第 4 章 几何拓扑中的几个重要定理

4.1 Brouwer 不动点定理

4.1.1 Brouwer 不动点定理

¶ Brouwer 不动点定理

在第 3.6 节我们证明了二维 Brouwer[1] 不动点定理，即任意连续映射 $f:\overline{D}\to\overline{D}$ 都有一个不动点, 其中 $\overline{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中闭圆盘. 下面我们要证明任意维数的 Brouwer 不动点定理.[2] 该定理是数学中最重要的存在性定理之一，并在微分方程、泛函分析、经济学、博弈论等领域有着广泛的应用. 事实上，随着人们证明越来越多的不动点定理，目前不动点定理已经发展成数学的一个分支.

我们记 $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$ 以及 $\overline{B^n}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant 1\}$.

定理 4.1.1.（Brouwer 不动点定理）

对于任意连续映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$, 存在 $p\in\overline{B^n}$ 使得 $f(p)=p$.

由习题 3.3 中我们知道，Brouwer 不动点定理蕴含了任意 S^n（$n\geq 1$）是不可缩的.

注 4.1.2.

(1) 对于拓扑空间 X，如果任意连续映射 $f:X\to X$ 都有一个不动点，则我们称 X 具有**不动点性质**（fixed point property）. 显然，不动点性质是一个拓扑性质. 因此任意同胚于 $\overline{B^n}$ 的拓扑空间 X 都有不动点性质.

(2) 显然，以下空间都没有不动点性质：
- 平面圆环 $A_{r,R}=\overline{B(R)}\setminus B(r)$（考虑旋转映射）, 它不是单连通的，
- S^n (考虑对径点映射)，它是单连通的但却不可缩，
- 开球 B^n（考虑往边界上一点的“收缩”映射），它是可缩的但却非紧.

在 1932 年 Borsuk 猜想任意紧可缩区域都有不动点性质，但是 1953 年 Kinoshita 给出了一个反例.

Brouwer 不动点定理有多种证明. Brouwer 原始的证明是基于映射度的概念，而对于一般连续映射定义映射度往往需要代数拓扑中的同调理论. 该证明将在代数拓扑课程中介绍，而本书中尚未建立起相关的工具. 该定理还可以用组合学的 Sperner 引理予以证

[1]布劳威尔（L. E. J. Brouwer，1881-1966），荷兰数学家、哲学家，在拓扑学、集合论、测度论、复分析等领域有突出贡献，被誉为二十世纪最杰出的数学家之一. 布劳威尔在拓扑学方面的主要贡献是我们本节即将证明的不动点定理以及区域/维数不变性定理，以及下一节将要提到的 Jordan 曲线定理的高维推广即 Jordan-Brouwer 定理. 有意思的是，虽然 Brouwer 是是数学哲学领域直觉主义流派的创始人，坚持数学对象必须可以构造，并不承认排中律，但他关于 Brouwer 不动点定理的证明却并非构造性的.（事实上，在进一步发展他的直觉主义观点之后，Brouwer 本人已经开始否定自己关于不动点定理的证明.）

[2]该定理 $n=3$ 的情况最早是在 1904 年由拉脱维亚数学家 P. Bohl 证明，但他的文章没有引起注意. 后来在 1909 年由 Brouwer 再次给出了 $n=3$ 时的证明. 在 1910 年，Hadamard 首次证明了一般情形，同年 Brouwer 采用不同的方法证明了该定理. Brouwer 方法的创新性在于他系统性地应用了来自代数拓扑的工具.

明. 下面我们将给出基于“微分拓扑”的证明. 这个证明最早是由 J. Milnor[3]给出的，后被 Rogers 简化过. 其证明思路是:

- 首先证明一个“简单”版本，即该定理对光滑映射成立.
- 然后通过逼近定理将连续映射约化到光滑映射的情形.

我们在本书中选用这个证明的原因有两条：第一、我们希望通过这个证明，介绍拓扑学的另一个分支即“微分拓扑”的基本思想；第二、这个证明是一个纯“初等”的证明（即不涉及到高深的工具），而在（本定理以及下个定理）证明中我们将看到在本书前半部分所学的点集拓扑知识是如何应用的.

¶ 光滑性的优势

通常对于光滑映射证明一个定理要比对连续映射证明该定理要简单很多，因为我们有一个非常强有力的工具：微分（即线性逼近).

回顾一下：如果 $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m$ 是开集且

$$f=(f_1,\cdots,f_m):U\to V$$

是一个 C^1 映射, 那么 f 在 $x\in U$ 处的微分 $\mathrm{d}f_x$ 是一个线性映射

$$\mathrm{d}f_x=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,$$

$$\vec{v}\mapsto \mathrm{d}f_x(\vec{v})=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\vec{v}=\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial x_j}v_j,\cdots,\sum_j\frac{\partial f_m}{\partial x_j}v_j\right)^T.$$

在数学分析中我们已经看到了

- $\mathrm{d}(f\circ g)_x=\mathrm{d}f_{g(x)}\circ \mathrm{d}g_x$,
- $\mathrm{d}(\mathrm{Id}_U)_x=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

因此微分 d 是一个从“对象为（带标定点的）欧氏空间区域、态射为 C^1 映射的范畴”到“对象为线性空间、态射为线性映射的范畴”的函子. 为了直观地看到微分的优势，我们用微分的函子性来证明（这不过是再次证明“函子把等价的对象变为等价的对象”）

定理 4.1.3.（维数不变性定理，光滑版本）

令 $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m$ 为开集. 如果 $m\neq n$, 那么不存在 C^1 微分同胚 $f:U\to V$ [a].

[a] 如果 f 是可逆的 C^1 映射且 f^{-1} 也是 C^1 的，则我们称它是一个 C^1 **微分同胚**（C^1 diffeomorphism）.

证明 假设 $f:U\to V$ 是一个 C^1 微分同胚. 通过取微分我们得到线性映射, $\mathrm{d}f_x:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $(\mathrm{d}f^{-1})_{f(x)}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. 由函子性,

$$f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_V\Longrightarrow \mathrm{d}f_x\circ \mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$$

$$f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_U\Longrightarrow \mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}\circ \mathrm{d}f_x=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

因此线性映射 $\mathrm{d}f_x$ 和 $\mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}$ 互为逆映射, 从而 $m=n$. □

[3] 米尔诺（John Milnor, 1931-），杰出的美国数学家，主要研究微分拓扑，K 理论和动力系统，先后获得过菲尔兹奖 (1962)、沃尔夫奖 (1989)、阿贝尔奖 (2011). 他在 1956 年发现具有非标准微分结构的七维怪球，从此微分拓扑开始作为拓扑学的一个独立分支蓬勃发展.

在数学分析中我们学过，微分还有一个非常重要的性质，即反函数定理，我们可以粗略地把它解释为函子 d 具有很高的“保真性”：

定理 4.1.4.（反函数定理）

若 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，且 df_x 是可逆线性映射，则存在 x 的邻域 $U_x \subset U$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V_x 使得 $f: U_x \to V_x$ 是微分同胚. ♡

一般地，若对于任意 $x \in U$，都存在 x 的邻域 $U_x \subset U$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V_x 使得 $f: U_x \to V_x$ 是微分同胚，则我们称 f 是一个**局部微分同胚**（local diffeomorphism）. 由定义易知任意局部微分同胚都是开映射，作为推论，我们马上得到

推论 4.1.5.（区域不变性，光滑版本）

若 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，且对于任意 $x \in U$，df_x 是可逆线性映射，则 f 是开映射. ♡

一个自然的问题是：什么时候局部微分同胚是一个整体微分同胚？我们有

命题 4.1.6.（双射 + 局部微分同胚 $\Longrightarrow$ 微分同胚）

若 C^1 映射 $f: U \to V$ 在任意 x 附近都是局部微分同胚，且 f 是双射，则 f 是微分同胚. ♠

证明是显然的：为了证明 f^{-1} 是 C^1 映射，只需证明它在任意 $f(x)$ 附近是 C^1 映射，而这是由反函数定理保证的. 细节留作习题.

¶ 从“无光滑收缩”到 Brouwer 的不动点定理

下面我们证明 Brouwer 不动点定理. 在证明之前让我们重温我们在第 3.6 节给出的 $n = 2$ 时 Brouwer 不动点定理的论证，该定理的整个证明分三步：

(1) 首先我们证明 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$,

(2) 其次我们证明 $\pi_1(S^1) \neq \{e\} \Longrightarrow$ “不存在收缩映射 $r: \overline{D} \to S^1$”,

(3) 最后我们证明 “不存在收缩映射 $r: \overline{D} \to S^1$” $\Longrightarrow$ Brouwer 不动点定理（$n = 2$）.

前两步跟基本群有关，显然无法用在高维，因为我们已经知道当 $n \geq 2$ 时有 $\pi_1(S^n) = \{e\}$. 但第三步跟维数关系不大，我们回顾一下：

> 如果对于任意 $p \in \overline{D}$ 都有 $f(p) \neq p$, 那么存在一个收缩映射 $r: \overline{D} \to S^1$，其表达式如下
> $$r(p) = p + \lambda(p)(p - f(p)).$$
> 如果作进一步的计算，我们不难得到
> $$\lambda(p) = \frac{-p \cdot (p - f(p)) + \left[(p \cdot (p - f(p)))^2 + |p - f(p)|^2(1 - |p|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{|p - f(p)|^2}.$$

<u>关键的观察:</u>

- 对于任意维数，可以用同样的方法构造 r，且 $\lambda(p)$ 具有相同表达式.

- 上式分子 $[\cdots]^{\frac{1}{2}}$ 中的项是正的，从而如果 f 是 C^1 的，则映射 $r:\overline{D}\to S^1$ 是 C^1 的.

于是重复该论证，我们得到

结论 1 ：若不存在从 $\overline{B^n}$ 到 S^{n-1} 的 C^1 收缩，则任意 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点.

接下来我们通过用光滑映射逼近连续映射的方法，证明

结论 2 ：若任意 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点，则任意连续映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点.

证明 令 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 为连续映射. 由 Stone-Weierstrass 定理，对于任意 $l\in\mathbb{N}$ 存在一个光滑映射 (实际上可取为"多项式") $p_l:\overline{B^n}\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$|p_l(x)-f(x)|<\frac{1}{l},\quad \forall x\in\overline{B^n}.$$

这样得到的 p_l 的像集可以落在单位球的外面，但是我们可以通过定义

$$f_l:=\frac{l}{l+1}p_l$$

将其收缩至单位球内. 于是 $f_l:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 是 C^1 的，且 f_l 在 $\overline{B^n}$ 上一致收敛到 f.

根据条件，对于任意的 l，存在 $x_l\in\overline{B^n}$ 使得 $f_l(x_l)=x_l$. 取一个收敛子列满足 $x_{l_i}\to x_0$, 我们得到

$$f(x_0)=\lim_{i\to\infty}f_{l_i}(x_{l_i})=\lim_{i\to\infty}x_{l_i}=x_0.$$

于是结论得证. □

由结论 1 和结论 2，我们把 Brouwer 不动点定理化归为如下光滑版本的"无收缩定理"：

定理 4.1.7. (无光滑收缩)

不存在 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to S^{n-1}$ 使得 $f|_{S^{n-1}}=\mathrm{Id}$. ♡

¶ 无光滑收缩：证明

下面我们证明"无光滑收缩"定理。其证明思路如下：假设存在一个光滑收缩 f. 因为 $\overline{B^n}$ 是凸集，我们可以找到一个具体的 C^1-同伦 f_t 连接恒等映射 Id 和收缩映射 f. 为了找到矛盾，我们需要仔细研究某个在该同伦下变化的量. 例如，我们可以研究体积 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))$ 的变化. 一方面当 $t=1$ 上我们有 $\mathrm{Vol}(f_1(\overline{B^n}))=0$. 另一方面当 t 很小时 f_t "接近于" $f_0=\mathrm{Id}$，我们可以想象此时 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))\equiv\mathrm{Vol}(\overline{B^n})$. 不过 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))$ 跟 t 的依赖关系并不明确. 因此我们可以先假装 f_t 是微分同胚，并应用积分的换元公式，改而研究 $F(t)=\int_{\overline{B^n}}\det(df_t)_x dx$.

【无光滑收缩定理的证明】

证明 假设存在一个 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to S^{n-1}$ 使得

$$f|_{S^{n-1}}=\mathrm{Id}.$$

对于 $t\in[0,1]$, 我们令 $f_t:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 为如下连接恒等映射 $\mathrm{Id}_{\overline{B^n}}$ 和 f(视为到 $\overline{B^n}$ 的映射) 的同伦,

$$f_t(x)=(1-t)x+tf(x)=x+t(f(x)-x)=:x+tg(x).$$

为了研究这一族映射的微分关于 t 的变化并最终导出矛盾, 我们定义

$$F:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad F(t)=\int_{B^n}\det(\mathrm{d}f_t)_x\,\mathrm{d}x=\int_{B^n}\det(I+t\mathrm{d}g_x)\,\mathrm{d}x.$$

由线性代数, F 是关于 $t\in[0,1]$ 的一个多项式.

一方面, 在 $t=1$ 时我们有

$$f_1(x)=f(x)\in S^{n-1},\quad \forall x\in\overline{B^n}.$$

因此对于任意 $x\in B^n$, 以及任意 $|\vec{v}|<1-|x|$ (从而 $x+t\vec{v}\in\overline{B^n}$), 我们有

$$2\langle(\mathrm{d}f_1)_x\vec{v},f_1(x)\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\langle f_1(x+t\vec{v}),f_1(x+t\vec{v})\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}1=0.$$

于是

$$\mathrm{Im}((\mathrm{d}f_1)_x)\subset f_1(x)^{\perp}=\{u\in\mathbb{R}^n\mid u\perp f_1(x)\}.$$

这说明 $\mathrm{rank}((\mathrm{d}f_1)_x)\leqslant n-1$, 从而 $\det((\mathrm{d}f_1)_x)=0,\forall x\in B^n$. 故

$$F(1)=\int_{B^n}\det(\mathrm{d}f_1)_x\,\mathrm{d}x=0,$$

另一方面, 由于 $f_0|_{\overline{B^n}}=\mathrm{Id}$, 我们有理由猜测

断言: $\exists t_0>0$ 使得对于 $0\leqslant t\leqslant t_0$, $f_t:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 是一个 C^1-微分同胚.

我们首先假设这个断言是成立的. 由变量代换公式,

$$F(t)=\int_{f_t(\overline{B^n})}\mathrm{d}x=\mathrm{Vol}(\overline{B^n}),\quad \forall t\in[0,t_0].$$

因此 F 是一个在区间 $[0,t_0]$ 上为常值的多项式. 于是由例3.1.7或者由代数基本定理, F 必然对所有的 $t\in[0,1]$ 都恒等于该常值. 特别地,

$$F(1)=\mathrm{Vol}(\overline{B^n})>0,$$

从而得到矛盾. □

【断言的证明】

证明 记 $g(x)=f(x)-x$, 则 $f_t(x)=x+tg(x)$.

我们首先证明存在 $t_1>0$ 使得 f_t 在 $t\in[0,t_1]$ 上是单射. 假设存在 $x_1\neq x_2$, 使得 $f_t(x_1)=f_t(x_2)$, 则

$$|x_1-x_2|=t|g(x_1)-g(x_2)|.$$

由于 f 是 C^1 的, g 同样是 C^1 的. 因此存在 $C>0$ 使得

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in\overline{B^n}.$$

由此可得

$$|x_1-x_2|\leqslant Ct|x_1-x_2|.$$

因为 $x_1\neq x_2$, 所以我们得到 $t\geq t_1:=\frac{1}{C}$. 换言之, 如果$t<t_1$, 那么f_t 是 单射.

接着我们证明存在 $t_2>0$ 使得 f_t 在 $t\in[0,t_2]$ 上是满射. 因为 $\det(\mathrm{d}f_t)$ 关于 t 是连续的, 且 $\det(\mathrm{d}f_0)=1$, 所以存在 $t_2>0$ 使得

$$\det(\mathrm{d}f_t)>0,\quad \forall t\in[0,t_2].$$

于是由定理4.1.4以及推论4.1.5, 当 $t\in[0,t_2]$ 时映射 $f_t:B^n\to\mathbb{R}^n$ 是局部微分同胚, 从

而是开映射. 特别地,

$$G_t := f_t(B^n)$$

是开集. 下面我们证明当 $t < t_2$ 时, $G_t = B^n$. 我们再次运用反证法, 假设 $G_t \neq B^n$. 取 $y_0 \in \partial G_t \cap B^n$. 取 $x_l \in B^n$ 使得 $f_t(x_l) \to y_0$. 由 $\overline{B^n}$ 的紧性, 存在一个子列

$$x_{l_i} \to x_0 \in \overline{B^n}.$$

由 f_t 的连续性, $f_t(x_0) = y_0$. 由于 G_t 是开集, $y_0 \notin G_t$. 从而我们必然有 $x_0 \notin B^n$, 即 $x_0 \in S^{n-1}$. 因此我们有

$$y_0 = f_t(x_0) = x_0 \in S^{n-1}.$$

这与 $y_0 \in B^n$ 矛盾.

最后取 $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$. 则我们已经证明了当 $t \in [0, t_0]$ 时 f_t 是双射且是局部微分同胚, 所以由命题4.1.6, 对于任意 $t \in [0, t_0]$, f_t 是一个 C^1 的微分同胚. □

¶ Brouwer 不动点定理: 第二种形式

下面我们给出 Brouwer 不动点定理的另一种被广泛应用的形式:

定理 4.1.8.（Brouwer 不动点定理, 第二形式）

令 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为非空的紧凸集. 那么任意连续映射 $f: K \to K$ 都有一个不动点. ♡

证明思路如下 (细节留作习题): 通过平移, 我们可以假设 $0 \in K$. 令 $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} K$. 那么 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 因此存在 m 使得 $V \simeq \mathbb{R}^m$. 此外, $K \subset V$ 不位于 V 中任何真超平面, 因此 K 有非空内点. [这个事实需要证明.] 从而由 K 的凸性得到 $K \simeq \overline{B^m}$.

¶ 在无穷维的 Brouwer 不动点: 一个反例

一个自然的问题是: Brouwer 不动点定理对于无穷维空间是否成立?

例 4.1.9. 考虑 l^2-空间

$$X = l^2 = \{(a_1, a_2, \cdots) | \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty\}.$$

在第 1.1 节中, 我们已经看到了 X 是度量空间, 其度量为

$$d((a_i), (b_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}.$$

记 l^2 中的单位球为 $\overline{B} = \overline{B(0,1)}$. 考虑映射

$$f: \overline{B} \to \overline{B}, \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (\sqrt{1 - \|a\|_2^2}, a_1, a_2, \cdots).$$

那么 f 是连续的, 因为当 $d(a,b) \to 0$ 我们有

$$[d(f(a), f(b))]^2 = (\sqrt{1 - \|a\|_2^2} - \sqrt{1 - \|b\|_2^2})^2 + \|a - b\|_2^2 \to 0.$$

然而, f 没有不动点: 如果 $f(a) = a$, 那么

$$a_1 = a_2 = \cdots = \sqrt{1 - \|a\|_2^2},$$

而这组方程无解.

¶ (阅读材料) 无穷维版本的不动点定理：Schauder 不动点定理

以上论证表明不动点定理的原始形式在无穷维空间中不成立. 一个原因在于：l^2 闭单位球是非紧的. 不过，1930 年 J. Schauder [4] 证明了不动点定理的第二形式 (其中我们用紧凸集取代闭单位球) 在无穷维空间中成立：

定理 4.1.10.（Schauder 不动点定理） 令 $\emptyset \neq K$ 为赋范向量空间 V 中的紧凸集. 则任意连续映射 $f: K \to K$ 有不动点. ♡

证明 因为 K 是度量空间中的紧集，对于任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到一个 K 的有限的 ε-网 $\{x_1, \cdots, x_n\}$. 对于任意 $x \in K$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$ 我们定义

$$\rho_i(x) = \begin{cases} 0, & d(x, x_i) > \varepsilon, \\ \varepsilon - d(x, x_i), & d(x, x_i) \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

显然每个 ρ_i 是连续的，并且对于任意的 $x \in K$, 存在 i 使得 $\rho_i(x) > 0$. 于是映射

$$\rho_\varepsilon : K \to K, \quad x \mapsto \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i(x)}$$

是良定的 (这里我们用 K 的凸性)，连续的，且满足

$$d(\rho_\varepsilon(x), x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K$$

因为 $\rho_\varepsilon(x)$ 是这些位于 $B(x, \varepsilon)$ 的 x_i 的凸组合. 现在对于每个 n, 考虑有限维线性空间

$$V_n = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\} \subset V.$$

记

$$K_\varepsilon = \mathrm{conv}(x_1, \cdots, x_n)$$

为 $x_1, \cdots, x_n$ 的 (闭) 凸闭包，则 $K_\varepsilon \subset V_n$ 是非空紧凸集, 并且 $f_\varepsilon = \rho_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ 是连续的. 因此存在 $x_\varepsilon \in K_\varepsilon \subset K$ 使得 $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. 这蕴含着

$$d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) = d(f_\varepsilon(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)) = d(\rho_\varepsilon(f(x_\varepsilon)), f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$$

从而

$$\inf\{d(x, f(x)) | x \in K\} = 0.$$

因为 K 是紧集，上述最小值是可以取到的，即存在 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$. □

4.1.2 Browwer 区域不变性定理

¶ Brouwer 的区域不变性和维数的拓扑不变性.

作为 Brouwer 不动点定理的应用，我们可以去掉定理4.1.3中的光滑性假设，证明

[4] 绍德尔（Juliusz Schauder，1899-1943），波兰数学家，波兰利沃夫学派重要成员，主要研究泛函分析及相关领域，以 Schauder 不动点定理、Schauder 基、Leray-Schauder 原理而闻名. 二战期间受纳粹迫害而亡.

定理 4.1.11.（维数的拓扑不变性）

令 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 为开集. 如果 $m \neq n$, 那么 $U \not\cong V$.

虽然这个定理看起来很显然，但它的证明并不容易. 这个定理首先由 Brouwer 证明. 事实上，他证明了下面这个更强的定理：

定理 4.1.12.（Brouwer 区域不变性定理）

如果 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，并且 $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是连续单射，那么 f 是开映射.

注 4.1.13. 相比于推论4.1.5，这个定理的条件是非常若的. 注意这个定理在 $n = +\infty$ 时失效. 例如，如果我们取

$$f: l^2 \to l^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, a_1, a_2, \cdots),$$

那么 f 是连续单射，但是 $f(l^2)$ 不是 l^2 中的开集.

【Brouwer 区域不变性 $\Longrightarrow$ 维数的拓扑不变性】

证明 假设存在一个同胚 $f: U \to V$. 不妨设 $n > m$ (否则考虑 f^{-1}). 令

$$i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad i(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

那么连续单射

$$i \circ f: U \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

的像集包含于一个真子空间，从而不是开集. 这与 Brouwer 区域不变性定理矛盾. □

¶ Brouwer 区域不变性定理：局部版本及其证明

因为开集是一个局部条件，并且开集的平移和伸缩仍然是开集，因此只要证明以下局部版本就能得到 Brouwer 区域不变性定理.

定理 4.1.14.（Brouwer 区域不变性定理，局部版本）

令 $f: \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ 为连续单射. 那么 $f(0)$ 位于 $f(\overline{B^n})$ 的内部.

下面我们证明“局部 Brouwer 区域不变性定理”. 其证明思路是：假设 $f(0)$ 不是一个内点，即 $f(\overline{B^n})$ 以外存在任意接近 $f(0)$ 的点. 为了导出矛盾，我们将构造一个连续映射 $h: f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n$，使得

(1) h “接近于 f^{-1}”：对于任意 $x \in \overline{B^n}$，都有 $|x - h(f(x))| \leqslant 1$.

(2) $h \circ f$ 没有零点.

由 (1)，我们得到一个连续映射

$$\mathrm{Id} - h \circ f: \overline{B^n} \to \overline{B^n}, \quad x \mapsto x - h(f(x)),$$

而由 (2)，该映射没有不动点，从而得到矛盾！为了构造这样的 h，我们首先构造一个非常接近于 f^{-1} 的连续映射, 然后扰动它使得它在 $f(\overline{B^n})$ 上没有零点.

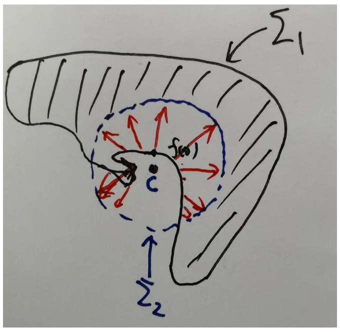
【局部 Brouwer 区域不变性定理的证明】

证明 假设 $f(0)$ 不是 $f(\overline{B^n})$ 的内点. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$ (我们将会在稍后选取), 存在

$c \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B^n})$ 使得 $|c - f(0)| < \varepsilon$. 记

$$\Sigma_1 = \{y \in f(\overline{B^n}) : |y - c| \geqslant \varepsilon\}, \quad \Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - c| = \varepsilon\}.$$

那么 $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是紧集，并且 $f(0) \notin \Sigma$.



根据假设, $f : \overline{B^n} \to f(\overline{B^n})$ 是一个从紧集到 Hausdorff 集的可逆连续映射. 因此 f 是一个同胚，即它有一个连续逆 $f^{-1} : f(\overline{B^n}) \to \overline{B^n}$. 因为 $f(\overline{B^n})$ 是紧集，从而也是闭集，根据 Tietze 扩张定理, 存在一个连续映射 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得在 $f(\overline{B^n})$ 上有

$$g = f^{-1}.$$

由以上构造,

$$f(0) \notin \Sigma_1 \quad 且 \quad \Sigma_1 \subset f(\overline{B^n}).$$

因此在 Σ_1 上 $g \neq 0$. 由 g 的连续性和 Σ_1 的紧性, 存在 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 使得

$$|g(y)| \geqslant \delta, \quad \forall y \in \Sigma_1.$$

由 Stone-Weierstrass 定理，存在“多项式映射” $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$|p(y) - g(y)| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall y \in \Sigma.$$

特别地，对于所有的 $y \in \Sigma_1, p(y) \neq 0$. 然而, p 在 Σ_2 上可能为 0. 为了解决这个问题，我们需要轻微地“扰动 p”.

事实 1. 存在 $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ 使得 $a_0 \notin p(\Sigma_2)$.

假设这一点正确. 我们定义 $\widetilde{p} = p - a_0$, 那么在 Σ 上有 $\widetilde{p} \neq 0$, 这是由于

- $|\widetilde{p}(y) - g(y)| < \delta \Rightarrow \widetilde{p}(y) \neq 0, \forall y \in \Sigma_1$.
- 由构造，对于 $y \in \Sigma_2, \widetilde{p}(y) \neq 0$.

因为仍然可能存在一些 $f(\overline{B^n})$ 中的点不在 Σ 中，我们定义

$$\Phi : f(\overline{B^n}) \to \Sigma, \quad y \mapsto \begin{cases} y, & |y - c| \geqslant \varepsilon, \\ c + \varepsilon \frac{y-c}{|y-c|}, & |y - c| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

因为 $c \notin f(\overline{B^n})$, 所以 Φ 是良定的，并且是连续的. 因此若我们令

$$h : f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \widetilde{p}(\Phi(y)),$$

则 h 是连续的，并且 $h(y) \neq 0, \forall y \in f(\overline{B^n})$. 另一方面，我们将证明

事实 2. 我们有 $|h(f(x)) - x| \leqslant 1, \forall x \in \overline{B^n}$.

我们依然先假定事实 2 成立. 于是我们得到一个没有不动点的连续映射 $\mathrm{Id} - h \circ f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$，从而得到矛盾！这样就完成了定理的证明. $\square$

最后我们证明事实 1 和事实 2.

【事实 1 的证明】

证明 [测度论的证明.] 因为 p 是一个多项式，它是 C^1 的. 因此 $\exists A>0$ 使得

$$|p(y_1)-p(y_2)| \leqslant A|y_1-y_2|$$

对于任意的 $y_1, y_2 \in B(c, 2\varepsilon)$ 成立. 于是对于任意箱体

$$B:=[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]\subset B(c, 2\varepsilon),$$

我们有

$$\mathrm{Vol}(p(B)) \leqslant A^n \mathrm{Vol}(B).$$

另一方面，我们能够用很多箱体 $B_1, \cdots, B_m$ 覆盖 $\Sigma_2=\partial B(c, \varepsilon)$, 且使得

$$\mathrm{Vol}(B_1)+\cdots+\mathrm{Vol}(B_m) \leqslant \frac{1}{A^n}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Vol}(B(0, \frac{\delta}{2})).$$

于是我们可以得到结论

$$\mathrm{Vol}(p(\Sigma_2)) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(B(0, \frac{\delta}{2})).$$

因此，存在 $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ 使得 $a_0 \notin p(\Sigma_2)$. □

[注意，同理可知，不存在光滑的“Peano 曲线”.]

【事实 2 的证明]

证明 我们固定一个足够小的 ε 使得

$$|y-f(0)|<2\varepsilon \Longrightarrow |g(y)|=|g(y)-g(f(0))|<\frac{1}{4}.$$

根据定义，

$$|\widetilde{p}(y)-g(y)|<\delta, \quad \forall y \in \Sigma.$$

如果 $y=f(x) \in \Sigma_1$, 那么

$$|h(f(x))-x|=|\widetilde{p}(\Phi(f(x)))-g(f(x))|=|\widetilde{p}(f(x))-g(f(x))|<\delta<\frac{1}{2}.$$

如果 $y=f(x) \notin \Sigma_1$, 即 $|y-c|<\varepsilon$, 我们有：

- $|g(y)|<\frac{1}{4}$ 是因为 $|y-f(0)| \leqslant |y-c|+|c-f(0)|<2\varepsilon$,
- $|g(\Phi(y))|<\frac{1}{4}$ 是因为 $|\Phi(y)-f(0)| \leqslant |\Phi(y)-c|+|c-f(0)|<2\varepsilon$,

从而

$$\begin{aligned}|h(f(x))-x| &= |h(y)-g(y)| \\ &\leqslant |\widetilde{p}(\Phi(y))-g(\Phi(y))|+|g(\Phi(y))-g(y)|<\delta+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1.\end{aligned}$$

这就是我们所需要的. □

¶ 拓扑流形

我们回顾一下拓扑流形的定义：

定义 4.1.15.（拓扑流形）

如果 X 是第二可数的 Hausdorff 空间，且满足局部欧条件，即

- 对于任意 $x \in X$，都存在 x 开邻域 $U_x \subset X$，$\mathbb{R}^n$ 中的开集 $V_x \subset \mathbb{R}^n$ 以及同胚映射 $\varphi_x : U_x \to V_x$，

则我们称 X 是一个 n **维拓扑流形**（topological manifold of dim n），并称三元组 (φ_x, U_x, V_x) 为 x 处的**一个坐标卡**（coordinate chart）.

类似地我们可以定义

定义 4.1.16.（带边拓扑流形）

(1) 如果 X 是第二可数的 Hausdorff 空间，且满足带边版本的局部欧条件，即

- 对于任意 $x \in X$，都存在 x 开邻域 $U_x \subset X$，开集

$$V_x \subset \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_n \geqslant 0\},$$

以及同胚映射 $\varphi_x : U_x \to V_x$，

则我们称 X 是一个 n **维带边拓扑流形**（topological manifold with boundary of dim n），并称三元组 (φ_x, U_x, V_x) 为 x 处的**一个坐标卡**（coordinate chart）.

(2) 若 X 是一个 n 维带边拓扑流形，且存在 x 处的坐标卡 (φ_x, U_x, V_x) 使得 $\varphi_x(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$，则我们称 x 是 X 的一个**边界点** (boundary point). X 的所有边界点的集合记为 ∂X，称为带边流形 X 的**边界**（boundary）.

根据区域不变性定理，可以证明（留作习题）

- n 维拓扑流形及 n 维带边拓扑流形的维数 n 是良定的.
- 带边拓扑流形的一个点"是否是边界点"不依赖于坐标卡的选取.

我们知道，拓扑流形都是局部紧的，仿紧的，局部道路连通的，半局部单连通的，可度量化的并且能够嵌入到高维欧式空间. 下面是一些简单的例子：

例 4.1.17.

(1) S^n，B^n，$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{RP}^n$ 都是 n 维流形. $\overline{B^n}, [0,1]^n$ 都是 n 维带边流形.

(1) 两个拓扑流形的乘积依然是拓扑流形，维数是两个流形维数之和.

(1) 两个 n-维拓扑流形的连通和仍然是一个 n-维拓扑流形.

(1) $S^2 \vee S^1$ 不是一个拓扑流形. $S^1 \vee S^1$ 也不是.

在接下来的几节，我们主要研究一维、二维（带边或不带边）拓扑流形.