HALMAZOK

Képek forrása: www.mozaweb.hu

A halmaz fogalma

A „*halmaz*" és a „*halmaz eleme*" alapfogalom (azaz nem definiáljuk).

A halmazok jele (általában) nyomtatott nagybetű.
pl. *A*, *B*, *C*.

Az *x eleme* az *A* halmaznak: $x \in A$

Az *y nem eleme* az *A* halmaznak: $y \notin A$

Halmazelmélet — Kiss Szabolcs ©

A halmaz fogalma

Halmazokat kétféleképpen adhatunk meg.

1. Felsorolással:

Az *A* halmaz az a, b, c elemekből áll: **A = {a;b;c}**

Pl.:
M = {a;á;e;é;i;í;o;ó;ö;ő;u;ú;ü;ű}
A = {1; 2; 3; 4}

***Megjegyzés:* A halmazban egy elemet csak egyszer sorolunk fel, és a felsorolás sorrendje nem számít.**

2. Az elemek közös tulajdonságával:

Pl:
M = {A magyar ábécé magánhangzóinak halmaza.}
$A = \{x | 0 < x < 5; x \in \mathbb{N}\}$

Halmazelmélet — Kiss Szabolcs ©

A halmaz fogalma

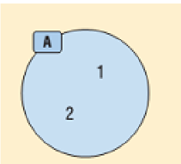
Definíció: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemei.

Jelölése: $A = B$

Pl.:
A = {Egyjegyű pozitív egész számok halmaza}
B = {10-nél kisebb pozitív egész számok halmaza}

***Megjegyzés:* A halmazokat szemléltethetjük Venn-diagrammal.**

$A = \{1; 2\}$



Halmazelmélet — Kiss Szabolcs ©

A halmaz fogalma

1. mintapélda: Soroljuk fel az elemeit az alábbi halmazoknak!

$A = \{\text{Egyjegyű pozitív egész számok halmaza}\}$

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$B = \{\text{A hét napjai}\}$

$B = \{\text{hét.}; \text{kedd}; \text{szer.}; \text{csüt.}; \text{pén.}, \text{szom.}; \text{vas.}\}$

$C = \{10 \text{ pozitív osztói}\}$

$C = \{1; 2; 5; 10\}$

$D = \{3 \text{ pozitív többszörösei}\}$

$D = \{3; 6; 9; \dots\}$ ⟶ Nem tudjuk felsorolni az összest

$E = \{\text{Kettővel nem osztható páros számok}\}$

$E = \{\}$ ⟶ Nincs a halmaznak eleme

Halmazelmélet — Kiss Szabolcs ©

1) Soroljuk fel a következő halmazok elemeit!

a) 31 napos hónapok halmaza

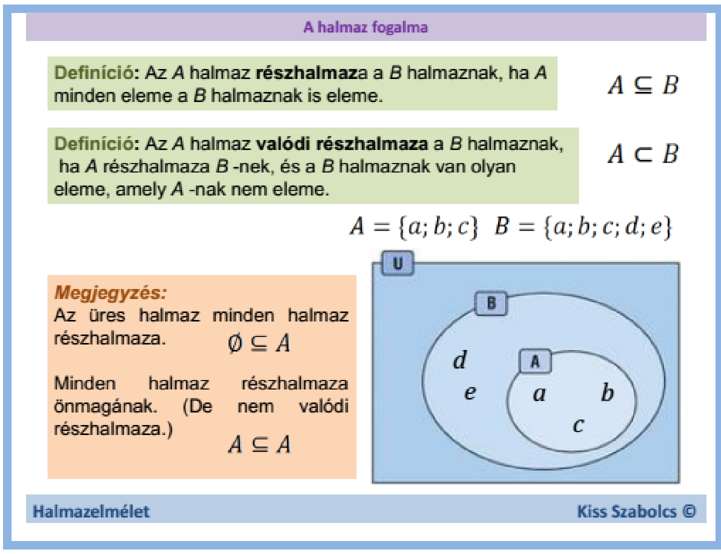
b) 32 napos hónapok halmaza

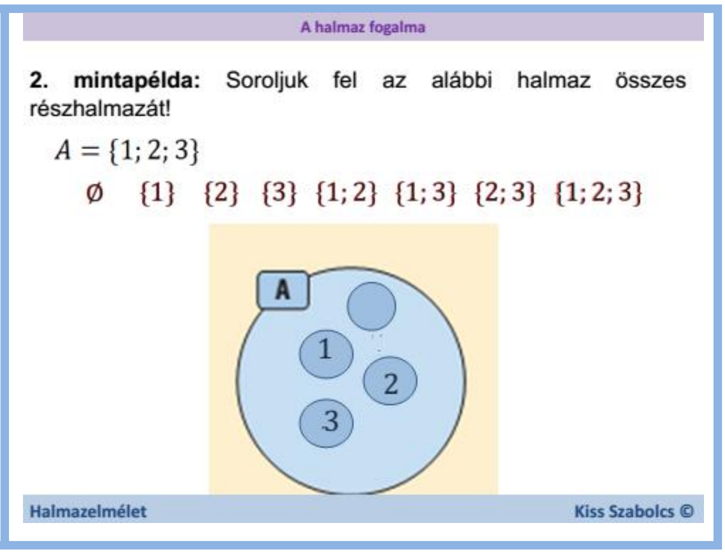
c) azoknak a hónapoknak a halmaza, melyek neve tartalmaz *r* betűt

A halmaz **véges halmaz**, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk.

A halmaz **végtelen halmaz**, ha elemeinek száma nem adható meg egy természetes számmal.

A 0 elemű halmazt ***üres halmaznak*** nevezzük, jele: Ø.





2) Soroljuk fel a következő halmazok összes részhalmazát!

a) {3; 5} b) {●; ■; ▲} c) {♥;♠;♦;♣}

SZÁMHALMAZOK:

a pozitív egész számok halmaza $\mathbb{N}^+$

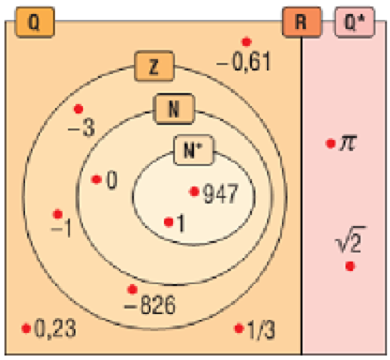
a természetes számok halmaza $\mathbb{N}$

az egész számok halmaza $\mathbb{Z}$

a racionális számok halmaza $\mathbb{Q}$

az irracionális számok halmaza $\mathbb{Q}^*$

a valós számok halmaza $\mathbb{R}$



3) Melyik igaz, melyik hamis?

a) $N \subset Q$ b) $R \subset I$ c) $N \subset R$ d) $Z \subset Q$ e) $N \subset Q \subset R$ f) $I \subset Z$

4) Adjuk meg az alábbi halmazokat felsorolással!

a) A = {egyjegyű prímszámok halmaza}

b) B = {legfeljebb kétjegyű négyzetszámok}

5) Soroljuk fel a következő halmazok összes részhalmazát!

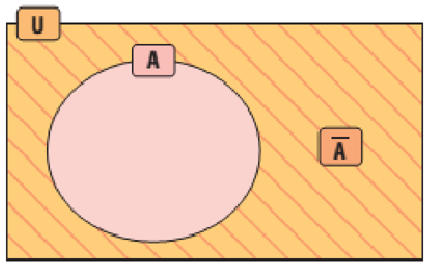
a) {0} b) {0;1} c) {0; 1; 2}

Halmazműveletek

DEFINÍCIÓ: Azt a halmazt, amelynek a vizsgált halmazok részhalmazai, **alaphalmaznak** (vagy univerzumnak) nevezzük.

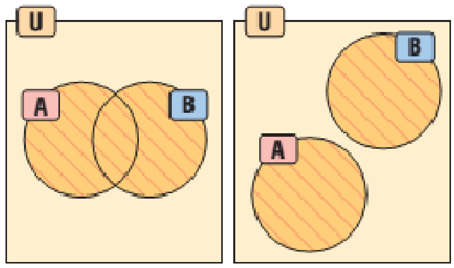
DEFINÍCIÓ: Egy *A* halmaz **komplementer halmaz**ának az alaphalmaz azon elemeinek halmazát nevezzük, amelyek az *A* halmaznak nem elemei.

$$\bar{A}$$



DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **uniója** vagy **egyesítése** mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei.

$$A \cup B$$

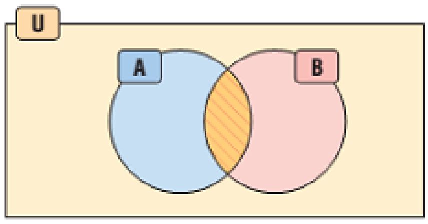


DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **metszete** vagy közös része pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindegyik halmaznak elemei.

$$A \cap B$$

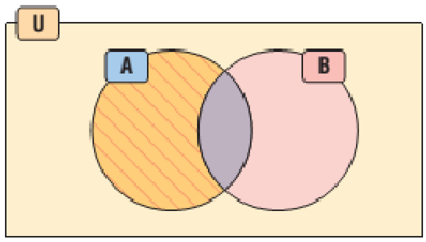
DEFINÍCIÓ: Két halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük, vagyis a metszetük üres halmaz.

$$A \cap B = \emptyset$$



DEFINÍCIÓ: Az *A* és *B* halmaz **különbség**e az *A* halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a *B* halmaznak *nem elemei*.

$$A \setminus B$$

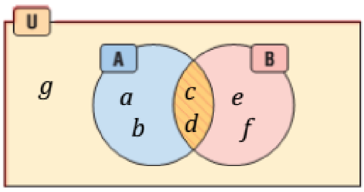


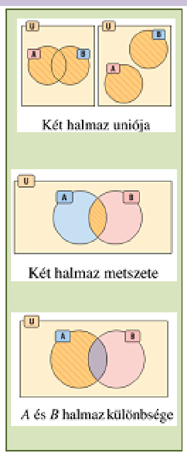
3. mintapélda:
Legyen $U = \{a; b; c; d; e; f; g\}$,
$A = \{a; b; c; d\}$ és $B = \{c; d; e; f\}$.
Ábrázoljuk Venn-diagrammal a halmazokat, és soroljuk fel a következő halmazok elemeit!

$\bar{A} = \{e; f; g\}$ $\quad$ $\bar{B} = \{a; b; g\}$

$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$ $\quad$ $A \cap B = \{c; d\}$

$A \setminus B = \{a; b\}$ $\quad$ $B \setminus A = \{e; f\}$





4. mintapélda:
Legyen $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$,
$A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$ $C = \{4; 6; 7\}$.
Ábrázoljuk Venn-diagrammal a halmazokat, és soroljuk fel a következő halmazok elemeit!

$\bar{A} = \{5; 6; 7; 8\}$

$\bar{B} = \{1; 2; 7; 8\}$

$\bar{C} = \{1; 2; 3; 5; 8\}$

$A \cap B \cap C = \{4\}$

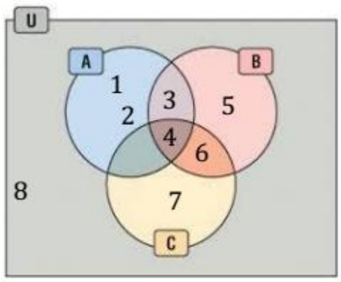
$A \cap C = \{4\}$

$B \cap C = \{4; 6\}$

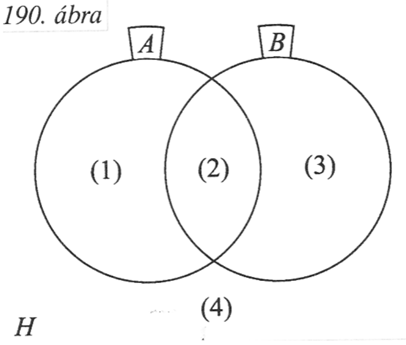
$A \cup \bar{C} = \{1; 2; 3; 4; 5; 8\}$

$B \cap \bar{C} = \{3; 5\}$

$A \cap C \setminus B = \emptyset$



6) Adott a H alaphalmaz, valamint két halmaz, A és B. Venn-diagramjukon (1), (2), (3), illetve (4)-gyel jelöltük az egyes tartományokat. Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az egyes halmazok!



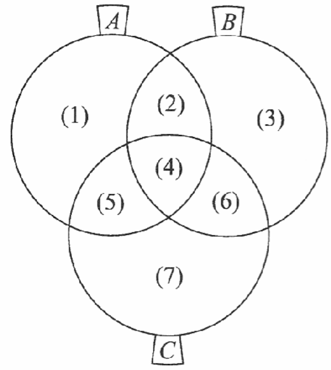
190. ábra

a) A b) B c) $A \cap B$ d) $A \cup B$

e) A\B f) B\A g) $\overline{A}$ h) $\overline{B}$

i) $\overline{A \cap B}$ j) $\overline{A \cup B}$ k) $\overline{\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}}$ l) $\overline{\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}}$

7) Adott három halmaz, A, B és C. Venn-diagramjukon (1), (2), ..., (7)-tel jelöltük az egyes tartományokat. Határozzuk meg, hogy mely tartományokból állnak az egyes halmazok!



a) B b) $A \cap C$

c) $B \cup C$ d) $A \cap B \cap C$

e) A\B

8) Legyen U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, A = {2; 4; 6; 7} és B = {1; 3; 5; 6; 7}. Ábrázoljuk Venn-diagrammal a halmazokat, és adjuk meg a következő halmazokat!

a) $\overline{A}$ b) $\overline{B}$ c) $A \cap B$ d) $A \cup B$ e) A\B f) B\A g) $\overline{A \cap B}$ h) $\overline{A \cup B}$

9) Határozzuk meg az A és B halmazokat, ha tudjuk, hogy A ∪ B = {5; 6; 7; 8; 9; 10}, A\B = {8; 9; 10} és A ∩ B={5}!

10) Adottak az A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, B = {4; 5; 6; 7; 8; 9}, C = {2; 4; 6; 8; 10; 12} halmazok. Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal!

11) Legyen U = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, A = {1; 3; 4; 5; 7}, B = {2; 3; 4; 5; 6} és C = {0; 2; 4; 6; 8; 9}. Ábrázoljuk a halmazokat Venn-diagramon, és adjuk meg a következő halmazok elemeit!

a) $A \cap B$ b) $A \cap B$ c) $B \cap C$ d) $A \cap B \cap C$

e) $A \cup B$ f) $B \cup C$ g) $\overline{A}$ h) $\overline{B}$ i) $\overline{C}$

Halmazok elemszáma, logikai szita

DEFINÍCIÓ: Egy A **halmaz számossága** az A halmaz elemeinek számát jelenti.
(Egy halmaz számossága lehet véges vagy végtelen.)

$|A|$

Pl.:

$A = \{3\}$ $\quad B = \{3;5\}$ $\quad C = \{a;b;c\}$

$|A| = 1$ $\quad |B| = 2$ $\quad |C| = 3$

$|\mathbb{R}| = \infty$ $\quad |\emptyset| = 0$

LOGIKAI SZITA:

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

12) Egy üzemrészben 16-an sportolnak rendszeresen, 14-en úszni járnak, 8-an pedig asztaliteniszeznek. (Más sporttal senki sem foglalkozik.) Hányan űzik mindkét sportot?

13) Egy 30 fős osztályban tizenöten tanulnak zongorázni, hatan hegedülni, és ketten zongorázni és hegedülni is. Hányan vannak az osztályban, akik se zongorázni, se hegedülni nem tanulnak?

14) Egy iroda 12 dolgozója közül heten tudnak hagyományos írógépen gépelni, nyolcan értenek a szövegszerkesztőhöz, és öt olyan alkalmazott van, aki mindkettőn ügyesen dolgozik. Aki egyik géptípushoz sem ért, az foglalkozik a postázással. Hány ilyen alkalmazottja van az irodának?

15) Egy osztály 28 tanulója közül 8-an felvételiznek matematikából, 6-an fizikából, 4 tanuló matematikából és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem?

16) Egy 12 fős küldöttségben 7-en beszélnek franciául, 4-en németül, egy ember beszél franciául és németül. Hány olyan ember van a küldöttségben, aki semelyik nyelvet sem beszéli?

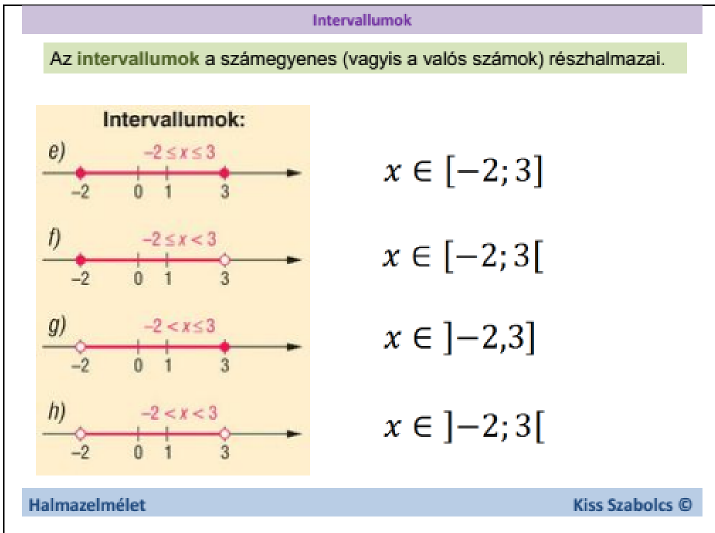
17) Egy kertész azzal dicsekszik, hogy 100 rózsabokra közül 34 rózsaszínű, 42 lila és 33 fehér virágot hoz. A fenti tövek közül 3 olyan van, mely mindhárom színben pompázik. 7 tövön végzett el olyan keresztezést, hogy azok egyidejűleg rózsaszín és lila virágokat hoznak, 8 tő fehér és lila, míg 6 rózsaszín és fehér virágú. A kertészetben hány olyan rózsabokor van, melynek virágai a fenti színektől eltérőek?

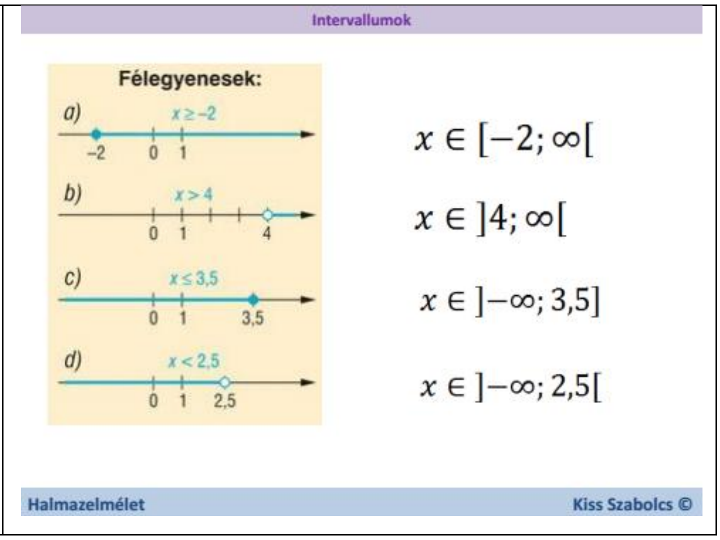
18) Egy 37 fős zenei osztályban hány olyan tanuló van, aki egyéb hangszeren játszik, ha 21-en zongoráznak, 11-en hegedülnek, és 16-an fuvoláznak, és tudjuk, hogy mindhárom hangszeren 3 tanuló játszik, 5-en hegedülnek és zongoráznak, 7 tanuló zongorázik és fuvolázik, valamint 4-en hegedülnek és fuvoláznak?

Számegyenesek, intervallumok

Számegyenes: olyan egyenes, melyen kijelölünk egy irányt és két pontot, melyekhez számokat rendelünk

A számegyenes minden pontjához egyértelműen tartozik egy valós szám.





19) Ábrázoljuk számegyenesen a valós számok azon részhalmazát, amelyek megfelelnek az alábbi feltételeknek!

a) $x < 3$ b) $x \leq 3$ c) $x > 5$ d) $x \geq 5$ e) $3 < x < 5$ f) $3 \leq x < 5$

g) x legfeljebb 1 h) x legalább -2 i) x legalább -2 és legfeljebb 1

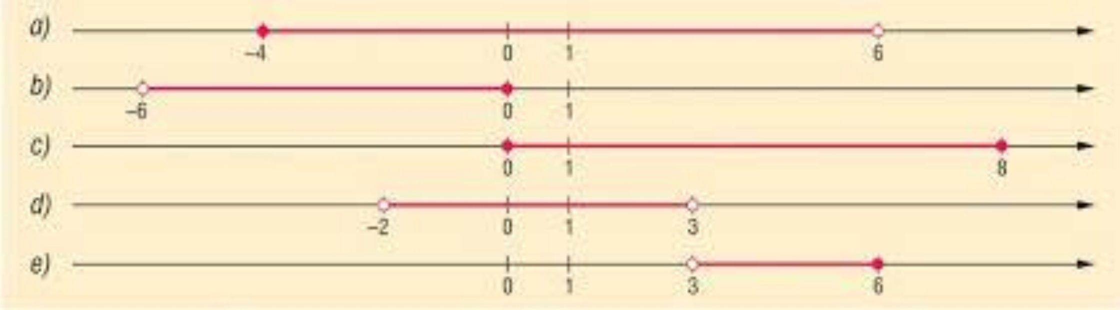
j) *x* maximum 8 k) *x* minimum 5 l) *x* nem kisebb 8-nál

m) *x* nem nagyobb 5-nél

20) Ábrázoljuk számegyenesen a következő intervallumokat!

a) [-5;3] b)]0;6] c) [40;70[d)]2000; 5000[e)]-4,5;-4]

21) Adjuk meg intervallumjelöléssel a számegyenesen látható intervallumokat!



22) Vegyük fel a számegyenesen az alábbi két intervallumot!

Adjuk meg az $A \cup B$-t, az $A \cap B$-t, az A\B-t és a B\A-t!

a) A =]-5;3] és B = [1; 6]

b) A = [1; 7[és B =]5; 8]

c) A = [6; 10[és B = [8; 13[

Hasznos Weboldalak:

Magyarázó videók és online tesztek

http://zanza.tv/matematika/gondolkodasi-es-megismeresi-modszerek/halmazelmelet

http://zanza.tv/matematika/gondolkodasi-es-megismeresi-modszerek/halmazmuveletek

http://zanza.tv/matematika/gondolkodasi-es-megismeresi-modszerek/szamhalmazok-es-intervallumok

Érettségi feladatok a számelmélet témaköréből.

http://studiumgenerale.hu/images/erettsegi/matek_temakor/k_mat_halm_fl.pdf

http://studiumgenerale.hu/images/erettsegi/matek_temakor/k_mat_halm_ut.pdf

Egy digitális tankönyvkiadó online segédanyaga

https://www.mozaweb.hu/Lecke-MAT-Sokszinu_matematika_9-2_Halmazok-100896