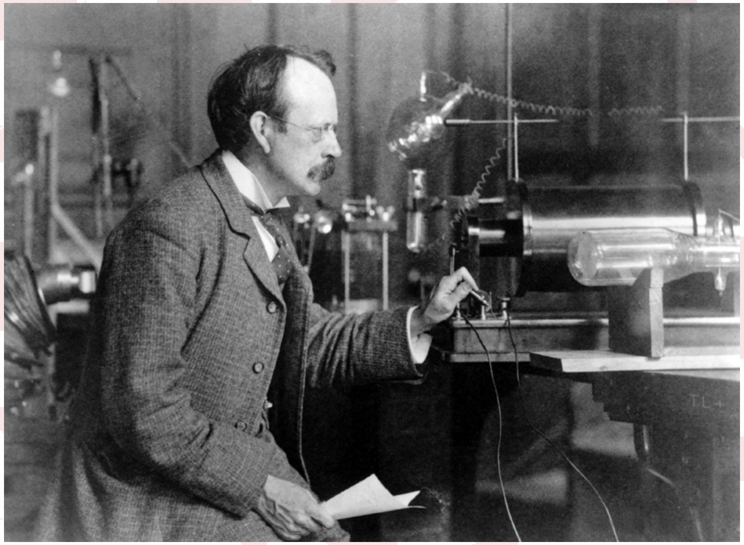
§ 1.2 电子—电子的发现

阴极射线粒子是一种全新的粒子，所带的电荷量与H正离子的电荷量大小相等而符号相反，即-*e*，而其质量是H原子质量的约千分之一，这就是“电子”。



获得了1906年诺贝尔物理奖

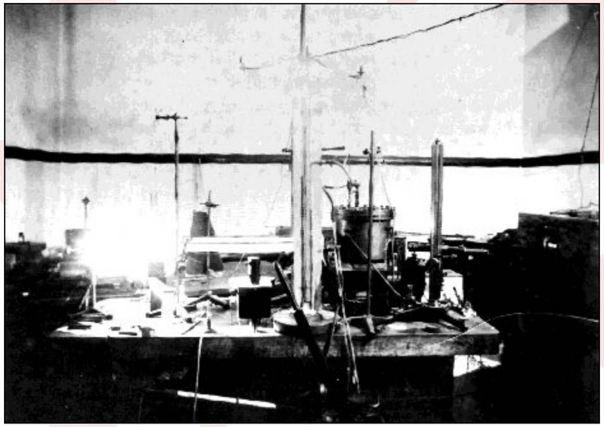
J. J. Thomson (1856-1940)

§ 1.2 电子—电子的电荷量(基本电荷*e*的测量)

密立根油滴实验:

(1) 直接测量了基本电荷量*e*;

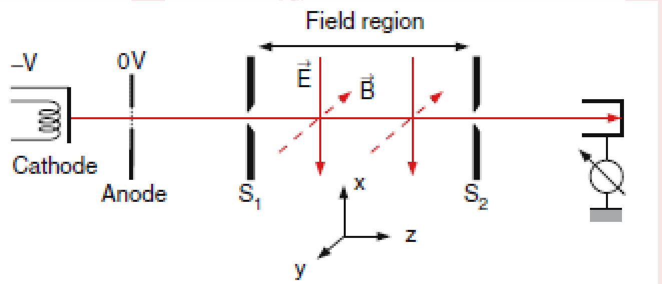
(2) 直接证明了电荷的原子化(量子化)，即总是基本电荷量的整数倍。



获得了1923年诺贝尔物理奖

更精确的荷质比测量

$$e/m = 1.758820174\times10^{11}\ \mathrm{C/kg}$$



$$e = 1.602176462(63)\times10^{-19}\mathrm{C}$$

$$m_e = 9.10938188(72)\times10^{-31}\mathrm{kg} = 0.510998902(21)\mathrm{MeV}/c^2$$

$$M_\mathrm{H} \approx m_p = 1.67262158\times10^{-27}\mathrm{kg}$$

$$m_e/M_\mathrm{H} \approx 1/1836.15$$

电子的大小

电子的经典半径(Lorentz半径)：

$$m_e c^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_c} \Rightarrow r_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = 1.44eV\cdot nm\frac{1}{0.511MeV}$$

$$\sim 2.818\times 10^{-15}m$$

复合常数

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.44eV\cdot nm}$$

量子电动力学(QED)假设电子是点粒子。高能正、负电子对撞实验表明，到目前为止，电子在10^{-18}m范围外仍可以看作是点粒子。

电子

$m_e = 9.10938291(40)\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$r_e < 10^{-18}\,m$

带负电 $e = 1.602176565(35)\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

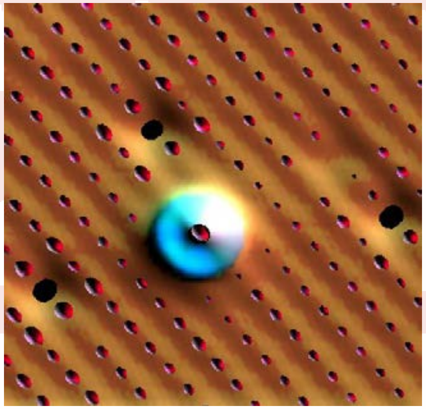
原子中带正电的物质

(氢)原子

$m_H = 1.67262158\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$r_H \approx 0.53\times 10^{-10}\,m$

电中性



镍表面的一个氙原子

§ 1.2 电子—Thomson原子模型

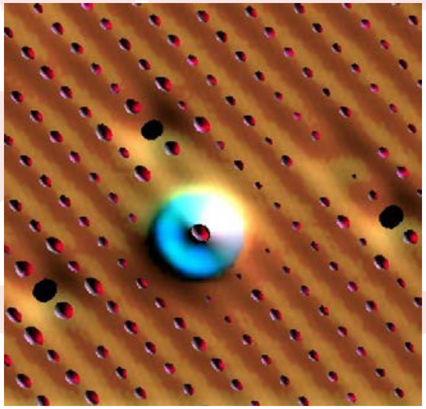
原子中带正电的物质

质量：约等于全部的原子质量 (电子质量可以忽略)

电荷量：$+Ze$

(假设原子中有Z个电子，则电子携带的总电荷量为 $-Ze$)

原子的结构？

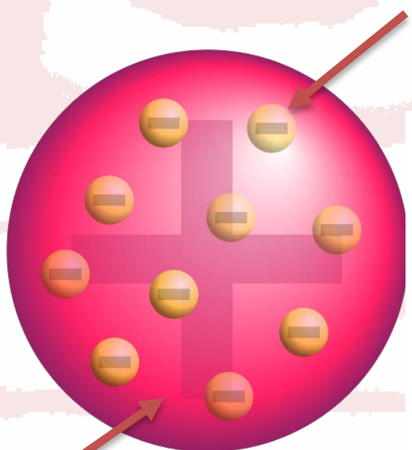


镍表面的一个氙原子

汤姆森原子模型

原子中带正电(+Ze)的物质均匀分布在整个原子空间 ($R \approx 10^{-10}$m)，而Z个电子则处在原子球内的平衡位置上。

带负电的电子(葡萄干)



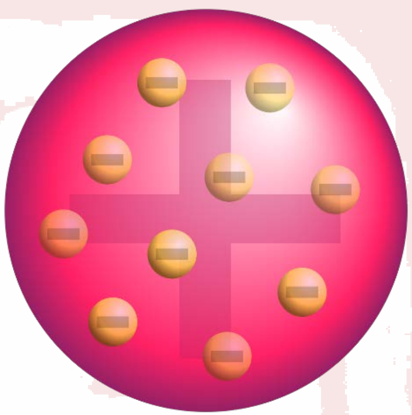
带正电物质(布丁)

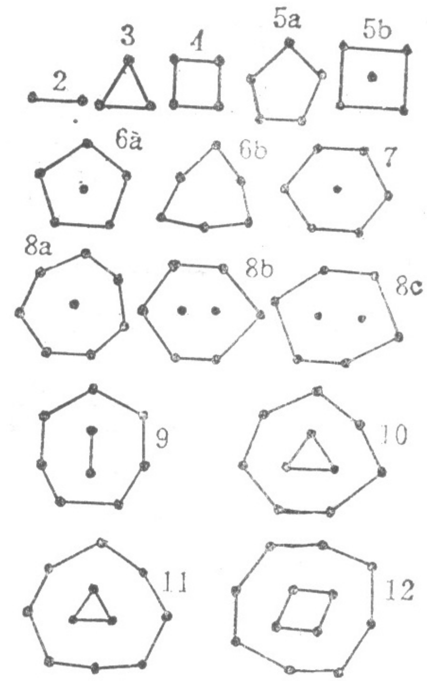
葡萄干布丁模型

§ 1.2 电子—Thomson原子模型

电子围绕原子中心作简谐振动，辐射电磁波。

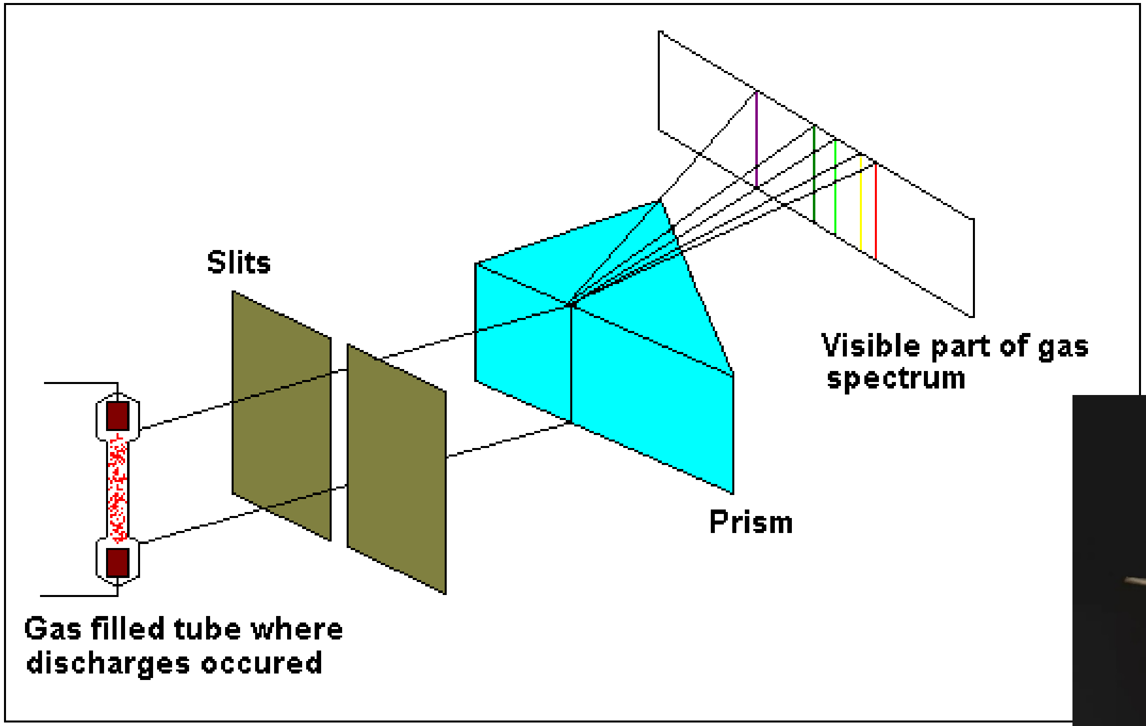
(1) 原子的电中性；
(2) 稳定性；
(3) 定性解释辐射特性。





§ 1.2 电子—Thomson原子模型

19世纪中叶，基尔霍夫和本森等人发展了光谱分析技术。

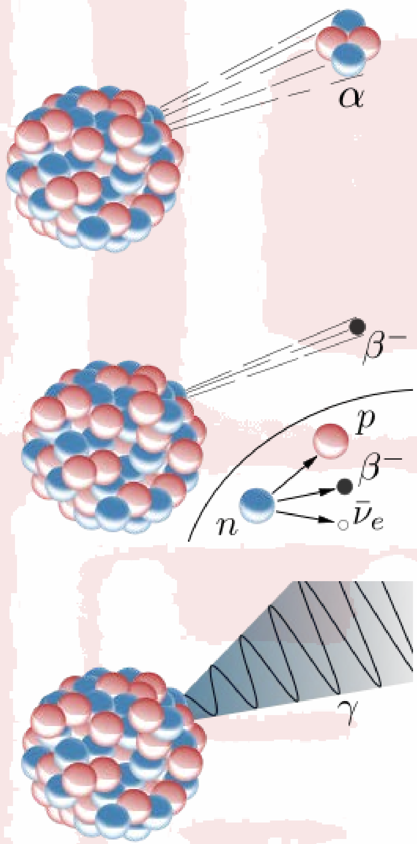


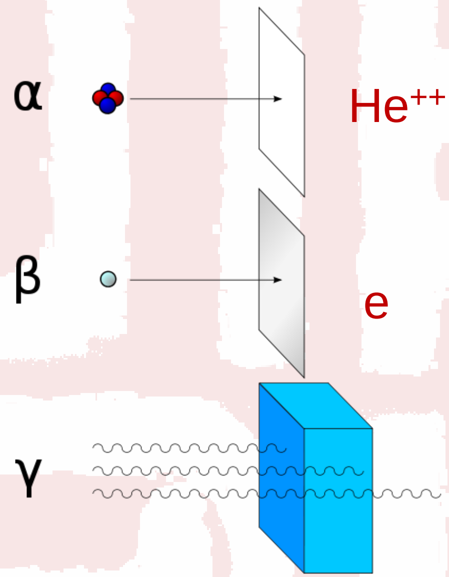
Discharges in the low - pressure gas filled tube are sources of light, which undergo refraction on a prism. We see the line spectrum of the gas.

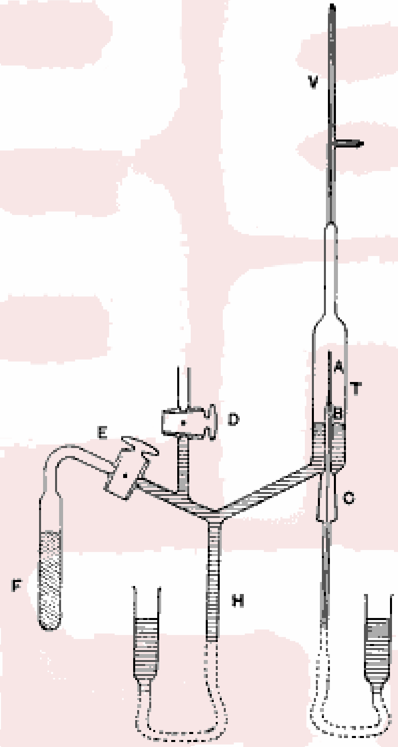
探测古墓内部结构的洛阳铲

§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

1896年，贝克勒尔发现了放射性现象。







H.Becquerel
(1852-1908)

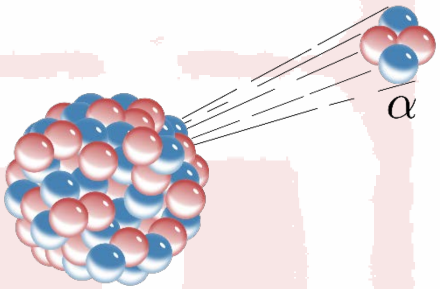
E. Rutherford
(1871-1937)


The Nobel Prize in Chemistry 1908

"for his investigations into the disintegration of the elements, and the chemistry of radioactive substances"

探测原子内部结构的洛阳铲

α粒子　二价离子 He^{++}



质量 $m_\alpha = 4m_H$

带正电 $q = 2e$

比如：

钋210放射源

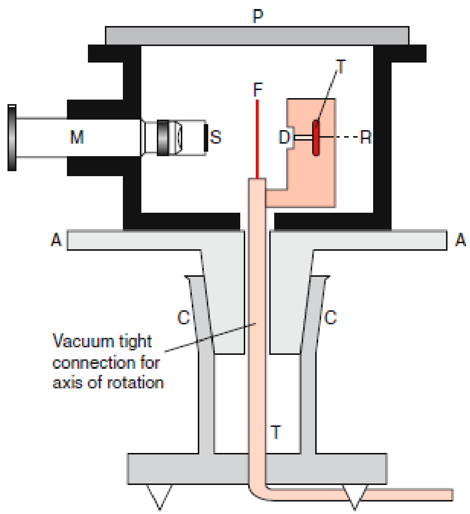
放出的α粒子能量为 5.3 MeV

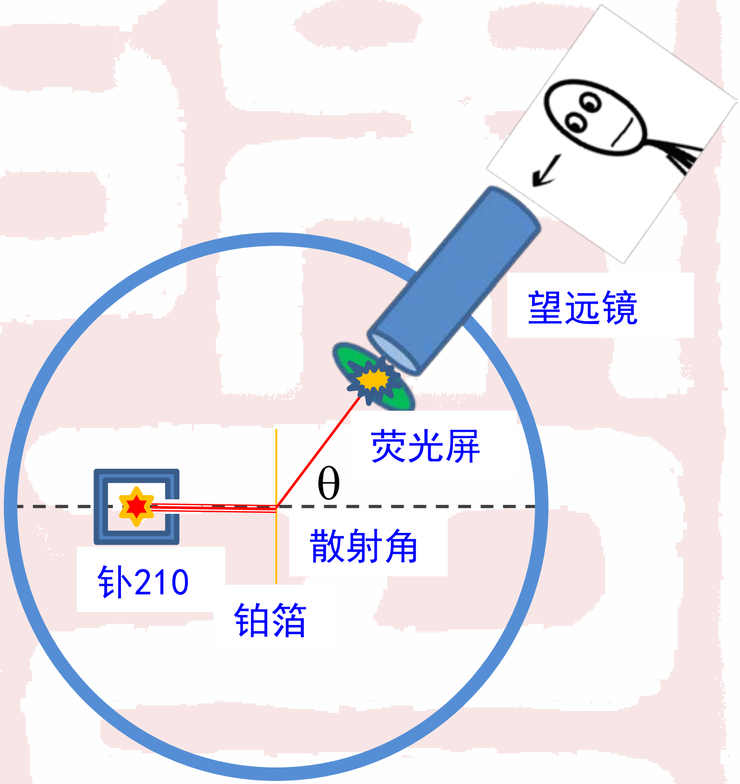
新能量单位：电子伏特 (eV)
单个电子经过1V的电势差所获得的能量

1 MeV = 1×10^6 eV

§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

1909年，卢瑟福和他的助手盖革和马斯登做了α粒子与铂箔(μm)的散射(碰撞)实验。





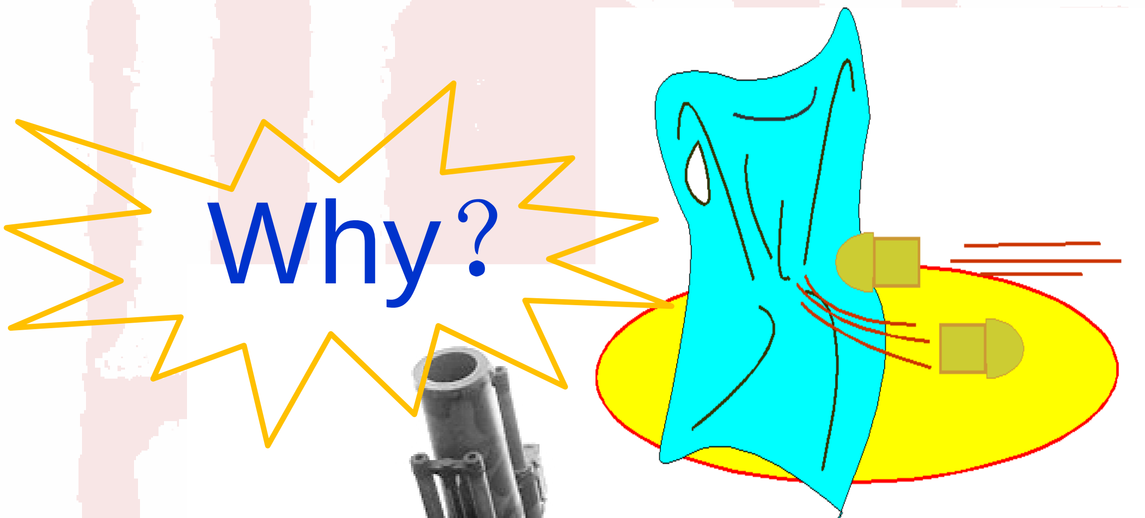
结果：绝大部分α粒子几乎直接穿透，但有约1/8000的α粒子散射角度大于90°。

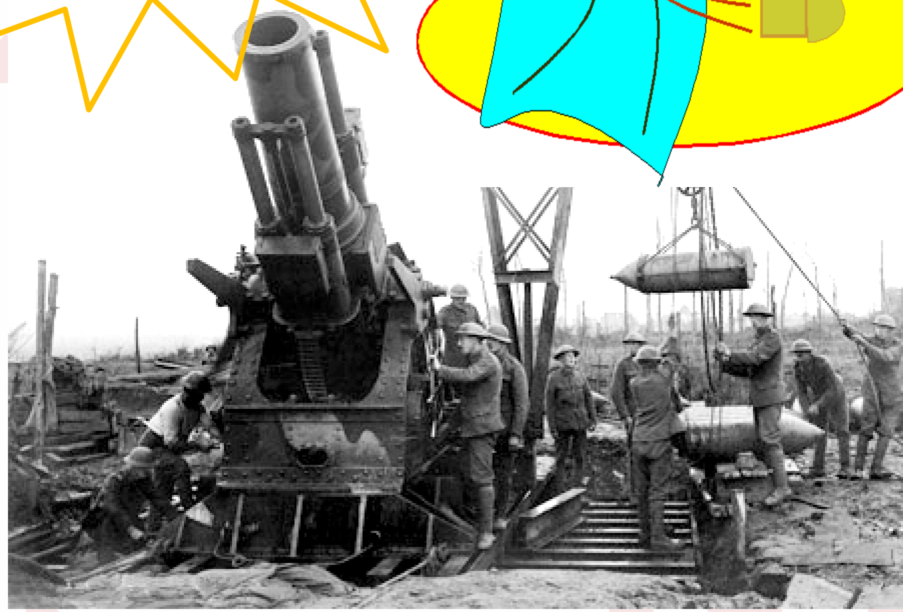
Geiger H. & Marsden E. (1909). "On a Diffuse Reflection of the α-Particles". Proceedings of the Royal Society, Series A 82: 495-500

§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

"It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you. "

—Ernest Rutherford

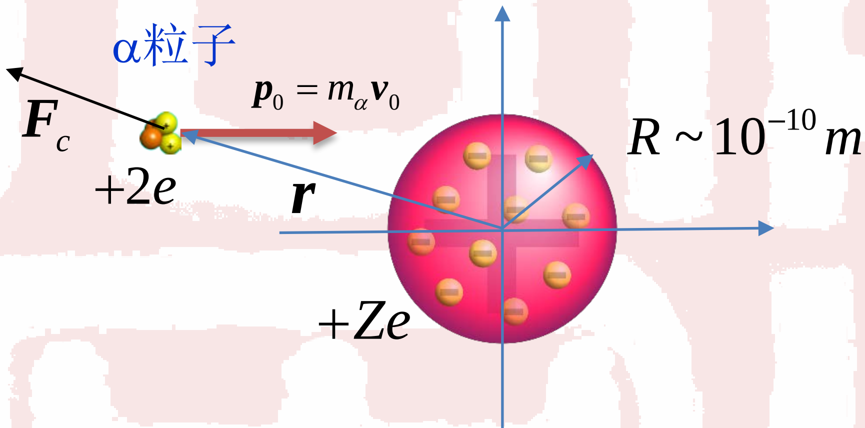


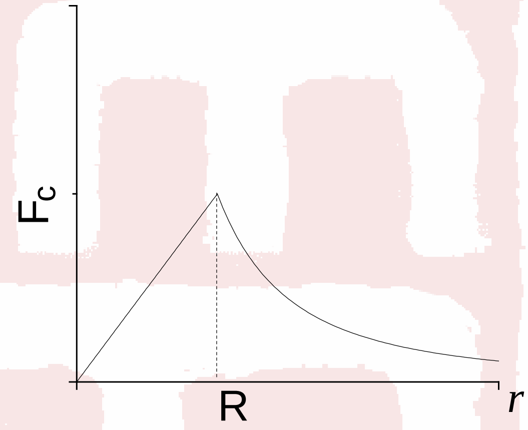


§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

[例1.1] 设入射α粒子的能量为5MeV，散射体是厚度为1μm的铂箔，利用汤姆森模型估计散射α粒子的偏转角，以及发生大于90°散射的概率。

解：由于 $m_e << m_\alpha$ 可以忽略电子的影响。





α粒子受到正电物质的库伦力，其大小：

$$F_c = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Ze^2}{r^2} & r > R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2Ze^2 r}{R^3} & r \le R \end{cases}$$

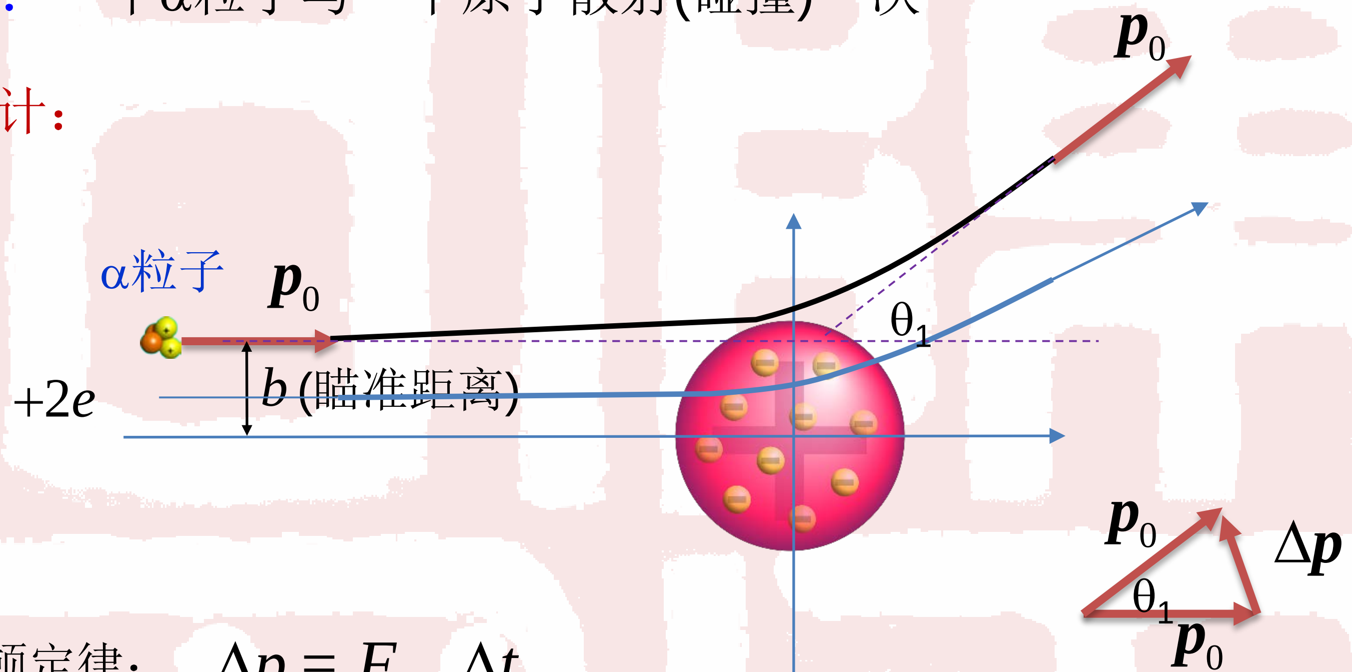
在R处，α粒子受力最大。

$$F_{\max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}$$

§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

单次散射：一个α粒子与一个原子散射(碰撞)一次

散射角估计：



根据牛顿定律： $\Delta p = F_{\max}\Delta t$

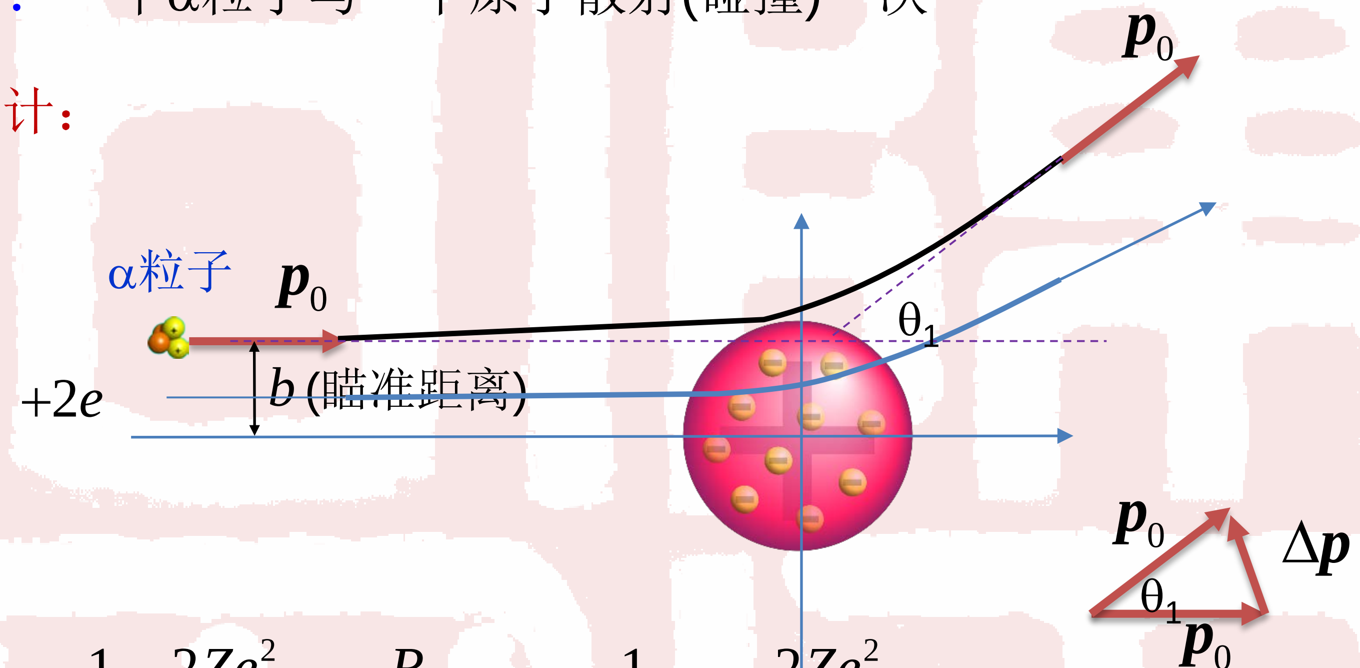
$$F_{\max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}$$

Δt 近似为α粒子飞越原子的时间： $\Delta t \sim \dfrac{R}{v}$

α粒子动能 $E = \dfrac{1}{2}m_\alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2E/m_\alpha}$

单次散射：一个α粒子与一个原子散射(碰撞)一次

散射角估计：



所以：

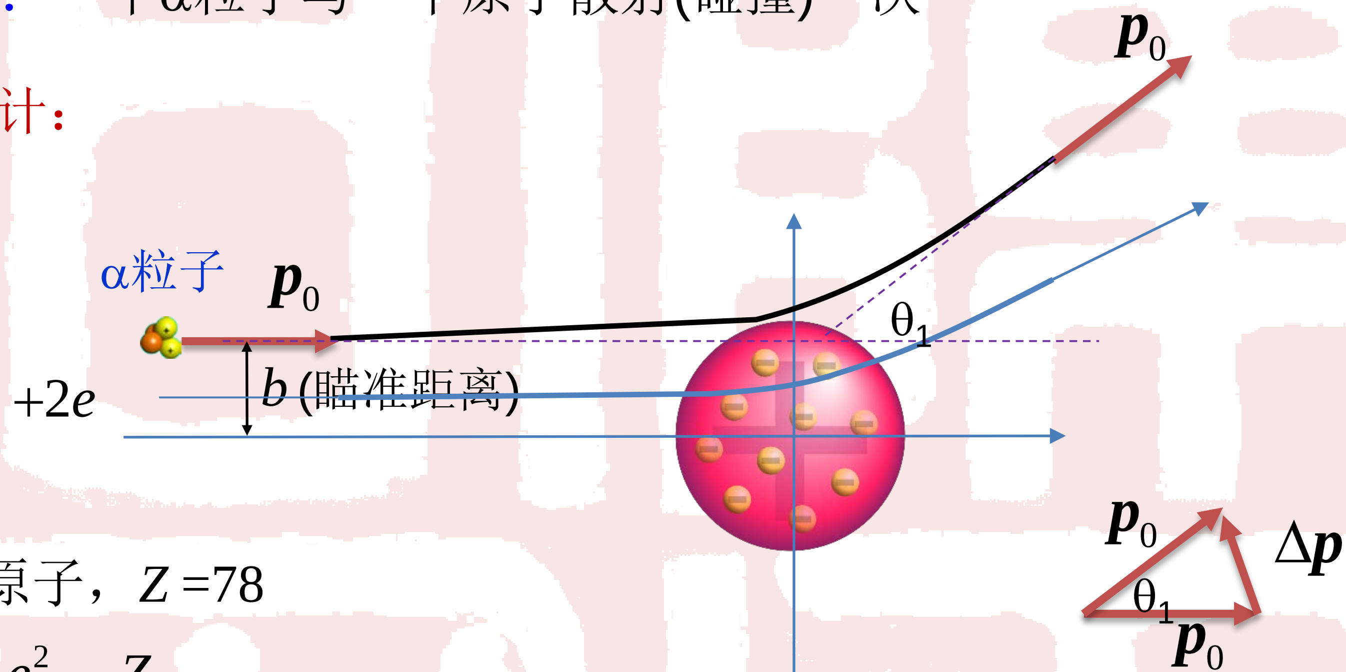
$$\Delta p \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}\frac{R}{\sqrt{2E/m_\alpha}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{\sqrt{2E/m_\alpha}\,R}$$

Δp很小，所以有 $\Delta p \sim p_0\theta_1$

则：
$$\theta_1 \sim \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta p}{m_\alpha v} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{\sqrt{2E/m_\alpha}\,R}\frac{1}{\sqrt{2m_\alpha E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{RE}$$

单次散射：一个α粒子与一个原子散射(碰撞)一次

散射角估计：



对于铂原子，$Z = 78$

$$有\ \theta_1 \sim \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{RE}$$

$$= 1.44eV \cdot nm \cdot \frac{78}{10^{-10}m \times 5\times10^6 eV} = 2.2\times10^{-4} rad$$

$$\boxed{\theta_1 \sim 0.01^\circ}$$

复合常数

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.44eV \cdot nm}$$

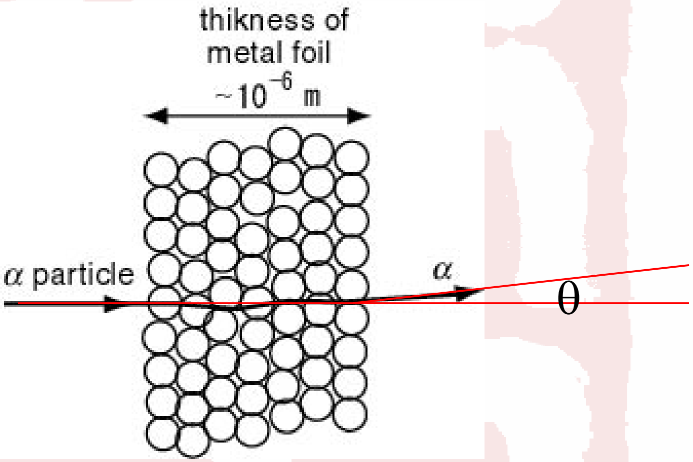
1 nm = 1×10^{-9} m

多次散射：α粒子穿过铂箔会与多个原子散射(碰撞)

散射角的大小θ是随机的，服从正态分布(高斯分布)

分布函数

$$f(\theta)d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\theta}^2}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{\overline{\theta}^2}\right)d\theta$$



$\overline{\theta}^2$是散射角的平方平均值。

$$\overline{\theta}^2 = N\theta_1^2$$

N是碰撞次数，若原子满排在铂箔内，则

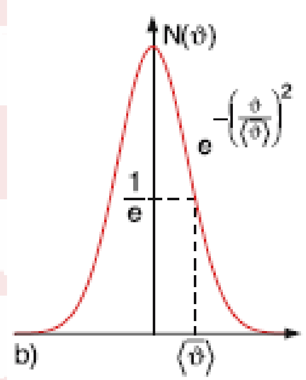
$$N \approx 10^{-6}m/10^{-10}m = 10^4$$

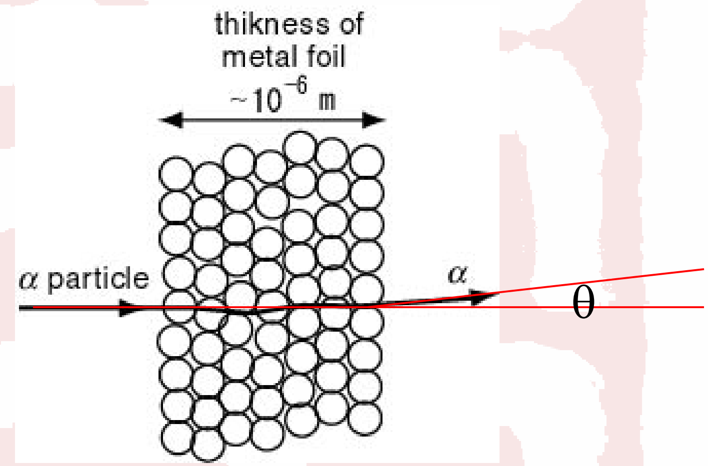
§ 1.3 α粒子散射实验和卢瑟福原子模型-- α粒子散射实验

多次散射：α粒子穿过铂箔会与多个原子散射(碰撞)

$$f(\theta)d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\theta}^2}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{\overline{\theta}^2}\right)d\theta$$

$$\overline{\theta}^2 = N\theta_1^2 \approx 10^4 \times 0.01°^2 = 1°^2$$

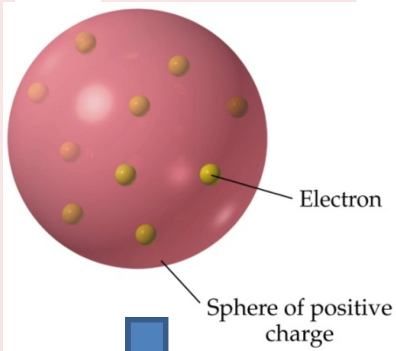


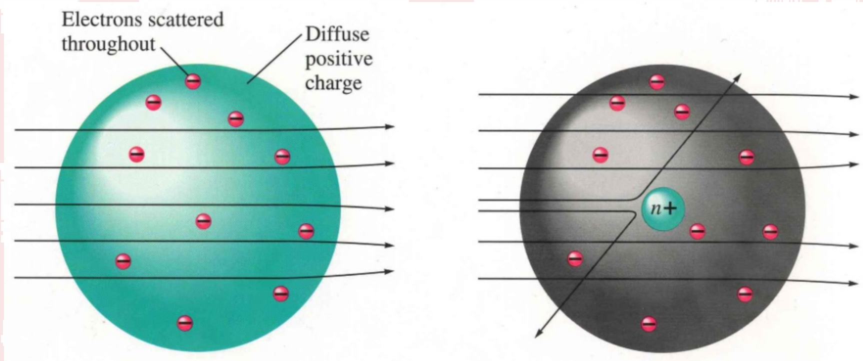


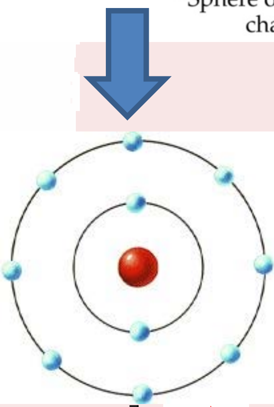
大于90°散射的概率~10^{-2000} = 0

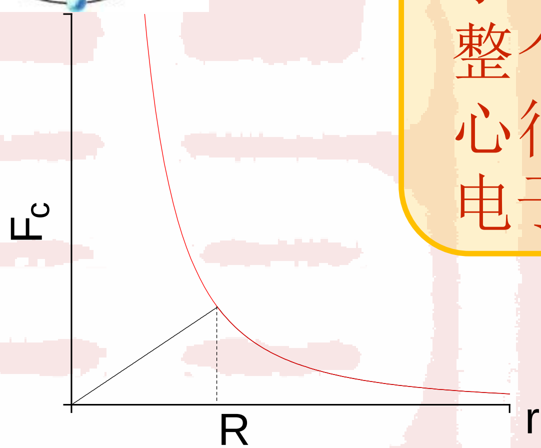
发生大角度散射几乎不可能！！

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福原子模型









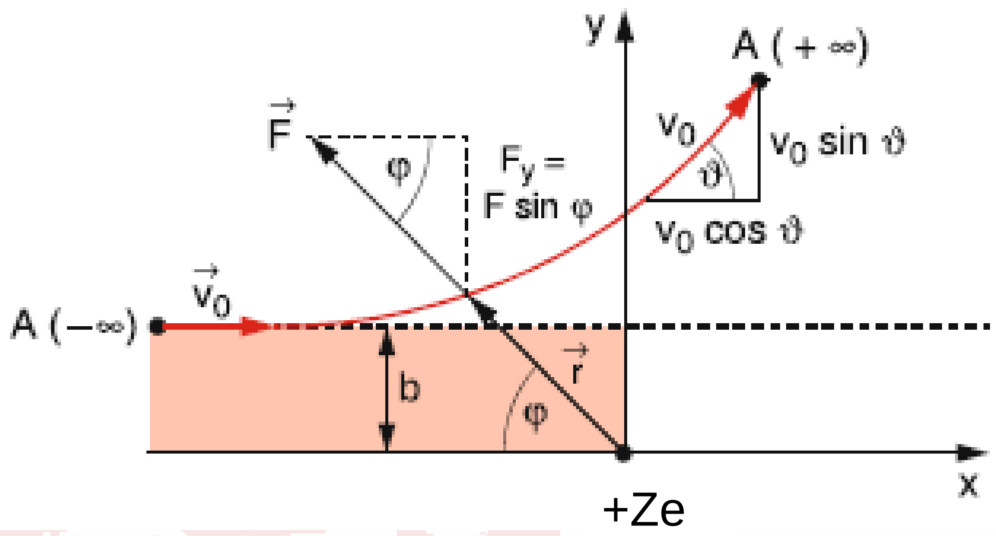
卢瑟福原子模型(核式模型)：原子中带正电部分不是均匀分布在整个原子内，而是集中在原子中心很小的区域内，被称为原子核，电子围绕在原子核外。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--库仑散射公式

假设：(1) 忽略核外电子的作用 ($m_e<<m$)；
(2) 只有库仑相互作用；
(3) 靶核静止($M >> m$)。

单次散射

设靶原子核的质量为M，具有$+Ze$。质量为m (推导过程中略去下标)，能量为E，带有$+2e$正电荷的α粒子以初始速度$\mathbf{v}_0$从无穷远处以瞄准距离b入射靶原子核，并散射到θ角方向无穷远处。

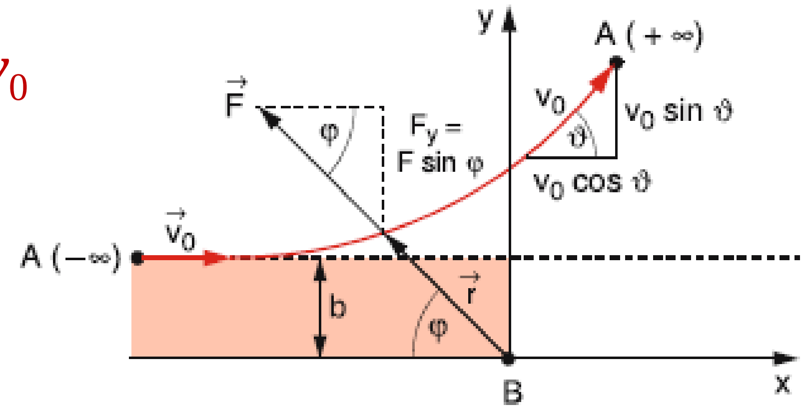


E. Rutherford, *The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom*, Philosophical Magazine. Series 6, vol. 21. May 1911

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--库仑散射公式

已知α粒子的初速度为v_0，动量为mv_0

在散射过程中，原子核对α粒子的作用力F的垂直分量：



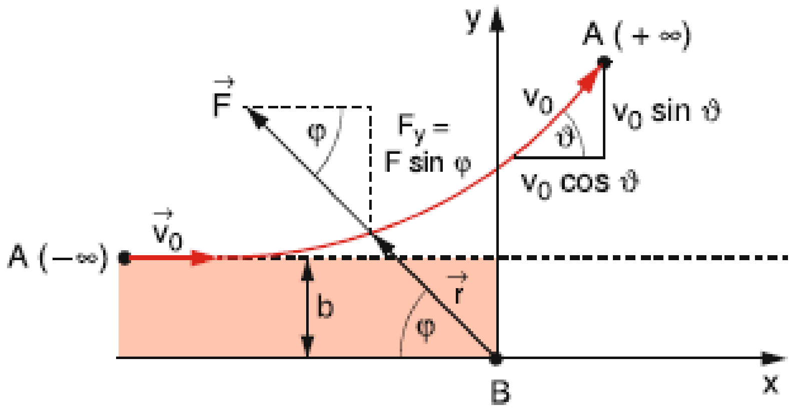
$$F_y = F\sin\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\sin\varphi$$

$$= ma_y = m\frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad dv_y = \frac{F_y}{m}dt = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\sin\varphi\frac{1}{m}dt$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--库仑散射公式

由角动量守恒



$$L = mv_0 b = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 b}\frac{d\varphi}{dt}$$

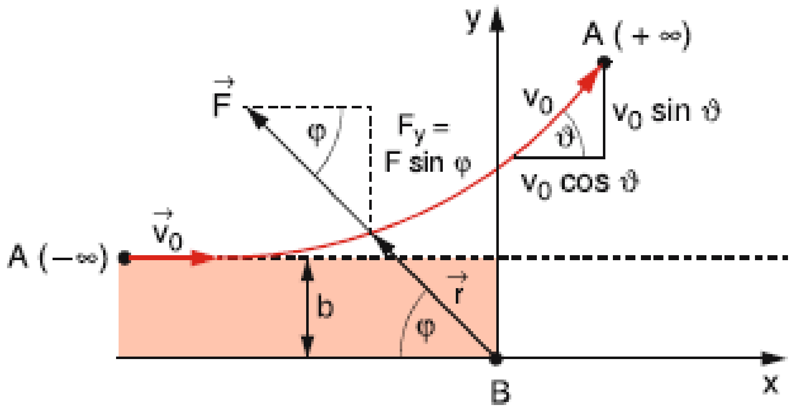
代入

$$dv_y = \frac{F_y}{m}dt = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\sin\varphi\frac{1}{m}dt$$

$$\Rightarrow dv_y = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\varphi}{mv_0 b}d\varphi$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--库仑散射公式

α粒子入射时 $v_{y0} = 0$



α粒子与原子核是弹性散射，且$M >> m$ (原子核静止)

α粒子散射到无穷远，其速度仍为$\mathbf{v}_0$，散射角为θ，其垂直分量

$$v_{y\infty} = v_0 \sin\theta$$

于是 $$v_{y\infty} - v_{y0} = v_0 \sin\theta - 0 = \int_0^{\pi-\theta} dv_y$$

$$= \int_0^{\pi-\theta} \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\varphi}{mv_0 b} d\varphi = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_0 b}(1+\cos\theta)$$

整理，得 $$ctg\frac{\theta}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2Ze^2} m v_0^2 b$$

库仑散射公式

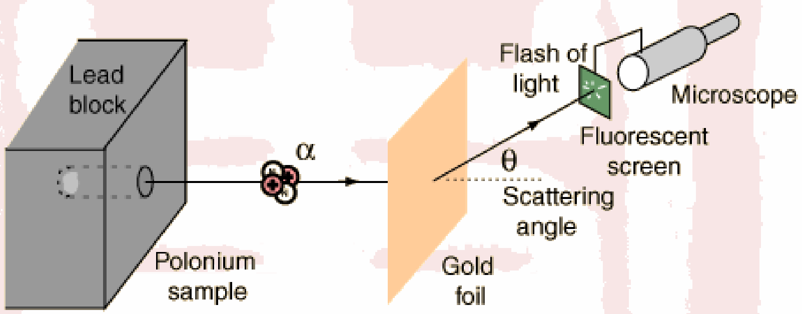
$$ctg\frac{\theta}{2}=\frac{2b}{D}$$

其中

$$D=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{2Ze^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{E}$$

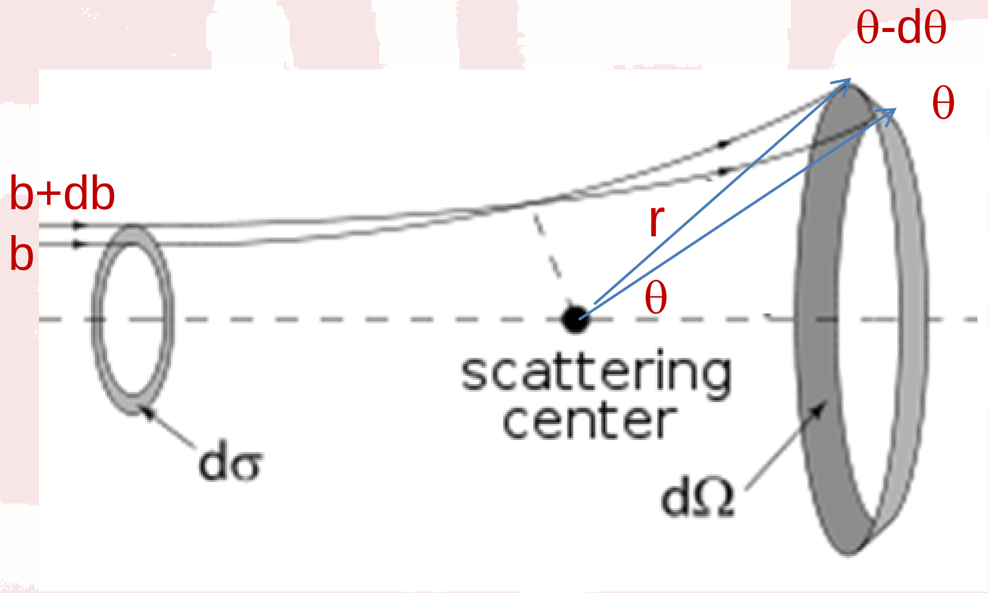
库仑散射因子

散射公式含有实验上无法测量的量b。



实验上测量的是：对应一定数目n的入射α粒子，散射到角度θ方向上，探测器所张的立体角$d\Omega$内的粒子数dn。散射的概率

散射的概率 $$\frac{dn}{nd\Omega}$$

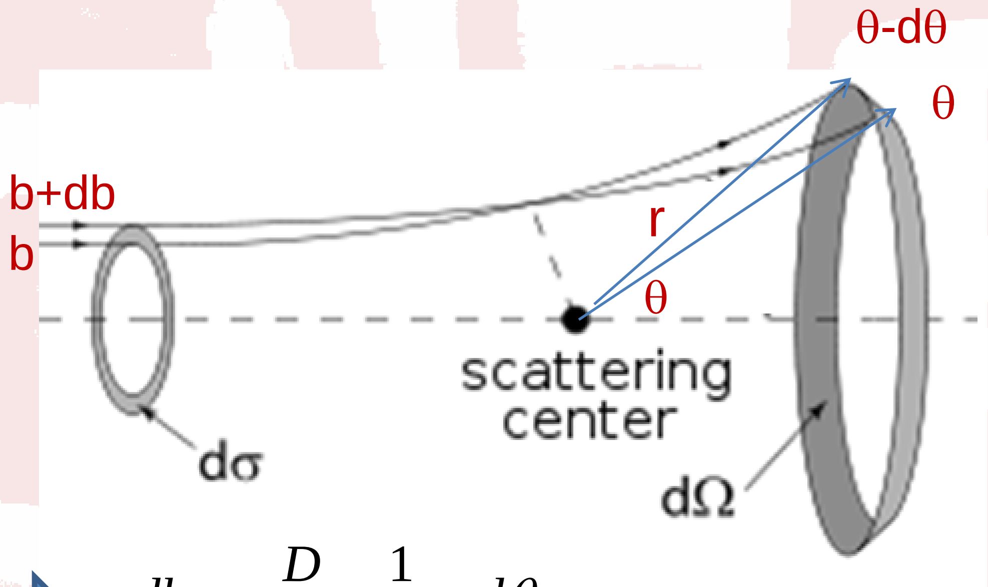


一个α粒子如果入射到面积元dσ内，就会散射到θ角方向的dθ内

$$d\sigma = 2\pi b\left|db\right|$$

描述了概率α粒子散射到θ方向的概率。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



$$ctg\frac{\theta}{2}=\frac{2b}{D} \Rightarrow db=-\frac{D}{4}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

所以 $$d\sigma=2\pi b\left|db\right|=\frac{\pi D^2}{4}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)}d\theta$$

又 $$d\Omega=\frac{S}{r^2}=\frac{2\pi r\sin\theta\cdot rd\theta}{r^2}=2\pi\sin\theta d\theta=4\pi\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

得 $$d\sigma=\frac{D^2}{16}\frac{1}{\sin^4\theta/2}d\Omega$$

卢瑟福散射公式

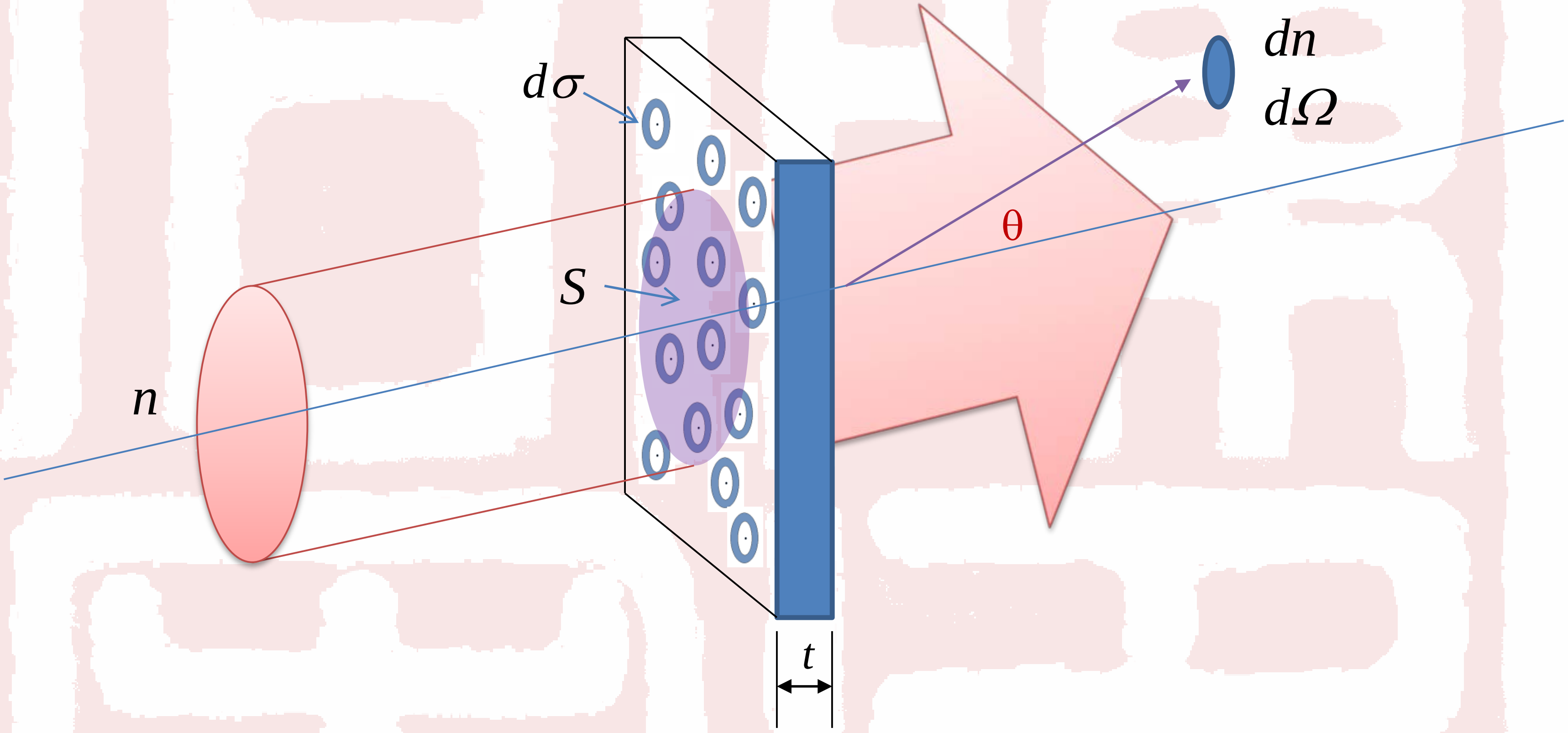
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

表征了α粒子散射到θ角方向上单位立体角内，每个原子的有效散射截面。反映了散射到θ角方向上单位立体角内的概率。

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 称为微分散射截面，其量纲是面积。

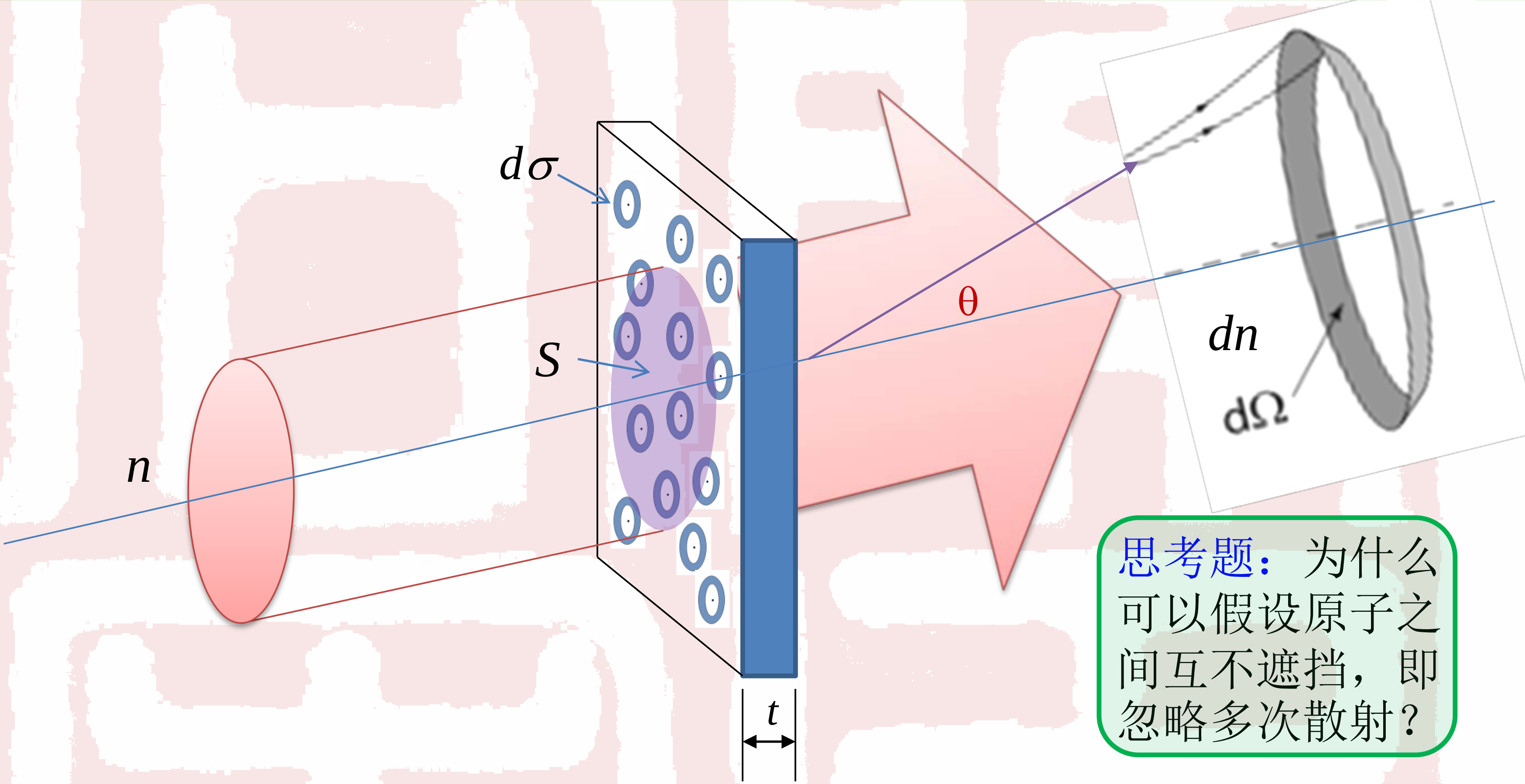
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式

实际的靶：原子数密度为N，厚度为t，α粒子束与靶相交的截面为S。



实验上测量的是：对应(单位时间)入射α粒子数目n，散射到角度θ方向上，探测器所张的立体角$d\Omega$内的粒子数dn。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



思考题：为什么可以假设原子之间互不遮挡，即忽略多次散射？

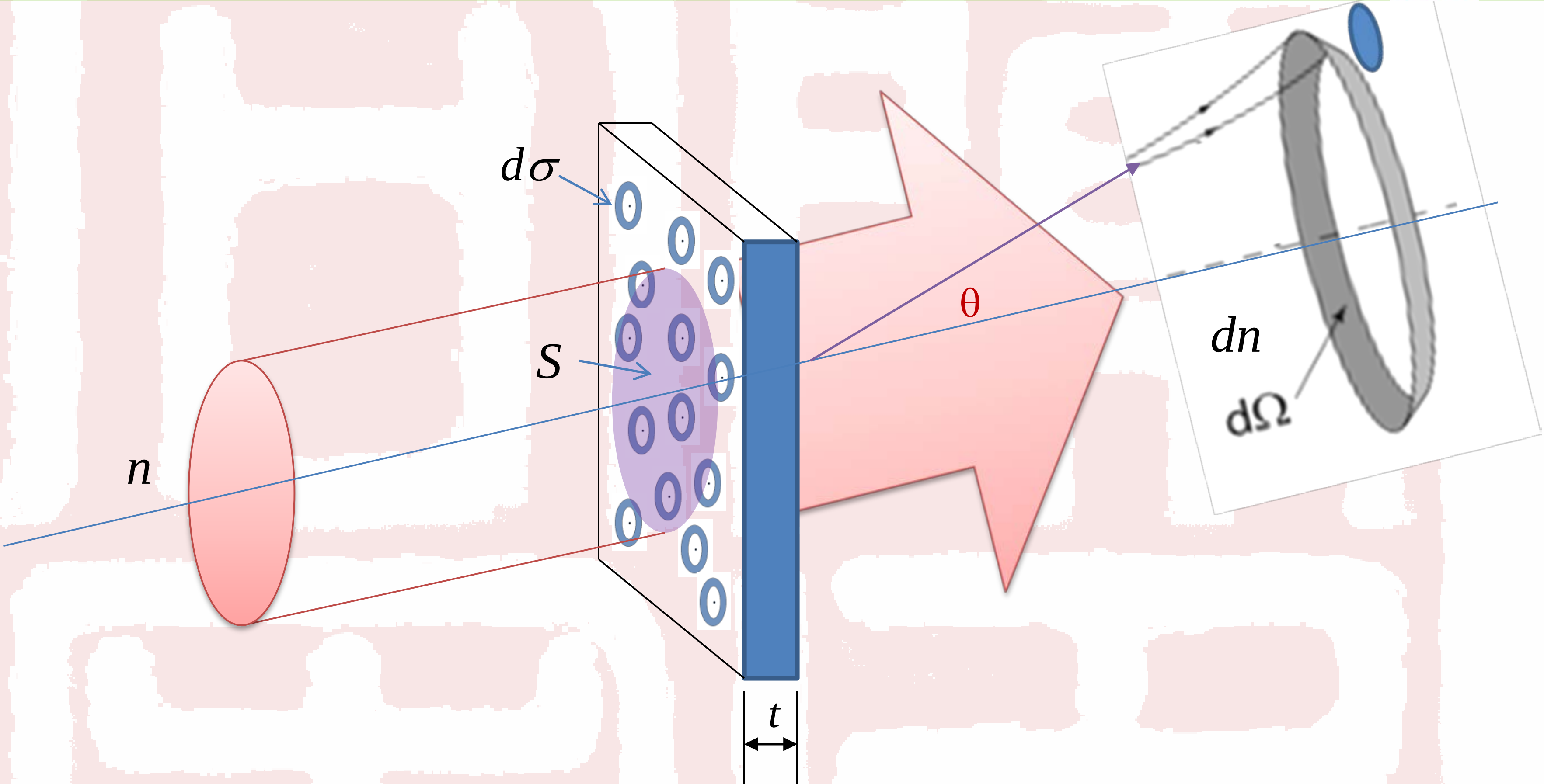
在束流与靶相交的体积St内，有NSt个原子。每个原子有一个有效散射截面$d\sigma$，α粒子打在$d\sigma$内，就会散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内。

NSt个原子的有效散射截面为：

$$d\Sigma = NStd\sigma$$

α粒子打在$d\Sigma$内，就会散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



α粒子散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内的概率 $\dfrac{dn}{n}=\dfrac{d\Sigma}{S}=\dfrac{NStd\sigma}{S}=Ntd\sigma$

散射到θ角方向上单位立体角内的概率

$$\frac{dn}{nd\Omega}=Nt\frac{d\sigma}{d\Omega}=Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式

[例1.2] 设α粒子是钋源放射的，能量为5.3MeV，散射体为金箔，厚为1μm，$\rho=1.93\times10^4\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$Z=79$，A=197，试求：

（1）α粒子通过金箔在60°角方向的卢瑟福微分散射截面；

（2）散射角大于90°的所有α粒子占全部入射粒子的百分比。

[解] (1) 60°角方向的卢瑟福微分散射截面：

$$\left.\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\right|_{\theta=60^\circ}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta/2}$$

$$=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Z}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\theta/2}$$

$$=(1.44\mathrm{eV\cdot nm})^2\left(\frac{2\times79}{4\times5.3\mathrm{MeV}}\right)^2\frac{1}{\sin^4 30^\circ}$$

$$=1.84\times10^{-23}\mathrm{cm}^2$$

复合常数

$$\boxed{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=1.44eV\cdot nm}$$

(2) 散射角大于90°的所有α粒子占全部入射粒子的百分比：

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dn}{n}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}$$

$$=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{N_A\rho t}{A}\left(\frac{2Z}{4E}\right)^2 4\pi=8.5\times10^{-5}$$

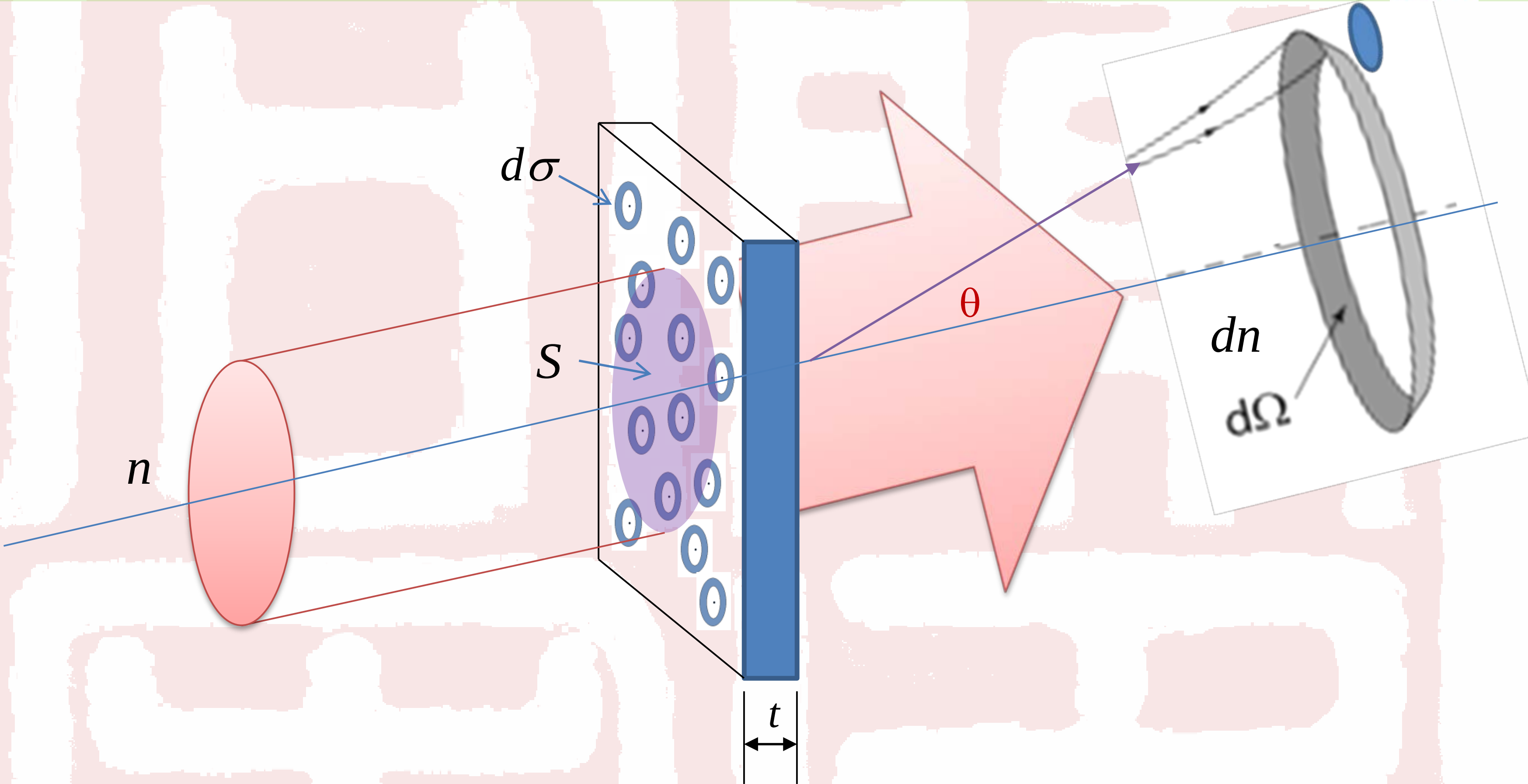
卢瑟福散射公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

表征了α粒子散射到θ角方向上单位立体角内，每个原子的有效散射截面。反映了散射到θ角方向上单位立体角内的概率。

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 称为微分散射截面，其量纲是面积。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福散射公式



α粒子散射到θ角方向上锥面立体角$d\Omega$内的概率 $\dfrac{dn}{n}=\dfrac{d\Sigma}{S}=\dfrac{NStd\sigma}{S}=Ntd\sigma$

散射到θ角方向上单位立体角内的概率

$$\frac{dn}{nd\Omega}=Nt\frac{d\sigma}{d\Omega}=Nt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

H. GEIGER and E. MARSDEN, The Laws of Deflexion of a Particles through Large Angles, *Philosophical Magazine,* Series 6, Volume 25, Number 148, April 1913

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

(1) 随角度的变化关系；
(2) 随散射体厚度的变化关系；
(3) 随入射粒子速度(能量)的变化关系；
(4) 随散射材料的原子量的变化关系。

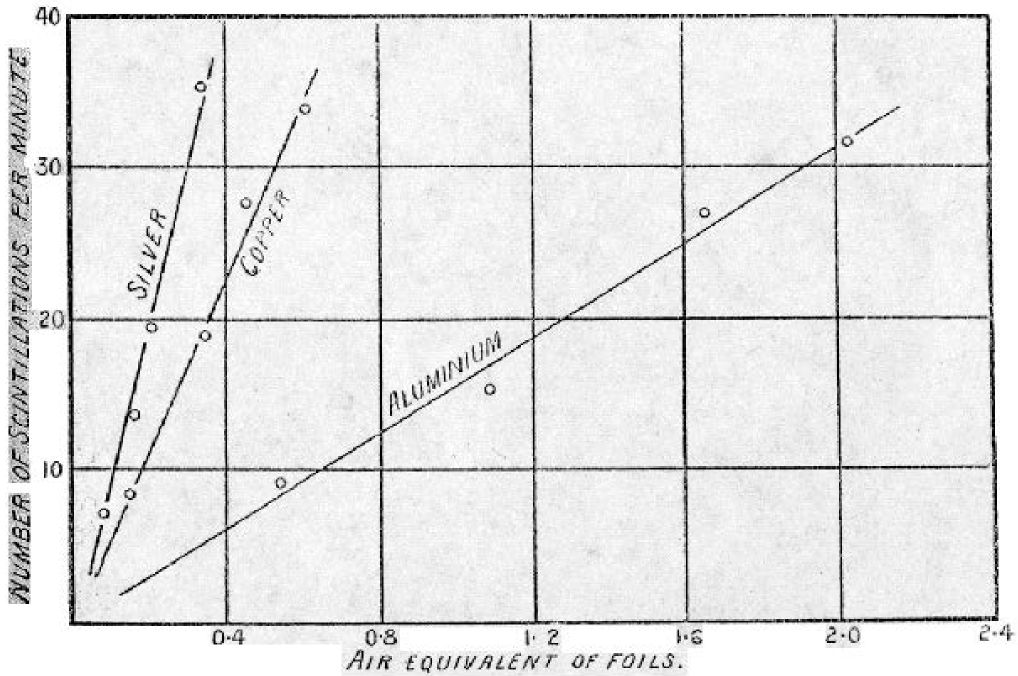
(1) 随角度的变化关系 $dn\sin^4(\theta/2) = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2 d\Omega = const.$

Angle θ	Scintillations per minute.				$\frac{1}{\sin^4\theta}$	$dn \times (\sin^4\theta / 2)$
	Without foil.	With foil.	Corrected for effect without foil.	Corrected for decay, *dn*.		
150	0.2	4.95	4.75	6.95	1.15	6.0
135	2.6	8.3	5.7	8.35	1.38	6.1
120	3.8	10.3	6.5	9.5	1.79	5.3
105	0.6	10.6	10.0	14.6	2.53	5.8
75	0.0	28.6	28.6	41.9	7.25	5.8
60	0.3	69.2	68.9	101	16.0	6.3

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(2) 随散射体厚度的变化关系 $dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \propto t$

Fig. 5.



§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(3) 随入射粒子速度的变化关系 $dn\cdot v^4 = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{2m}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} = const.$

I. Number of sheets of mica	II. Range R of α particles after leaving mica	III. Relative values of $1/v^4$	IV. Number dn of scintillations per minute.	V. $dn\times v^4$
0	5.5	1.0	24.7	25
1	4.76	1.21	29.0	24
2	4.05	1.50	33.4	22
3	3.32	1.91	44	23
4	2.51	2.84	81	28
5	1.84	4.32	101	23
6	1.04	9.22	255	28

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的实验验证

(4) 随散射材料的原子量A的变化关系 $\frac{dn}{Z^2}=nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2e^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}=const.$

I. Substance.	II. Atomic weight. A.	III. Air equivalent in cm.	IV. Number of scintillations per minute corrected for decay	V. Number dn of scintillations per cm. air equivalent.	VI. $A^{3/2}$.	VII. $dn/A^{3/2}$.
Gold.......	197	0.229	133	581	2770	0.21
Tin.........	119	0.441	119	270	1300	0.21
Silver......	107.9	0.262	51.7	198	1120	0.18
Copper....	63.6	0.616	71	115	507	0.23
Aluminium.	27.1	2.05	71	34.6	141	0.24

新物理量：原子核电荷数 Z

1920年，James Chadwick直接测量了Cu， Ag和Pt的Z

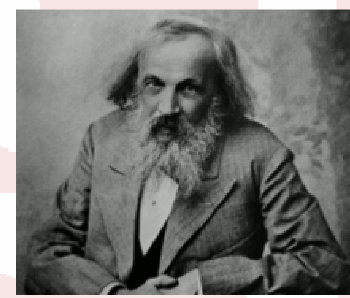
J. Chadwick
(1891-1974)

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

发现在1.5%的误差范围内与原子序数(在元素周期表上的排序)相同。

Reihen	Gruppo I. — R^2O	Gruppo II. — RO	Gruppo III. — R^2O^3	Gruppo IV. RH^4 RO^2	Gruppo V. RH^3 R^2O^5	Gruppo VI. RH^2 RO^3	Gruppo VII. RH R^2O^7	Gruppo VIII. — RO^4
1	H=1							
2	Li=7	Be=9,4	B=11	C=12	N=14	O=16	F=19	
3	Na=23	Mg=24	Al=27,3	Si=28	P=31	S=32	Cl=35,5	
4	K=39	Ca=40	—=44	Ti=48	V=51	Cr=52	Mn=55	Fe=56, Co=59, Ni=59, Cu=63.
5	(Cu=63)	Zn=65	—=68	—=72	As=75	Se=78	Br=80	
6	Rb=85	Sr=87	?Yt=88	Zr=90	Nb=94	Mo=96	—=100	Ru=104, Rh=104, Pd=106, Ag=108.
7	(Ag=108)	Cd=112	In=113	Sn=118	Sb=122	Te=125	J=127	
8	Cs=133	Ba=137	?Di=138	?Ce=140	—	—	—	— — — —
9	(—)	—	—	—	—	—	—	
10	—	—	?Er=178	?La=180	Ta=182	W=184	—	Os=195, Ir=197, Pt=198, Au=199.
11	(Au=199)	Hg=200	Tl=204	Pb=207	Bi=208	—	—	
12	—	—	—	Th=231	—	U=240	—	— — — —

Mendeleev's 1871 periodic table

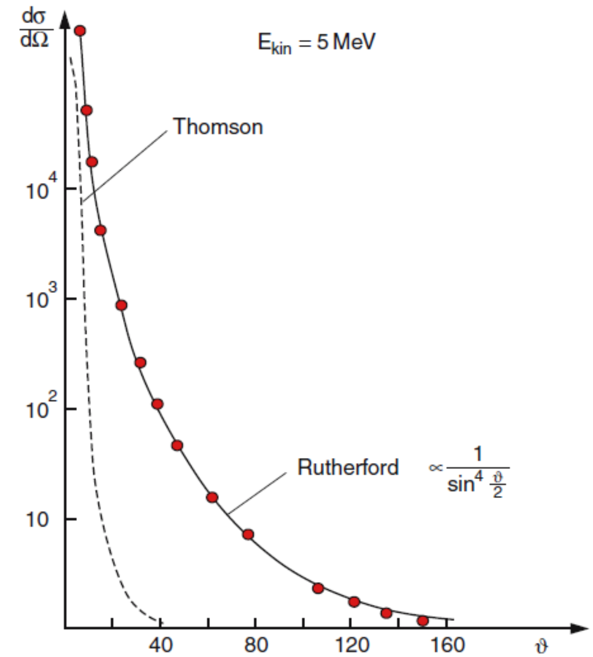


D. Mendeleev
(1834-1907)

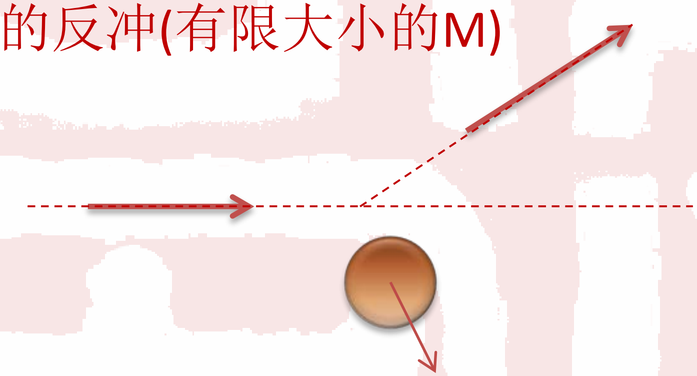
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

假设

(1) 忽略核外电子的作用 (m_e<<m_α)；
(2) 有库仑相互作用；
(3) 靶核静止(M>>m_α)；
(4) 忽略了多次散射。



➤ 靶原子核的反冲(有限大小的M)

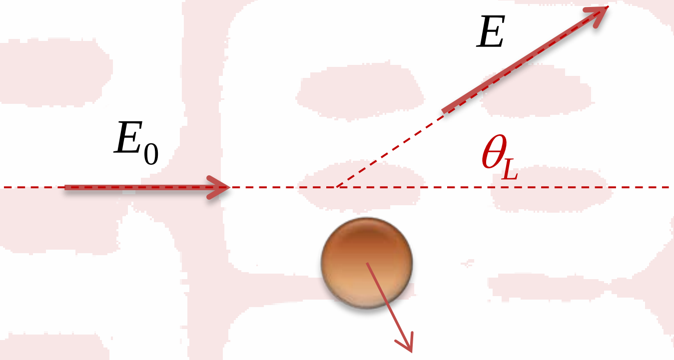


卢瑟福散射公式用到质心系仍成立，转换到实验室系

$$\frac{d\sigma_L(\theta_L)}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E_L\sin^2\frac{\theta_L}{2}}\right)^2\times\frac{\left[\cos\theta_L+\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\sin\theta_L\right)^2}\right]^2}{(1+\cos\theta_L)^2\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\sin\theta_L\right)^2}}$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

- 靶原子核的反冲(有限大小的M)



散射α粒子的能量

$$E=\left(\frac{m\cos\theta_L+\sqrt{M^2-m^2\sin^2\theta_L}}{m+M}\right)E_0$$

当θ很小时，E和E_0差别不大；

当θ > 90°(背散射)，E和E_0差别较大。

极限情况：θ → 180°

$$E\to\frac{M-m}{M+m}E_0\sim\left(1-\frac{2m}{M}\right)E_0$$

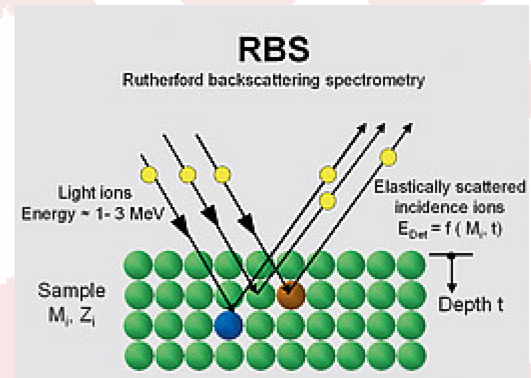
例如：E_0= 5MeV， m= 4 u.

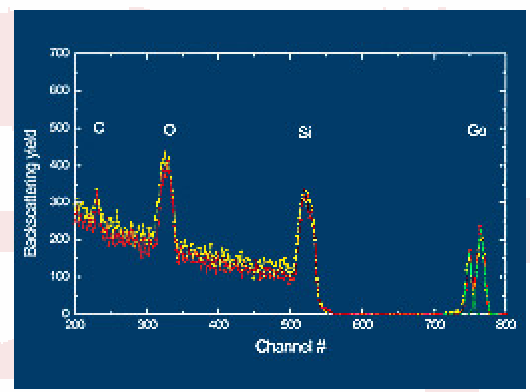
对于C元素，

$$E \sim \left(1-\frac{2\times 4}{12}\right)\times 5MeV = 1.67MeV$$

对于Si元素，

$$E \sim \left(1-\frac{2\times 4}{28}\right)\times 5MeV = 3.57MeV$$





应用：卢瑟福背散射谱仪

Rutherford-Backscattering-Spectrometry

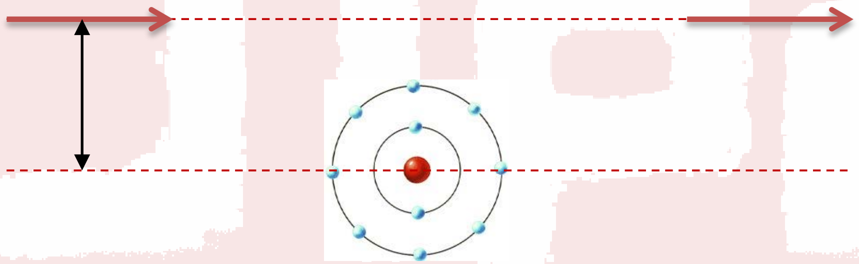
§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

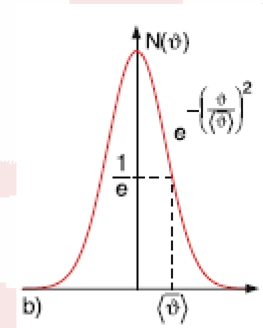
小角偏差

(1) 核外电子的屏蔽效应；

瞄准距离b很大

$$ctg\frac{\theta}{2}=\frac{2b}{D}$$





(2) 多次散射导致小角增强。

大角偏差

思考题：如何测量180°附近的α粒子散射？

1980年代，发现在180°背散射附近十分之几度范围内，非晶和多晶薄箔的散射实验值比用卢瑟福公式算出的大，通常可以增大1~2倍。

双原子散射模型来解释。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

➤原子核的大小

$$dn = nNt\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

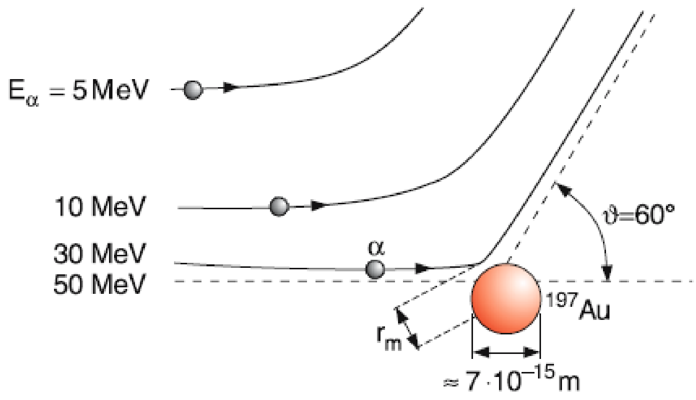
固定θ角，$dn \propto 1/E^2$

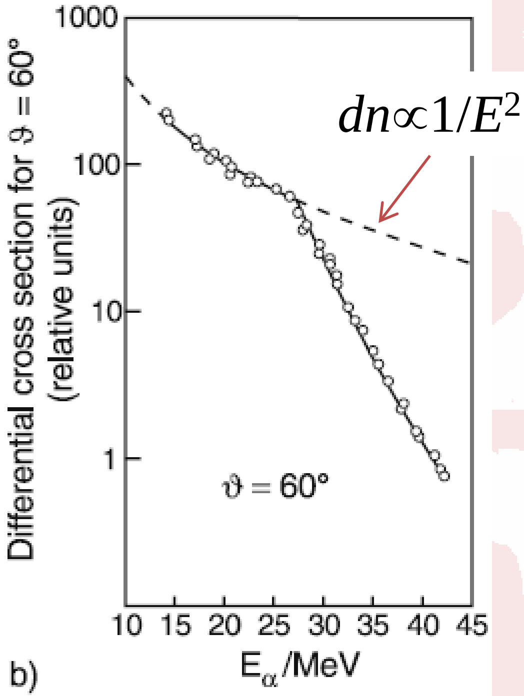
$$ctg\frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} = 4\pi\varepsilon_0\frac{bE}{Ze^2}$$

固定θ角，E越大b越小。

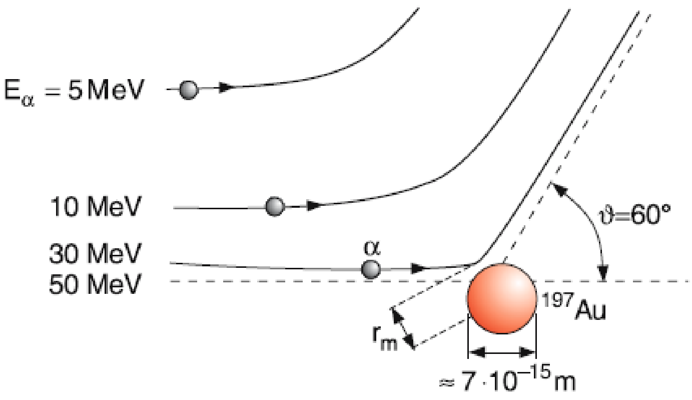
小到一定程度，α粒子会进入原子核，散射关系发生突变(强核力起作用)。

突变点的α粒子正好掠过原子核表面，最近距离r_m即近似为原子核半径。





原子核的大小



角动量守恒

$$mv_0b = mv_m r_m$$

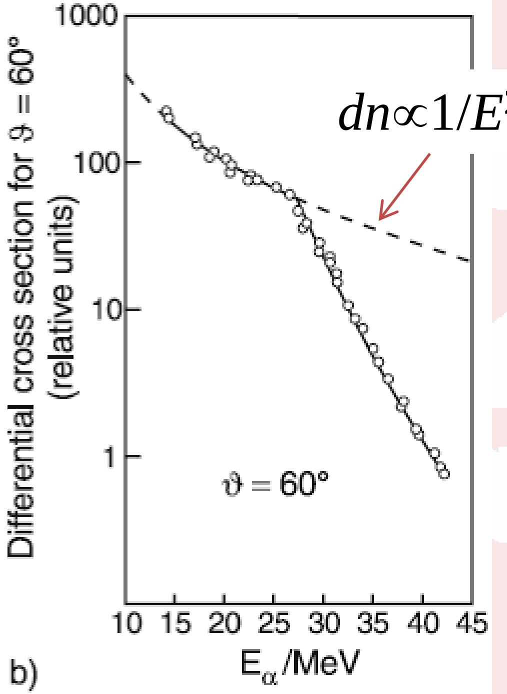
$$v_m = \frac{v_0}{r_m}b = \frac{v_0}{r_m}\frac{D}{2}ctg\frac{\theta}{2}$$

能量守恒

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_m}$$

得(一元二次方程，取“+”解)

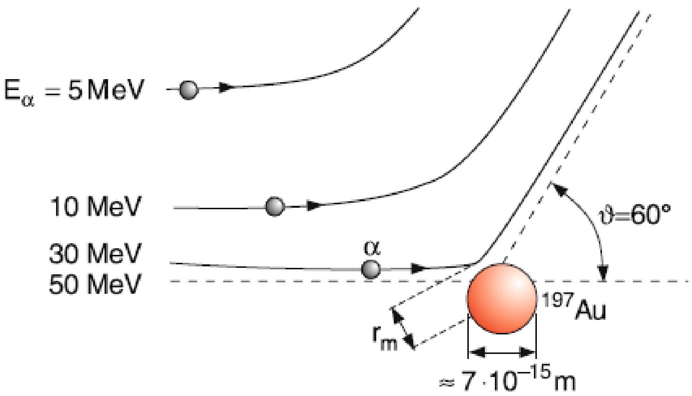
$$r_m = \frac{D}{2}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{2Ze^2}{2E}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right)$$



$dn \propto 1/E^2$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--卢瑟福公式的修正

➤原子核的大小

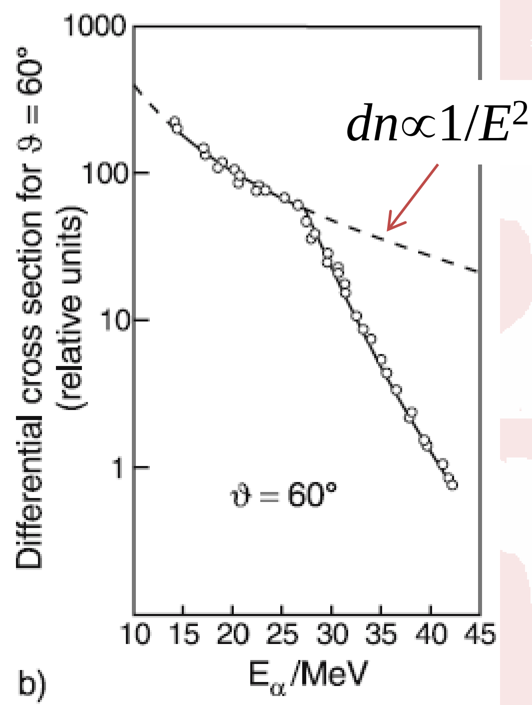


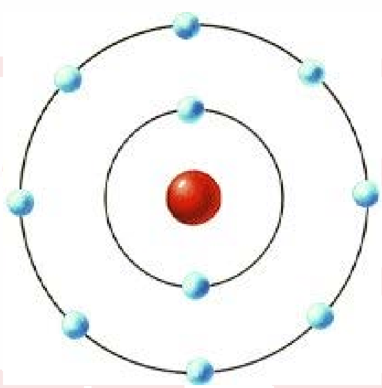
图中的例子，转折点发生在25MeV

$$r_m=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{Z}{E}\left(1+\csc\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=1.44eV\cdot nm\frac{79}{25MeV}\left(1+\frac{1}{\sin 30^\circ}\right)$$

$$\sim 1.36\times10^{-14}\,m$$

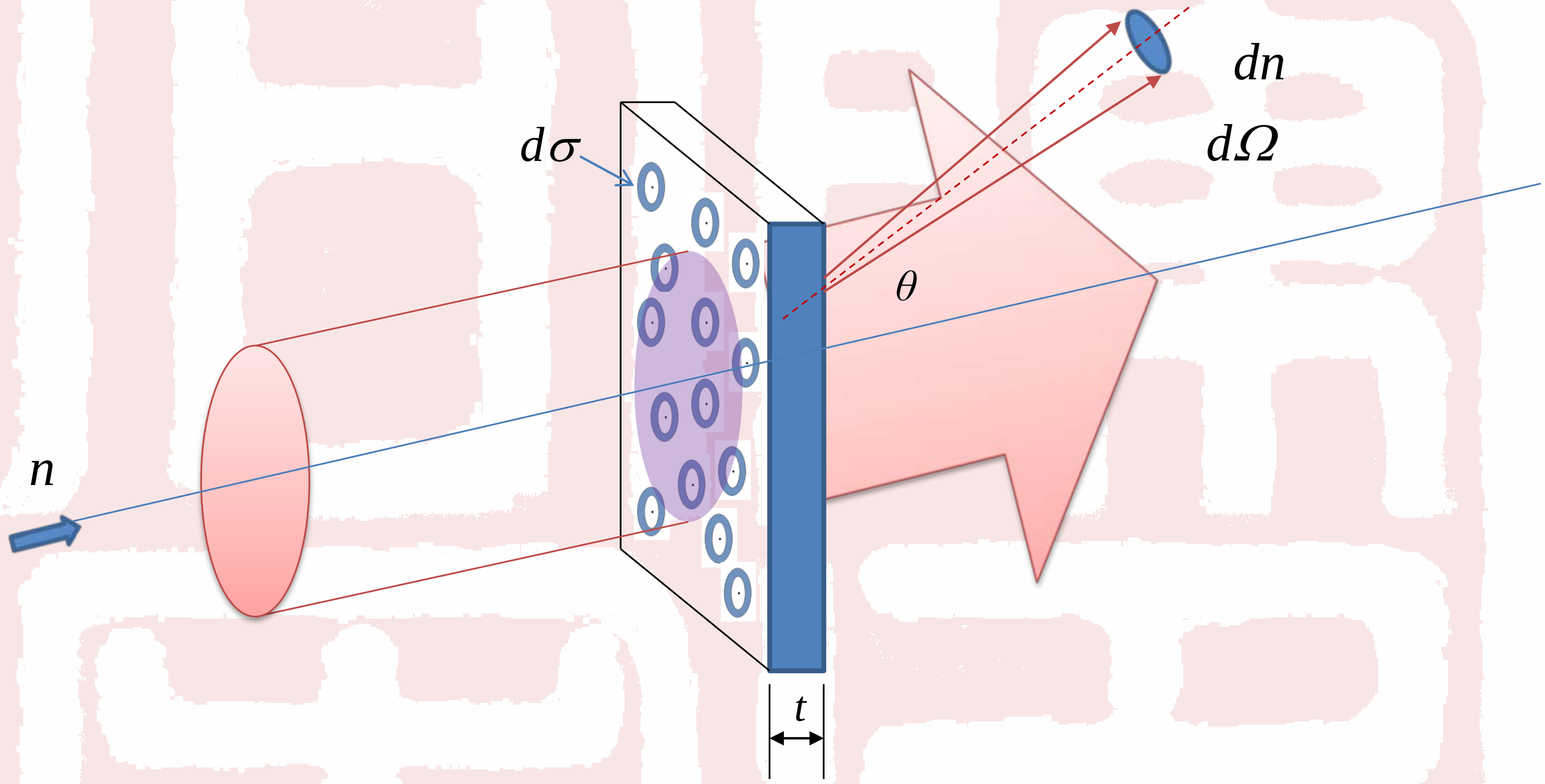




$\sim 10^{-10}\,m$

$\sim 10^{-14}\,m$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论



单位时间内在θ角方向$d\Omega$立体角内探测到的被散射的粒子数dn

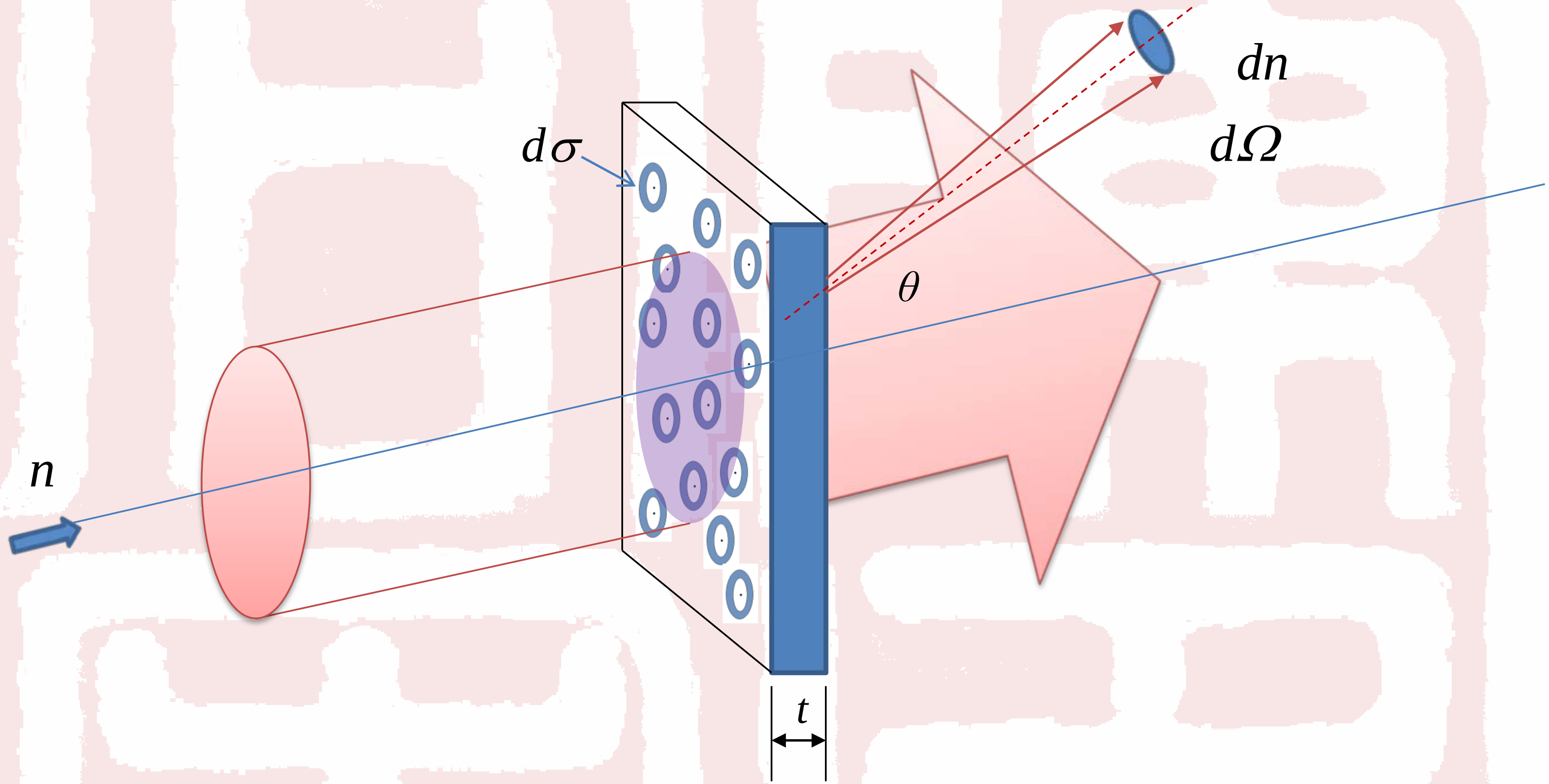
$$dn \propto NSt \cdot \frac{n}{S} \cdot d\Omega$$

散射中心数目

单位面积入射粒子数强度

探测器所张立体角

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论



单位时间内在θ角方向$d\Omega$立体角内探测到的被散射的粒子数dn

$$dn = ANSt \cdot \frac{n}{S} \cdot d\Omega = ANtnd\Omega$$

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论

一个粒子被散射到θ角方向$d\Omega$立体角内的概率

$$\frac{dn}{n} = ANtd\Omega$$

两个因子：

因子1：Nt　　散射体的原子数密度和厚度。

因子2：

$$A = \frac{dn}{n}\frac{1}{Ntd\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$= \frac{\theta\text{角方向d}\Omega\text{立体角内的散射粒子数}}{\text{入射粒子数} \times \text{单位面积的靶原子数} \times \text{探测器所张立体角}}$$

表示单位面积内垂直入射一个粒子（n=1）时，被这个面积内的一个靶原子（Nt =1）散射到θ角方向单位立体角内的概率。

该因子与入射粒子数、靶的形状和靶粒子数均无关，只决定于发生相互作用的粒子与散射中心的性质以及它们之间相互作用的动力学性质。

§ 1.3.2 卢瑟福原子模型和散射公式--截面的进一步讨论

微观相互作用机制 ⟷ $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ ⟷ 宏观可观测量

$$\frac{dn}{n}=\frac{d\sigma}{d\Omega}Ntd\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{2Ze^2}{4E}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

α粒子与原子的库仑散射过程

总散射截面或积分截面

$$\sigma=\int\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}d\Omega=2\pi\int_0^{\pi}\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}\sin\theta d\theta$$