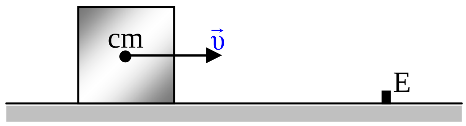
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ (ΚΑΙ ΜΗ) ΣΩΜΑΤΩΝ

1η Ερώτηση

Α₁.Ομογενές στερεό σώμα μάζας Μ και σχήματος κύβου ακμής ℓ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου υ, όταν συγκρούεται με σταθερό εμπόδιο Ε πολύ μικρών διαστάσεων. Το σώμα ανατρέπεται και η γωνιακή του ταχύτητα όταν αρχίζει η περιστροφή του γύρω από το Ε, έχει μέτρο $\omega = \frac{3\upsilon}{4\ell}$.Η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησής του και διέρχεται από το κέντρο μάζας του Ο, είναι $I_{(O)} = \frac{1}{6}M\ell^2$.Εάν η στροφορμή του σώματος ως προς το σημείο Ε, πριν την κρούση, δίνεται από τη σχέση $L_{(E)}=\kappa\, M^{\alpha}\, \upsilon^{\beta}\, \ell^{\gamma}$ (S.I) με α, β, γ πραγματικούς, η τιμή της αδιάστατης θετικής σταθεράς κ είναι

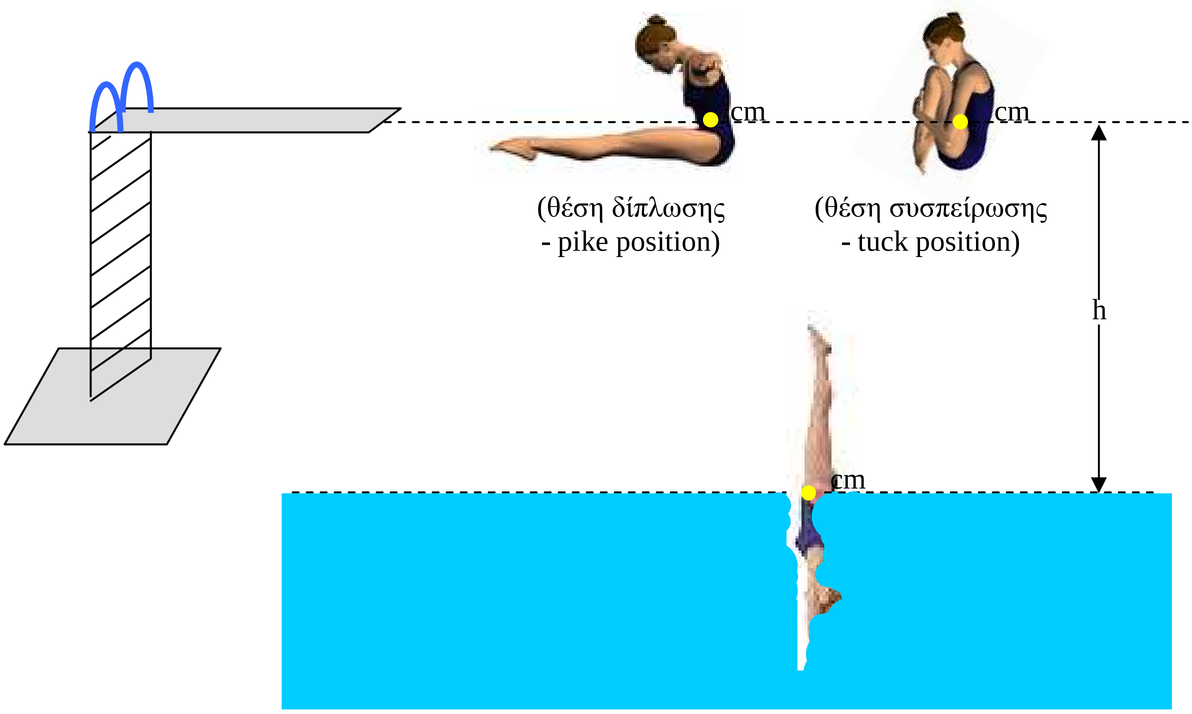


α. 1 **β.** $\frac{1}{2}$ **γ.** 2

Α₂.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2η Ερώτηση

Β₁.Η αθλήτρια των καταδύσεων του σχήματος εκτελεί κατάδυση από την πλατφόρμα ύψους h.Όταν εκτελεί την κατάδυση από τη θέση δίπλωσης (pike position),έχει ροπή αδράνειας I_δ, ενώ όταν την εκτελεί από τη θέση συσπείρωσης (tuck position) έχει ροπή αδράνειας $I_\delta=2I_\sigma$. Η αρχική στροφορμή που δίνει η καταδύτρια στον εαυτό της σε κάθε περίπτωση έχει μέτρο L και οι αντιστάσεις που δέχεται κατά την κίνησή της και την



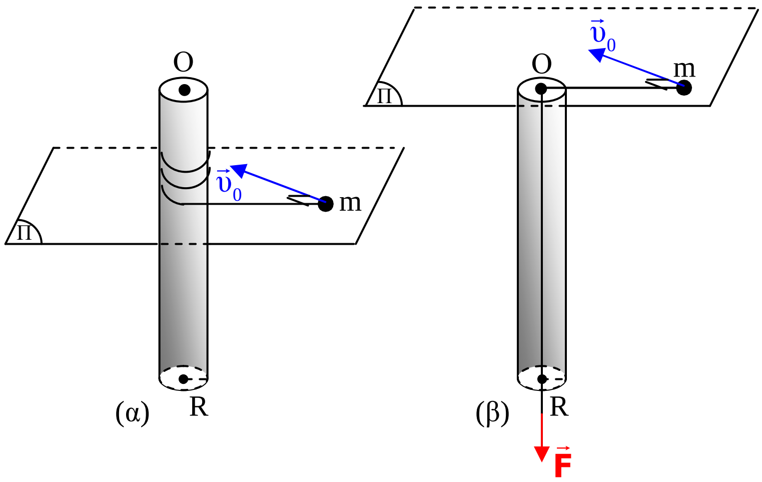
είσοδο της στο νερό θεωρούνται αμελητέες. Εάν το πλήθος των περιστροφών που εκτελεί από τη στιγμή που εγκαταλείπει την πλατφόρμα, δηλαδή το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο ύψος της πλατφόρμας όπου θεωρούμε ότι δεν έχει ταχύτητα και μέχρι την προσυδάτωσή της, δηλαδή, όταν το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του νερού, είναι N_δ για τη θέση δίπλωσης και N_σ για τη θέση συσπείρωσης αντίστοιχα, τότε

α. $\frac{N_\delta}{N_\sigma}=2$ **β.** $\frac{N_\delta}{N_\sigma}=1$ **γ.** $\frac{N_\delta}{N_\sigma}=\frac{1}{2}$

Β₂.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3η Ερώτηση

Γ₁. Ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων με μάζα m έχει συνδεθεί στο ένα άκρο αβαρούς μη εκτατού νήματος το άλλο άκρο του οποίου έχει τυλιχθεί γύρω από σωλήνα ακτίνας R ,όπως φαίνεται στο σχήμα (α).Σε άλλη περίπτωση το σώμα συνδέεται μέσω του ίδιου νήματος με μικρή οπή στο κέντρο O του σωλήνα και το άλλο άκρο του το τραβάμε προς τα κάτω μέσω εξωτερικής δύναμης $\vec{F}$ όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Σε κάθε περίπτωση το ελεύθερο μήκος του νήματος αρχικά είναι ℓ και το σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Προσδίδουμε σε κάθε περίπτωση στο σώμα αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 με διεύθυνση κάθετη στο νήμα με αποτέλεσμα το ελεύθερο μήκος του νήματος σταδιακά να μειώνεται.



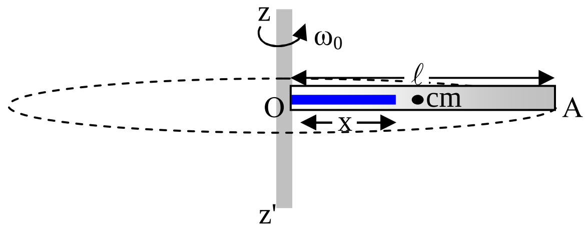
α. Η ενέργεια του σώματος διατηρείται και στις δύο περιπτώσεις , όπως και η ορμή του, ενώ η στροφορμή του σώματος διατηρείται μόνο στη (α) περίπτωση.
β. Η ενέργεια του σώματος διατηρείται μόνο στην (α) περίπτωση, η ορμή του σε καμία περίπτωση και η στροφορμή του μόνο στην (β) περίπτωση.
γ. Η ενέργεια του σώματος διατηρείται μόνο στην (β) περίπτωση, η ορμή του μόνο στη (β) περίπτωση και η στροφορμή του σε κάθε περίπτωση.
Γ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4η Ερώτηση

Δ₁. Για τα μέτρα των ταχυτήτων υ_α και υ_β με τις οποίες το σώμα προσκρούει στο σωλήνα στις περιπτώσεις (α) και (β) αντίστοιχα, ισχύει,
α. $\upsilon_\alpha < \upsilon_0$ και $\upsilon_\beta = \upsilon_0$ **β.** $\upsilon_\alpha = \upsilon_0$ και $\upsilon_\beta > \upsilon_0$ **γ.** $\upsilon_\alpha = \upsilon_\beta = \upsilon_0$
Δ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

5η Ερώτηση

Ε₁. Στο εσωτερικό ενός ομογενούς κοίλου σωλήνα ΟΑ μάζας m και μήκους ℓ και κατά μήκος του άξονά του τοποθετείται λεπτή ομογενής ράβδος μάζας $\frac{m}{2}$ και μήκους x. Προσδίδουμε στο σύστημα γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 και αυτό αρχίζει να περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο και γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο του Ο. Οι τριβές μεταξύ όλων των επιφανειών θεωρούνται αμελητέες και οι ροπές αδράνειας του σωλήνα και της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους είναι αντίστοιχα, $I_\sigma = \frac{1}{12}m\ell^2$ και $I_\rho = \frac{1}{12}\frac{m}{2}x^2$. Για να έχει το σύστημα μόλις εξέρχεται πλήρως η ράβδος από το άκρο Α του σωλήνα γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{\omega_0}{3}$, πρέπει το μήκος της x να είναι

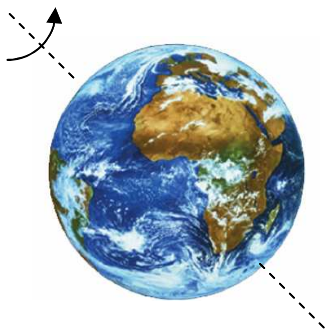


α. ℓ **β.** ℓ ή $\frac{\ell}{2}$ **γ.** ℓ ή $\frac{\ell}{4}$

Ε₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$6^{η}$ Ερώτηση

Στ₁. Η Γη καθώς περιστρέφεται ως προς τον άξονά της (spin) παρουσιάζει ροπή αδράνειας $I=8\cdot10^{37}\ Kg\cdot m^2$. Η περίοδος ιδιοπεριστροφής της (ημερονύκτιο) είναι T=86400s, αλλά λόγω τριβών που οφείλονται σε παλιρροιακά φαινόμενα και σεισμούς ελαττώνεται κάθε έτος (1y= $\pi\cdot10^7$ s) κατά $(\Delta T)_{year}=46,656\cdot10^{-7}$ s.Ο μέσος ημερήσιος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της στροφορμής της Γης λόγω της ιδιοπεριστροφής της $\left(\frac{\overline{\Delta L}}{\Delta t}\right)_{day}$ είναι



α. $-8,64\cdot10^{20}\ \frac{kg\cdot m^2}{s\cdot day}$ **β.** $-0,46656\cdot10^{20}\ \frac{kg\cdot m^2}{s\cdot day}$ **γ.** $-10^{20}\ \frac{kg\cdot m^2}{s\cdot day}$

Στ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$7^{η}$ Ερώτηση

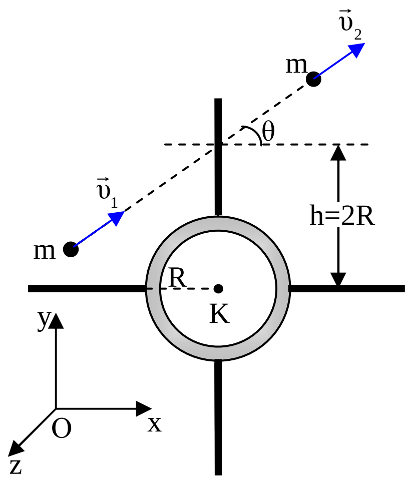
Ζ₁. Ο τροχός του ποδηλάτου του σχήματος με μάζα M=2Kg και ακτίνα R,βρίσκεται υπό επισκευή. Θεωρούμε ότι όλη η μάζα του είναι κατανεμημένη στην περιφέρειά του και η ροπή αδράνειας του ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I=MR^2$.Προσδίδουμε στον τροχό μια αρχική γωνιακή ταχύτητα και αυτός αρχίζει να περιστρέφεται. Σταδιακά λόγω τριβών ο τροχός επιβραδύνεται και κάποια στιγμή από το σημείο Α αποκολλάται ένα μικρό κομμάτι λάσπης, το οποίο κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και φθάνει σε ύψος h_1=0,4m.Τη χρονική στιγμή που ο τροχός συμπληρώνει την επόμενη περιστροφή του, πάλι από το σημείο Α αποκολλάται ένα μικρό κομμάτι λάσπης που αυτή την φορά φθάνει σε ύψος h_2=0,36m.Αν $g=10m/s^2$ και $\pi^2\simeq10$, ο μέσος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της στροφορμής του τροχού στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ των δύο αποκολλήσεων λάσπης $\frac{\overline{\Delta L}}{\Delta t}$, είναι:

α. $-2\pi\cdot10^{-2}\,Kg\cdot m^2/s^2$ **β.** $-4\pi\cdot10^{-2}\ Kg\cdot m^2/s^2$ **γ.** $-\pi\cdot10^{-2}\ Kg\cdot m^2/s^2$

Ζ₂. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$8^{η}$ Ερώτηση

Η₁. Διαστημικός σταθμός μάζας Μ θεωρείται ως ομογενής κυκλική στεφάνη ακτίνας R και ροπής αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σταθμού και είναι κάθετος σ΄αυτόν, $I=MR^2$. Ο σταθμός θεωρείται ακίνητος ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Oxyz του σχήματος και για την ενεργειακή του αυτάρκεια διαθέτει 4 συλλέκτες ηλιακής ενέργειας , όπως φαίνονται στο σχήμα, οι μάζες των οποίων θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με τη μάζα του σταθμού. Μετεωρίτης μάζας m προσκρούει με ταχύτητα μέτρου υ_1 και γωνία $\hat{\theta}$ ως προς την οριζόντια σ' ένα συλλέκτη τον διαπερνά και εξέρχεται από αυτόν με ταχύτητα μέτρου υ_2.Το σημείο πρόσκρουσης του μετεωρίτη απέχει h=2R από το κέντρο του σταθμού και η στροφορμή του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σταθμού, πριν και μετά την πρόσκρουση έχει μέτρο ίσο με αυτό της στροφορμής υλικού σημείου ίσης μάζας που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $h\,\sigma\upsilon\nu\hat{\theta}$. Τα μέτρα της γωνιακής



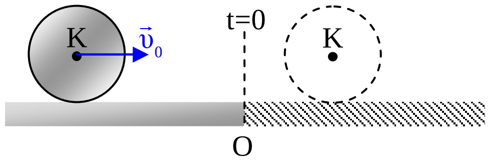
ταχύτητας ω με την οποία στρέφεται ο σταθμός και της ταχύτητας του κέντρου μάζας του σταθμού V μετά την πρόσκρουση του μετεωρίτη, συνδέονται με τη σχέση

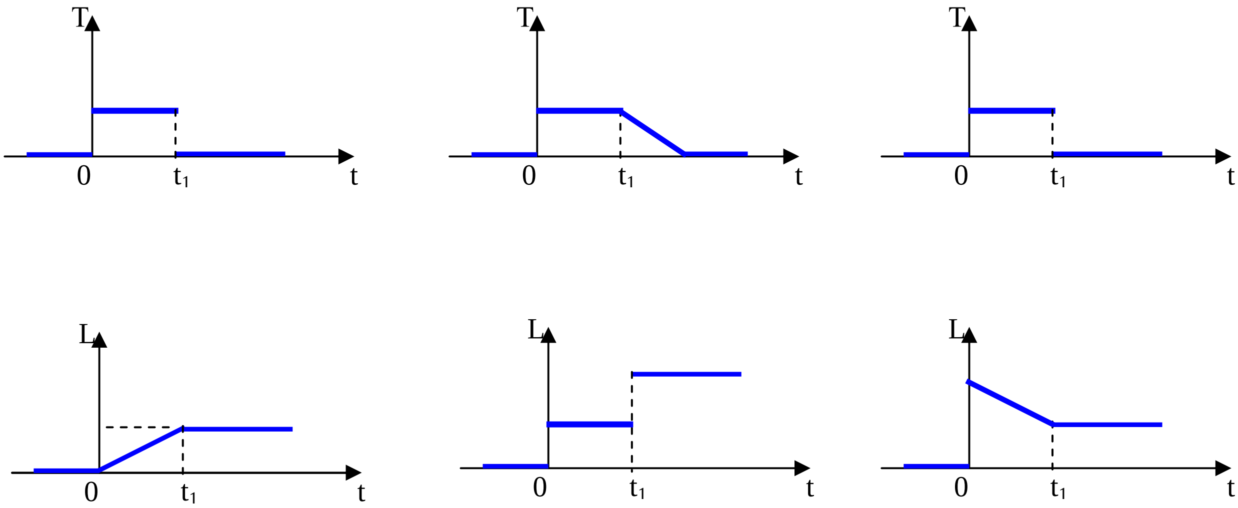
α. $\omega = \dfrac{2V\sigma\upsilon\nu\theta}{MR}$ **β.** $\omega = \dfrac{2V\eta\mu\theta}{MR}$ **γ.** $\omega = \dfrac{2V}{MR}$

Η 2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9η Ερώτηση

Θ1. Η ομογενής και συμπαγής σφαίρα μάζας M του σχήματος αρχικά κινείται, χωρίς να περιστρέφεται, σε λείο οριζόντιο επίπεδο που στο σημείο O μετατρέπεται σε τραχύ άγνωστου συντελεστή τριβής ολίσθησης. Η σφαίρα κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_0 και τη χρονική στιγμή t=0 το σημείο επαφής της με το επίπεδο είναι το O. Στη συνέχεια αρχίζει να περιστρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της K και είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησής της , ως προς τον οποίο έχει ροπή αδράνειας $I=\frac{2}{5}MR^2$. Τα μέτρα της δύναμης τριβής που δέχεται η σφαίρα και της στροφορμής της λόγω της περιστροφής της μεταβάλλονται σε συνάρτηση με το χρόνο όπως φαίνονται στα διαγράμματα:





(α) **(β)** **(γ)**

Θ 2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

10η Ερώτηση

Ι1. Όταν αποκατασταθεί μόνιμη κινητική κατάσταση στη σφαίρα, η τιμή του μέτρου της στροφορμής της είναι:

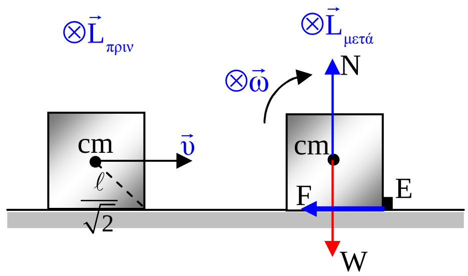
α. $\frac{5}{7}M\upsilon_0 R$ **β.** $\frac{3}{7}M\upsilon_0 R$ **γ.** $\frac{2}{7}M\upsilon_0 R$

Ι 2. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Απαντήσεις

A₁. β

A₂. Από την εξίσωση διαστάσεων για το μέγεθος της στροφορμής στο (S.I), έχουμε ότι L= $kg\cdot\frac{m^2}{s}$ =$M^1υ^1\ell^1$. Από τη δοθείσα έκφραση για τη στροφορμή του σώματος πριν την κρούση, έχουμε: $κ\, M^α\, υ^β\, \ell^γ = M^1 υ^1 \ell^1 \Rightarrow$ α=1, β=1, γ=1. Η έκφραση της στροφορμής του σώματος πριν την πρόσκρουσή του στο εμπόδιο γίνεται $L_{πριν} = κ\, M\, υ\, \ell$ (1).



Κατά την πρόσκρουση του σώματος με το εμπόδιο ισχύει ότι $Στ_{εξ(E)}=0$, διότι $ΣF_y=0$ και η δύναμη F που ασκεί το εμπόδιο στο σώμα δεν έχει ροπή ως προς το E. Η στροφορμή του σώματος πριν και μετά την κρούση διατηρείται:

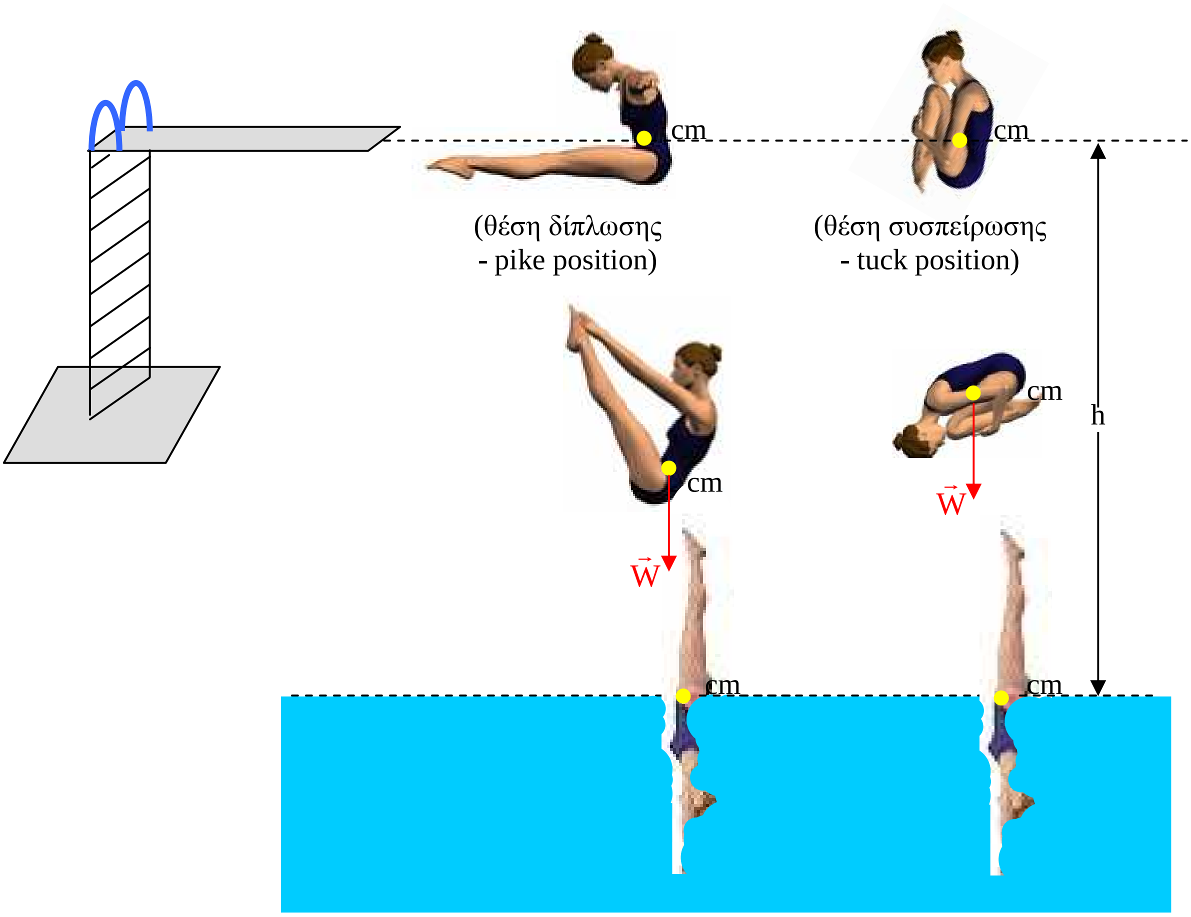
$L_{πριν}=L_{μετά} \overset{(1)}{\Rightarrow} κ\, M\, υ\, \ell = I_{(E)}\cdot ω$ (2).Εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner και έχουμε:

$$I_{(E)} = I_{cm} + M\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{(E)} = \frac{1}{6}M\ell^2 + \frac{M\ell^2}{2} \Rightarrow I_{(E)} = \frac{2}{3}M\ell^2 \quad (3).$$

$$\text{Από (2)} \overset{(3)}{\Rightarrow} κ\, M\, υ\, \ell = \frac{2}{3}M\ell^2\,\frac{3υ}{4\ell} \Rightarrow κ = \frac{1}{2}.$$

B₁. γ

B₂. Η καταδύτρια σε κάθε περίπτωση εκτός από την περιστροφική της κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας της εκτελεί και μεταφορική κίνηση.Η μοναδική δύναμη που επιδρά σ'αυτήν κατά την πτώση της είναι το βάρος W, άρα $Στ_{εξ(cm)}=0$ και η στροφορμή λόγω της περιστροφικής της κίνησης διατηρείται σταθερή σε κάθε περίπτωση: $L = I_δ\cdot ω_δ = I_σ\cdot ω_σ \Rightarrow \frac{ω_δ}{ω_σ} = \frac{I_σ}{I_δ} \Rightarrow \frac{ω_δ}{ω_σ} = \frac{1}{2}$ (1).



Επειδή η καταδύτρια στην κατακόρυφη διεύθυνση εκτελεί ελεύθερη πτώση, ο χρόνος που διαρκεί η πτώση της είναι : $h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ δηλαδή ίδιος σε κάθε περίπτωση.

Ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί σε κάθε περίπτωση μέχρι να μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά h αντίστοιχα είναι: $N_\delta=\omega_\delta\cdot t$ (2) και $N_\sigma=\omega_\sigma\cdot t$ (3).

Από την διαίρεση των (2) και (3) $\frac{N_\delta}{N_\sigma}=\frac{\omega_\delta}{\omega_\sigma}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{N_\delta}{N_\sigma}=\frac{1}{2}$.

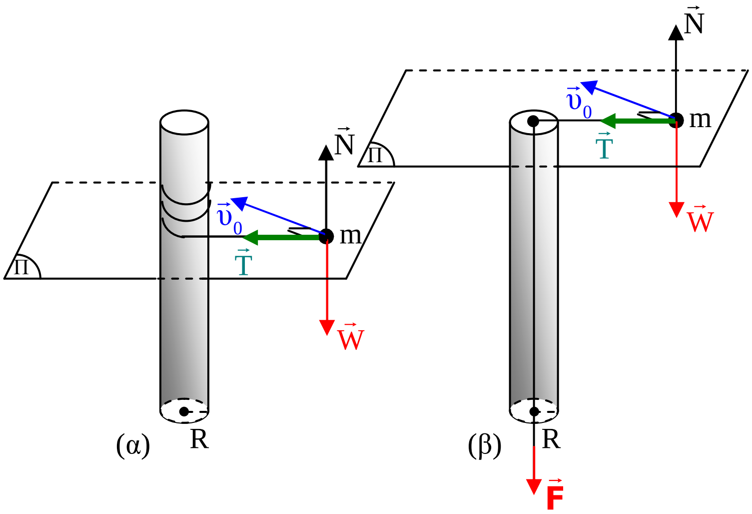
Σχόλια

1. Στην πράξη η ροπή αδράνειας ενός ανθρώπου στη θέση συσπείρωσης μπορεί να ελαττωθεί το πολύ κατά ένα παράγοντα περίπου 3,5.

2. Η τροχιά που διαγράφει στην πραγματικότητα το κέντρο μάζας του αθλητή – τριας είναι παραβολική ,με το σώμα να περιστρέφεται τόσο όσο απαιτείται, ώστε να παραμένει εφαπτόμενο σε αυτή τη τροχιά. Όταν λίγο πριν την είσοδο στο νερό το σώμα εκτείνεται, η ροπή αδράνειας του σε σχέση με αυτήν που είχε όταν με τη μορφή «μπάλας» εκτελούσε τις περιστροφές αυξάνεται, επομένως ελαττώνεται η γωνιακή του ταχύτητα, χωρίς να μηδενίζεται, επειδή εξακολουθεί να έχει στροφορμή. Αυτό δημιουργεί στο παρατηρητή – και στους κριτές που το γνωρίζουν – την εντύπωση (ψευδαίσθηση) ότι το σώμα είναι κατακόρυφο την ώρα που εισέρχεται στο νερό. Η όσο το δυνατόν καλύτερη «κατακορυφοποίηση» τη στιγμή της εισόδου στο νερό, δηλαδή «εξαπάτηση» του θεατή, καθώς και η λιγότερη αναπήδηση νερού, επιβραβεύονται βαθμολογικά.

Γ₁. β

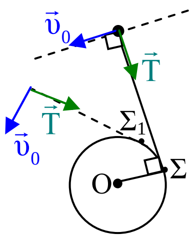
Γ₂. Στο σώμα μάζας m και στις δύο περιπτώσεις επιδρούν οι κατακόρυφες δυνάμεις του βάρους W και η δύναμη N από το οριζόντιο επίπεδο, ενώ στο οριζόντιο επίπεδο της κίνησης η τάση T του νήματος **(Σχήμα 1)**. Επομένως στο οριζόντιο επίπεδο της τροχιάς ισχύει $\Sigma F_{(\varepsilon\xi)}=T\neq 0$, άρα και στις δύο περιπτώσεις η ορμή δεν διατηρείται. Στην (α) περίπτωση η τάση T του νήματος είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα και κατευθύνεται κάθε στιγμή σε διαφορετικό σημείο της επιφάνειας του σωλήνα **(Σχήμα 2)**, άρα έχει ροπή ως προς το κέντρο O του σωλήνα και $\frac{\Delta L}{\Delta t}=\tau_{T(O)}=T\cdot R\neq 0$, δηλαδή η στροφορμή του σώματος μεταβάλλεται



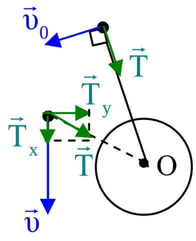
(Σχήμα 1)

Αντίθετα στη (β) περίπτωση η τάση κατευθύνεται διαρκώς στο κέντρο του σωλήνα O **(Σχήμα 3)**, άρα $\frac{\Delta L}{\Delta t}=\tau_{T(O)}=0$,δηλαδή η στροφορμή του σώματος διατηρείται.

Στην (α) περίπτωση η τάση T του νήματος είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα και επομένως δεν παράγει έργο $W_T=0$, από το Θεώρημα Έργου-Ενέργειας $W_T=\Delta K \Rightarrow \Delta K=0$, άρα η κινητική ενέργεια του σώματος παραμένει σταθερή. Αντίθετα στη (β) περίπτωση η τάση T δεν είναι κάθετη στην ταχύτητα, άρα παράγει έργο $dW_T=T_x\cdot dx$ μέσω της συνιστώσας της T_x που έχει τη διεύθυνση της ταχύτητας και από το Θ.Ε.Ε , $dW_T=dK\neq 0$, άρα η κινητική ενέργεια του σώματος μεταβάλλεται.



(Σχήμα 2)



(Σχήμα 3)

Σχόλιο

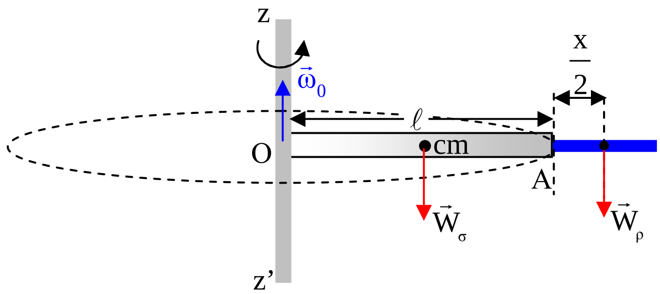
Η απεικόνιση της τροχιάς που διαγράφει το σώμα στην (α) περίπτωση μπορεί να γίνει, αν τοποθετήσουμε πάνω σ΄ ένα φύλλο χαρτί ένα καπάκι αναψυκτικού τυλίξουμε μερικές φορές το νήμα και στην άλλη άκρη του κάνουμε μια θηλιά στην οποία περάσουμε ένα μολύβι. Κρατάμε το μολύβι κατακόρυφο πάνω στο χαρτί, το καπάκι ακίνητο και περιστρέφουμε το μολύβι ,έτσι ώστε το νήμα να τυλίγεται στο καπάκι…ένα πρωτόγονο i.p…

Δ$_1$.β

Δ$_2$. Στην (α) περίπτωση ,όπως ήδη δείξαμε η ταχύτητα του σώματος παραμένει σταθερή, ισχύει $\upsilon_\alpha=\upsilon_0$.
Στην (β) περίπτωση η στροφορμή διατηρείται σταθερή, αν υ_β είναι η ταχύτητα του σώματος ,όταν αυτό κτυπάει στον σωλήνα, $L_{αρχική}=L_{τελική} \Rightarrow m\,\upsilon_0\,\ell = m\,\upsilon_\beta\,R \Rightarrow \upsilon_\beta=\frac{\upsilon_0\ell}{R}$, Αλλά $R<\ell$, άρα $\upsilon_\beta > \upsilon_0$.

*Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και με εφαρμογή του Θ.Ε.Ε

Ε$_1$.β



Ε$_2$. Στο σύστημα σωλήνας –ράβδος επιδρούν ως εξωτερικές δυνάμεις ,οι δυνάμεις των βαρών W_σ και W_ρ ,οι οποίες δεν έχουν ροπές κατά τον άξονα περιστροφής zz΄,όπως και η δύναμη από τον άξονα στη ράβδο. Στη ράβδο δεν ασκούνται δυνάμεις τριβής ούτε και δυνάμεις από τα τοιχώματα του σωλήνα κατά τη διεύθυνση του άξονα του σωλήνα καθώς το σύστημα περιστρέφεται και η ράβδος ολισθαίνει προς το άκρο Α. Η στροφορμή του συστήματος επομένως παραμένει σταθερή, $L_{αρχική}= L_{τελική}$ (1). Η ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής zz΄είναι: $I_{(zz')}=I_{\sigma(zz')}+ I_{\rho(zz')}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Steiner για τον σωλήνα και τη ράβδο για την αρχική θέση της ράβδου και όταν αυτή εξέρχεται πλήρως από τον σωλήνα,

$$I_{(zz')αρχική}=\left(\frac{1}{12}m\ell^2+m\frac{\ell^2}{4}\right)+\left(\frac{1}{12}\frac{m}{2}x^2+\frac{m}{2}\frac{x^2}{4}\right) \Rightarrow I_{αρχική}=\frac{1}{3}m\ell^2+\frac{1}{6}mx^2 \quad (2)$$

$$I_{(zz')τελική}=\frac{1}{3}m\ell^2+\left(\frac{1}{12}\frac{m}{2}x^2+\frac{m}{2}(\ell+\frac{x}{2})^2\right) \Rightarrow I_{τελική}=\frac{5m\ell^2}{6}+\frac{mx^2}{6}+\frac{mx\ell}{2} \quad (3)$$

$$\text{Από (1)} \underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \left(\frac{1}{3}m\ell^2+\frac{1}{6}mx^2\right)\cdot\omega_0=\left(\frac{5m\ell^2}{6}+\frac{mx^2}{6}+\frac{mx\ell}{2}\right)\cdot\frac{\omega_0}{3} \Rightarrow 2x^2-3\ell x+\ell^2=0 \Rightarrow x=\ell \text{ ή } x=\frac{\ell}{2}$$

Παρατήρηση

Όταν προσδίδουμε στο σύστημα την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0, τα υλικά σημεία της ράβδου έχουν την «έμφυτη τάση» να συνεχίσουν να κινούνται στην διεύθυνση της εφαπτομένης των κυκλικών τροχιών τους, με αποτέλεσμα να δέχεται δυνάμεις από τα τοιχώματα του σωλήνα και επιταχυνόμενη να ολισθαίνει προς το άκρο Α. Αντίθετα στην περίπτωση του μηχανικού στερεού «σωλήνας» όπου δεν επιτρέπονται οι σχετικές κινήσεις μεταξύ των υλικών σημείων, η «έμφυτη τάση» των υλικών σημείων να απομακρυνθούν από τον άξονα περιστροφής zz΄, αντισταθμίζεται από τις δυνάμεις ενδομοριακών αλληλεπιδράσεων που παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Στ$_1$. α

Στ$_2$. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της Γης λόγω της ιδιοπεριστροφής της (spin) περί τον άξονά της και με την παραδοχή ότι η ροπή αδρανείας της ως προς τον άξονά της παραμένει σταθερή είναι:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(I\omega) \Rightarrow \frac{dL}{dt}=I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt}=I\frac{d}{dt}(\frac{2\pi}{T}) \Rightarrow \frac{dL}{dt}=I\cdot2\pi(\frac{dT}{dt}) \Rightarrow \frac{dL}{dt}=I\cdot2\pi(-\frac{1}{T^2})(\frac{dT}{dt}) \quad (1).$$

Αν διαιρέσουμε την ετήσια μεταβολή της περιόδου ιδιοπεριστροφής της Γης με τη διάρκεια του έτους θα έχουμε το μέσο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής στη διάρκεια ενός έτους. Με αριθμητική αντικατάσταση στην (1) έχουμε: $\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)=-8\cdot10^{37}\frac{2\pi}{864^2\cdot10^4}(\frac{46,656\cdot10^{-7}}{\pi\cdot10^7}) \Rightarrow \left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)=-10^{16}\,kg\cdot m^2/s^2$.

Αν το ρυθμό αυτόν τον πολλαπλασιάσουμε με τη διάρκεια ενός ημερονυκτίου (Τ=86400s) θα έχουμε το μέσο ημερήσιο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της Γης.

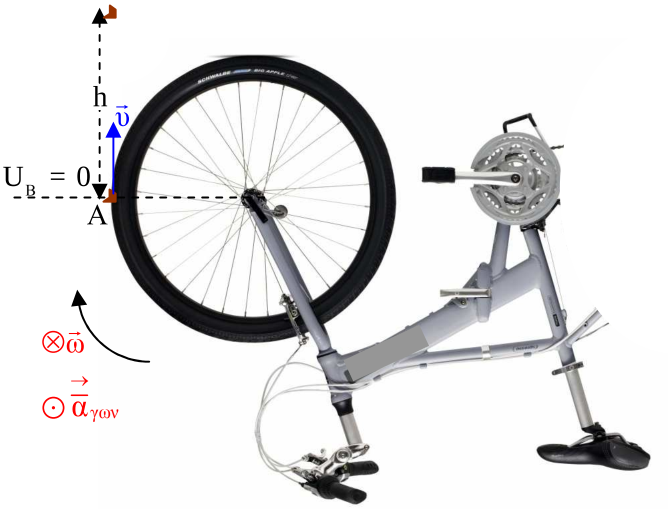
$$\left(\frac{\overline{\Delta L}}{\Delta t}\right)_{day} = (-10^{16})\frac{kg\cdot m^2}{s^2}\cdot(864\cdot 10^2)\frac{s}{day} = -8,64\cdot 10^{20}\frac{kg\cdot m^2}{s\cdot day}$$

Σχόλιο

Μία τυπική τιμή για τη ροπή αδράνειας της Γης είναι $I_Γ=8\cdot 10^{37}$kgm^2 και για τη γωνιακή ταχύτητα λόγω της ιδιοπεριστροφής της οι τυπικές τιμές είναι: $ω_Γ=2\cdot 10^{-5}$ rad/s - $7\cdot 10^{-5}$rad/s. Άρα η στροφορμή της Γης λόγω της ιδιοπεριστροφής της είναι $L= I_Γ\, ω_Γ$ είναι της τάξεως του 10^{32} kg m^2/s. Ο ημερήσιος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\left(\frac{\overline{\Delta L}}{\Delta t}\right)_{day}$ υπολογίστηκε ότι είναι της τάξεως του 10^{20} kg m^2/s^2, δηλαδή η ημερήσια μεταβολή της στροφορμής είναι 12 τάξεις μεγέθους μικρότερη. Έτσι, μπορούμε να θεωρούμε τη στροφορμή της Γης σταθερή και να μιλάμε για διατήρηση της στροφορμής της.

Ζ$_1$. β

Ζ$_2$. Ως μέση γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\overline{α}}_{γων}$ στο χρονικό διάστημα Δt που μεσολαβεί μεταξύ των δύο αποκολλήσεων ορίζουμε τη σταθερή γωνιακή επιτάχυνση σε ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση στην οποία στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt έχουμε την ίδια μεταβολή για τη γωνιακή ταχύτητα.



Στο χρονικό διάστημα Δt ο τροχός έχει στραφεί κατά γωνία φ=2π, επομένως από τις εξισώσεις της αντίστοιχης ομαλά επιταχυνόμενης στροφικής έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} ω_2 &= ω_1 + \overline{α}_{γων}\,Δt \\ φ &= ω_1 Δt + \frac{1}{2}\overline{α}_{γων}\,Δt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{α}_{γων} = \frac{ω_2^2 - ω_1^2}{2φ} \quad (1)$$

Κάθε φορά που αποκολλάται από το σημείο Α ένα κομμάτι λάσπης, αυτό κινείται προς τα πάνω μόνο υπό την επίδραση του βάρους. Η μηχανική του ενέργεια διατηρείται: $\frac{1}{2}mυ^2 = mgh \Rightarrow υ = \sqrt{2gh}$.

Άρα οι ταχύτητες του πρώτου και δεύτερου κομματιού λάσπης είναι αντίστοιχα $υ_1 = \sqrt{2gh_1}$ (2) και $υ_2 = \sqrt{2gh_2}$ (3). Επειδή τα κομμάτια λάσπης κάθε φορά εγκαταλείπουν τον τροχό με την γραμμική (επιτρόχιο) ταχύτητα του σημείου Α, για τις αντίστοιχες τιμές γωνιακής ταχύτητας του τροχού τις χρονικές στιγμές που γίνονται οι αποκολλήσεις έχουμε: $ω_1 = \frac{υ_1}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} ω_1 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{R}$ (4) και

$$ω_2 = \frac{υ_2}{R} \overset{(2)}{\Rightarrow} ω_2 = \frac{\sqrt{2gh_2}}{R} \quad (5)$$

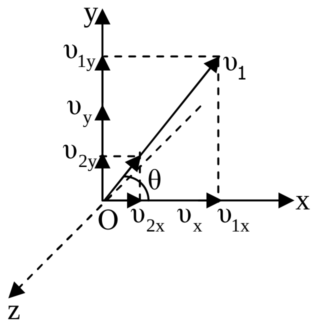
$$\text{Από (1)} \underset{(5)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} \overline{α}_{γων} = \frac{2g(h_2 - h_1)}{2(2π)R^2} \Rightarrow \overline{α}_{γων} = \frac{g(h_2 - h_1)}{2πR^2} (6).$$

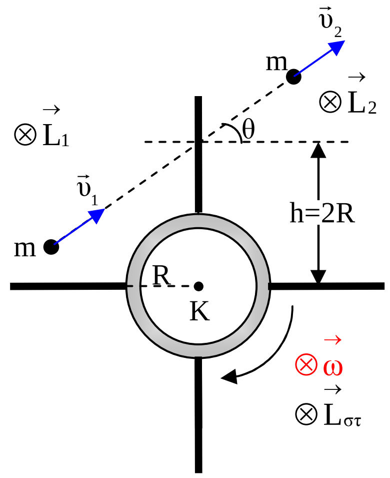
Ο μέσος ρυθμός μεταβολής του μέτρου της στροφορμής του τροχού μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή των δύο εκφράσεων του νόμου της στροφικής κίνησης : $\frac{\overline{ΔL}}{Δt} = \overline{τ}_{εξ} = I\,\overline{α}_{γων} \overset{(6)}{\Rightarrow} \frac{\overline{ΔL}}{Δt} = MR^2\frac{g(h_2 - h_1)}{2πR^2} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{ΔL}}{Δt} = \frac{Mg(h_2 - h_1)}{2π} \Rightarrow \frac{\overline{ΔL}}{Δt} = -\frac{0,4}{π} = -4π\cdot 10^{-2}\ Kg\cdot m^2/s^2$$

Η₁.α

Η₂. Κατά την ανελαστική κρούση του μετεωρίτη με τον διαστημικό σταθμό ισχύει $\Sigma\vec{F}_{εξ}=0$ και $\Sigma\vec{\tau}_{εξ}=0$, άρα η ορμή και η στροφορμή του συστήματος μετεωρίτης – διαστημικός σταθμός κατά την κρούση διατηρούνται. Αναλύουμε τις ταχύτητες του μετεωρίτη πριν και μετά την κρούση $\vec{υ}_1$ και $\vec{υ}_2$ αντίστοιχα καθώς και την ταχύτητα V που θα αποκτήσει ο σταθμός μετά την κρούση και από την διατήρηση της ορμής στους άξονες Ox και Oy υπολογίζουμε τις συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του κέντρου μάζας του σταθμού μετά την κρούση.





$$Ox: \quad \vec{P}_{πριν,x}=\vec{P}_{μετά,x}\overset{+\rightarrow}{\Rightarrow} mυ_1συνθ = mυ_2συνθ + MV_x \Rightarrow V_x=\frac{m(υ_1-υ_2)συνθ}{M} \quad (1)$$

$$Oy: \quad \vec{P}_{πριν,y}=\vec{P}_{μετά,y}\overset{\uparrow +}{\Rightarrow} mυ_1ημθ = mυ_2ημθ + MV_y \Rightarrow V_y=\frac{m(υ_1-υ_2)ημθ}{M} \quad (2)$$

Η ταχύτητα V του κέντρου μάζας του σταθμού μετά την κρούση έχει μέτρο : $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}}$

$$\vec{V}=\sqrt{\frac{m^2(υ_1-υ_2)^2}{M^2}(συν^2θ+ημ^2θ)} \Rightarrow V=\frac{m(υ_1-υ_2)}{M} \quad (3)$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος μετεωρίτης – σταθμός και με δεδομένο ότι τα διανύσματα των στροφορμών πριν και μετά την κρούση έχουν τη διεύθυνση του άξονα Oz και φορά όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα :

$$L_{ολ,πριν}=L_{ολ,μετά}\overset{\overset{+}{\otimes}}{\Rightarrow} mυ_1hσυνθ = mυ_2hσυνθ + MR^2\omega \Rightarrow \omega=\frac{m(υ_1-υ_2)hσυνθ}{MR^2} \quad (4)$$

$$\text{Από } (3)\overset{(4)}{\Rightarrow} \omega=\frac{Vhσυνθ}{R^2} \Rightarrow \omega=\frac{V2Rσυνθ}{R^2} \Rightarrow \omega=\frac{2Vσυνθ}{R}$$

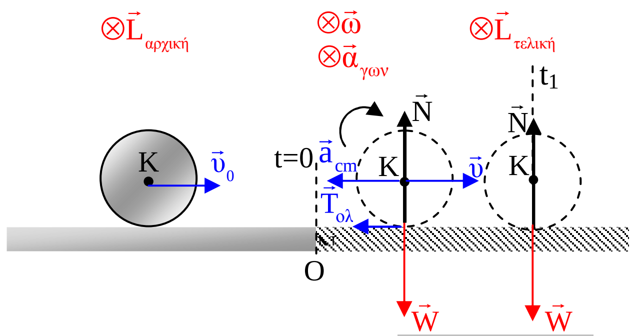
Παρατήρηση

Η σχέση (3) μπορεί να προκύψει πιο απλά, αν εκμεταλλευτούμε τη διατήρηση της ορμής στη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $\vec{υ}_1$,η οποία είναι ίδια με αυτή της $\vec{υ}_2$, με αποτέλεσμα η απαίτηση να είναι διανυσματικά ίσες οι ορμές πριν και μετά την κρούση, να επιβάλλει και η $\vec{V}$ να έχει την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $(\vec{υ}_1-\vec{υ}_2)$:

$\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετά} \Rightarrow m\vec{υ}_1=m\vec{υ}_2+M\vec{V} \Rightarrow m(\vec{υ}_1-\vec{υ}_2)=M\vec{V} \Rightarrow V=\dfrac{m(υ_1-υ_2)}{M}$, αλλά, όταν βλέπουμε μη μετωπική κρούση έχουμε συνηθίσει να θεωρούμε την ανάλυση των διανυσμάτων επιβεβλημένη…

Θ₁. α

Θ₂. Όταν η σφαίρα αρχίζει να κινείται στο τραχύ επίπεδο με την επίδραση της ροπής της τριβής ολίσθησης αρχίζει να περιστρέφεται και εκτελεί κύλιση με ολίσθηση. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την μεταφορική κίνηση της σφαίρας και για τα μέτρα των διανυσμάτων έχουμε: $T_{ολ}=Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm}=\dfrac{T_{ολ}}{M}$ (1).



Αντίστοιχα από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την στροφική κίνηση της σφαίρας θεωρώντας ως θετική τη φορά της ροπής της $T_{ολ}$ έχουμε:

$$T_{ολ} \cdot R = \frac{2}{5} MR^2 α_{γων} \Rightarrow α_{γων} = \frac{5T_{ολ}}{2MR} \ (2).$$

Από την ομαλά επιταχυνόμενη (a_{cm} <0) μεταφορική κίνηση της σφαίρας: $υ_{cm} = υ_0 - a_{cm} t$ (3).

Από την ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση της σφαίρας: $ω = α_{γων} t$ και (4) $υ_{γρ} = α_{γων} Rt$ (4α)

Από τις σχέσεις (3) και ($4^α$) προκύπτει ότι κάποια χρονική στιγμή t_1 η ελαττούμενη $υ_{cm}$ θα γίνει ίση με την αυξανόμενη $υ_{γρ}$, τότε η σφαίρα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς ολίσθηση και επειδή το σημείο επαφής της ως προς το επίπεδο είναι ακίνητο, μηδενίζεται η δύναμη της τριβής και στη συνέχεια η σφαίρα θα κινείται και θα περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα και σταθερή γωνιακή ταχύτητα αντίστοιχα. Άρα η δύναμη τριβής στη σφαίρα στο χρονικό διάστημα 0- t_1 είναι σταθερή και ίση με την τριβή ολίσθησης $T_{ολ}$, ενώ μετά τη χρονική στιγμή t_1 μηδενίζεται. Αντίστοιχα από τη σχέση $L=Iω \Rightarrow L=I\,α_{γων} t$ προκύπτει ότι η στροφορμή της σφαίρας στο χρονικό διάστημα 0- t_1 αυξάνεται γραμμικά και στη συνέχεια παραμένει σταθερή, διότι η γωνιακή επιτάχυνση μηδενίζεται.

I$_1$. γ

I$_2$. Όταν αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση της σφαίρας :

$$υ_{cm} = υ_{γρ} \underset{(4α)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} υ_0 - a_{cm} t_1 = α_{γων} R t_1 \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} υ_0 - \frac{T_{ολ}}{M} t_1 = \frac{5T_{ολ}}{2MR} R t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2Mυ_0}{T_{ολ}} \ (5).$$

$$\text{Από } (4) \underset{(5)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} ω_{(t_1)} = \frac{5υ_0}{7R}. \ (6)$$

Η στροφορμή της σφαίρας από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά παραμένει σταθερή και έχει μέτρο ίσο με

$$L = Iω_{(t_1)} \overset{(6)}{\Rightarrow} L = \frac{2}{5} MR^2 \frac{5υ_0}{7R} \Rightarrow L = \frac{2}{7} Mυ_0 R .$$