1.3 拓扑空间里的收敛与连续性

1.3.1 拓扑空间中的收敛

¶ 收敛点列

正如我们在前言中提到的，定义拓扑结构是为了将收敛和连续映射的概念扩展到更一般的情形。在拓扑空间中定义收敛序列的概念是非常容易的。直观地说，$x_n \to x_0$ 意味着“对于 x_0 的任何邻域 N，序列 x_n 最终将进入并留在 N 中”。于是我们定义

定义 1.46.（收敛）

设 x_n 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 中的一个点列。如果存在 $x_0 \in X$，满足：对于 x_0 的任意邻域 A，均存在 $k > 0$ 使得当 $n > k$ 时，有 $x_n \in A$，则我们称 x_n 收敛到 x_0，并记为 $x_n \to x_0$。♣

根据邻域的定义，容易看出在 $(X, \mathscr{T})$ 中 $x_n \to x_0$ 当且仅当对于任意包含 x_0 的开集 U，存在 $k > 0$ 使得对所有 $n > k$ 都有 $x_n \in U$ 成立。

例 1.47. 为了更好地理解收敛性，我们下面考查一些简单的空间中的收敛性：

(1) **(度量拓扑下的收敛)** 考虑度量空间 (X, d)，我们定义了两种序列收敛概念：按度量收敛以及按度量拓扑收敛。不难验证，这两种序列收敛概念是一致的，即 x_n 按度量拓扑收敛至 x_0 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ 使得对所有 $n > k$，均有 $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ 成立.

(2) **(离散拓扑下的收敛)** 考虑离散拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{discrete})$. 因为开球 $B(x, 1) = \{x\}$，我们容易看出：$x_n \to x_0$ 当且仅当存在 k 使得对所有 $n > k$，均有 $x_n = x_0$ 成立。换言之，在离散拓扑空间中，只有“最终常值”的序列是收敛的。

(3) **(平凡拓扑下的收敛)** 考虑平凡拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{trivial})$. 因为唯一的非空开集是集合 X，所以任何序列 $x_n \in X$ 都是收敛的，而且任何点 $x_0 \in X$ 都是其极限！特别地，收敛序列的极限不是唯一的！[13]

(4) **(余有限拓扑下的收敛)** 考虑余有限拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{cofinite})$. 我们假设 $x_n \to x_0$. 根据定义，对于 x_0 的任何开邻域 U，存在 k 使得对任意 $n > k$，均有 $x_n \in U$。这一条件成立当且仅当对于任意 $x \neq x_0$，至多有有限多个 $i \in \mathbb{N}$ 使得 $x_i = x$ 成立。所以在该空间的收敛性是非常微妙的。例如，
   - 如果 x_n 都是不同的，那么序列 $x_1, x_2, \cdots$ 收敛到任意点 x_0.
   - 形如 $x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, \ldots$（其中 x_n 都是不同的点）的序列有唯一的极限 x_0.
   - 形如 $x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots$ 的序列是不收敛的。

(5) **(余可数拓扑下的收敛)** 考虑余有限拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{cocountable})$. 不妨设 X 为不可数集。由完全相同的论证可得 $x_n \to x_0$ 当且仅当存在 $k > 0$ 使得对所有 $n > k$ 都有 $x_n = x_0$ 成立。换言之，同离散拓扑空间一样，只有“最终常值”的序列收敛。

[13] 无需太担心这种糟糕的情形。稍后我们将看到，对拓扑加上适当假设后，任何收敛序列的极限都是唯一的。

¶ 逐点收敛拓扑

如果说上面几个收敛列的例子显得过于人为、不够自然，下面这个例子则告诉我们，我们熟悉的“函数逐点收敛”也是一种拓扑收敛。

考虑 $[0,1]$ 上所有函数（不一定连续）构成的空间

$$X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

在 X 中，我们可以像往常一样定义函数列的逐点收敛性：

$$f_n \to f \text{ 当且仅当} f_n(x) \to f(x), \forall x \in [0,1].$$

下面我们努力在 X 上构造合适的拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，使得逐点收敛正是拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的收敛。从直观上来说，$\mathscr{T}_{p.c.}$ 中的开集既不能太多（否则会导致逐点收敛的函数列在该拓扑下不收敛），也不能太少（否则会导致不逐点收敛的函数列在该拓扑下收敛）。于是，合理的做法是：先按照逐点收敛本身的含义，确定哪些集合必须是开集；然后根据拓扑的公理，找出包含这些集合的最小集族。

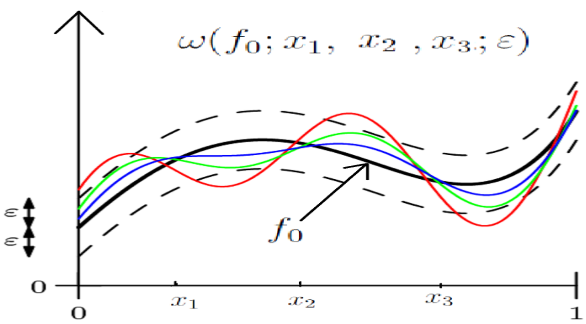
现假设 f_n 逐点收敛与 f，我们需要找到 X 中合适的包含 f 的集合作为我们的开集。为此，我们先固定任意 $x \in [0,1]$. 根据逐点收敛的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，可以找到 $k > 0$ 使得对所有 $n > k$，均有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 这启发我们对于任意 $f \in X$，任意 $x \in [0,1]$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，定义集合

$$\omega(f;x;\varepsilon) := \{g \in X \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

为 f 的一个“基本开邻域”，它包含的是在点 x 处跟 f 很接近的函数。根据开集的定义，有限个开集的交依然是开集，于是对于任意有限个点 $x_1,\cdots,x_m \in [0,1]$，我们需要定义

$$\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon) := \{g \in X \mid |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, \forall 1 \le i \le m\}$$

为 f 的一个“开邻域”。不难看出，该集合包含了所有在 $x_1,\cdots,x_m$ 处跟 f 都很接近的函数。下面是一个简单的示意图：



当然，为了定义出拓扑，我们还得保证任意多个开集的并依然是开集。为此，我们借用欧氏空间或者一般度量空间中开集的定义方式（回想一下我们是如何通过开球这样的“基本开集”去定义一般的开集），定义出我们想要的逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$：

$$\mathscr{T}_{p.c.} = \{U \subset X \mid \forall f_0 \in U, \exists x_1,\cdots,x_m \in [0,1] \text{ 和} \varepsilon > 0, \text{使得} U \supset \omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\} \tag{1.3.1}$$

下面证明这正是我们想要的拓扑：

命题 1.48.（逐点收敛拓扑）

由 (1.3.1) 定义的集族 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是集合 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 上的一个拓扑，且 X 中的函数列 f_n 逐点收敛于 f 当且仅当 f_n 作为拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的点列依拓扑收敛于 f.

证明 按照定义容易验证 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是 X 上的一个拓扑：

- 显然 $\emptyset, X\in\mathscr{T}_{p.c.}$.
- 如果 $U_1,U_2\in\mathscr{T}_{p.c.}$，那么对于任意 $f_0\in U_1\cap U_2$，存在 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n\in[0,1]$ 以及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$，使得
$$U_1\supset\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon_1)\quad 且\quad U_2\supset\omega(f_0;y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_2),$$
于是我们有 $U_1\cap U_2\supset\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$，即 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}_{p.c.}$.
- 如果 $U_\alpha\in\mathscr{T}_{p.c.}$ 且 $f_0\in\cup_\alpha U_\alpha$，那么 $\exists\alpha_0$ 使得 $f_0\in U_{\alpha_0}$. 根据定义，存在 $x_1,\cdots,x_m\in[0,1]$ 以及 $\varepsilon>0$ 使得
$$\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U_{\alpha_0}.$$
这显然蕴含着
$$\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset\cup_\alpha U_\alpha,$$
从而 $\cup_\alpha U_\alpha\in\mathscr{T}_{p.c.}$.

接下来我们证明函数列的逐点收敛等价于在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 拓扑下的收敛：

- 设 f_n 逐点收敛于 f，设 $U\subset X$ 是 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 中的开集，且 $f\in U$. 则 $\exists x_1,\cdots,x_m\in[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$ 使得
$$\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U.$$
由逐点收敛的定义，我们有 $f_n(x_i)\to f(x_i), 1\le i\le m$，即存在 k_i 使得当 $n>k_i$ 时有 $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 所以对于任意 $n>k=\max(k_1,\cdots,k_m)$，都有
$$f_n\in\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U.$$
于是根据定义，f_n 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中收敛于 f.
- 反之，设 f_n 在 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中收敛于 f. 对任意 $x\in[0,1]$，我们取 f 的开邻域 $U=\omega(f,x,\varepsilon)$。则存在 $k>0$ 使得当 $n>k$ 时，$f_n\in U$，即 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对所有 $n>k$ 成立，也即 $f_n(x)\to f(x)$，故 f_n 逐点收敛于 f。

□

注 1.49. 我们在 §1.1 的习题中已经看到，“度量空间之间映射列的一致收敛”是一个度量意义下的收敛。但是，在后文中我们将会看到，在函数空间 X 上不存在度量使得“函数逐点收敛”是度量收敛。这一事实也从侧面印证了引进“拓扑”这一抽象概念的必要性。另一方面，我们还要指出：并非所有我们称之为“收敛”的现象都是拓扑意义下的收敛。比如，在本节的习题中我们将会看到，在 $[0,1]$ 区间上的所有有界可测函数所构成的集合上，并不存在一个拓扑使得“几乎处处收敛”等价于该拓扑下的收敛。

1.3.2 连续映射

¶ 拓扑空间之间的连续映射

正如我们在前言中所解释的，拓扑结构可以用于定义映射的连续性。有两种不同的方法可以给出定义：使用收敛序列，或使用拓扑结构本身（即开集、闭集、邻域）。不幸的是，这两种方法给出了两种不同的结果。

让我们先用收敛序列来定义连续性，这比较符合我们的直觉：（注意我们在定义中使用了“序列”一词，这是为了与下文即将定义的连续映射区分开来。）

定义 1.50.（序列连续映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果对于 X 中的任意收敛序列 $x_n\to x_0$，在 Y 中均有 $f(x_n)\to f(x_0)$，则称映射 f **在 x_0 处序列连续**。

(2) 如果 f 在 X 中的每一点处都是序列连续的，则称 f 为**序列连续映射**。 ♣

我们也可以用拓扑结构本身（即使用开集/闭集/邻域等）定义连续映射。受命题 1.25 启发，我们给出如下定义：

定义 1.51.（连续映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果 Y 中点 $f(x_0)$ 的任意邻域 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 都是 X 中点 x_0 的邻域，则我们称 f **在点 x_0 处连续**。

(2) 如果 f 在 X 中的每一点处都是连续的，则称 f 为一个**连续映射**。 ♣

根据定义我们容易证明（序列）连续映射的复合映射仍然是（序列）连续的：

命题 1.52.（（序列）连续映射的复合）

设 X,Y,Z 是拓扑空间。

(1) 如果 $f:X\to Y$ 在点 x_0 处连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x_0)$ 处连续，那么 $g\circ f:X\to Z$ 在 x_0 处连续。

(2) 如果 $f:X\to Y$ 在点 x_0 处序列连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x_0)$ 处序列连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 在 x_0 处序列连续。 ♠

证明 (1) 如果 f 和 g 都是连续的，那么对于 Z 中 $g(f(x_0))$ 的任意邻域 C，$g^{-1}(C)$ 是 Y 中 $f(x_0)$ 的邻域，因此

$$(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C))$$

是 X 中 x_0 的邻域。因此 $g\circ f$ 在 x_0 处是连续的。

(2) 如果 f 和 g 都是序列连续的，那么对于 X 中的收敛序列 $x_n\to x_0$，我们有 $f(x_n)\to f(x_0)$，进而有 $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$ 所以 $g\circ f$ 是序列连续的。 □

¶ 序列连续性 v.s. 连续性

在度量空间中，序列连续性和连续性是等价的。对于拓扑空间，我们有

命题 1.53.（连续一定序列连续）

如果 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 在 x_0 处连续，那么它也在 x_0 处序列连续。特别地，任何连续映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 都是序列连续的。

证明 设 $x_n\to x_0$. 在 Y 中取 $f(x_0)$ 的任意邻域 B。则由连续性知 $f^{-1}(B)$ 是 x_0 的邻域。因为 $x_n\to x_0$，所以存在 $k>0$ 使得对任意 $n>k$ 都有 $x_n\in f^{-1}(B)$。因此对所有 $n>k$ 都有 $f(x_n)\in B$，即 $f(x_n)\to f(x_0)$。故 f 在 x_0 处是序列连续的。 □

但是，反之则不然。

例 1.54. 考虑恒等映射

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete}),\quad x\mapsto x.$$

则 Id 是序列连续的。这是因为在例1.47中我们已经看到，一个序列在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})$ 中收敛当且仅当它在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中收敛（并收敛到相同的极限）。然而，Id 在任意点处都不连续：对任意点 $x\in\mathbb{R}$，区间 $[x-1,x+1]$ 是 x 在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中的开邻域，但不是 x 在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})$ 中的开邻域。

¶ 用开集定义整体连续性

我们在定理1.26中证明了 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个连续映射当且仅当 Y 中的任意开集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。通过重复当时的证明，我们可以很容易地证明下述通过开集对连续映射给出的刻画：

命题 1.55.（开集与连续性）

设 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是一个映射，则 f 是连续的当且仅当“开集的原像是开集”，即对于任意 $V\in\mathscr{T}_Y$，我们有 $f^{-1}(V)\in\mathscr{T}_X$。

在拓扑学中，有一个**开-闭对偶原理**

通过开集描述的事实具有一个“对偶”的通过闭集给出的描述。

其证明只要通过标准的“取补集”即可：

命题 1.56.（闭集与连续性）

映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是连续的当且仅当对于 Y 中的任意闭集 F，其原像 $f^{-1}(F)$ 在 X 中是闭集。

证明 注意到 $f^{-1}(F)$ 是闭集当且仅当 $X\setminus f^{-1}(F)=f^{-1}(Y\setminus F)$ 是开集。由此即得。 □

¶ 开映射和闭映射

在连续映射下，开集的原像是开集，闭集的原像都是闭集。但一般来说，可以很容易找到例子表明

- 开集在连续映射下的像不一定是开集，
- 闭集在连续映射下的像不一定是闭集。

我们定义

定义 1.57.（开映射和闭映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果 X 中的任意开集 U 的像 $f(U)$ 在 Y 中是开集，则称映射 f 为 **开映射**。

(1) 如果 X 中的任意闭集 F 的像 $f(F)$ 在 Y 中是闭集，则称映射 f 为 **闭映射** ♣

注 1.58. 虽然开/闭映射看起来"更自然"，但它们在拓扑中不如连续映射重要和方便。这里给出一个原因：相比于"求映射的像"，"取映射的原像"这一操作可以更好地保持集合的交、并、补运算。具体来说，我们总是有

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B).$$

但是一般来说，我们只有

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),\quad f(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha f(A_\alpha),\quad f(X\setminus A)\supset f(X)\setminus f(A).$$

但是，开/闭映射确实出现在其他一些数学分支中，并且起着非常重要的作用。例如，

- 泛函分析中最重要的定理之一，开映射定理，断言 Banach 空间之间的满射连续线性算子都是开映射。
- 在复分析中也一个开映射定理，它指出在复平面的连通开子集上定义的任何非常值全纯函数都是开映射。
- 我们本课程后半部分将证明 **Brouwer 区域不变性定理**：如果 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，那么任何单射连续映射 $f:U\to\mathbb{R}^n$ 是一个开映射。

¶ 连续映射的例子

我们下面给出一些连续映射的例子。

例 1.59. 下述例子的连续性都是命题 1.55的直接应用，故而我们略去大部分细节。

(1) 任意常值映射 $f:X\to Y$ 都是连续的。

【理由如下：设 $f(x)\equiv y_0\in Y$，U 是 Y 中的任意开集。则

- 若 $y_0\in U$，则 $f^{-1}(U)=X$ 是 X 中的开集。
- 若 $y_0\notin U$，则 $f^{-1}(U)=\emptyset$ 是 X 中的开集。

所以 f 是连续的。】

注意这个论证也解释了为什么在开集公理中我们需要 $\emptyset, X$ 在任何拓扑中都是开集：否则常值映射可能是不连续的！

(2) 任意映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_{trivial})$ 都是连续的。

(3) 任意映射 $f:(X,\mathscr{T}_{discrete})\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 都是连续的。

(4) 恒同映射 $\mathrm{Id}:(X,\mathscr{T}_2)\to(X,\mathscr{T}_1)$ 是连续的当且仅当 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$, 即 $\mathscr{T}_1$ 比 $\mathscr{T}_2$ 弱.

下面两个命题说明子空间拓扑以及乘积空间拓扑下自然的映射都是连续映射:

命题 1.60.（子空间的嵌入映射）

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 为拓扑空间，赋予 $A\subset X$ 子空间拓扑。则包含映射 $\iota:A\hookrightarrow X$ 是连续的，且子空间拓扑是 A 上最弱的使得 ι 连续的拓扑。♠

证明 映射 ι 在子空间拓扑下的连续性可由定义以及命题1.55直接得到。反之，假设 $\mathscr{T}$ 为 A 上的一个拓扑，使得 $\iota:(A,\mathscr{T})\hookrightarrow(X,\mathscr{T}_X)$ 为连续映射。则对于 X 中任意开集 $U\in\mathscr{T}_X$，其原像 $\iota^{-1}(U)=U\cap A$ 是 $\mathscr{T}$ 中的开集。于是根据定义，$\mathscr{T}$ 强于 A 作为 X 子空间所继承的子空间拓扑。□

作为推论，我们得到

推论 1.61

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 和 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，赋予 $A\subset X$ 子空间拓扑。

(1) 如果映射 $f:X\to Y$ 是连续的，则 $f|_A:A\to Y$ 是连续的。

(2) 映射 $g:Y\to A$ 是连续的当且仅当 $\iota\circ g:Y\to X$ 是连续的。♡

证明 (1) 由命题1.52以及 $f|_A=f\circ\iota$ 即可得到。

(2) “仅当”部分是命题1.52和命题 1.60 的推论。“当”的部分由定义可得：对于 A 中的任意开集 $A\cap U$，其中 $U\in\mathscr{T}_X$，我们有 $g^{-1}(A\cap U)=(\iota\circ g)^{-1}(U)$. □

对于乘积空间，最自然的映射是投影映射。我们有

命题 1.62.（乘积空间的投影映射）

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 和 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，$(X\times Y,\mathscr{T}_{X\times Y})$ 为其乘积拓扑空间。则投影映射

$$\pi_X: X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto x$$

$$\pi_Y: X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto y$$

都是连续映射，也都是开映射。♠

证明 我们只证明关于 π_X 的结论，因为关于 π_Y 的证明是相似的。π_X 连续是因为

$$\forall U\in\mathscr{T}_X,\pi_X^{-1}(U)=U\times Y\in\mathscr{T}_{X\times Y}.$$

π_X 是开映射是因为对任意开集 $W\in X\times Y$ 和任意 $x\in\pi_X(W)$，存在点 $(x,y)\in W$. 根据乘积拓扑的定义，存在 X 中开集 $U\ni x$ 和 Y 中开集 $V\ni y$ 使得 $(x,y)\in U\times V\subset W$. 于是 $x\in U\subset\pi_X(W)$. 所以 $\pi_X(W)$ 在 X 中是开集，即 π_X 是一个开映射。□

注意投影映射不一定是闭映射。例如，平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 里的闭集 $\{(x,1/x)\mid x>0\}$ 到分量 $\mathbb{R}$ 上的投影是 $(0,+\infty)$，并不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集。

¶ 同胚

通过连续映射，我们可以定义拓扑空间之间的等价性。

定义 1.63.（同胚）

设 X 和 Y 是拓扑空间。如果存在可逆映射 $f: X \to Y$ 使得 f 和 f^{-1} 都是连续映射，则我们称拓扑空间 X 和 Y 是 **同胚的**，记为 $X \simeq Y$；而映射 f 则被称为是 X 和 Y 之间的一个**同胚**。♣

如果一个性质在同胚下被保持，我们称它是一个 **拓扑性质**。

容易验证同胚是一个等价关系：

命题 1.64.（同胚是等价关系）

同胚是拓扑空间之间的等价关系。♠

证明 我们有

- $X \simeq X$: 因为 $\mathrm{Id}: (X, \mathscr{T}_X) \to (X, \mathscr{T}_X)$ 是同胚。
- $X \simeq Y \implies Y \simeq X$: 如果 $f: X \to Y$ 是同胚, 那么 $f^{-1}: Y \to X$ 也是同胚。
- $X \simeq Y, Y \simeq Z \implies X \simeq Z$: 如果 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是同胚，那么 $g \circ f: X \to Z$ 是双射，且由命题 1.52，$g \circ f$ 和 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 都连续。

□

我们将同胚的拓扑空间视为同一空间。

例 1.65. 在通常的欧氏拓扑下，不难看出

(1) $(0,1) \simeq \mathbb{R}$.

(2) $S^n - \{\text{北极点}\} \simeq \mathbb{R}^n$.

(3) $[0,1] \not\simeq (0,1) \not\simeq [0,1) \not\simeq S^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$.

除了连续和双射，从定义中可以清楚地看出同胚必须既是开映射又是闭映射。反过来，根据定义，如果 f 是可逆的，那么 f^{-1} 是连续的当且仅当 f 是开映射（也当且仅当 f 是闭映射）。于是我们有

命题 1.66.（同胚与开/闭映射）

设 $f: X \to Y$ 是一个连续双射。如果 f 是开映射或是闭映射，那么 f 是同胚。♠

与度量空间的情况类似，我们可以定义拓扑嵌入的概念：

定义 1.67.（拓扑嵌入）

设 X, Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一个连续单射。如果 f 是从 X 到 $f(X) \subset Y$（赋有子空间拓扑）的同胚，我们则称 f 是从 X 到 Y 的**拓扑嵌入**。♣

¶ （阅读材料）相容性：拓扑群和拓扑向量空间

在数学中，我们的研究对象往往具有多种不同的结构。一个自然的问题是，拓扑结构与其它结构是否相容，因为在有相容性的情况下，这些不同的结构之间会碰撞出新的

火花，从而我们可以预期有更丰富多彩的性质。一般而言，拓扑结构与其它结构之间的相容性是通过其它结构中出现的映射的连续性来定义的，例如，

定义 1.68.（拓扑群）

设 G 是一个群，且 G 上赋有一个拓扑结构。如果群运算

$$m : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto m(g_1, g_2) := g_1 \cdot g_2$$

和

$$i : G \to G, \quad g \mapsto i(g) := g^{-1}$$

都是连续映射[这里我们赋予 $G \times G$ 乘积拓扑]，则我们称 G 为一个**拓扑群**。[a]

[a]在拓扑群的定义中，一些作者会要求 G 上的拓扑满足进一步的分离性质，例如后文中将要定义的 T_1 或 T_2.

♣

类似地，可以定义 **拓扑环**、**拓扑域**等等。

例 1.69. 拓扑群（及其光滑版本 **李群**）在数学中被广泛用于描述连续对称性。这里给出一些常见的例子：

(1) （无趣）任何赋有离散拓扑的群 G 都是一个拓扑群。

(2) $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 在通常的群结构和通常的拓扑下是拓扑群（实际上还是拓扑域）。

(3) $S^1, \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n := (S^1)^n$ （在通常的群与拓扑结构下）是拓扑群。

(4) 矩阵群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ 等等（在通常的结构下）都是拓扑群。

(5) 上面 (2)、(3)、(4) 中的例子实际上是李群。这里给出一个不是李群的拓扑群：$\mathbb{Q}$ 在具有通常的结构下是一个拓扑群，但不是李群。

在泛函分析中，人们研究向量空间（通常是无限维）上的分析学。此时向量空间的拓扑结构与向量空间的线性结构之间的相容性是至关重要的：

定义 1.70.（拓扑向量空间）

设 X 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$（或某个拓扑域 $\mathbb{K}$）上的向量空间，并被赋予了一个拓扑[a]。如果向量加法映射

$$+ : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

和标量乘法映射

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

都是连续映射[这里 $X \times X$ 和 $\mathbb{K} \times X$ 都使用乘积拓扑]，则我们称 X 为一个 **拓扑向量空间**。

[a]同样，在拓扑向量空间的定义中，一些作者会要求 X 上的拓扑满足进一步的分离性质。

♣

注意，拓扑向量空间自动是拓扑群。

例 1.71.

(1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 在通常的结构下是拓扑向量空间。

(2) 在赋予离散拓扑时，$\mathbb{R}^n$ 不是拓扑向量空间。[虽然向量加法仍然是连续的，但标量乘法不是连续的。]

(3) 在例1.6中出现的度量空间 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d), (l^p(\mathbb{R}), d_p), (C([a,b]), L^p)$ 等等，在其度量拓扑下，都是拓扑向量空间。

(4) 事实上，在泛函分析中，我们见到的各种空间都是拓扑向量空间，而且他们之间具有如下包含关系：
{Hilbert 空间}$\subset${Banach 空间}$\subset${Fréchet 空间}$\subset${局部凸拓扑向量空间}$\subset${拓扑向量空间}