No.
Date. / /

2.2 集合的势(数量)

设A与B是两个集合,如果存在一个从A到B上的一对一的映射,我们称集合A与B有相同的"势"或有相同的"基数",称A与B等价"对等",用A~B表示

(1) A~A(自反性) (2)若 A~B 则 B~A(对称性) (3)若 A~B, B~C,则A~C(传递性)

定义:令 N^*是正整数全集,且$N_n=\{1,2,\cdots,n\}$

(1) 如果存在一个正整数n,使得$A\sim N_n$,那么A叫做有限集,ϕ空集也是有限集

(2) 如果集合A不是有限集,则称A为无限集

(3) 若$A\sim N^*$,则称A为可数集

(4) 若A既不是有限集也不是可数集,则称A为不可数集

(5) 若A是有限集或可数集,则称A是至多可数集

有限集A和B等价⟺A与B有相同的元素个数

例:设A是整数的全体,证明:A是可数集

证: 0, 1, -1, 2, -2, ……

$f: N^* \longrightarrow A$ 一一映射

$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n为偶 \\ -\frac{n-1}{2} & n为奇\end{cases}$

例:证明(0,1)与[0,1]有相同的势 $[0,1]\longrightarrow(0,1)$

证: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0 \\ \frac{1}{n+2} & x=\frac{1}{n}(n\in N^*) \\ x & x\neq 0 且x不是正整数的倒数时\end{cases}$

定理:可数集的每一个无限子集是可数集

证明:设$E\subset A$, E是无限集,A是可数集

因此可将A排成$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$

构造数列$\{k_n\}$,令k_1是最小整数,使得$a_{k_1}\in E$

当$k_1, k_2, \cdots, k_{s-1}$ $(s\geqslant 2)$选定之后,令k_s是大于k_{s-1}的最小正整数,使得$a_{k_s}\in E$

这样得映射$f: E\rightarrow N^*$ $f(a_{k_n})=n\ (n\in N^*)$

定理：任何无限集必含有可数子集（可数集是具有最小的无限势）

定理：设 $\{E_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是一列至多可数集 令 $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则 S 是至多可数集

证明：对 $n\in N^*$，$E_n=\{x_{n1},x_{n2},\cdots,x_{nk}\cdots\}$

$E_1: x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1n}, \cdots$

$E_2: x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots x_{2n}, \cdots$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

按对角线排成新的一列 除去重复的，保留第一次出现的项 得到一个新的一列 S

定理：R中的全体有理数是可数的

证明：$[0,1)$ 中全体有理数是可数的

$q=\frac{n}{m}$ $n<m$ $n,m\in N$

$0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cdots \frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots$

0

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}$

$\vdots$

$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$

除去重复的，保留第一次出现的项可排成一列

由此，得 $[0,1)$ 中全体有理数是可数集

$Q=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}\{x: x\in[n,n+1), x\in Q\}$

$f: r\to r+n$

$\forall r\in[0,1) \longleftrightarrow [n,n+1)$ 全体有理数是可数的

由上，得 Q 是可数集

定理：$[0,1]$ 上的全体实数是不可数的

推论：$[0,1]$ 上的全体无理数是不可数的

证明：（反证法）若 $[0,1]$ 上的全体实数是可数集，记 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$

$x_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\cdots$

$x_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots$

$\vdots$

$x_n=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots$

其中所有的 x_{ij} 都是 0, 1, ……, 9 十个数字中的一个，对每个 i，数列 $\{x_{ij} \mid j=1,2,\cdots\}$ 中有无限个不为 0 $(0.5 = 0.4999\cdots 9)$

作十进制小数 $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ 使得 $\alpha_i \neq x_i x_i$，$\alpha_i \neq 0$，若 $x_{ii}=1$，令 $\alpha_i=2$，如果 $x_{ii}\neq 1$，令 $\alpha_i=1$)

于是 $\alpha \in [0,1]$ 但 $\alpha \neq x_i$ $\forall i \in N^*$（因为 $\alpha_i \neq x_{ii}$）

从而 α 未被排列出来，矛盾！

此矛盾性说明结论成立