① 30.10.05
ת. לוגיקה

המתרגל: יונתן   yoni@math.huji.ac.il

שעות קבלה: יקבעו בהמשך

יעד הקורס הוא ללמד אותנו את הכתיבה הפורמלית, המסודרת. להוכחה ולפסוק המתמטי. יש משמעויות מוגדרות היטב. (למשל כל מיני דברים די מוגדרים ולא מעניינים במיוחד כמו איך מונים בינומי.

התרגול הראשון נותן טעימה מההתעסקות עם סמלים.

מחרוזת היא רצף של סמלים. למשל אם $\Lambda=\{x,y,z\}$ היא קבוצה של סמלים, אז מחרוזת מ-Λ היא $\varphi = a_1 a_2 \ldots a_n$ כאשר $a_i \in \Lambda$. למשל $\varphi = xy$

רישא היא התחלה של מחרוזת. למשל אם יש לנו $\varphi = xzyz$ אז כל הרישות של φ הן x, xz, xzy, $xzyz$

מחרוזות מדביקים בשרשור לפי הסדר משמאל לימין. למשל אם $\varphi = xy$ ו-$\psi = y$ אז $\varphi\psi = xyy$

נסתכל על $\Lambda = \{(,)\}$. ביטוי מאוזן הוא בדיוק מה שנראה לנו - שהסוגריים מסתדרים. למשל '(()(()))' הוא מאוזן ואילו ')(' אינו מאוזן. מבחינה פורמלית אנחנו דורשים שבכל רישא מספר הסוגרים הימניים לא יעלה על מספר הסוגריים השמאליים.

דוגמה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים. אנחנו רוצים להגיד שהסדרה חסומה. אז נצטרך שזה אומר שכל המספרים בסדרה קטנים מאיזה מספר וגדולים מאיזה מספר אחר.
בדרך פורמלית נכתוב רק: $\exists M(\forall n(|a_n| \le M))$
הדגש הוא להשתמש בכתיבים ולא במילים. להשתמש בסוגריים כדי שהביטוי יהיה חד משמעי.

דוגמה: באקסיומות השדה יש אקסיומה שאומרת שלכל איבר שונה מאפס קיים הופכי: $\forall x((x\neq 0)\rightarrow \exists y(xy=1))$

בעצם מה שאנחנו עושים פה עכשיו הוא [illegible] ממה שנעשה בקורס בצורה יותר מבוססת.

עכשיו נדבר קצת על ערך אמת. אח״כ נדבר על זה בצורה מסודרת מאוד.
נניח שיש לנו שני פסוקים P, Q – סתם איזה שני משפטים.
למשל ניקח $P=\forall x\forall y(x\cdot y=y\cdot x)$ P זה פשוט פסוק שאומר משהו – בינתיים יודעים שהוא לא אמיתי או לא אמיתי והוא לא מתייחס למבנה ספציפי. זה סתם הצהרה. ואם אנחנו אומרים שהוא נכון צריך להגיד איפה. למשל אם נגיד ש-P מתייחס לשדה המרוכבים $\mathbb{C}$ ופעולת הכפל בו אז הוא באמת נכון ואפשר לרשום $V_{(\mathbb{C},\cdot)}(P)=T$. אם בחבורת התמורות S_3 ופעולת ההרכבה בה הפסוק הזה לא נכון, כלומר $V_{(S_3,\cdot)}(P)=F$.
עכשיו ניקח $Q=\forall x\exists y(y\cdot y=x)$. אז שוב במרוכבים זה נכון כי $\mathbb{C}$ סגור אלגברית ובפרט לכל מספר יש שורש, אבל בממשיים זה לא נכון. אז $V_{(\mathbb{C},\cdot)}(Q)=T$ אבל $V_{(\mathbb{R},\cdot)}(Q)=F$.
למה משמיטים את הקבוצה ואת הפעולה? – כי אנחנו צריכים להסביר היטב על מה אנחנו מדברים. אם היה פסוק $\forall x\exists y\exists z((x\cdot y+z))$ היינו צריכים להסביר גם מה זה $(\cdot)$ וגם מה זה $(+)$.
OK, חזרה לפסוקים שלנו P ו- Q מה אפשר להגיד?

לא P $\quad \neg P$

P וגם Q $\quad P\wedge Q$

P או Q $\quad P\vee Q$

P גורר Q $\quad P\rightarrow Q$

P אמ״מ Q $\quad P\leftrightarrow Q$ (אם ורק אם)

אז אפילו שפסוקים הם סתם, נכון להלאה בד״כ מעניין אותנו אם הם אמיתיים או לא.

אז נניח שקבענו של איזה עולם אנחנו מדברים מה אנחנו יכולים להגיד על כל הפסוקים החדשים שכתבנו קודם?

אז יש לנו את P ו-Q ואת ערכי האמת שלהם $V(P), V(Q)$.

מה ערך האמת של $P \vee Q$? נעשה טבלה

$V(P \vee Q)$	$V(P)$	$V(Q)$
T	T	T
T	F	T
T	T	F
F	F	F

טוב, זה די ברור

כנ"ל שלילה:

$V(\neg P)$	$V(P)$
T	F
F	T

ושלילה די ברור...

כעת נדבר על גרירה (כרגע זה לא ברור לי לגמרי)

הטבלה היא כזאת

$V(P \to Q)$	$V(P)$	$V(Q)$
T	T	T
F	T	F
T	F	T
T	F	F

לכאורה הטבלה הזאת לא ברורה כל כך. אבל צריך להסתכל עליה כאילו זאת הגדרה של מושג הגרירה. זה משהו מתמטי - לא פילוסופי.

אינדוקציה: האינדוקציה היא אקסיומה. היא מאוד אינטואיטיבית אבל זאת אקסיומה. אם תכונה מסויימת מתקיימת לכל תת קבוצה של הטבעיים אז התת קבוצה הזאת היא כל הטבעיים.

האינדוקציה המלאה היא עיקרון שאפשר להוכיח בהסתמך על אקסיומת האינדוקציה הרגילה.

אז מה האינדוקציה הרגילה אומרת? $S\subseteq \mathbb{N}$

א) $0\in S$

ב) $\forall n\,(n\in S \to n+1\in S)$

$\Big\}\Rightarrow S=\mathbb{N}$

עיקרון האינדוקציה המלאה:

$$\forall S\,(\forall n\,(\forall k\,(k<n \to k\in S)\to n\in S)\to(\forall m\,(m\in S)))$$

זה פסוק שאנחנו מפרשים בטבעיים. בעצם אפשר לפרש אותו בכל מבנה שיש בו סדר. בטבעיים הוא נכון. אבל במבנה אחר יכול להיות שהוא לא נכון. זה רק פסוק.

4/11/05

לאחר הרבה מחשבה בנושא הגרירה, זה דווקא די הגיוני.
פשוט נראה דוגמה לכל מקרה:

1) $V(T\to T)=T \quad -2<0 \Rightarrow$

2) $V(F\to T)=T \quad 1=-1 \Rightarrow 1^2=1=(-1)^2$

3) $V(T\to F)=F \quad a=0.\ 2a=a \Rightarrow 2=1$

4) $V(F\to F)=T \quad \mathbb{R}\ni x^2<0 \Rightarrow x^2+1<1$

העניין פה הוא לא בנכונות הטענה, אלא בנכונות הגרירה.
השאלה שנשאלת היא האם הגרירה נעשתה באופן הגיוני.
הדוגמאות הכי טובות לכך הן (2) ו-(3).

ב-(2) ההנחה לא נכונה. לא נכון ש-$1=-1$. אבל באופן כללי נכון ש $x=y$ אז $x^2=y^2$ ולכן, הגרירה נעשתה באופן נכון.

ב-(3) זה נכון ש $2a=a$ כי $a=0$ וגם $2\cdot 0=0$. אמנם אסור לחלק ב-0 ולכן הגרירה לא נכונה. אסור היה לנו לחלק את שני האגפים ב-a.

③ 6/11/05
ת. לוגיקה

$S\subseteq\mathbb{N}$

א) עקרון האינדוקציה הרגילה:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 0\in S \\ 2) & n\in S \Rightarrow n+1\in S \end{array}\right\} \Rightarrow S=\mathbb{N}$$

ב) עקרון האינדוקציה השלמה:

$$\overset{(*)}{\forall n(\forall k(k<n \to k\in S)\to n\in S)} \Rightarrow S=\mathbb{N}$$

ג) עקרון המינימום: אם $S\neq\emptyset$ קיים $m\in S$ כך שלכל $n\in S$ $m\leq n$.

משפט: כל העקרונות לעיל שקולים.

הוכחה:

$(2\Leftarrow 1)$ נניח כי הטבעיים מקיימים את עקרון האינדוקציה הרגילה.

ויהי $S\subseteq\mathbb{N}$ ונניח כי S מקיימת את (*). נראה כי $S=\mathbb{N}$.

נגדיר הקבוצה $T\subseteq\mathbb{N}$ $\quad n\in T \Leftrightarrow \forall k<n\ (k\in S)$

נראה ש: (א) $T=\mathbb{N}$ ו-(ב) $T\subseteq S$ ואז יהיה ברור ש $\mathbb{N}=S$.

(א)(i) $0\in T$: (באופן ריק): $\forall k(k<0\to k\in S) \Leftrightarrow 0\in T$

זה תמיד שקר ולכן הגרירה תמיד אמת.

(ii) צריך להראות שאם $n\in T$ אז $n+1\in T$. נניח ש- $n\in T$.

לכל $k<n$ $k\in S$. מתוך כך ש-S מקיימת את (*) נקבל $n\in S$.

לכן לכל $k<n+1$ $k\in S$ $\Leftarrow$ $n+1\in T$.

(ב) יהי $n\in T$ $\Leftarrow$ לכל $k<n$ $k\in S$ $\Leftarrow$ $n\in S$ $\Leftarrow$ $T\subseteq S$.

$\Leftarrow$ $\mathbb{N}=S$.

$(3\Leftarrow 2)$ תהי $S\subseteq\mathbb{N}$. תהי $T:=\mathbb{N}\setminus S$ נניח כי ל-S אין איבר מינימלי ונרצה להראות כי $S=\emptyset$. $\Leftarrow$ $T=\mathbb{N}$. נרצה להראות כי T מקיימת את (*). נניח עבור n לכל $k<n$ $k\in T$. נניח בשלילה כי $n\notin T$ $\Leftarrow$ $n\in S$ נראה כי n מינימלי ב-S.

יהי $m\in S$ ונניח כי $m<n$ אם כן אז מההנחה נקבל $m\in T$ ולכן $m\notin S$, זאת סתירה לכן n מינימלי אבל זאת סתירה לכך שב-S אין איבר מינימלי. $\Leftarrow$ T מקיימת (*) $\Leftarrow$ $T=\mathbb{N}$ $\Leftarrow$ $S=\emptyset$.

(3⇐1) תהי $S \subseteq \mathbb{N}$ המקיימת את (1) ו-(2) של עקרון האינדוקציה הרגילה.
נראה כי במשלים של S אין איבר מינימלי ולכן מ-(3) נקבל שהמשלים
של S הינו הקבוצה הריקה, כלומר $\mathbb{N}=S$.
יהי $T=\mathbb{N}\setminus S$ ונניח כי $m\in T$ איבר מינימלי.
$m\neq 0$ כי $0\in S$ מהתנאי הראשון של עקרון האינדוקציה. ⇐
קיים $m-1\in\mathbb{N}$. לפי ההנחה $m-1\in S$. אבל מכך ש-S מקיימת
את (2) של האינדוקציה הרגילה נקבל כי $m=(m-1)+1\in S$ וזאת סתירה
לכך שב-T יש איבר מינימלי ⇐ $T=\emptyset$ ⇐ $S=\mathbb{N}$.
מש"ל ☺

$S\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. נגדיר עקרון אינדוקציה: אם S מקיימת

1) $(0,0)\in S$

2) לכל k, n אם $(k,n)\in S$ אז $(k+1,n)\in S$ וגם $(k,n+1)\in S$

אז $S=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

הוכחה: לכל k נסמן $S_k\equiv\{n\in\mathbb{N}:(k,n)\in S\}$. נגדיר גם
$T=\{k\in\mathbb{N}: S_k=\mathbb{N}\}$
נראה כי $T=\mathbb{N}$

1.1) $0\in T$ כלומר לכל $n\in\mathbb{N}$ $(0,n)\in S$ ($S_0=\mathbb{N}$):

1.1.1) $0\in S_0$: מההנחה על S $(0,0)\in S$ כלומר $0\in S_0$

1.1.2) נניח $n\in S_0$ ⇐ $(0,n)\in S$. מהנחת האינדוקציה
על S נקבל בפרט $(0,n+1)\in S$ כלומר $n+1\in S_0$
⇐ $S_0=\mathbb{N}$, או במילים אחרות $0\in T$.

1.2) נניח $k\in T$ ⇐ $S_k=\mathbb{N}$. נראה $S_{k+1}=\mathbb{N}$. יהי $n\in\mathbb{N}$.
לפי ההנחה $n\in S_k$ ⇐ $(k,n)\in S$. לפי הנחת האינדוקציה
$(k+1,n)\in S$. כלומר $n\in S_{k+1}$ ⇐ $S_{k+1}=\mathbb{N}$.
⇐ $n+1\in T$

הראנו כי T מקיימת את תנאי האינדוקציה הרגילה ⇐ $T=\mathbb{N}$.
יהי $(k,n)\in\mathbb{N}^2$. מההנחה $k\in T$ ⇐ $S_k=\mathbb{N}$ ⇐ $(k,n)\in S$ ⇐ $S=\mathbb{N}^2$.
מש"ל ☺

(4)

נניח $L=\{+,\cdot,0,<\}$

מבנה מתאים ל-L = הקבוצה X עם שתי פונקציות

דו מקומיות $X\times X\to X$: $+_x, \cdot_x$, ויחס דו מקומי $<_x \subseteq X\times X$

וקבוע $0_x \in X$.

(5) 13.11.05
ת. לוגיקה

הערות לתרגיל 1

(4) $N_1 \cup N_2$ שני עותקים זרים של הטבעיים. למשל
$N_1 = N \times \{1\}$ אבל במקום $(n,1)$ נרשום n_1.
וכנ"ל עבור N_2.

נפרש עכשיו את כל הדברים שצריך במבנה:

1) 0 מפורש כ- 0_1.

2) S : $Sn_i = (n+1)_i$

3) $+$: $n_i + m_i = (n+m)_i$

$m_2 + n_1 = n_1 + m_2 = (n+m)_2$

4) $\cdot$: $n_i \cdot m_i = (n \cdot m)_i$

$n_1 \neq 0_1 \quad n_1 \cdot m_2 = (n \cdot m)_2$

$n_1 \cdot 0_1 \quad 0_1 \cdot m_2 = 0_1$

5) $<$: אם $n<m$ אז $n_i < m_i$

לכל $n_1 \in N_1$, $m_2 \in N_2$ $n_1 < m_2$

עכשיו צריך לוודא שזה מקיים את כל האקסיומות, הוא אקווה שזה נכון.
נעשה אקסיומות נבחרות:

(1) $Sx \neq 0$: הוא קיים $x \in N_1 \cup N_2$ רק ש $S(x) = 0_1$
אם $x \in N_2$ אז $S(x) \in N_2$ $\Leftarrow$ $S(x) \neq 0_1$.
אם $x \in N_1$ אז גם $S(x) \neq 0$ כי אין איבר טבעי
רק ש $n+1 = 0$.

(4) $x + Sy = S(x+y)$ צריך לבדוק כשהאיברים מקבוצות שונות
אם $n_1 \in N_1$ ו- $m_2 \in N_2$

$n_1 + Sm_2 = n_1 + (m+1)_2 = (n+m+1)_2 = S((n+m)_2) = S(n_1 + m_2)$

באופן דומה עבור $m_2 + S(n_1)$

(8) $x < Sy \Leftrightarrow x < y \lor x = y$

אם $x,y \in \mathbb{N}_i$ ✓

אם $x \in \mathbb{N}_2$ $y \in \mathbb{N}_1$ $x \not< 5y$ ✓

$n_1 \in \mathbb{N}_1$ $n_2 \in \mathbb{N}_2$

$$\underbrace{\underbrace{n_1 < 5n_2}_{T} \rightarrow \underbrace{\underbrace{n_1 < n_2}_{T} \vee n_1 = n_2}_{T}}_{T}$$

אלגברת יצירה

$\mathcal{A} = (A, F)$ כאשר - A קבוצה לא ריקה

- $F = \{f_i\}_{i \in I}$ קבוצה של פונקציות לכל i

קיים טבעי n_i כך ש- $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$

(בעיקרון מרשים גם פונקציות 0-מקומיות

אבל זה בעצם קבוע)

דוגמאות:

- $(\mathbb{Z}, \{+\})$
- $(\mathbb{Z}, \{+, \cdot, 0\})$

$\mathcal{A} = (A, F)$ אלגברת יצירה נתונה $B \subseteq A$ תת קבוצה.

נאמר כי $a \in A$ נוצר ע"י B אם קיימת סדרה (שנקראת סדרת יצירה) $a_1, \dots, a_n$ כך ש:

1) $a_n = a$

2) לכל i או ש- $a_i \in B$ או ש- a_i קבוע או ש-
- קיימים $i_1, \dots, i_k < i$ וקיימת פונקציה
k-מקומית $f \in F$ כך ש- $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = a_i$.

* זה קצת דומה למושג של וקטורים שפורשים מרחב...

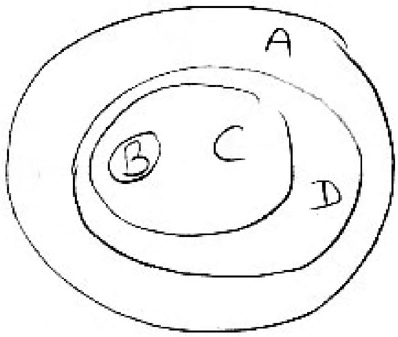
דוגמה

נניח $B=\emptyset$ אז אפשר לייצר איברים חדשים רק אם קיימים קבועים.

הגדרה

אם $B\subseteq A$ אז (C,F) תת אלגברה מינימלית המכילה את B אם לכל (D,F) תת אלגברה המכילה את B

$C\subseteq D$



זה אותו רעיון של span

(7) 20.11.05
ת. לוגיקה.

האתרגל מתנצל על התרגילים האחרונים. הוא חשב שזה יהיה רעיון טוב אבל הוא טעה והחל מעכשיו לא נתייחס יותר לתחשיב הפסוקים. אפשר לראות את השינוי כבר מתרגיל 4.
הערה: צריך להגיש כ-70% מהתרגילים.

הערות לתרגיל 3:

(1 $L=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ פסוקים אטומיים ו- $K=\{(,),\vee,\wedge,\rightarrow,\leftrightarrow,\neg\}$

A = הקבוצה של הביטויים בסימנים $K\cup L$

$F=\{\underbrace{C_\vee, C_\wedge, C_\leftrightarrow, C_\rightarrow}_{\text{דו מקומיים}}, C_\neg\}$: $C_\neg(a)=(\neg a)$, $C_\square(a,b)=(a\square b)$, $\square\in\{\rightarrow,\leftrightarrow,\vee,\wedge\}$

נסתכל על הקבוצה (תת אלגברה) של האיברים ב- A שניתן ליצור מהקבוצה L. B - קבוצת הפסוקים.

הרעיון בהוכחה הוא שרוצים להראות שכל פסוק אפשר לפרק רק בדרך אחת.

נוכיח כי לכל $b\in B$ או ש $b\in L$ או ש $b=C_\square(a_1,a_2)=C_\Delta(a_1',a_2')$ אז $\square=\Delta$, $a_1=a_1'$, $a_2=a_2'$.

ואם $C_\square(a_1,a_2)\neq C_\neg(a_1')$ אז $C_\neg(a_1)=C_\neg(a_1') \Rightarrow a_1=a_1'$

במילים אחרות, יש בניה יחידה של כל פסוק.

נראה ראשית כי רישא ממש של פסוק אינה פסוק:

נראה כי: 1) מספר הסוגריים השמאליים בפסוק = מספר הימניים

2) בכל רישא ממש מספר השמאליים > מספר הימניים.

באינדוקציה על אורך סדרת היצירה.

נניח $b\in B$ פסוק לכן יש סדרת יצירה מ- L $b_1,\dots,b_n$

באינדוקציה מלאה נראה כי לכל n אם נניח כי כל פסוק שסדרת היצירה שלו היא באורך $<n$ מקיים את (1) ו- (2)

אז גם כל פסוק שסדרת היצירה שלו באורך n מקיים (1) ו- (2)

ניזכר בהגדרה של סדרת יצירה:

$a_1,\dots,a_n$ סדרת יצירה ל-a אם

1) $a_n=a$

2) לכל $1\le i\le n$ $a_i=P_\alpha$ או

או קיימים $i_1,i_2<i$ $a_i=C_\square(a_{i_1},a_{i_2})$

$a_i=C_\neg(a_{i_1})$

מסקנה קלה: לכל $i\le n$ יש סדרת יצירה באורך i (מפני ש $a_1,\dots,a_i$ סדרת יצירה של a_i.

(משמע הוא לא הולך להוכיח אותה)

הוכחה של האינדוקציה: יהי $a_1,\dots,a_n$ סדרת יצירה של $a_n=b$. אם $b=P_\alpha$ אז זה מן הסתם בסדר. נניח ש $b\notin L$. קיימים $i_1,i_2<i$ וקיים $\square$ קשר לוגי רק ש $b=C_\square(a_{i_1},a_{i_2})$ או $b=C_\neg(a_{i_1})$.

$b=C_\square(a_{i_1},a_{i_2})=(a_{i_1}\square a_{i_2})$. ל a_{i_1} ו a_{i_2} ההנחה נכונה מפני שיש להם סדרת יצירה באורך $<n$. $\Leftarrow$ (1) ו(2) נכונים ל a_{i_2}, a_{i_1}. די ברור ש(1) ו(2) נכונים גם ל-b.

ראיתן לה די ברור גם למקרה של $C_\neg$.

מסקנה: רישא ממש של פסוק אינה פסוק כי יש בה מספר סוגרים שמאליים $>$ מספר סוגרים ימניים ולכן זה לא פסוק.

נחזור לטענה המקורית נניח $a=C_\square(a_1,a_2)$.

1) $a\ne C_\neg(c)$ למה? $a=(a_1\square a_2)$

$C_\neg(c)=(\neg c)$

הערה: כל פסוק או שהוא אטומי או שהוא מתחיל בסוגר (טעון הוכחה באינדוקציה).

נניח כי $(a_1\square a_2)=(\neg c)$ $\Leftarrow$ a_1 הוא פסוק המתחיל ב-$\neg$ וסתירה.

8

נניח כי $a=C_\Delta(b_1,b_2)$. נקבל $(a_1\Box a_2)=(b_1\Delta b_2)$
$\Delta\in\{\to,\leftrightarrow,\wedge,\vee\}$. נקבל שאו ש a_1 רישא של b_1,
או ש b_1 רישא של a_1 אבל a_1, b_1 פסוקים ולכן
לא יכול להיות שאחד הוא רישא ממש של השני. ⇐
הם חייבים להיות שווים. ⇐ $\Box a_2=\Delta b_2$
⇐ $\Box=\Delta$ ⇐ $a_2=b_2$.

למען הסדר הטוב צריך לבדוק מקרה של $C_\neg(a)=C_\neg(b)$
אבל זה נעשה באותו אופן.

(9) 27.11.05
ת. לוגיקה

בקורס הזה מה שחשוב הוא להבנים הגדרות וזה מה שיש בעיקר בתרגיל הבא.

שאלה 1 יש שפה שיש בה יחס דו מקומי אחד, וכמובן יחס שוויון. יש 4 פסוקים, סה"כ $2^4=16$ תת קבוצות. לכל אחת צריך למצוא מבנה שמקיים אותה אבל לא את הקבוצה המשלימה.

שפות
מה שמבדיל בין שפות הוא קבוצת סימני הפונקציה וקבוצת סימני היחסים. (שפה כשלעצמה היא די חסרת משמעות הדברים המעניינים מתחילים כשמפרשים שפה במבנה מסוים).
שפה מכילה:
1) משתנים x, y, z, w, $x_1, x_2, \ldots$
2) סימני פונקציה n מקומיים סבה (0-מקומי = קבוע)
3) סימני יחס n מקומיים סבה (0-מקומי = T / F)
4) קשרים לוגיים $\vee, \neg$
5) כמת $\exists$
הסימנים מגיעים עם איזה תפקיד שלהם (צריך לפרש אותם ביחס למבנה מסוים.
אפשר לבנות מהשפה הגדים, נוסחאות אטומיות, נוסחאות, שפ"ס, כמו שהגדרנו בריתה.

כדי להבטיח את חד המשמעות של הביטויים משתמשים בכתיבה שאינה טובה לבנ"א.
לדוגמא אם $L=\{0,1,x,+,<\}$
למשל $((1+x)xy)+0) \Leftarrow +x+1xy0$

מבנה $\mathcal{A}$ מבנה מתאים לשפה L. מבנה לה קבוצה $|\mathcal{A}|$ וקבוצה של פונקציות n מקומיות על $|\mathcal{A}|$, קבוצה של יחסים n-מקומיים. לכל סימן פונקציה סבה מקומי $f \in L$ קיימת פונקציה $|\mathcal{A}|^n \to |\mathcal{A}|$ $f_{\mathcal{A}}$. לכל קבוע $c \in L$ $c_{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$. לכל סימן יחס n-סבה מקומי R קיים $R_{\mathcal{A}}: |\mathcal{A}|^n \to |\mathcal{A}|$ ולסימן יחס 0 מקומי $R_{\mathcal{A}} \in \{T, F\}$

דוגמה: $L=\{<\}$. מבנה $\mathcal{A}$ מתאים ל־ L כי קבוצה $|\mathcal{A}|$
עם יחס דו מקומי. (שקול לתת קבוצה של $|\mathcal{A}|^2$.)

<u>שאלה 1</u>

נמצא מבנה לתת קבוצה (a,b,d) שאינו מקיים את (c)

a - קיים איבר מינימלי

b - קיים איבר מקסימלי

c - יחס צפוף (למשל השלמים לא צפופים)

d - היחס מלא.

אז ניקח $|\mathcal{A}|=\{1,2\}$ ויחס $<^{\mathcal{A}}: |\mathcal{A}|^2 \to \{T,F\}$ כך:

$<^{\mathcal{A}}(1,2)=T$

$<^{\mathcal{A}}(\text{שאר})=F$

(10)
4.12.05
תרגול לוגיקה

<u>הערות לתרגול:</u>

(2) יהי L שפה A,B מבנים ל-L.
(רחיב את L ל-$L(A)$ ול-$L(B)$)
נאמר ש-A איזומורפי ל-B אם קיימת פונק' חח"ע ועל $\pi:|A|\to|B|$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:
- לכל $f\in L$ סמן פונקציה n מקומי ולכל $a_1,\ldots,a_n\in|A|$
$$\pi(f_A(a_1,\ldots,a_n))=f_B(\pi a_1,\ldots,\pi a_n)$$
- לכל $f\in L$ סמן ~~פונקציה~~ יחס n מקומי ו-$a_1,\ldots,a_n\in|A|$
$$R_A(a_1,\ldots,a_n)=R_B(\pi a_1,\ldots,\pi a_n)$$

a) יחס האיזומורפיות בין מבנים הוא סימטרי. A איזומורפי ל-B
נראה B איזומורפי ל-A. יהי $\pi^{-1}:|B|\to|A|$
נראה שהיא מקיימת את התכונות.
יהי $f\in L$ סמן פונקציה n מקומי ויהי $(b_1,\ldots,b_n)\in|B|^n$
נרצה להראות: $\pi^{-1}f_B(b_1\ldots b_n)=f_A(\pi^{-1}b_1\ldots\pi^{-1}b_n)$

$$\pi f_A(\pi^{-1}b_1\ldots\pi^{-1}b_n)=f_B(\pi\pi^{-1}b_1,\ldots\pi\pi^{-1}b_n)=$$
$$=f_B(b_1\ldots b_n)$$
$$\Rightarrow f_A(\pi^{-1}b_1\ldots\pi^{-1}b_n)=\pi^{-1}f_B(b_1\ldots b_n)$$

עבור יחסים ההוכחה דומה

b) יהי t ש"ע ב-L במשתנים $x_1\ldots x_n$
הערה: כל המשתנים המופיעים ב-t הם מ-$\{x_1\ldots x_n\}$
אך לא בהכרח שכל x_i מופיע ב-t.
אז לכל $(a_1,\ldots,a_n)\in|A|^n$ מתקיים:
$$A(\underbrace{t_{x_1\ldots x_n}[i_{a_1}\ldots i_{a_n}]}_{\text{זה סגור ללא משתנים}})=B(t_{x_1\ldots x_n}[i_{\pi a_1},\ldots i_{\pi a_n}])$$

נוכיח באינדוקציה על האורך של שם העצם - $\ell(t)$

אם $\ell(t)=1$ אז $t=c$ או $t=x$

($c\in L$ קבוע)

$t=x \quad A(t_x[ia]) = A(i_a) = a$

$\Rightarrow \pi(a) = B(t_x(i\pi_a))$

$t=c \quad A(c) = c_A \Rightarrow \pi c_A = c_B = B(c)$

נניח $\ell(t)>1 \Leftarrow t = f t_1 \dots t_m$ כאשר $f\in L$

סימן פונקציה וגם מקומי t הוא במשתנים

$x_1,\dots,x_n$ לכן גם כל אחד מה- t_i.

$$\pi(A(t_{x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n])) = \pi A((f t_1\dots t_m)_{x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]) =$$

$$= \pi(f_A(A(t_{1\,x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n])\dots A(t_{m\,x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]))=$$

$$= f_B(\pi A t_1\dots[\,]\dots,\pi A t_m\dots[\,]) =$$

$$\overset{\text{ה"א}}{=} f_B(B(t_{1\,x_1\dots x_n}[i\pi a_1\dots i\pi a_n])\dots B(t_{m\,x_1\dots x_n}[i\pi a_1\dots i\pi a_n]))$$

$$= B(t_{x_1\dots x_n}[i\pi a_1\dots i\pi a_n])$$

© אם φ נוסחה במשתנים $x_1,\dots,x_n$ יהיו $(a_1,\dots,a_n)\in |A|^n$

$$A(\varphi_{x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]) = B(\varphi_{x_1\dots x_n}[i\pi a_1\dots i\pi a_n])$$

הערה: אם x_i לא חופשי לא מציבים בו את ia_i

הוכחה: באינדוקציה על בניית הנוסחה.

1) נראה שמתקיים עבור נוסחאות אטומיות:

תהי $R(t_1\dots t_m)$ נוסחה אטומית, $R\in L$ סימן

יחס m מקומי ו- t_i שמות עצם במשתנים $x_1,\dots,x_n$

$$A(R(t_1\dots t_m)_{x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]) =$$

$$= R_A(A(t_{1\,x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]),\ A(t_{m\,x_1\dots x_n}[ia_1\dots ia_n]))=$$

$$= R_B(\pi A t_1\dots[\,],\pi A t_m\dots[\,])) =$$

$$= R_B(B(t_1\dots[i\pi a_1\dots i\pi a_n],\dots,B(t_m\dots[\,]))=$$

$$= B(R(t_1\dots t_m)_{x_1\dots x_n}[i\pi b_1\dots i\pi b_n])$$

(11)

תהי φ נוסחה במשתנים $x_1, \ldots, x_n$:

1) $\varphi = \neg\psi$

$$A(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[ia_1 \ldots ia_n]) = A(\neg\psi_{x_1 \ldots x_n}[ia_1 \ldots ia_n]) =$$
$$= H_\neg(A(\psi \ldots [\,])) \overset{?}{=} H_\neg(B(\psi_{x_1 \ldots x_n}[i\pi a_1 \ldots i\pi a_n]) =$$
$$= B(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[i\pi a_1 \ldots i\pi a_n]$$

2) $\varphi = \vee\psi_1\psi_2$ - אוריתים הבירה דומה

3) $\varphi = \exists x_i \psi$ בה"כ נניח $i=n$ $\varphi = \exists x_n \psi$

$$A(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[ia_1 \ldots ia_n])$$

$$A(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[ia_1 \ldots ia_n])) =$$
$$= A(\exists x_n(\psi_{x_1 \ldots x_{n-1}}[ia_1 \ldots ia_n]) = T$$

$\Leftarrow$ קיים $\tilde{a}_n \in |A|$ רק ש -

$$A(\psi_{x_1 \ldots x_n}[ia_1 \ldots ia_{n-1}, i\tilde{a}_n]) = T$$

$$B(\psi_{x_1 \ldots x_n}[i\pi a_1 \ldots i\pi\tilde{a}_n]) = T$$

$\rho'' \rho'$ $\quad B(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[i_{\pi a_1}, \ldots, i_{\pi \tilde{a}_n}]) = T$

$A((\exists_{x_n} \varphi)_{x_1 \ldots x_n}[\ldots]) = T \Leftarrow A(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[i_{a_1} \ldots i_{\tilde{a}_n}]) = T \quad \rho(\ldots)$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$B((\exists_{x_n} \varphi)_{x_1 \ldots x_n}[\ldots]) = T \Leftarrow B(\varphi_{x_1 \ldots x_n}[i_{\pi a_1} \ldots i_{\pi \tilde{a}_n}]) = T$

$B(\varphi) = T \Leftarrow A(\varphi) = T$

$B(\varphi_{x_1 \ldots x_n}(i_{\pi a_1} \ldots i_b)) = T \quad$ ie $\quad \exists b \in |B| \Leftarrow T = B(\varphi_{x_1 \ldots x_{n-1}}(i_{\pi a_1} \ldots i_{\pi a_{n-1}}) \ldots)$ $\quad \rho''$

$A(\varphi_{x_1 \ldots x_n}(i_{a_1} \ldots i_{\tilde{a}_n}) = T \qquad \tilde{a}_n = \pi^{-1}(b)$

(12) 11.12.05
ת.לוגיקה

הערות לתרגיל ט

4) $L=\{+,\times,-\}$ F שדה $+_F$ $\times_F$ הכפל והחיבור בשדה.

נניח $K\subseteq F$ תת מבנה.

$\Leftarrow$ $0_K\in F$

$\forall x,y\in K$ $x+_K y$ $x+_F y\in K$

$\forall x\in K$ $-_K x=-_F x\in K$

יש פה דקויות בהגדרה של תת מבנה. מבנה צריך לקיים את מה שיש בשפה. גם יכול להיות שהשפה דלה ואין בה יכולת (סימנים) לדבר על כל מה שיש במבנה.

תורת ההוכחה

בשפה L יש: משתנים
קבועים
סימני פונקציה
סימני יחס
סימנים לוגיים

יכול להשתנות

חוץ מזה יש אקסיומות לוגיות להתחייב בהן עצמן ללא קשר לשום מבנה
כללי היסק
זה פורמלי לחלוטין.

כללי היסק: Φ - קבוצה של נוסחאות. ψ - נוסחה.
מ-Φ נסיק ψ אם לכל מבנה מתאים לשפה
אם Φ מקבלת ערך T אז גם ψ מקבלת ערך T.

T תורה תהיה קבוצה של אקסיומות לא לוגיות.
משפט בתורה הוא נוסחה שאפשר להוכיח מהאקסיומות ע"י כללי ההסק.

(13) 18.12.05
ת. לוגיקה

* סיכום באדיבות אלכסי קוזמין (אין טענות אליו...)

2 a) תהי T רק אקסיומות (כלומר תיאוריה) ללא סימני פונקציה וסימני יחס פרט לשוויון וקבועים וללא אקסיומות לא לוגיות

נרצה להראות שקבוצת האקסיומות הינה מינימלית, כלומר שאי אפשר להוריד אף אחת מהאקסיומות ללא הפחתה ביכולת הביטוי של השפה.

נגדיר f להיות: $f(A)=T$ לנוסחה אטומית A

ולכל A שאינה אטומית: $f(\neg A)=F$, $f(\exists x A)=T$, $f(A\vee B)=f(B)$

<u>הערה</u>: השתמשנו ביחידות של בניית הנוסחה (כלומר, הסדר של האיווים חשוב!)

נרצה להראות של נוסחה B שאפשר לבנות ללא השימוש באקסיומה $A\vee\neg A$ היא בעלת תכונה $f(B)=T$

נצטרך להראות: <u>בבסיס</u> (ראה כי b) אקסיומה לוגית B שאינה מהצורה $A\vee\neg A$ מתקיים $f(B)=T$ וגם: אם C נוסחה שהתקבלה מכלל היסק כלשהו מנוסחאות עבורן $f()=T$ אזיי $f(C)=T$.

בעצם, זו אינדוקציה על איך שרשרת היצירה של הנוסחה

3.e) A,B משפטים.

$\neg(\neg A\vee\neg B)\vee(\neg A\vee\neg B)$

$(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)\vee\neg B$ שימוש כבד בסעיף ז)

$(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)\vee B$ B משפט:

$(\neg(\neg A\vee\neg B)\vee\neg A)$ מהחתך:

כנ"ל נורא את $\neg A$ וסיימנו.

(19) 25.12.05
ת. לוגיקה

L - שפה כלשהי Φ - קבוצת הנוסחאות האלמנטריות
Φ_v היא הקבוצה המינימלית של נוסחאות המקיימת
א) $\Phi \subseteq \Phi_v$
ב) אם $\varphi, \psi \in \Phi_v$ אז $(\varphi \vee \psi) \in \Phi_v$

תהי $f: \Phi \to \{T,F\}$. אפשר להרחיב אותה באופן יחיד
לפונקציה $\tilde{f}: \Phi_v \to \{T,F\}$ המקיימת $\tilde{f}((\varphi \vee \psi)) = H_v(f(\varphi), f(\psi))$
השאר ש- $g: \Phi_v \to \{T,F\}$ היא פונקציה אחת נכוון לרק
ש $\tilde{f} = g$ עבור $f: \Phi \to \{T,F\}$ כלשהי:

באופן כללי, מתי נוסחה φ היא טאוטולוגיה? אם
לכל פונקציה $f: \Phi \to \{T,F\}$ המורחבת באופן יחיד $\tilde{f}$ לכל
הנוסחאות ומקיימת $\tilde{f}(\neg\psi) = H_\neg(\tilde{f}(\psi))$
$\tilde{f}(\psi \vee \chi) = H_v(\tilde{f}(\psi), \tilde{f}(\chi))$
מתקיים $\tilde{f}(\varphi) = T$

כלל דיסק:

$A \Rightarrow (A \vee B)$

$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$

$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$

הערות לתרגיל 8:
ד) A_1, A_2 שתי נוסחאות שמופיעות בהן הנוסחאות האלמנטריות
$B_1, \dots, B_n$ בסדר הזה. מה שמבדיל בין A_1 ל- A_2 הוא
אופן כתיבת הסוגריים.
נגדיר $S_n(B_1 \dots B_n) = (B_1 \vee (B_2 \vee (B_3 \vee (\dots \vee B_n)$
$S_2(B_1, B_2) = (B_1 \vee B_2)$
$S_3(B_1, B_2, B_3) = (B_1 \vee (B_2 \vee B_3))$

נרצה להראות ש $A_1 \vdash A_2$ באינדוקציה על n.

טענה: כי $A \vdash S_n(B_1,\dots,B_n)$ וגם $S_n(B_1,\dots,B_n) \vdash A$

כאשר A הם $B_1,\dots,B_n$ + תוספת סוגריים
וההוכחה משתמשת רק בתנאי האסוציאטיביות.

ברור עבור $n=1,2$ $\quad n=1 \quad A=B_1$

$n=2 \quad A=(B_1 \vee B_2)$

נניח $n>2$ אנחנו חייבים להיות $A=(C \vee D)$

וקיים $n>k\geq 1$ רק שב-C מופיעות הנוסחאות האטומיות $B_1,\dots,B_k$ בסדר הזה וב-D מופיעות $B_{k+1},\dots,B_n$ בסדר הזה.

לפי הנחת האינדוקציה $C \dashv\vdash S_k(B_1,\dots,B_k)$

$D \dashv\vdash S_{n-k}(B_{k+1},\dots,B_n)$

טענה: אם ניתן להוכיח את נוסחה E מנוסחה D ע"י שימוש בתנאי האסוציאטיביות אז לכל נוסחה C ניתן להוכיח את $(E \vee C)$ מ-$(D \vee C)$ ע"י תנאי האסוציאטיביות.

נסתכל על הוכחה של E מ-D. מה זה?

$D=D_1 \to D_2 \to D_3 \to \dots \to D_n=E$

כל המעברים ע"י אסוציאטיביות.

מעשי פשוט נוסיף את C:

$D \vee C=(D_1 \vee C) \to (D_2 \vee C) \to \dots \to (D_n \vee C)=E$

טוב, כאן יונתן חשב המון המון זמן ולא ממש ברור מה התשובה. הוא יחשוב על זה ויפרסם את הפתרון. הוא חושב שהיה צריך להגדיר היסק [illegible] יותר:

$(D \vee (A \vee (B \vee C))) \Longleftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$

T תורה כלשהי כלומר רשימה של אקסיומות לא לוגיות. M מבנה המתאים לשפה של T יקרא מודל של T, אם לכל אקסיומה לא לוגית A של T $M(A)=T$.

למשל T תורת החבורות, השפה $\{\times,1,=\}$ והאקסיומות הלא לוגיות

$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$, $x\times 1=x$, $\exists y(x\times y=1)$. מודל לתורה זה מבנה מתאים לשפה, כלומר קבוצה G עם פעולה דו מקומית $\times$ וקבוע 1_G שמקיימת את האקסיומות.

02.01.06

-1-

תרגול ושיחה

עבור קבצת על תרגיל 9

שאלה 1 היא די טריוויאלית

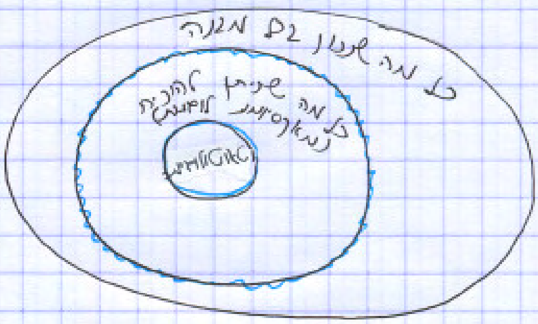
שאלה 2 פונ' אמת: צריך להראות שקיים ויחיד f ו-$\bar{f}$ כל באופן יחיד.
ההוכחה של זה דומה לשאלות על יחידות הכתיבה בתרגילים על התחשיב הפסוקים.
נביט בקבוצה של נוסחאות אלמנטריות (פסוקים אטומיים)
⇐ נסתכל על הקבוצה Φ של סדרות של סימנים מהשפה המינימלית המקיימת:
1) כל נוסחה אלמנטרית נמצאת בה
2) אם ψ,φ נמצאות בה אז $\psi\vee\varphi$ נמצאת בה
3) אם φ נמצאת בה אז גם $\neg\varphi$ נמצאת בה.

משפט קריאה יחידה

כל נוסחה (פסוק) ב-Φ היא או נוסחה אלמנטרית או מהצורה $(\psi\vee\varphi)$ או מהצורה $(\neg\varphi)$
באופן יחיד כלומר $(\neg\chi)\neq(\psi\vee\varphi)$
$$(\varphi\vee\psi)=(\varphi'\vee\psi')\Leftrightarrow \varphi=\varphi' \text{ וגם } \psi=\psi'$$
$$(\neg\chi)=(\neg\chi')\Leftrightarrow \chi=\chi'$$
כלומר אופן הכתיבה של נוסחה נותן לנו את אופן הבניה שלה באופן יחיד.
וכל זה דומה למה שעשינו כבר בתחשיב הפסוקים.
ובעזרת שימוש במשפט הקריאה היחידה אפשר להגדיר באופן יחיד את פונ' האמת.

הסבר למוטיבציה לשאלה: טאוטולוגיה אומרת שלא משנה איזו פונ' אמת ניקח על הנוסחאות האלמנטריות, $\bar{f}$ תקבל עליה רק אמת.
כל מבנה יכול לתת פונ' אמת כלשהי על הנוסחאות האלמנטריות, אבל מבנה הוא משהו הרבה יותר ולכן אי אפשר לקבל כך את כל פונקציות האמת.
כלומר, טאוטולוגיה זה משהו ממש כללי.

שאלה 8 – משפט הטאוטולוגיה אומר (בין היתר) שכל טאוטולוגיה ניתן להוכחה (מהאקסיומות הלוגיות)
– כל נוסחה שניתנת להוכחה רק מהאקסיומות הלוגיות נכונה בכל מבנה.



זו שאלה שהייתה אמורה להבהיר את ההפרדה בין רמות של נוסחאות

שאלה 9 תהי T תורה. נאמר ש-T שלמה אם: כל נוסחה A או ש-A משפט ב-T או ש-$\neg A$ משפט ב-T.
דוגמה: אם M מבנה מתאים לשפה L נגדיר תורה T שהאקסיומות הלא לוגיות שלה הן קבוצת הנוסחאות הנכונות ב-M $\{A \mid M(A)=T\}$
– מבנה מחלק את קב' הנוסחאות לשני חלקים – נוסחאות שמקבלות ערך אמת, ונוסחאות שמקבלות ערך שקר.
– תורה שלמה מחלקת את קב' הנוסחאות לשני חלקים – נוסחאות שהן משפטים של T, ונוסחאות שהשלילה שלהן הן משפט ב-T.

שאלה 10 תורה שאינה שלמה: התורה שהאקסיומות הלא-לוגיות שלה הן אקסיומות השדה אינה שלמה.
למה היא לא שלמה? לפי 9, אם T שלמה, לכל A ולכל שני מודלים M,N $M(A)=N(A)$
כדי להראות שתורה היא לא שלמה צריך רק למצוא נוסחה A ושני מודלים M,N כך ש-$M(A)\neq N(A)$.
וזה אם ייתכן שיש נוסחה שאי אפשר להוכיח מהתורה, כי אם היה אפשר היא הייתה נכונה בכל מבנה.
במקרה של תורת השדות נסתכל על הנוסחה: $\exists x\,(x^2+1=0)$ שהיא כמובן נכונה ב-$\mathbb{C}$ (המספרים המרוכבים) אבל לא נכון ב-$\mathbb{R}$.
באותה מידה, $\exists x\,(x^2=1+1)$ נכונה ב-$\mathbb{R}$ אבל לא ב-$\mathbb{Q}$ וכו'.
⇐ נחשוב על התורה שאומרת שהשדות הם סגורים אלגברית. גם היא לא שלמה, כי נוכל לשאול המציין: $1+1=0$ נכון ב-$\mathbb{Z}_2$ אבל לא בשדות אחרים. אבל אם נוסיף את המציין לתורה אז היא תהיה שלמה.

8.1.06
ת. לוגיקה

יש בעיה: הציונים לא נרשמו אז צריך להחזיר את התרגילים לתאים של הבודקים בבניין איינשטיין קומה 3.
תרגיל 1-2 - לשים בתא של אנדי.
3-4 — " — דורון

* * * * * *

חובת הגשה 70%
ציון סופי 10%

* * * * * *

הערות לתרגיל ט

1 + 2 האינדוקציה

3 a $\forall x(A\to B) \to \exists xA\to\exists xB$

- משפט הדדוקציה: אם A היא נוסחה סגורה אזי

$$T[A]\vdash B \iff T\vdash A\to B$$

- משפט הקבועים: תהי T תורה ו-T' התורה המתקבלת ע"י הוספה של קבועים $e_1 \dots e_n$ חדשים לשפה של T. תהא A נוסחה ב-T אזי:

$$T\vdash A \iff T'\vdash A_{x_1\dots x_n}[e_1\dots e_n]$$

יהיו $x_1,\dots,x_n$ המשתנים החופשיים בנוסחה $\forall x(A\to B)$
ותהי T' התורה המתקבלת ע"י הוספה של קבועים $e_1,\dots,e_n$ לשפה. נראה כי $T'\vdash \forall x(A\to B)[e_1\dots e_n]\to(\exists xA[e_1\dots e_n]\to\exists xB[e_1\dots e_n])$

מאחר לכל A $\vdash\forall xA\to A$ לכן

$$T'(\forall x(A\to B)[e_1\dots e_n]] \vdash (A\to B)[e_1\dots e_n]$$

$\Leftarrow$ MP-מ $T'[\forall x(A\to B)[e_1\dots e_n]]\vdash(A\to B)[e_1\dots e_n]$

$\Leftarrow$ מחוק הפילוג נקבל $T'[\forall x(A\to B)[e_1\dots e_n]]\vdash(\exists xA\to\exists xB)[e_1\dots e_n]$

כי הנוסחה $\forall x(A\to B)[e_1\dots e_n]$ סגורה אז לפי משפט הדדוקציה $T'\vdash\forall x(A\to B)\to(\exists xA\to\exists xB)[e_1\dots e_n]$

$\Leftarrow$ לפי משפט הקבועים $T\vdash\forall x(A\to B)\to(\exists xA\to\exists xB)$

(b) אותה ההוכחה רק במשפט הפילוג להחליף $\exists$ ב-$\forall$.

(c) $\forall x(A\vee B) \leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$

<u>הערה:</u> אם $\vdash A\to B$ ו- $\vdash B\to A$ אז $\vdash A\leftrightarrow B$

זה נובע ממשפט הטאוטולוגיה: אם $A\to B$ טאוטולוגיה ו- $\vdash A$ אז $\vdash B$.

<u>הערה:</u> $A\to B$ טאוטולוגיה אמ"מ לכל פונק' אמת f (מוגדרת רקורסיבית על נוסחאות אלמנטריות)

$f(B)=F \Rightarrow f(A)=F$

נוכיח את שני הכיוונים.

$(\to)$ $\left.\begin{array}{l}\vdash A\to\exists xA\\ \vdash B\to\exists xB\end{array}\right\}$ אק' ההצבה

$\Rightarrow \vdash (A\to\exists xA)\wedge(B\to\exists xB)$

הנוסחה $(A\to\exists xA)\wedge(B\to\exists xB)\to(A\vee B\to\exists xA\vee\exists xB) \Rightarrow$

לפי ההערה הקודמת תהי f פונק' אמת המקיימת

$f(A\vee B)\to(\exists xA\vee\exists xB))=F \Leftrightarrow ($ $f(A\vee B)=T$

$\Leftrightarrow f(A)=T$ או $f(B)=T$ $)$ וגם

$(f(\exists xA\vee\exists xB)=F \Leftrightarrow f(\exists xA)=f(\exists xB)=F)$

בה"כ נניח $f(A)=T$, $f(\exists xA)=F$

$\Rightarrow f(A\to\exists xA)=F \Rightarrow f((A\to\exists xA)\wedge(B\to\exists xB))=F$

$\Rightarrow$ טאוטולוגיה.

$\Rightarrow$ ממשפט הטאוטולוגיה $\vdash(A\vee B)\to\exists xA\vee\exists xB$

$\Rightarrow$ מכלל הכנסת כמת, משום שב- $\exists xA\vee\exists xB$

x לא חופשי, נקבל $\vdash\exists x(A\vee B)\to(\exists xA\vee\exists xB)$

$(\leftarrow)$ $\left.\begin{array}{l}\vdash A\to A\vee B\\ \vdash B\to A\vee B\end{array}\right\}$ מפילוג $\vdash\exists xA\to\exists x(A\vee B)$, $\vdash\exists xB\to\exists x(A\vee B)$

$\Rightarrow \vdash(\exists xA\to\exists x(A\vee B))\wedge(\exists xB\to\exists x(A\vee B))$

$(\exists xA\to\exists x(A\vee B))\wedge(\exists xB\to\exists(A\vee B))\to(\exists xA\vee\exists xB\to\exists x(A\vee B))$ טאוטולוגיה:

תהי f כך ש- $f(\exists xA\vee\exists xB\to\exists x(A\vee B))=F$

אזי $f(\exists x(A\vee B))=F$ $\Leftarrow$

$f(\exists x A\vee \exists x B)=T$

$\Updownarrow$

$f(\exists x A)=T \;\vee\; f(\exists x B)=T$

$\Leftarrow$ $f(\exists x A)=T$ בה"כ נניח

$f(\exists x A\to \exists x(A\vee B))=F$

$f((\exists x A\to \exists x(A\vee B))\wedge(\exists x B\to \exists x(A\vee B)))=F$

$\Leftarrow$ זו לא טאוטולוגיה

$\vdash \exists x A\vee \exists x B\to \exists x(A\vee B)$ $\Leftarrow$

(22) 15.1.06
ת. לוגיקה

<u>משפט השוויון</u>

אם b שם עצם ו- $a_1,\dots,a_n$ שמות עצם נסמן ב- b' את שם העצם המתקבל מ- b ע"י החלפת <u>אפשרית</u> הופעות של a_i ב- a_i' אזי אם $\forall_1\ \vdash a_1=a_1'$ אזי $\vdash b=b'$

וכנ"ל $\vdash A\leftrightarrow A'$ כאשר A נוסחה.

<u>דוגמה</u>: אם $\vdash a=d$, $\vdash d=b$ $\Leftarrow$ $\vdash a=b$.

$a_1=d$, $a_1'=c$

$A\equiv a=d$ $\qquad \vdash d=c \equiv \vdash a_1=a_1'$

$A'\equiv a=c$

$$\Downarrow$$

$$\vdash A\leftrightarrow A'$$

$$\Downarrow$$

$$\vdash A\to A'$$

אם $\vdash A$ אז $\vdash A'$ (MP)

כל: $a=b \to B_x[a]\leftrightarrow B_x[b]$

הוכחה: $a_1=a$

$a_1'=b$

$A=B_x[a]$

$A'=B_x[b]$

בתוך B יכולות להיות הופעות של a אבל A' אינו ~~הה~~ בהכרח הנוסחה המתקבלת מ- B ע"י החלפה של <u>כל</u> ההופעות של a, אלא רק אלה שהתקבלו בהצבה במקום x

לפי משפט השוויון אם $\vdash a=b$ אז $\vdash B_x[a]\leftrightarrow B_x[b]$

יהיו $x_1\dots x_n$ והמשתנים ב- a,b ויהיו $e_1,\dots,e_n$ קבועים חדשים בשפה. נסמן $a[e]=a_{x_1\dots x_n}[e_1\dots e_n]$

וכנ"ל עבור b.

ואז שוב, ממשפט השיוויון:

אם $\vdash a[e]=b[e]$ אז $\vdash (B_x[a[e]]) \leftrightarrow (B_x[b[e]])$

(נגדיר $B'=B_x[y]$ כאשר y משתנה שלא מופיע בנוסחאות ובשמות העצם

$B'[e]=B'_{x_1\dots x_n}(e_1\dots e_n)$ ואז $(B'_{x_1\dots x_n}[e])_y[a[e]] \equiv (B_x[a])[e]$

ממשפט השיוויון נקבל שאם $\vdash a[e]=b[e]$

אז $\vdash (B'[e]_y)[a[e]] \leftrightarrow (B'[e]_y)[b[e]]$

// זאת בדיוק אותה הנוסחה

$\vdash (B_x[a])[e] \leftrightarrow (B_x[b])[e]$

ואז ממשפט הדדוקציה:

$\vdash a[e]=b[e] \to B_x[a][e] \leftrightarrow B_x[b][e]$

וממשפט הקבועים $\vdash a=b \to B_x[a] \leftrightarrow B_x[b]$

תרגיל: אפשר בקלות להוכיח את המשפט

$\exists x(x=a \wedge A) \leftrightarrow A_x[a]$

הוכחה. ($\Leftarrow$) נסמן את הנוסחה $x=a \wedge A$

מאקסיומת ההצבה

$\vdash a=a \wedge A_x[a] \to \exists x(x=a \wedge A)$

אקסיומה $\vdash a=a$

~~טאוטולוגיה~~ ~~$\vdash$ ...~~

$\Rightarrow$ MP: $\vdash A_x[a] \to \exists x(x=a \wedge A)$

($\Rightarrow$) נראה $\exists x(x=a \wedge A) \to A_x[a]$

ממשפט השיוויון $\vdash x=a \to A \leftrightarrow A_x[a]$ (סעיף ג)

הנוסחה הנ"ל גוררת טאוטולוגית את

$x=a \wedge A \to A_x[a]$

$\Leftarrow$ $\vdash x=a \wedge A \to A_x[a]$

$\Leftarrow$ מכלל הוספת כמת $\vdash \exists x(x=a \wedge A) \to A_x[a]$

<u>שאלה 4</u>

(a) $x=y \to z+x=z+y$

$\vdash x_1=y_1 \to x_2=y_2 \to x_1+x_2=x_2+y_2$ אקסיומת השוויון

לפי כלל ההצבה

$\vdash z=z \to x=y \to z+x=z+y$

$\vdash z=z$ אקסיומה

$x=y \to z+x=z+y$ MP

(b) באותו אופן רק כפל.

לפי אקסיומה (4) אפשר להתעלם מזה ש $x\neq 0$.

(24) 22.1.06
ת. לוגיקה

משפט השלמות:

הגדרה: תורה T אינה עקבית אם כל נוסחה היא משפט ב-T
T עקבית אם היא לא אינה עקבית

משפט השלמות: תהי T תורה עקבית. ל-T יש מודל
(מבנה המקיים את כל האקסיומות הלא לוגיות של T).

תהי L שפה ו T, T' תורות עם שפה L.
נאמר ש-T שקולה ל-T' אם לכל נוסחה A של L
$\vdash_{T'} A \Leftrightarrow \vdash_T A$

Γ קבוצה של נוסחאות $T(\Gamma)$ שקולה ל-T אמ"מ
Γ נכונה בכל מודל של T:
(⇐) $T(\Gamma)$ שקולה ל-T. בפרט כל $A \in \Gamma$ מקיים
$\vdash_T A$ לכן A נכונה בכל מודל של T.
(⇒) נניח ש-Γ נכונה בכל מודל של T.
מספיק להראות שלכל $A \in \Gamma$ $\vdash_T A$.
נניח בשלילה ש $\nvdash_T A$. לפי משפט הסגור זה קורה
אמ"מ $\nvdash_T A'$ כאשר A' הסגור של A
נראה כי $T[\neg A']$ היא עקבית (אז קיים לה מבנה
לפי משפט השלמות ואז נקבל ש $\mathcal{A}(A) = F$. סתירה)
נניח $T[\neg A']$ אינה עקבית. אז אפשר להוכיח ממנה
כל נוסחה. בפרט ניתן להוכיח $T[\neg A'] \vdash A'$. לכן
ממשפט הדדוקציה (כי A' סגורה) נקבל $T \vdash \neg A' \to A'$ ($T \vdash A' \vee A'$)
לפי כלל הצמצום $T \vdash A'$ בסתירה לכך ש $\nvdash_T A'$.
⇐ $T[\neg A']$ עקבית. מש"ל ☺

(2) T תורה. תהי T' תורה פורמלית המתקבלת מ-T ע"י החלפת כל אקסיומות השיוויון בנוסחאות מהצורה $x=y \to A \leftrightarrow A_x[y]$ כאשר A אטומית.

נראה $\vdash_T A \iff \vdash_{T'} A$.

מספיק להוכיח כי $\vdash_T x=y \to A \leftrightarrow A_x[y]$.

וזה נובע מיד ממשפט השוויון

וכן ש $\vdash_{T'}$ (אקסיומות השיוויון)

נניח $R \in L$ יחס n-מקומי. צריך להראות

$$\vdash_{T'} x_1=y_1 \to \ldots \to x_n=y_n \to Rx_1\ldots x_n \leftrightarrow Ry_1\ldots y_n$$

נוכיח את זה באינדוקציה על n.

$n=1$ $\quad \vdash_{T'} x_1=y_1 \to R(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leftrightarrow R(y_1,x_2,\ldots,x_n)$

$\vdash_{T'} x_1=y_1 \to R(x_1,y_2,\ldots,y_n) \leftrightarrow R(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

נניח ש -

$$\vdash_{T'} x_k=y_k \to \ldots \to x_1=y_1 \to R(x_1 \ldots x_k \ldots x_n) \leftrightarrow R(y_1 \ldots y_k x_{k+1} \ldots x_n)$$

$$\vdash_{T'} x_k=y_k \to \ldots \to x_1=y_1 \to R(x_1 \ldots x_k, y_{k+1} \ldots y_n) \leftrightarrow R(y_1,\ldots,y_k,\ldots y_n)$$

נרצה להוכיח את המקרה ה- k+1

$$(*) \vdash_{T'} x_{k+1}=y_{k+1} \to \ldots \to x_1=\cancel{y_1} \to R(x_1 \ldots x_{k+1} \ldots x_n) \leftrightarrow R(x_1\, x_{k+1}\, x_{k+2} \ldots x_n)$$

$$\vdash_{T'} x_{k+1}=y_{k+1} \to R(z_1 \ldots z_k, x_{k+1} \ldots x_n) \leftrightarrow R(z_1 \ldots z_k, y_{k+1}, x_{k+2} \ldots x_n)$$

כאשר z_i משתנים חדשים.

לפי משפט ההצבה נעשה הצבה $z_i \to x_i$

$$\vdash_{T'} x_{k+1}=y_{k+1} \to R(x_1 \ldots x_k\, x_{k+1} \ldots x_n) \leftrightarrow R(x_1 \ldots x_k\, y_{k+1}\, x_{k+2} \ldots x_n)$$

באותו אופן

$$\vdash_{T'} x_{k+1}=y_{k+1} \to R(y_1 \ldots y_k, x_{k+1} \ldots x_n) \leftrightarrow R(x_1 \ldots y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$$

(25) 29.1.06
ת. לוגיקה

את תקופת הבחינות יונתן יעביר בעיקר בחדר שלו - מס' 302.
אז אפשר לבוא לשם לשאול שאלות.

(1) <u>משפט השלמות</u>

אם T תורה עקבית אז יש ל-T מודל.

<u>משפט הקומפקטיות</u>

אם Γ קבוצה של נוסחאות כך שלכל תת קבוצה סופית $\Gamma' \subseteq \Gamma$ יש מבנה המקיים את כל הנוסחאות ב-Γ', אז יש מבנה המקיים את כל הנוסחאות ב-Γ.

ההוכחה של המשפט היא טריוויאלית, אבל המשמעות שלו לא טריוויאלית. כי לא צריך להיות בכלל קשר אפריורית בין המודלים של הקבוצות השונות.

<u>הוכחה:</u> צריך רק להראות ש-Γ עקבית. T_Γ הינה התורה המולדת ע"י Γ וראק סימנים לא לוגיים. אם Γ אינה עקבית, כלומר T_Γ אינה עקבית. אז $T_\Gamma \vdash \neg A \wedge A$. תהי Γ' הקבוצה הסופית של הנוסחאות מ-Γ שמשתתפות בהוכחה. לכן נקבל $T_{\Gamma'} \vdash \neg A \wedge A$ ($T_{\Gamma'}$ התורה שהראק סימנים הלא לוגיים שלה הן Γ').
אבל ל-Γ' לפי ההנחה יש מבנה M שמקיים כל נוסחה כלומר הוא מודל ל-$T_{\Gamma'}$ ולכן $M(\neg A \wedge A)=T$, אבל זה לא יתכן כי לכל מבנה $M'(\neg A \wedge A)=F$.
$\Leftarrow$ T_Γ עקבית. $\Leftarrow$ לפי משפט השלמות יש לה מודל

(2) נניח שיש ב-L משתנה פונק' חד מקומי.
נניח x משתנה רגיל ויהי $\mathcal{M}$ מבנה ל-L.
ויש נוסחה $\forall x A(x)$. אז $\mathcal{M}(\forall x(Ax))=T$
אם לכל $m\in\mathcal{M}$ $\mathcal{M}(A_x[m])=T$.
דרשו יש לנו f משתנה פונק' חד-מקומי.
$$\mathcal{M}(\forall f A(f))=T$$
אם לכל פונקציה $\varphi:|\mathcal{M}|\to|\mathcal{M}|$ $\mathcal{M}(A(\varphi))=T$.
נרשום נוסחה שכל מבנה מקיים אותה אמ"מ הוא בעל עולם סופי.
$$\forall f\,(\forall x\,\forall y\,(x\neq y \to f(x)\neq f(y)) \to \forall x\,\exists y\,(f(y)=x))$$
כלומר מה ש-f חח"ע גורר שהיא על.
כאשר הנוסחה שהיא נכונה אך ורק לקבוצות סופיות
טענה: לקבוצה אינסופית X תמיד יש פונקציה $f: X\to X$ שהיא חח"ע אבל לא על.
אם X אינסופית אפשר למצוא ב-X תת קבוצה Y בת מניה. $X\supseteq\{x_n\}=Y$ ונגדיר $f: X\to X$
באופן הבא:
$$f(x)=\begin{cases} x & x\neq x_i\ \forall i \\ x_{i+1} & x=x_i \end{cases}$$
f חח"ע אבל x_0 לא נמצא בתמונה של X.

(3) בשפה רגילה L (מסדר ראשון) נוסחה A המקיימת: שלכל מבנה M המתאים ל-L
$$\mathcal{M}(A)=T \iff |\mathcal{M}|<\omega$$
הוכחה: נניח כי קיימת A כנ"ל. תהי A_n הנוסחה המקיימת לכל מבנה $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}(A_n)=T \iff |\mathcal{M}|\geq n$
$$A_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i\neq j}(x_i\neq x_j)$$
תהי $\Gamma=\{A\}\cup\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

לכל תת קבוצה סופית $\Gamma' \subseteq \Gamma$ סופית יש N
רק שלכל $n > N$ $A_n \notin \Gamma'$.
אז לכל מבנה M שמקיים $N < |M| < \infty$
יקיים את כל הנוסחאות ב- Γ'.

$$\Gamma' \subseteq \{A\} \cup \{A_n\}_{n=0}^{N}$$

אז $M(A_i) = T$ לכל $n \leq N$ כי $|M| > N$
ו- $M(A) = T$ כי $|M| < \infty$
לכן לפי משפט הקומפקטיות יש מודל M (מבנה)
ומקיים את כל הנוסחאות ב- Γ.
בפרט $M(A) = T$, כלומר $|M| < \infty$. נניח
ש $|M| = N$ אבל אז $M(A_{N+1}) = F$ סתירה.
$\Leftarrow$ לא קיימת נוסחה A כנ"ל. ☺