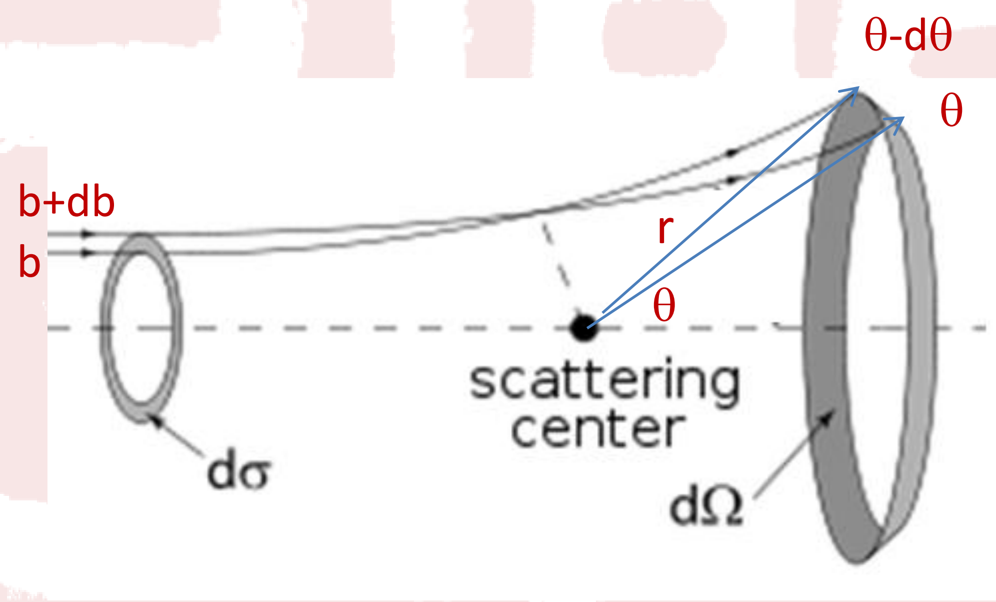
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式

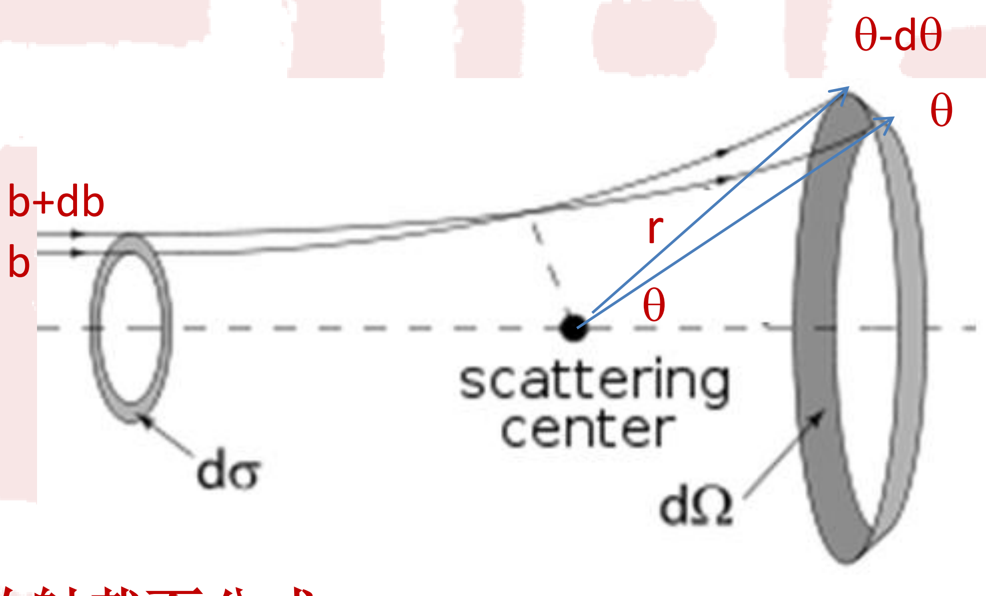


一个α粒子如果入射到面积元dσ内，就会散射到θ角方向的dθ内

$$\boxed{d\sigma = 2\pi b\left|db\right|}$$

描述了概率α粒子散射到θ方向的概率。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



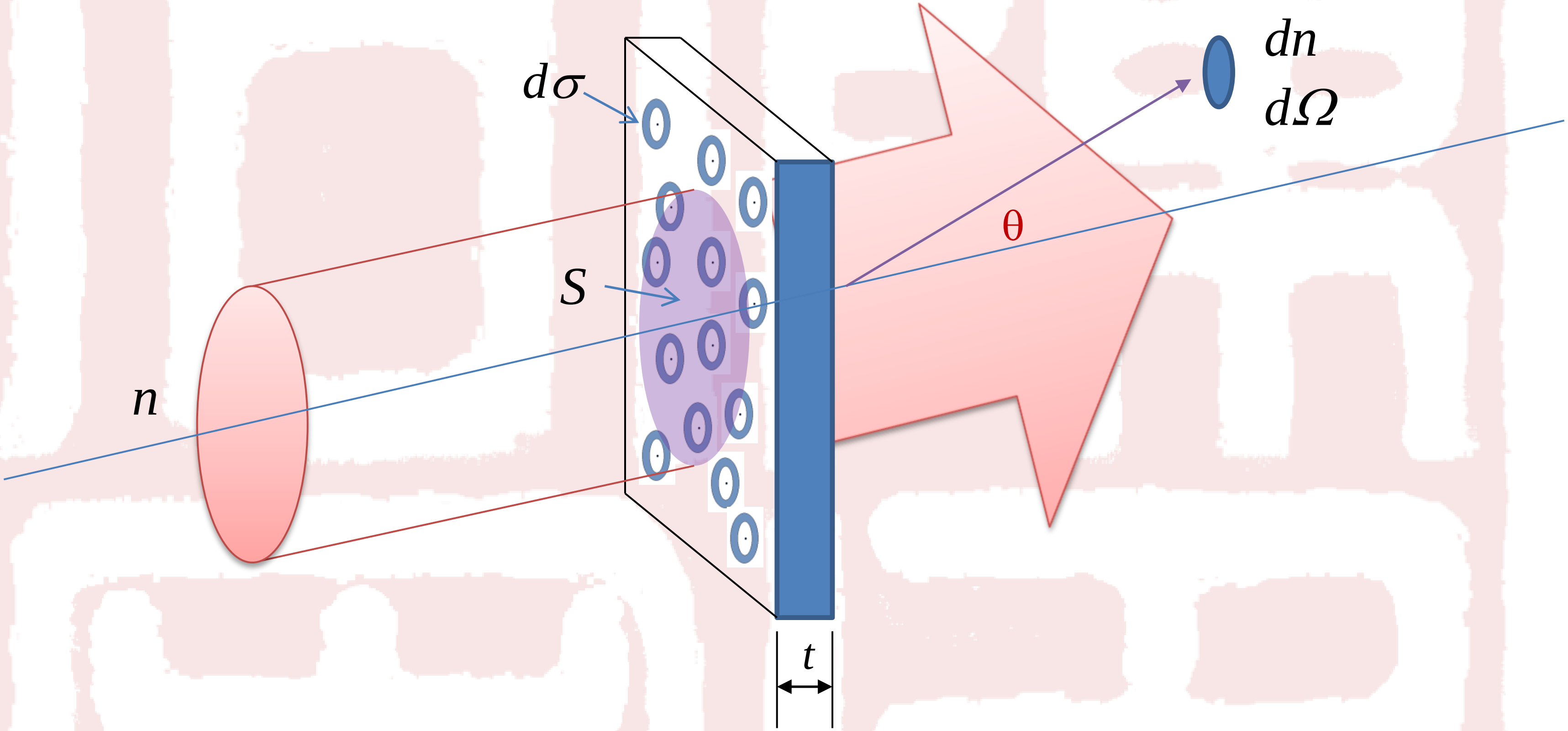
卢瑟福微分散射截面公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

表征了α粒子散射到θ角方向上单位立体角内，每个原子的有效散射截面。反映了散射到θ角方向上单位立体角内的概率。

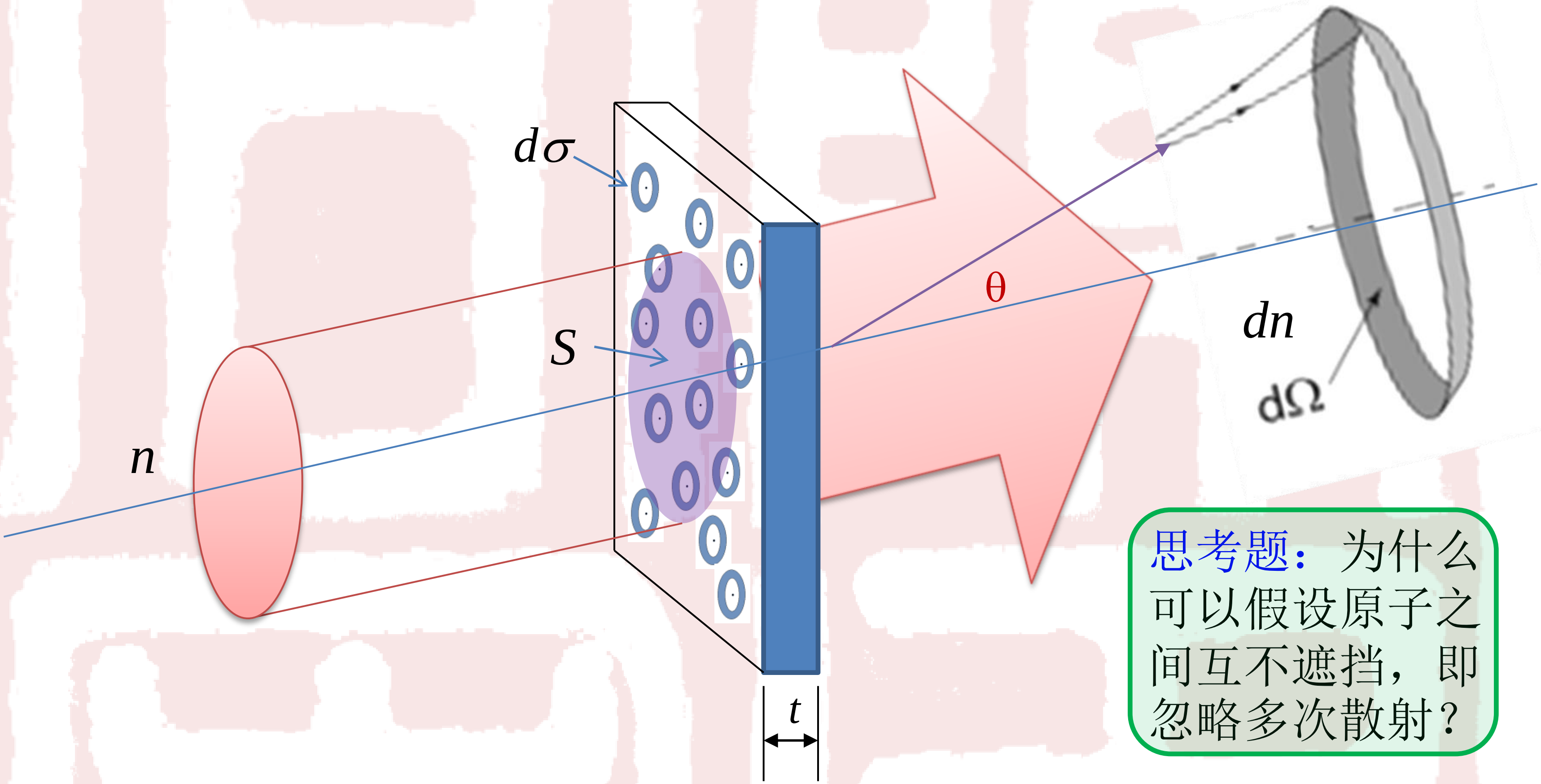
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式

实际的靶：原子数密度为N，厚度为t， α粒子束与靶相交的截面为S。



实验上测量的是：对应(单位时间)入射α粒子数目n，散射到角度θ方向上，探测器所张的立体角$d\Omega$内的粒子数dn。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



思考题：为什么可以假设原子之间互不遮挡，即忽略多次散射？

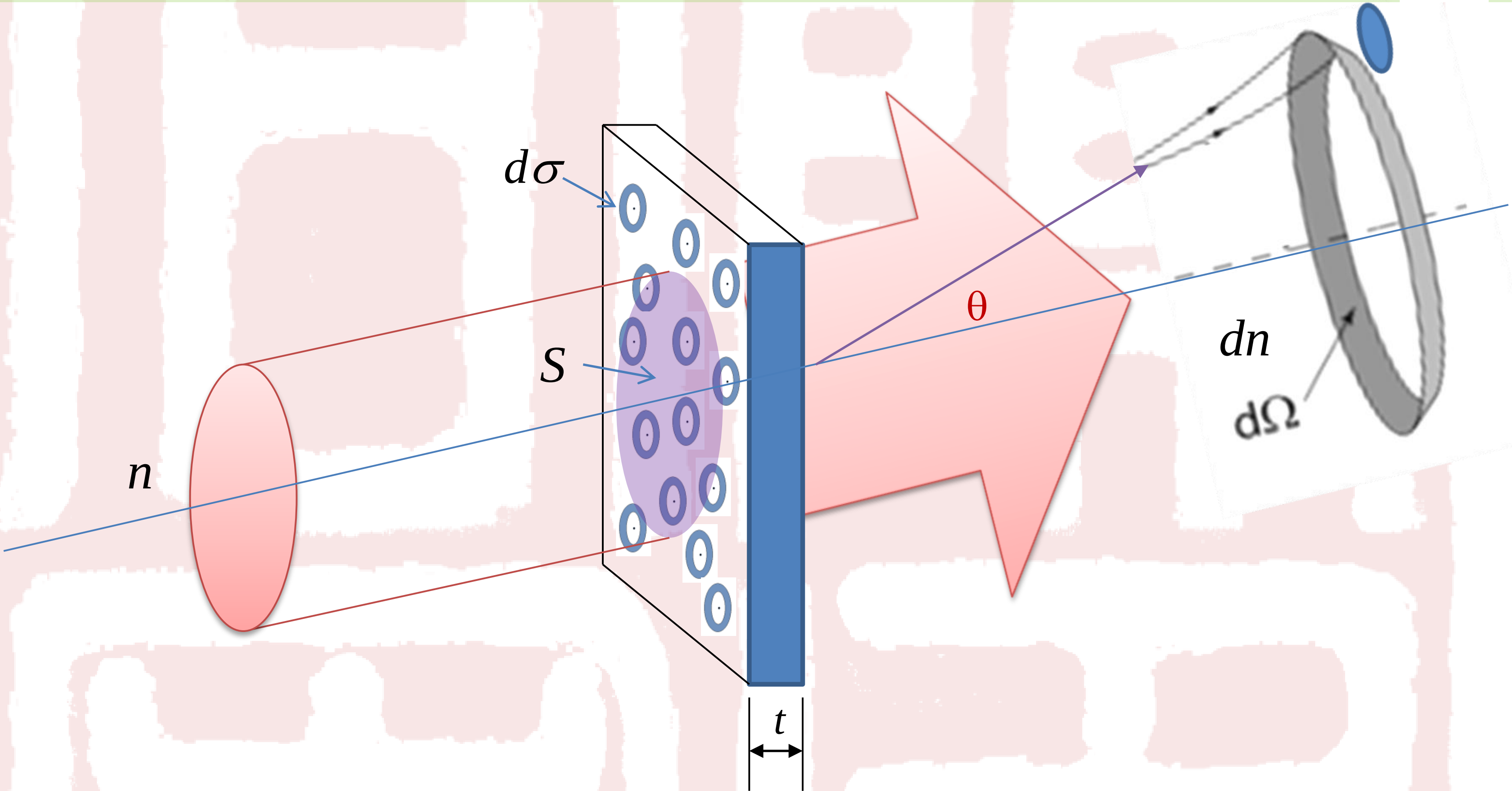
在束流于靶相交的体积St内，有NSt个原子。每个原子有一个有效散射截面$d\sigma$，α粒子打在$d\sigma$内，就会散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内。

NSt个原子的有效散射截面为：

$$d\Sigma = NStd\sigma$$

α粒子打在$d\Sigma$内，就会散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



α粒子散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内的概率 $\dfrac{dn}{n}=\dfrac{d\Sigma}{S}=\dfrac{NStd\sigma}{S}=Ntd\sigma$

散射到θ角方向上单位立体角内的概率

$$\frac{dn}{nd\Omega}=Nt\frac{d\sigma}{d\Omega}=Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式

[例1.2] 设α粒子是钋源放射的，能量为5.3MeV，散射体为金箔，厚为1μm，ρ=1.93×10^{4}kg m^{-3}，Z = 79，A=197，试求：

（1）α粒子通过金箔在60° 角方向的卢瑟福微分散射截面；

（2）散射角大于90° 的所有α粒子占全部入射粒子的百分比。

[解] (1) 60°角方向的卢瑟福微分散射截面：

$$\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|_{\theta=60^\circ}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta/2}$$

$$=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Z}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta/2}$$

$$=(1.44\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm})^2\left(\frac{2\times79}{4\times5.3\mathrm{MeV}}\right)^2\frac{1}{\sin^4 30^\circ}$$

$$=1.84\times10^{-23}\mathrm{cm}^2$$

复合常数

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44eV\cdot nm}$$

(2) 散射角大于90°的所有α粒子占全部入射粒子的百分比：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dn}{n}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^2\theta/2}$$

$$=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{N_A\rho t}{A}\left(\frac{zZ}{4E}\right)^2 4\pi=8.5\times10^{-5}$$

作业：1.6, 1.7

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

H. GEIGER and E. MARSDEN, The Laws of Deflexion of a Particles through Large Angles, *Philosophical Magazine,* Series 6, Volume 25, Number 148, April 1913

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

(1) 随角度的变化关系；
(2) 随散射体厚度的变化关系；
(3) 随入射粒子速度(能量)的变化关系；
(4) 随散射材料的原子量的变化关系。

(1) 随角度的变化关系 $dn\sin^4(\theta/2) = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 d\Omega = const.$

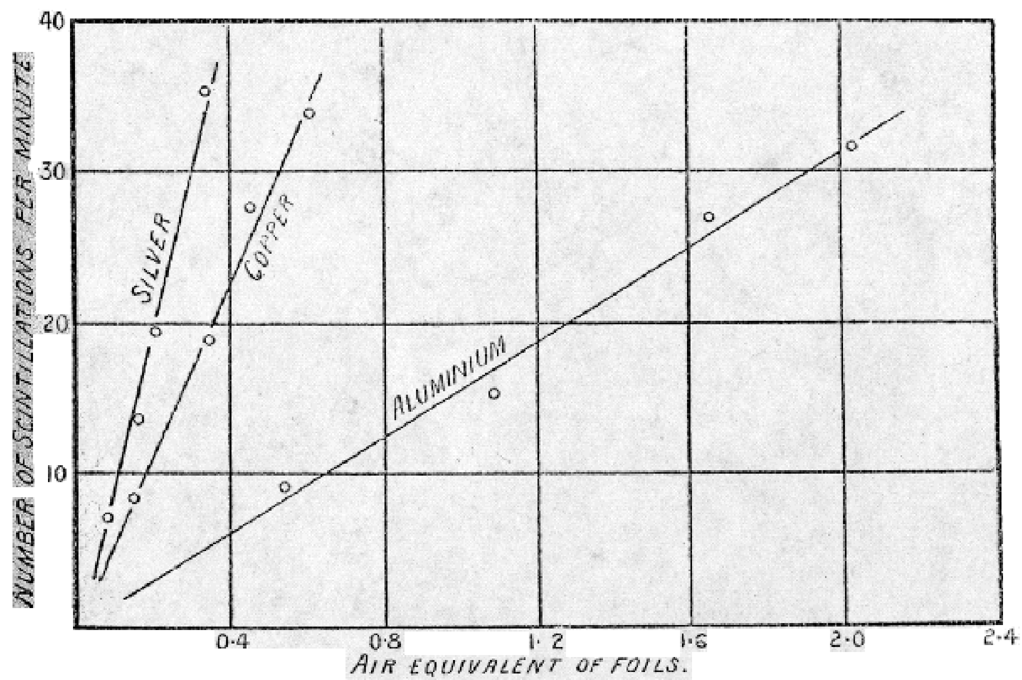
Angle θ	Scintillations per minute.				$\frac{1}{\sin^4\theta}$	$dn \times (\sin^4\theta / 2)$
	Without foil.	With foil.	Corrected for effect without foil.	Corrected for decay, *dn*.		
150	0.2	4.95	4.75	6.95	1.15	6.0
135	2.6	8.3	5.7	8.35	1.38	6.1
120	3.8	10.3	6.5	9.5	1.79	5.3
105	0.6	10.6	10.0	14.6	2.53	5.8
75	0.0	28.6	28.6	41.9	7.25	5.8
60	0.3	69.2	68.9	101	16.0	6.3

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(2) 随散射体厚度的变化关系

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \propto t$$

Fig. 5.



§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(3) 随入射粒子速度的变化关系 $dn\cdot v^4 = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{2m}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = const.$

I. Number of sheets of mica	II. Range R of α particles after leaving mica	III. Relative values of $1/v^4$	IV. Number dn of scintillations per minute.	V. $dn\times v^4$
0	5.5	1.0	24.7	25
1	4.76	1.21	29.0	24
2	4.05	1.50	33.4	22
3	3.32	1.91	44	23
4	2.51	2.84	81	28
5	1.84	4.32	101	23
6	1.04	9.22	255	28

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(4) 随散射材料的原子量*A*的变化关系 $\frac{dn}{Z^2}=nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2e^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}=const.$

I. Substance.	II. Atomic weight. A.	III. Air equivalent in cm.	IV. Number of scintillations per minute corrected for decay	V. Number *dn* of scintillations per cm. air equivalent.	VI. $A^{3/2}$.	VII. $dn/A^{3/2}$.
Gold.......	197	0.229	133	581	2770	0.21
Tin.........	119	0.441	119	270	1300	0.21
Silver......	107.9	0.262	51.7	198	1120	0.18
Copper....	63.6	0.616	71	115	507	0.23
Aluminium.	27.1	2.05	71	34.6	141	0.24

新物理量：原子核电荷数 Z

1920年，James Chadwick直接测量了Cu， Ag和Pt的Z

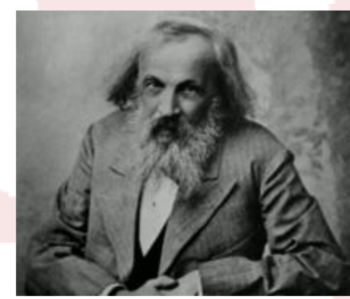
$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

J. Chadwick
(1891-1974)

发现在1.5%的误差范围内与原子序数(在元素周期表上的排序)相同。

Reihen	Gruppo I. — R^2O	Gruppo II. — RO	Gruppo III. — R^2O^3	Gruppo IV. RH^4 RO^2	Gruppo V. RH^3 R^2O^5	Gruppo VI. RH^2 RO^3	Gruppo VII. RH R^2O^7	Gruppo VIII. — RO^4
1	H=1							
2	Li=7	Be=9,4	B=11	C=12	N=14	O=16	F=19	
3	Na=23	Mg=24	Al=27,3	Si=28	P=31	S=32	Cl=35,5	
4	K=39	Ca=40	—=44	Ti=48	V=51	Cr=52	Mn=55	Fe=56, Co=59, Ni=59, Cu=63.
5	(Cu=63)	Zn=65	—=68	—=72	As=75	Se=78	Br=80	
6	Rb=85	Sr=87	?Yt=88	Zr=90	Nb=94	Mo=96	—=100	Ru=104, Rh=104, Pd=106, Ag=108.
7	(Ag=108)	Cd=112	In=113	Sn=118	Sb=122	Te=125	J=127	
8	Cs=133	Ba=137	?Di=138	?Ce=140	—	—	—	— — — —
9	(—)	—	—	—	—	—	—	
10	—	—	?Er=178	?La=180	Ta=182	W=184	—	Os=195, Ir=197, Pt=198, Au=199.
11	(Au=199)	Hg=200	Tl=204	Pb=207	Bi=208	—	—	
12	—	—	—	Th=231	—	U=240	—	— — — —

Mendeleev's 1871 periodic table

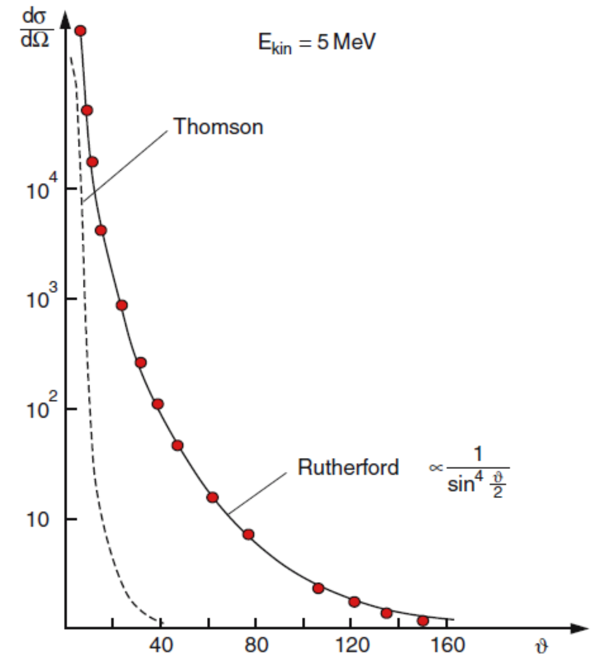


D. Mendeleev
(1834-1907)

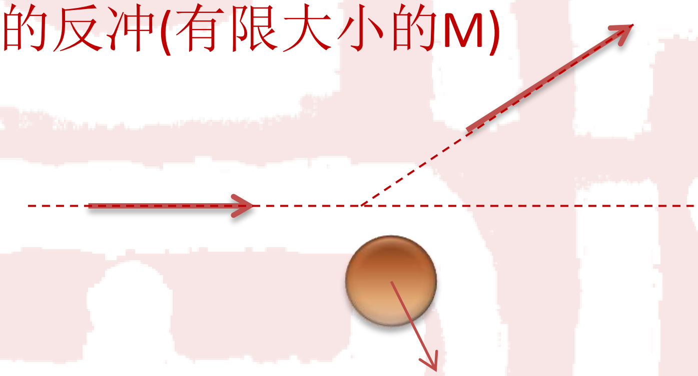
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

假设

(1) 忽略核外电子的作用 (m_e<<m_α)；
(2) 有库仑相互作用；
(3) 靶核静止(M>>m_α)；
(4) 忽略了多次散射。



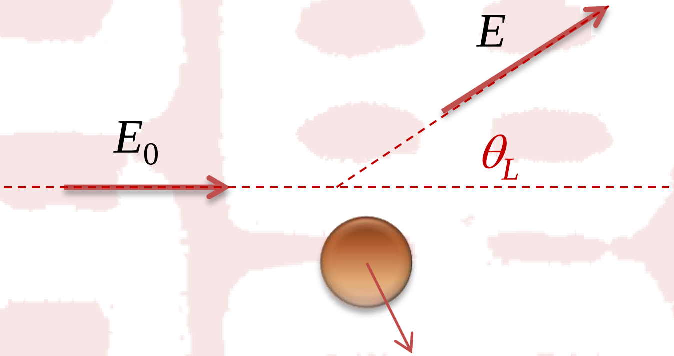
- 靶原子核的反冲(有限大小的M)



卢瑟福散射公式用到质心系仍成立，转换到实验室系

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E_L\sin^2\frac{\theta_L}{2}}\right)^2\times\frac{\left[\cos\theta_L+\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\sin\theta_L\right)^2}\right]^2}{(1+\cos\theta_L)^2\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\sin\theta_L\right)^2}}$$

- 靶原子核的反冲(有限大小的M)



散射α粒子的能量

$$E=\left(\frac{m\cos\theta_L+\sqrt{M^2-m^2\sin^2\theta_L}}{m+M}\right)E_0$$

当θ很小时，E和E_0差别不大；

当θ > 90°(背散射)，E和E_0差别较大。

极限情况：θ → 180°

$$E\to\frac{M-m}{M+m}E_0\sim\left(1-\frac{2m}{M}\right)E_0$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

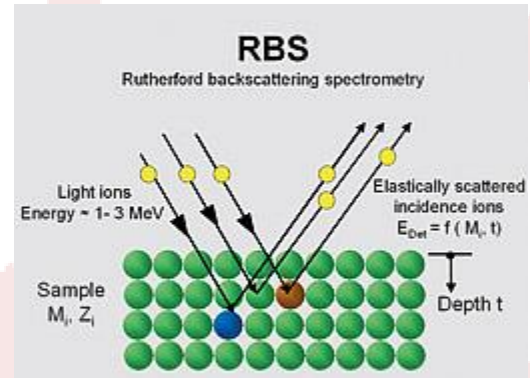
例如：E_0= 5MeV， m= 4 u.

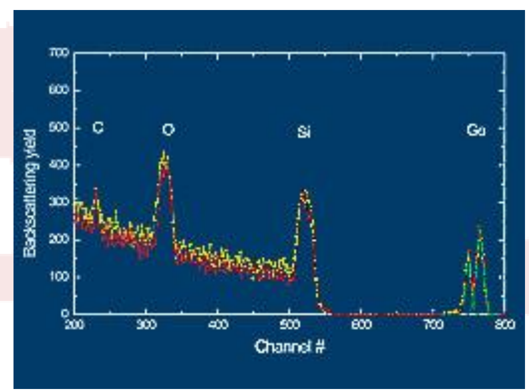
对于C元素，

$$E \sim \left(1-\frac{2\times 4}{12}\right)\times 5MeV = 1.67MeV$$

对于Si元素，

$$E \sim \left(1-\frac{2\times 4}{28}\right)\times 5MeV = 3.57MeV$$





应用：卢瑟福背散射谱仪

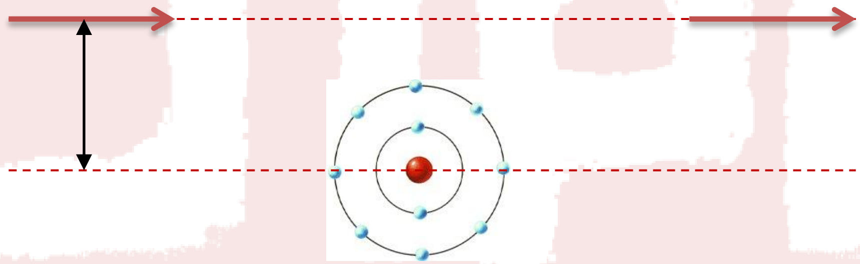
Rutherford-Backscattering-Spectrometry

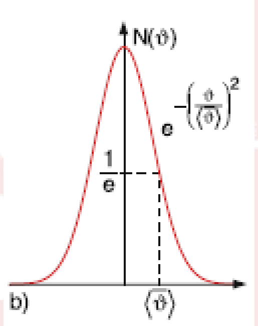
小角偏差

(1) 核外电子的屏蔽效应；

瞄准距离b很大

$$ctg\frac{\theta}{2}=\frac{2b}{D}$$





(2) 多次散射导致小角增强。

大角偏差

思考题：如何测量180°附近的α粒子散射？

1980年代，发现在180°背散射附近十分之几度范围内，非晶和多晶薄箔的散射实验值比用卢瑟福公式算出的大，通常可以增大1~2倍。

双原子散射模型来解释。

原子核的大小

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

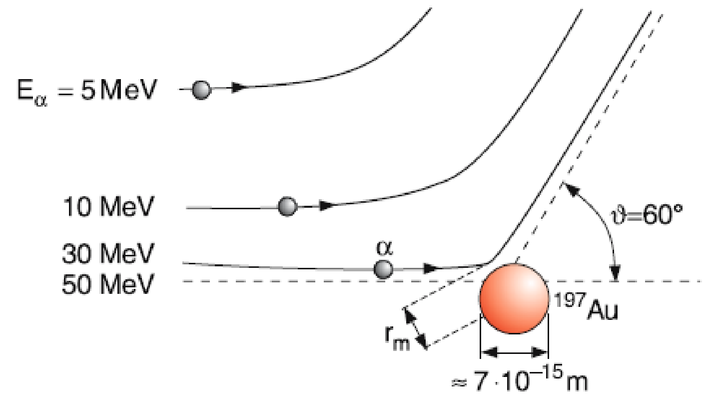
固定θ角，$dn \propto 1/E^2$

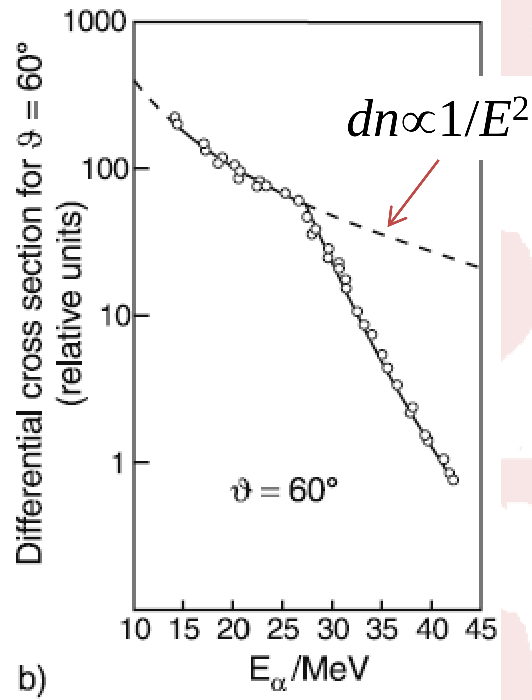
$$ctg\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} = 4\pi\varepsilon_0\frac{bE}{Ze^2}$$

固定θ角，E越大b越小。

小到一定程度，α粒子会进入原子核，散射关系发生突变(强核力起作用)。

突变点的α粒子正好掠过原子核表面，最近距离r_m即近似为原子核半径。





原子核的大小

角动量守恒

$$mv_0 b = mv_m r_m$$

$$\Rightarrow\quad v_m = \frac{v_0}{r_m} b = \frac{v_0}{r_m}\frac{D}{2}ctg\frac{\theta}{2}$$

能量守恒

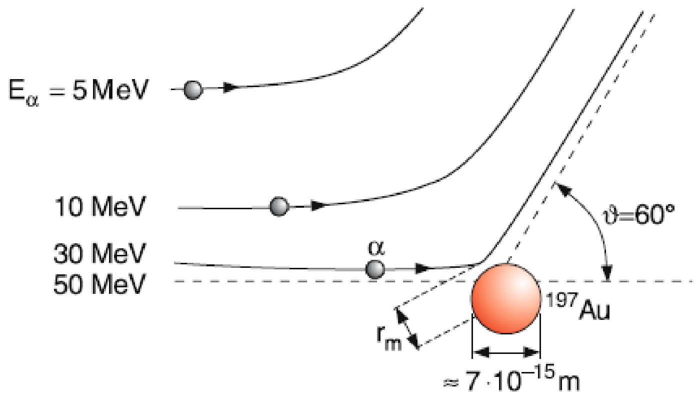
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$$

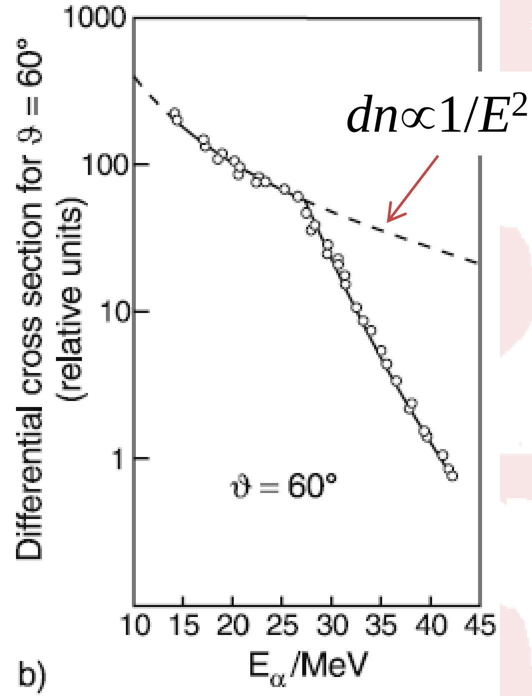
得(一元二次方程，取“+”解)

$$r_m = \frac{D}{2}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2Ze^2}{2E}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right)$$

图中的例子，转折点发生在25MeV

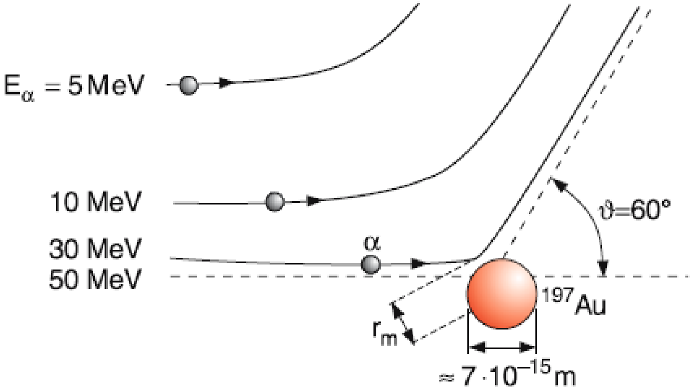
$$r_m = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Z}{E}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right) = 1.44eV\cdot nm$$





§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

原子核的大小

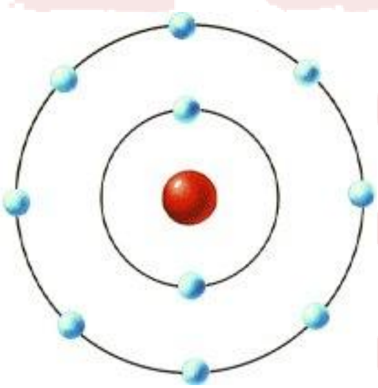


图中的例子，转折点发生在25MeV

$$r_m = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Z}{E}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right)$$

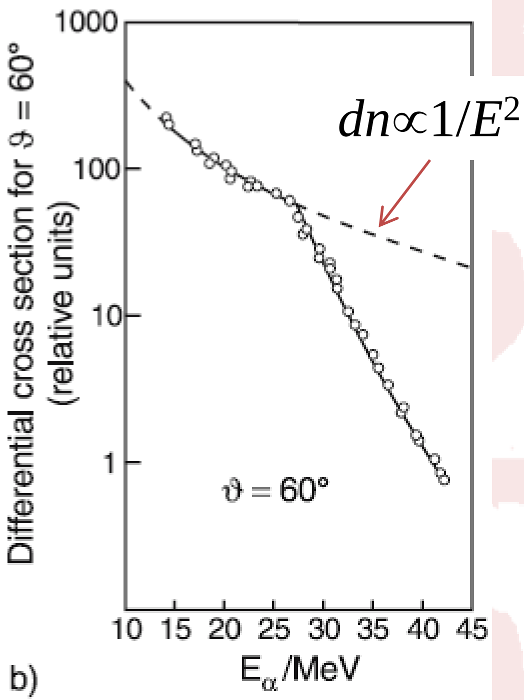
$$= 1.44eV\cdot nm\frac{79}{25MeV}\left(1+\frac{1}{\sin 30°}\right)$$

$$\sim 1.36\times 10^{-14}\,m$$

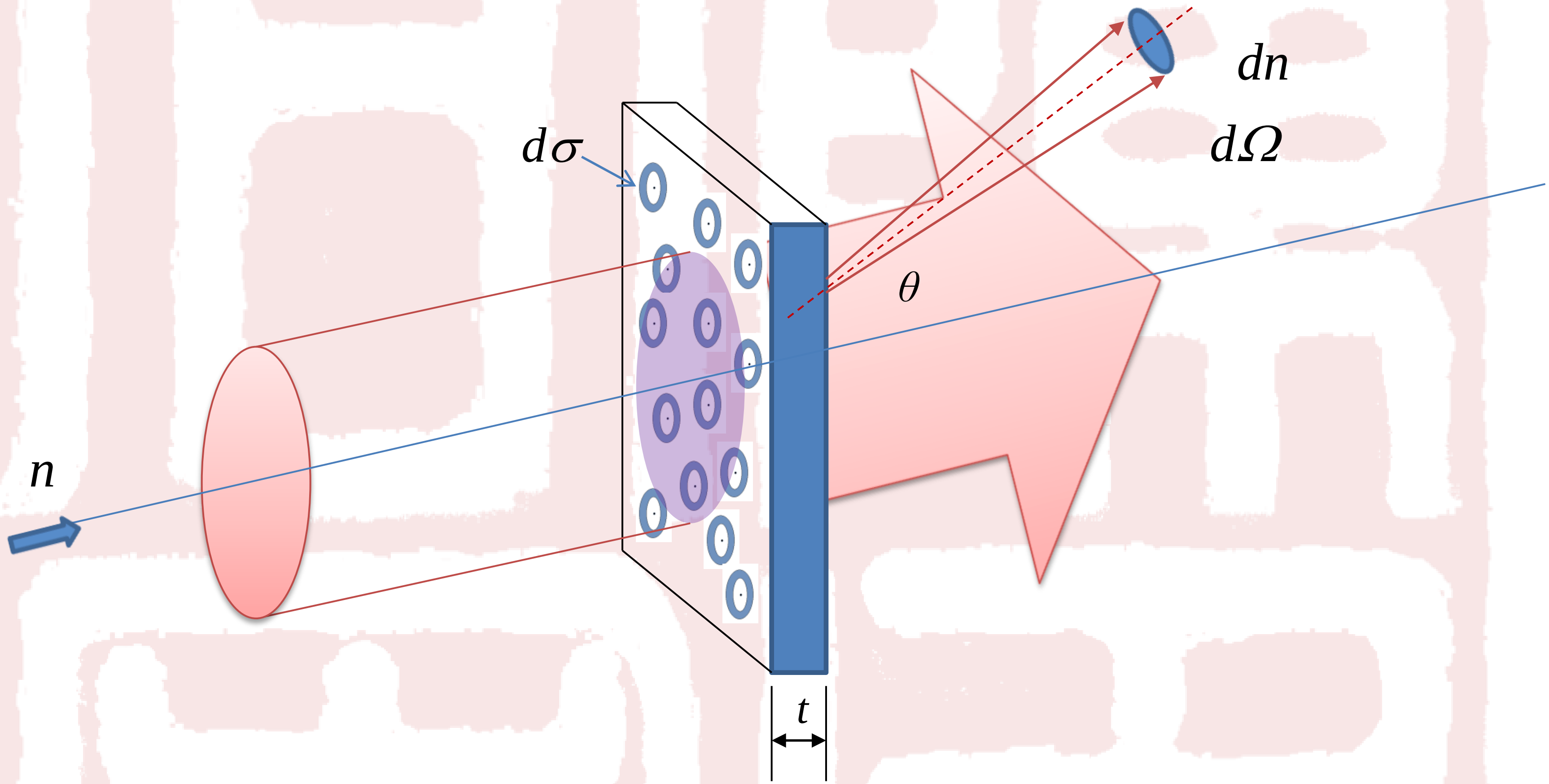


$\sim 10^{-10}\,m$

$\sim 10^{-14}\,m$



§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论



单位时间内在θ角方向$d\Omega$立体角内探测到的被散射的粒子数dn

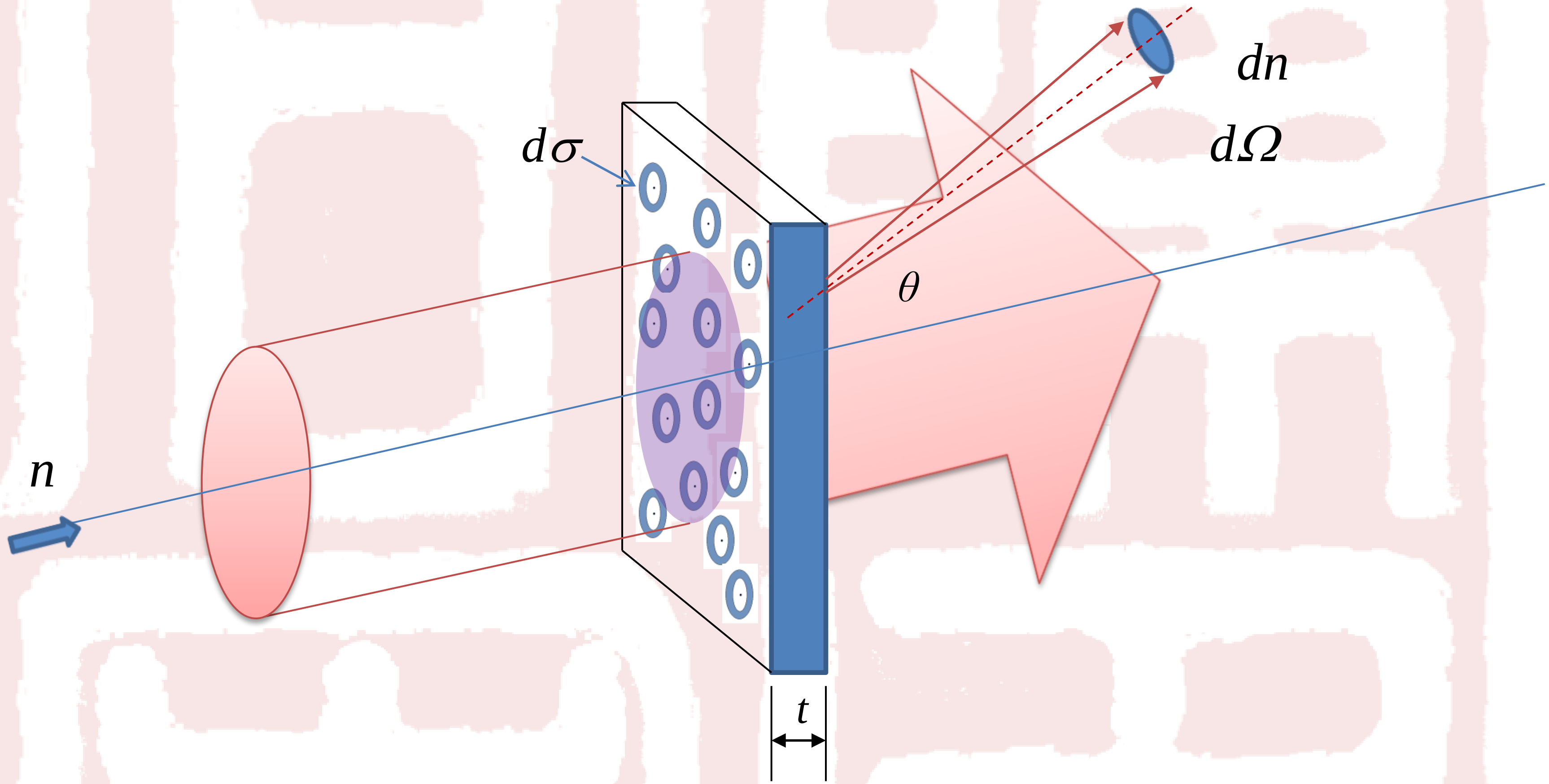
$$dn \propto NSt \cdot \frac{n}{S} \cdot d\Omega$$

散射中心数目

单位面积入射粒子数强度

探测器所张立体角

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论



单位时间内在θ角方向$d\Omega$立体角内探测到的被散射的粒子数dn

$$dn = ANSt \cdot \frac{n}{S} \cdot d\Omega = ANtnd\Omega$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论

一个粒子被散射到θ角方向$d\Omega$立体角内的概率

$$\frac{dn}{n} = ANtd\Omega$$

两个因子：

因子1：Nt　　散射体的原子数密度和厚度。

因子2：

$$A = \frac{dn}{n}\frac{1}{Ntd\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{\theta\text{角方向d}\Omega\text{立体角内的散射粒子数}}{\text{入射粒子数} \times \text{单位面积的靶原子数} \times \text{探测器所张立体角}}$$

表示单位面积内垂直入射一个粒子（n=1）时，被这个面积内的一个靶原子（Nt =1）散射到θ角方向单位立体角内的概率。

该因子与入射粒子数、靶的形状和靶粒子数均无关，只决定于发生相互作用的粒子与散射中心的性质以及它们之间相互作用的动力学性质。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论

微观相互作用机制 ⟷ $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ ⟷ 宏观可观测量

$$\frac{dn}{n}=\frac{d\sigma}{d\Omega}Ntd\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

α粒子与原子的库仑散射过程

总散射截面或积分截面

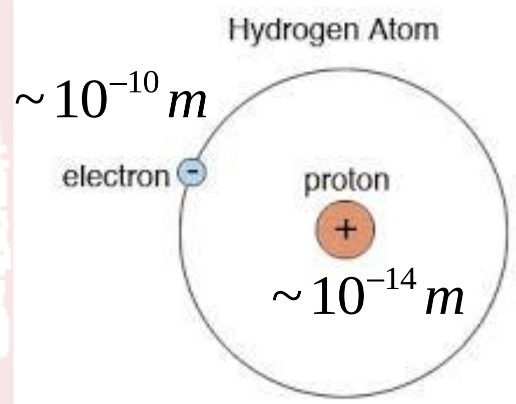
$$\sigma=\int\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}d\Omega=2\pi\int_0^\pi\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\sin\theta d\theta$$

§ 1.3.3 卢瑟福原子模型的困难

确定的原子大小

以氢原子为例，假设原子核静止(M>>m_e)，核外电子在原子核的库仑场中以半径 r 做圆周运动。则有

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



电子动能 $$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电子在库仑场中的势能 (r→∞，V = 0)

$$V=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电子的总能量

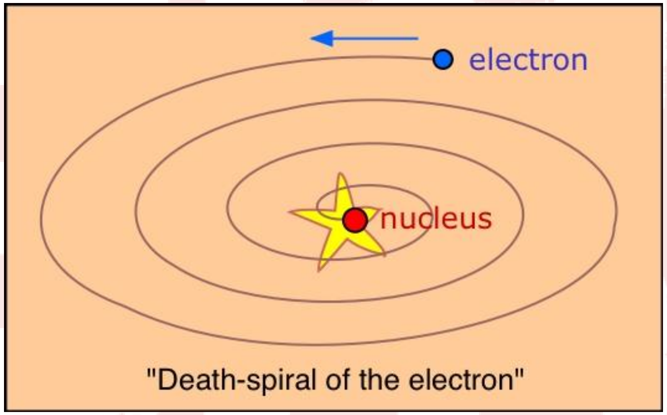
$$E=T+V=\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

对 r没有限制，但实际情况是原子大小约为10^{-10} m。

§ 1.3.3 卢瑟福原子模型的困难

➤原子的稳定性

做圆周运动的核外电子辐射电磁波而损失能量。



$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$E\downarrow$ → r↓　　原子“塌缩”

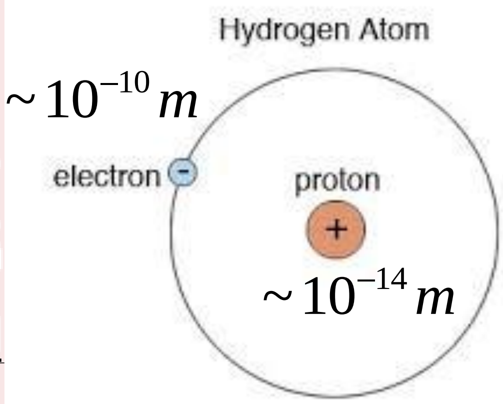
[例1.3] 设H原子中电子绕原子核作圆周运动，原子的初始半径为 10^{-10} m，请由经典电磁理论估计电子落到原子核上的时间。

[解] 略

§ 1.3.3 卢瑟福原子模型的困难

原子的辐射特性

原子辐射电磁波的频率应等于电子做圆周运动周期的频率，以氢原子为例：



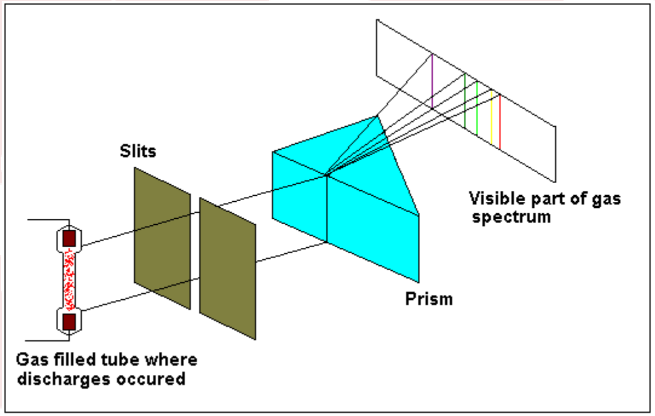
$$f=\frac{v}{2\pi r}$$

$$v=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$

$$f=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 mr^3}}$$

连续的原子光谱

分立的原子光谱



Discharges in the low - pressure gas filled tube are sources of light, which undergo refraction on a prism. We see the line spectrum of the gas.

§ 1.3.3 卢瑟福原子模型的困难

scientific determinism

We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.

—Pierre Simon Laplace

19世纪末经典物理的困难

黑体辐射、光电效应、原子的分立线光谱等