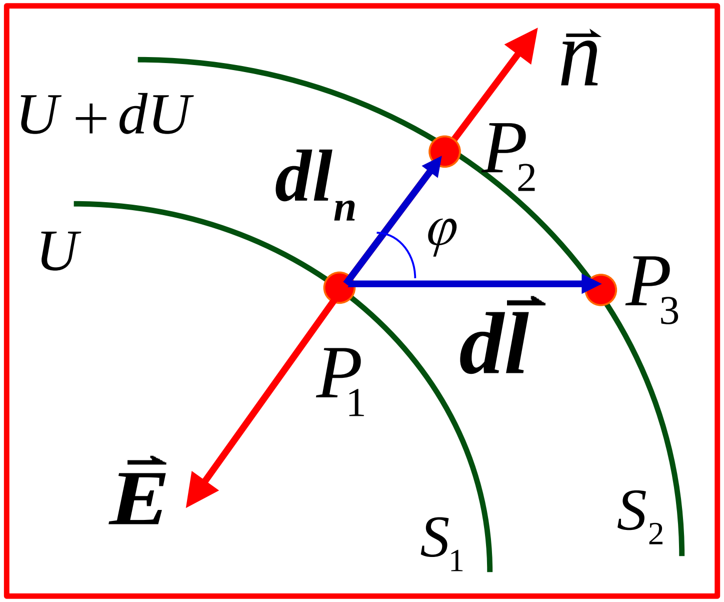
$\vec{l}$方向上的方向导数：$\dfrac{dU}{dl}$

$\vec{n}$ 垂直于等势面：

$$dl = \frac{dl_n}{\cos\varphi} \qquad \therefore \quad \frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dl_n}\cos\varphi$$

电势梯度：

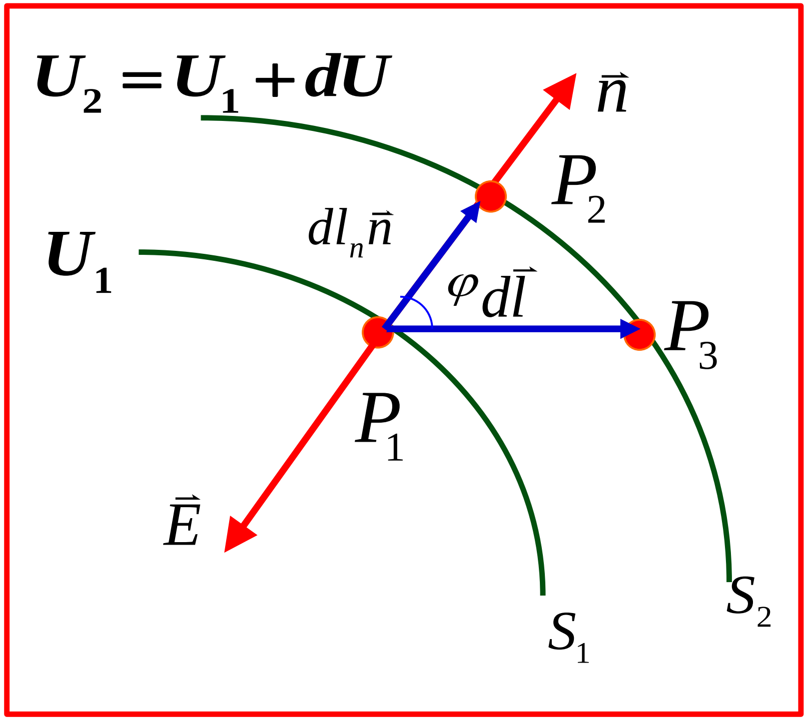
$$\boxed{gradU \equiv \frac{dU}{dl_n}\vec{n}}$$



电势梯度是一个矢量，方向与该点电势**增加率**最大的方向相同，大小等于沿该方向上的电势**增加率**。

电势梯度是是电场强度的**负**方向。

2. 场强与电势的微分关系



$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} + E_z\,\vec{k}$$

$$dU = U_2 - U_1 = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz)$$

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

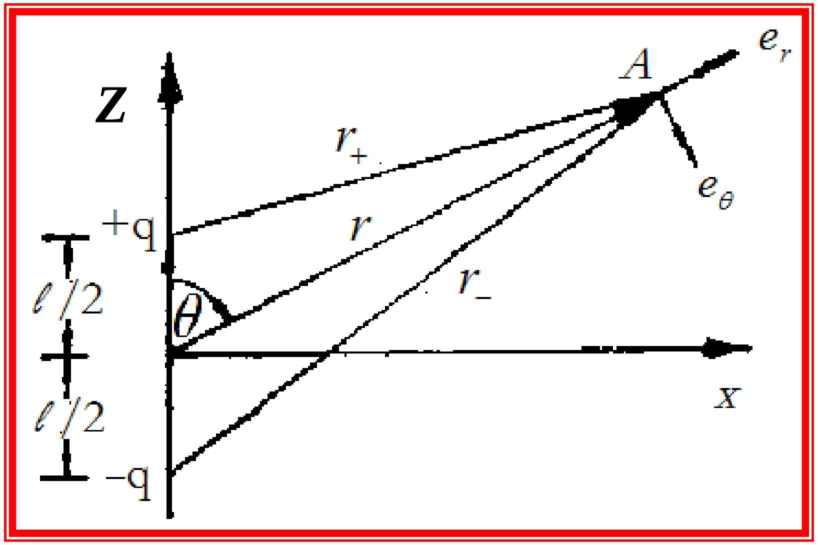
$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) \equiv -\nabla U}$$

五、常见带电体系的电势分布

[例] 求电偶极子的电势及电场的分布。

[解]其电场和电势分布相对 z 轴旋转对称，与角φ无关，而与 r 和 θ有关,有:



$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+}-\frac{q}{r_-}\right),$$

$$r_+=\left[r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta\right]^{1/2}=r\left[1+\left(\frac{l}{2r}\right)^2-\frac{l}{r}\cos\theta\right]^{1/2}$$

因为 $l<<r$， $\therefore r_+\approx r-\frac{l}{2}\cos\theta$ 同理 $r_-\approx r+\frac{l}{2}\cos\theta.$

故: $U(r)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{r-(l/2)\cos\theta}-\dfrac{1}{r+(l/2)\cos\theta}\right]\approx\dfrac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

由 $\vec{\mathbf{p}}=ql\hat{\mathbf{z}}$ ，可将上式写成: $U(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$

球坐标下:

$$E_r=-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^3}=\frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^3},$$

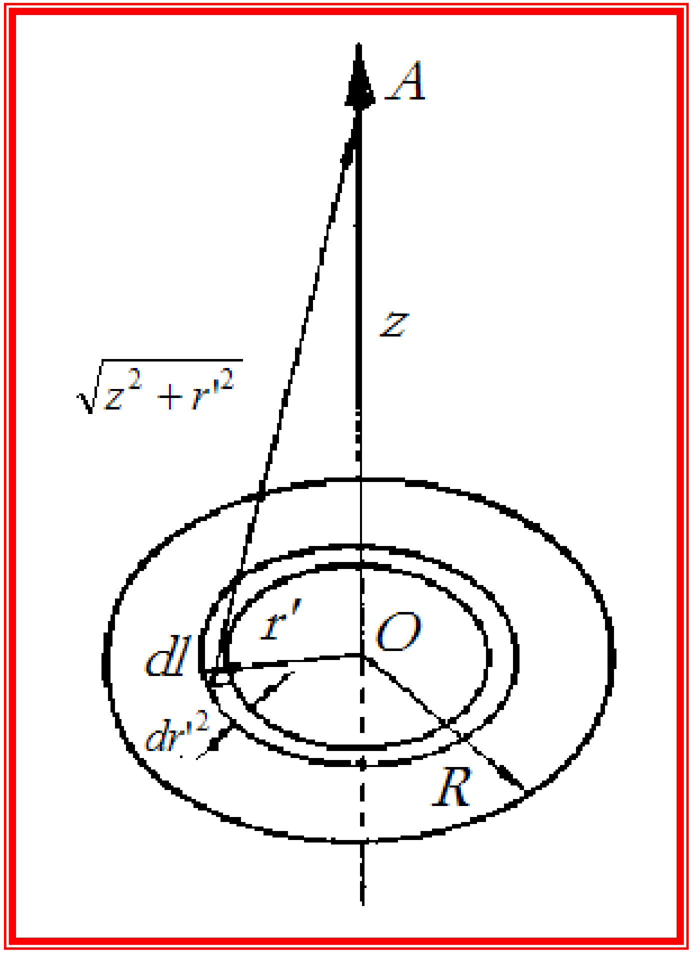
$$E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\sin\theta}{r^3}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^3},$$

$$E_\varphi=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=0.$$

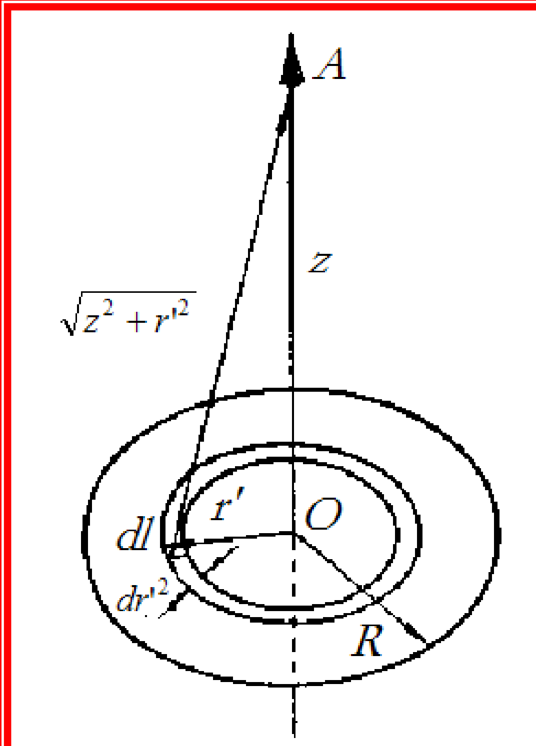
由从球坐标下得到的结果，电偶极子的电场可以写成如下矢量形式：

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\vec{\mathbf{r}}$$

[例] 求面电荷密度为 σ_e 、半径为R的均匀带电薄圆盘轴线上的电势与电场分布。



[解]如右图所示，圆盘轴线上任一点A与盘心O的距离为$OA = z$。以O为圆心，取半径为r'，宽度为dr'的圆环，环上取一小段dl：



$$dl = r'd\phi$$

该小段电荷在点A产生的电势为：

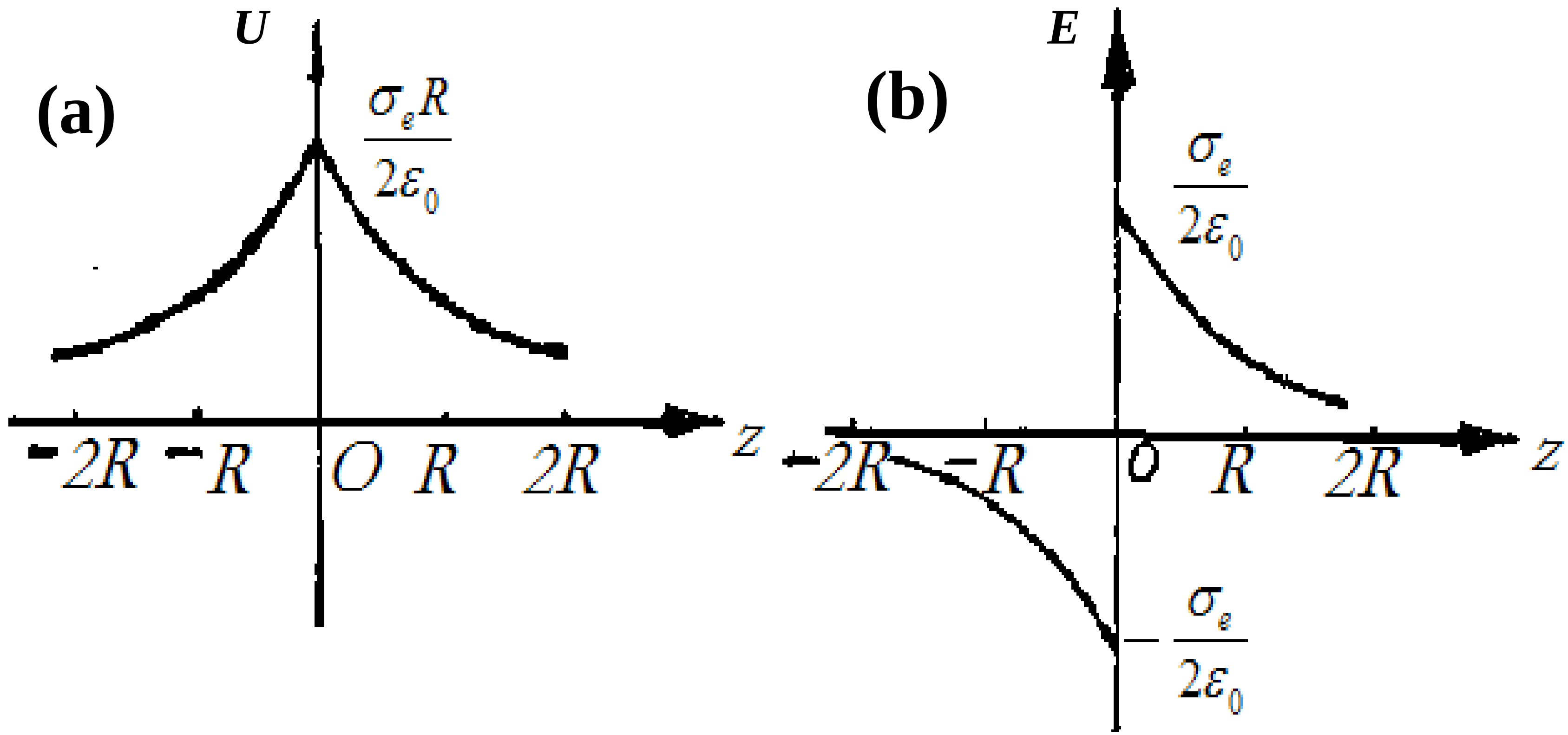
$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e dr'dl}{(r'^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e r'dr'd\phi}{(r'^2+z^2)^{1/2}}$$

将上式对r'和φ积分得轴上的电势分布.

$$U(z) = \frac{\sigma_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{(r'^2 + z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

$$E_z = \begin{cases} \dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}\right], & (z > 0) \\ -\dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left[1 + \dfrac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}\right], & (z < 0) \end{cases}$$

由上述结果，我们可画出电势与电场随z变化的曲线，分别见图(a)和(b)。



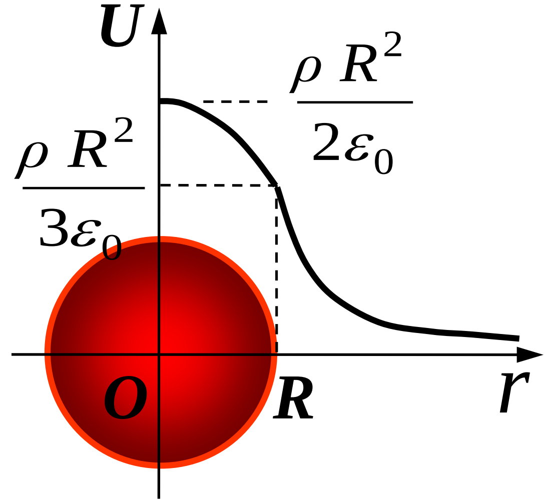
均匀带电圆盘轴线上的电势和电场强度的分布

【例题】：计算均匀带电球体内外的电势。

【解】：设球面半径R，电量Q

球外（$r > R$）：
$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_1 = \int_r^{\infty} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



球面电荷U-r 线

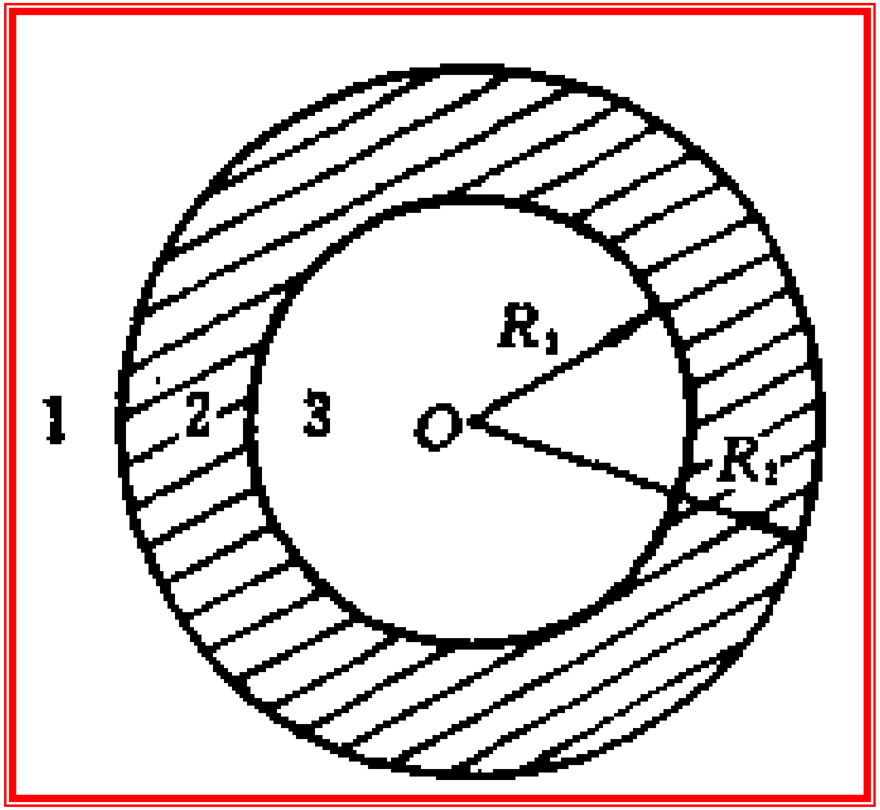
球内（$r \le R$）：
$$E_2 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$U_2 = \int_r^{R} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_r^{R}\frac{r\mathrm{d}r}{R^3} + \int_R^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right)$$

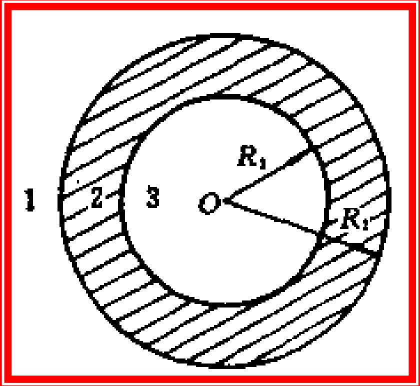
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R^2 - r^2}{2R^3} + \frac{1}{R}\right) = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

均匀带电球面内外电势的分布如图 U-r 曲线。

[例] 求电荷密度为 ρ_e 、内外半径分别为R_1和R_2的均匀带电球壳的电场与电势分布。



[解]本题待求电场与电势**具球对称性**。对这类问题我们可**先用高斯定理求电场**，然后**再求电势**。



- 球壳将空间分隔成1、2、3三个区域。以O为球心，以r为半径作球面为高斯面，在三个区域中分别用高斯定理可求得：

$$
E=\begin{cases}
=Q/4\pi\varepsilon_0 r^2=\rho_e(R_2^3-R_1^3)/3\varepsilon_0 r^2, & (r\ge R_2)\\
=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[\dfrac{4\pi}{3}(r^3-R_1^3)\rho_e]=\dfrac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right), & (R_1\le r\le R_2)\\
=0. & (r\le R_1)
\end{cases}
$$

$$U_1=-\int_{\infty}^{r}\vec{\mathrm{E}}_1\cdot d\vec{l}=-\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2}=\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r},\qquad (r\geq R_2)$$

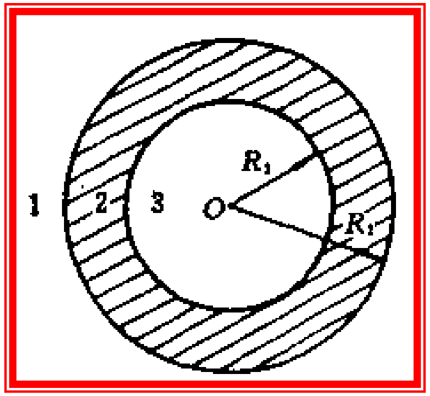
$$U_2=-\int_{\infty}^{R_2}\vec{\mathrm{E}}_1\cdot d\,\vec{\boldsymbol{l}}-\int_{R_2}^{r}\vec{\mathrm{E}}_2\cdot d\,\vec{\boldsymbol{l}}=U_1(R_2)-\frac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r}\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right)rdr$$

$$=\frac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2}-\frac{\rho_e(r^2-R_2^2)}{6\varepsilon_0}-\frac{\rho_e R_1^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\boldsymbol{=\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\frac{2R_1^3}{r}-r^2\right),\qquad (R_1\leq r\leq R_2);}$$

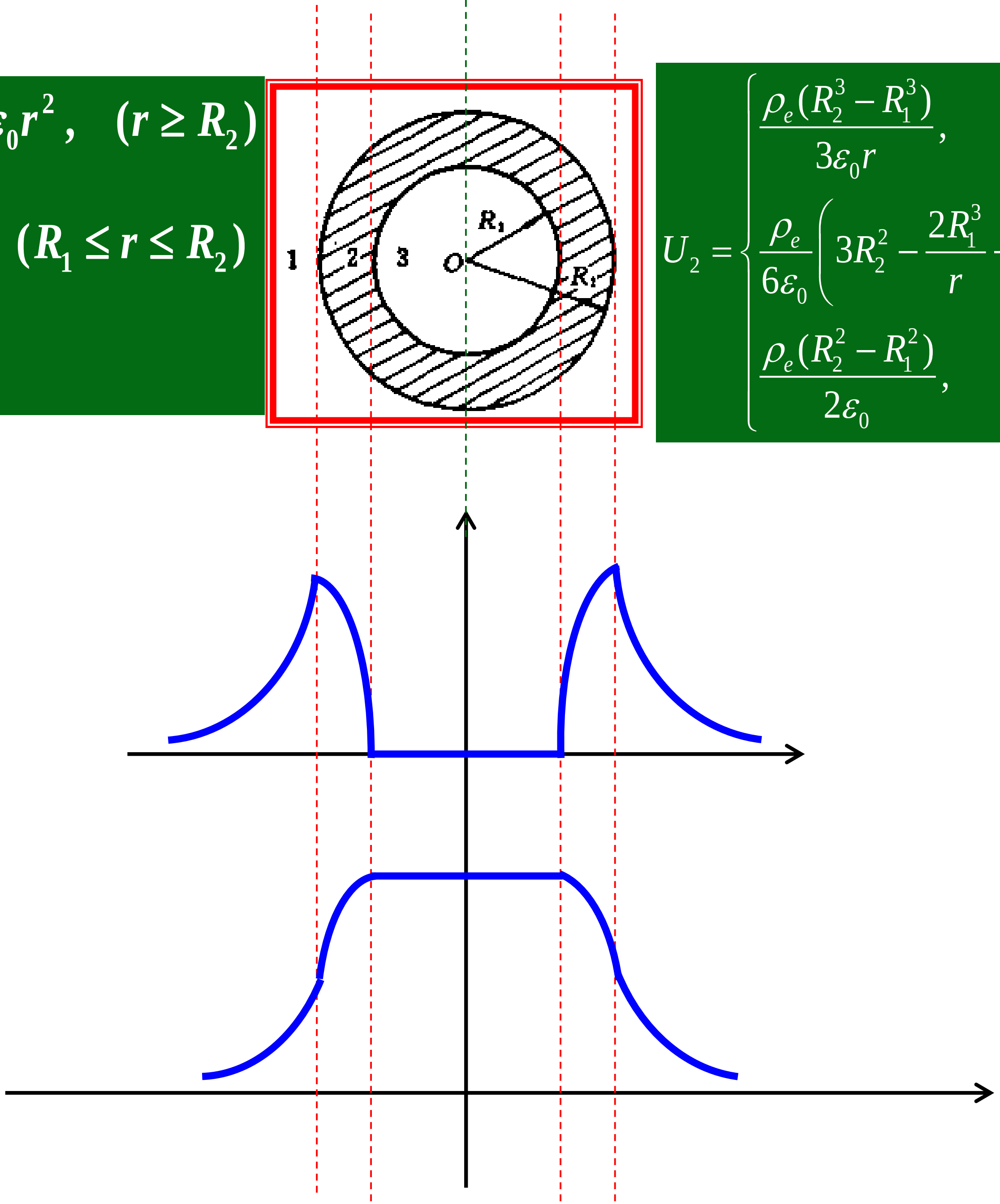
$$U_3 = -\int_{\infty}^{R_2} \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} - \int_{R_2}^{R_1} \boldsymbol{E}_2 \cdot d\boldsymbol{l} - \int_{R_1}^{r} \boldsymbol{E}_3 \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$= U_2(R_1) = \frac{\rho_e (R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}, \qquad (r \le R_1).$$



U_3是与 r 无关的恒量，可知球壳内空腔的电势处处相等。

$$E=\begin{cases}\rho_e(R_2^3-R_1^3)/3\varepsilon_0 r^2, & (r\ge R_2)\\ \dfrac{\rho_e}{3\varepsilon_0}\left(r-\dfrac{R_1^3}{r^2}\right), & (R_1\le r\le R_2)\\ 0. & (r\le R_1)\end{cases}$$



$$U_2=\begin{cases}\dfrac{\rho_e(R_2^3-R_1^3)}{3\varepsilon_0 r}, & (r\ge R_2)\\ \dfrac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2-\dfrac{2R_1^3}{r}-r^2\right), & (R_1\le r\le R_2)\\ \dfrac{\rho_e(R_2^2-R_1^2)}{2\varepsilon_0}, & (r\le R_1)\end{cases}$$

•计算电场、电势的方法：

1. 由叠加原理 $U=\int dU$ 计算。

由 $\vec{E}=-\nabla U$计算电场强度。

2. 对于场强具有对称性，先由高斯定理方便求

出 $\vec{E}$ ，再由积分关系 $U_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 求得电势

专题讨论（一）

电势零点选择

【例】： 求均匀长直线电荷电势的分布。

【解】： 设电荷线密度为λ，任一点P 距线电荷r 远，见图。

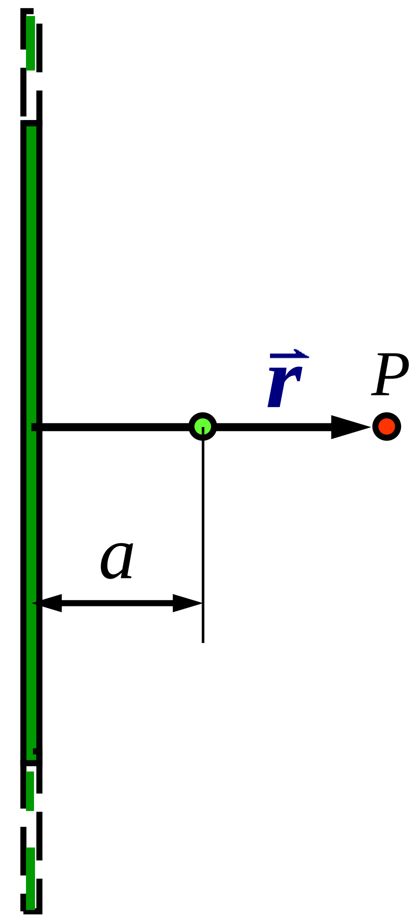
如设$U_\infty=0$

$$U=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r}=?=\infty\text{（发散）}$$

若设$U_0=0$

$$U=\int_r^0 \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^0 \frac{dr}{r}=?=\infty\text{（发散）}$$

怎样选择电势零点?



直线电荷的电势

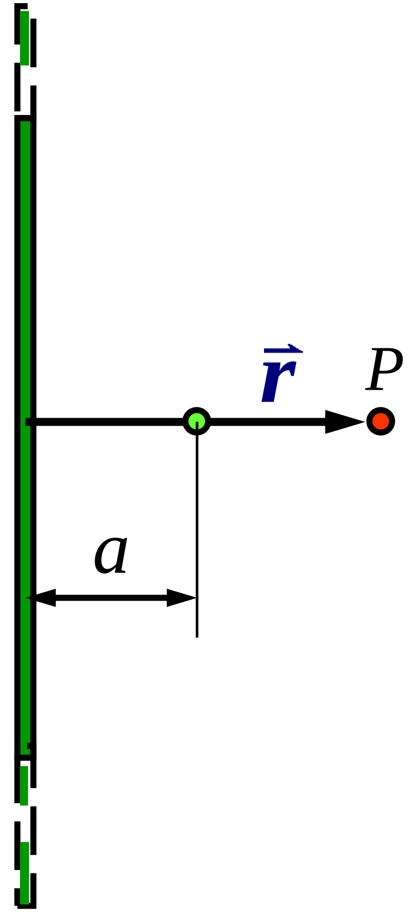
可设其他任意处电势为零，例如令$U_a=0$，则

$$U=\int_r^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_r^a \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{r}$$

常常取 $a=1$，则 $$U=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{r}$$

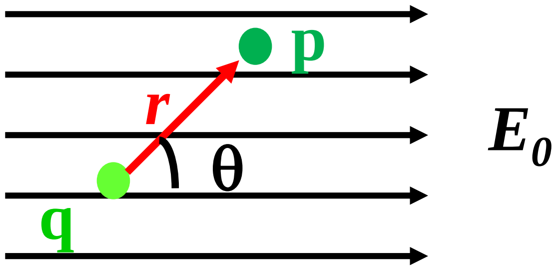
当 $r\le 1,\quad U\ge 0$

$r>1,\quad U<0$



直线电荷的电势

在均匀电场E_0中放入一个点电荷q，则空间电势如何？



对于均匀电场，不能取无穷远处为零电势，

对于点电荷，不能取电荷本身位置（坐标原点）为零电势

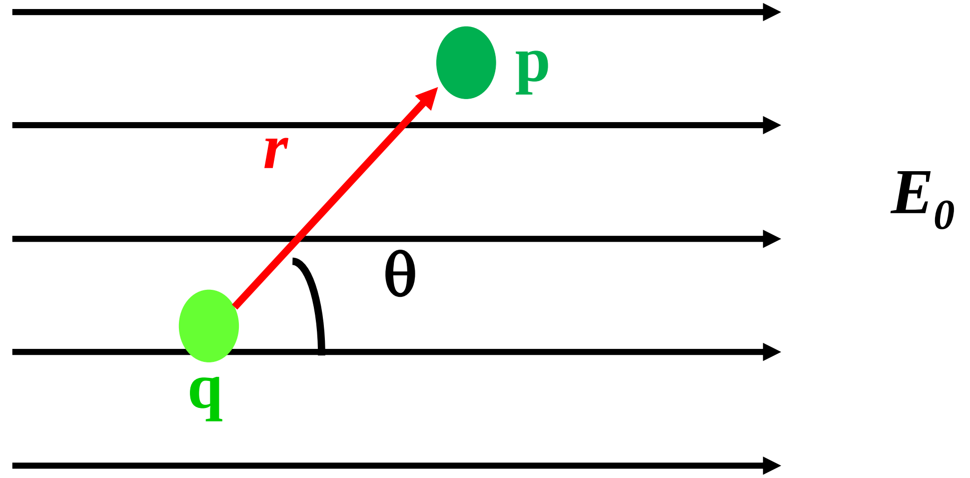
对于任意一点p，

若取原点为零电势，均匀电场单独存在时的电势为：

$$U_1 = -E_0 r\cos\theta$$

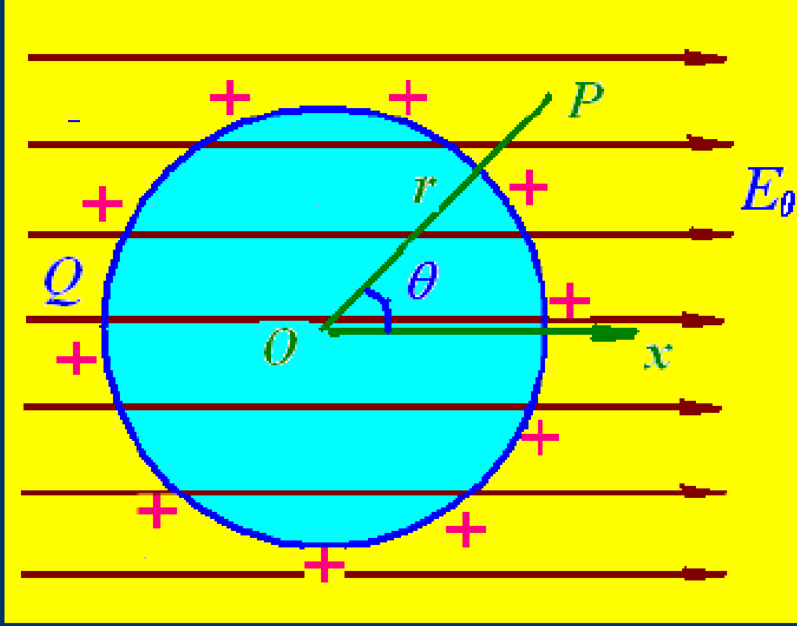
若取无穷远处为零电势，点电荷单独存在时的电势为：

$$U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$$U = U_1 + U_2 + U_0 = -E_0 r\cos\theta + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + U_0$$

均匀外场中放入一半径为R，带电量为Q的导体球，球外任一点的电势为：



$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_0$$

$$U_1 = -E_0 r\cos\theta,\ \text{原点}$$

$$U_2 = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, r \ge R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, r \le R \end{cases},\quad \text{无限远}$$

$$U_3 = \begin{cases} \dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta, r \ge R, & \text{无限远或} \\ E_0 r\cos\theta, r \le R, & \text{原点均可} \end{cases}$$

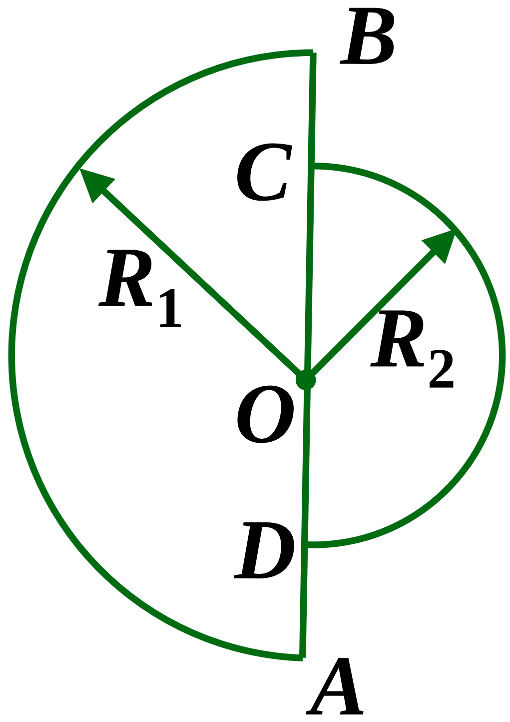
$$U=\begin{cases} -E_0 r\cos\theta+\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{E_0R^3}{r^2}\cos\theta+U_0, & \mathrm{r}\ge\mathrm{R} \\ \dfrac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R}+U_0, & \mathrm{r}\le\mathrm{R} \end{cases}$$

除无限远外，其它点均可作电势零点. 一旦该点选定，U_0就确定.

专题讨论（二）

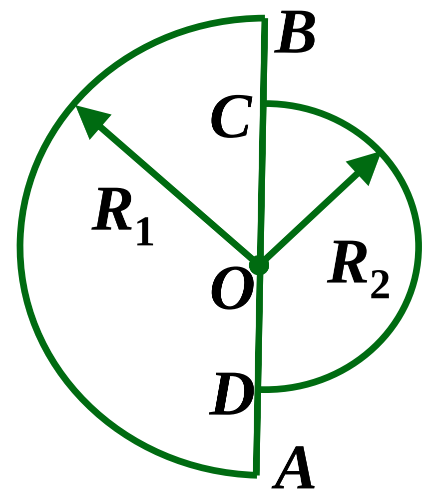
当叠加原理遇上对称性…

【例】半径分别为R_1和R_2的两个同心半球面相对放置，各自均匀带电，电荷面密度分别是σ_1和σ_2。求大半球面的直径AOB上的电势分布。



- 电荷均匀的完整球壳面内部电势处处相等，因而球心处电势：

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = k\frac{4\pi r^2\sigma}{r} = 4\pi k r\sigma$$



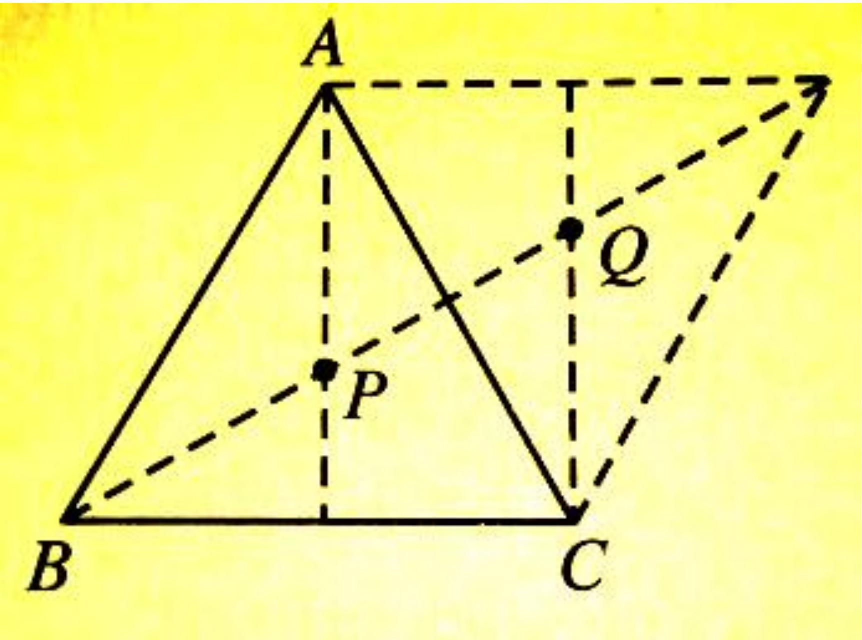
半球面的贡献各占一半，即,半球壳在底面上的电势为 $2\pi k r\sigma$

同理球壳外的电势为： $\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{4\pi k R^2\sigma}{r}$

半球壳的电势为：$\frac{2\pi k R^2\sigma}{r}$

$$\begin{cases} r \le R_2\text{时，} & U = 2\pi k(R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2); \\ r > R_2\text{时，} & U = 2\pi k(R_1\sigma_1 + R_2^2\sigma_2 / r) \end{cases}$$

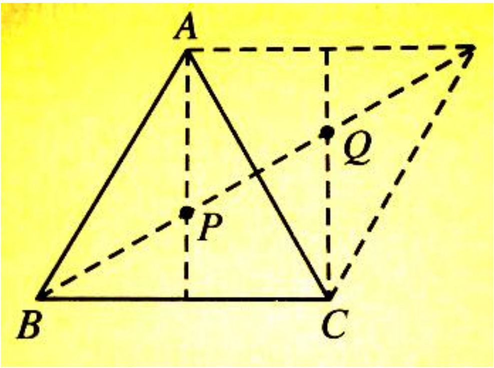
例 三根等长的绝缘棒连成正三角形，每根棒上均匀分布等量同号电荷，测得图中P、Q两点（均位于相应正三角形的中心）的电势分别为U_P、U_Q，若撤去BC棒，则P、Q两点的电势分别为多少？



三根棒在P点的电势贡献相等，都为$U_p/3$,

AC在Q点的电势也为$U_p/3$,

AB、BC在Q点的电势贡献相等

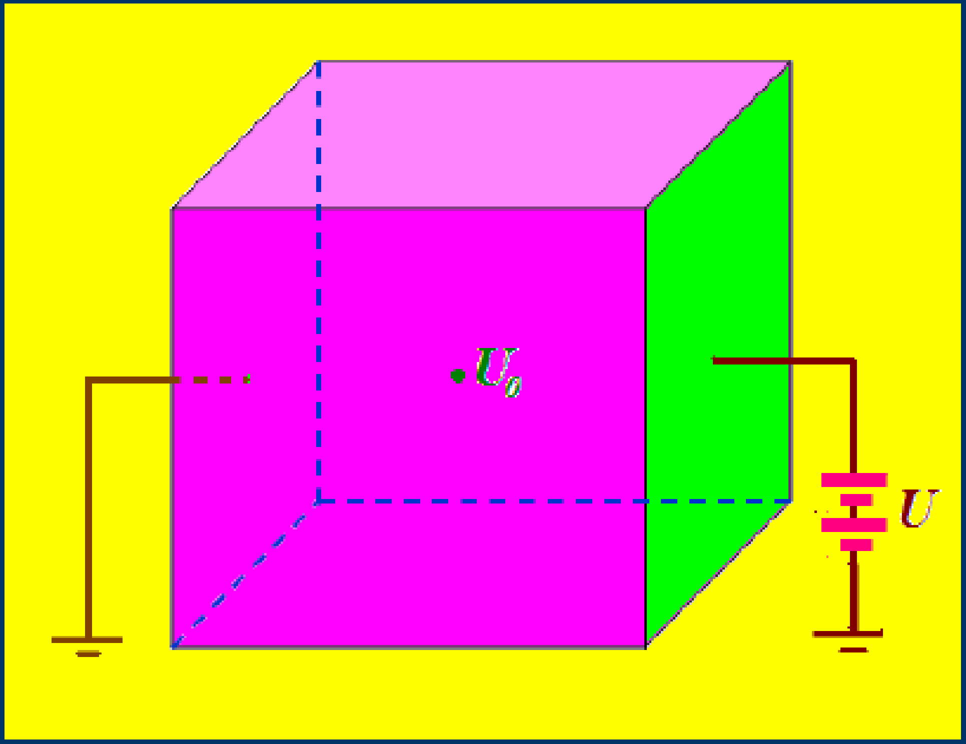


$$\frac{1}{2}(U_Q-\frac{1}{3}U_P)=\frac{1}{2}U_Q-\frac{1}{6}U_P.$$

撤去BC棒后

$$U'_P=\frac{2}{3}U_P,\quad U'_Q=\frac{1}{2}U_Q+\frac{1}{6}U_P$$

[例]一个立方体有5个面接地, 而第6个面与其余5个面绝缘,电势为U, 则立方体中心的电势是多少?



[解] 由电势的叠加原理, 中心点的电势由6个面电势叠加而成:

$$U_0 = \sum_{i=1}^{6} k_i U_i = k_1 U_1 + k_2 U_2 + \cdots + k_6 U_6$$

因为6个面几何形状对称, 所以系数k_i相同,

$$U_0 = K \sum_{i=1}^{6} U_i = k(U_1 + U_2 + \cdots + U_6)$$

若6面等电势,均为U, 则中心点也为U, 所以k=1/6

$$U_0 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} U_i$$

所以, 当:

$$U_1 = U_2 = \cdots = U_5 = 0, \quad U_6 = U$$

有:

$$U_0 = \frac{1}{6} U$$