Síkgeometria

http://zanza.tv/matematika/geometria

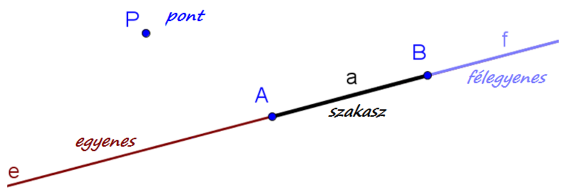
Ponthalmazok

Alapfogalmak:

pont (nincs kiterjedése; általában nagy betűvel jelöljük)

egyenes (végtelen hosszú; általában kis betűvel jelöljük)

sík (végtelen kiterjedésű)

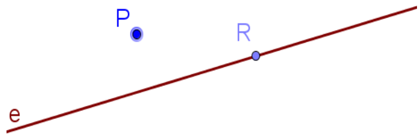


Egy egyenest egy pontja két **félegyenesre** bontja.

(jelölés: kis betűkkel. Pl.: *f*)

Egy egyenes két pontja meghatároz egy **szakaszt**.

(jelölés: vagy a szakasz végpontjaival Pl.: AB vagy kisbetűvel: Pl.: *a*)



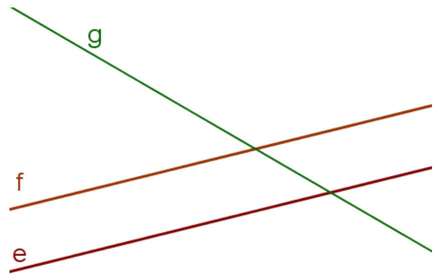
Ponthalmazok kölcsönös helyzete:

Egy pont vagy **illeszkedik** egy egyenesre vagy nem.

Jel.: $R \in e \quad P \notin e$

Két egyenes vagy **metszi** egymást vagy **párhuzamos** egymással.

Párhuzamosság jele: $e \parallel f$



Ponthalmazok távolsága:

Két ponthalmaz **távolsága**: a ponthalmaz pontjait összekötő szakaszok közül a legrövidebb (ha létezik ilyen) hossza. *Jele*: d

Egymásra illeszkedő, illetve egymást metsző ponthalmazok távolsága 0.

Két pont távolsága: a két pontot összekötő szakasz hossza.

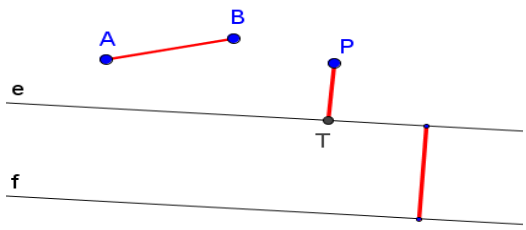
Jel.: *d*(A; B)

Pont és egyenes távolsága: a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

Jel.: *d*(P; e)

Párhuzamos egyenesek távolsága: a párhuzamos egyenesek közé húzható merőleges szakasz hossza.

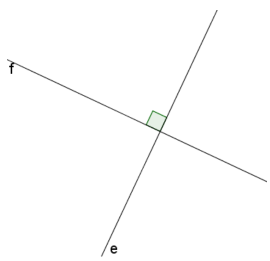
Jel.: *d*(e; f)



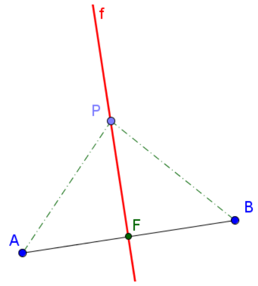
Merőlegesség és szakaszfelezés:

Két metsző egyenes **merőleges**, ha a síkot négy egybevágó síkrészre bontja.

Jel.: $e \perp f$

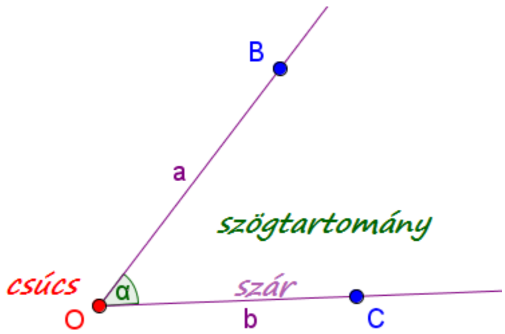


A szakaszfelező merőleges: azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak.
A szakaszfelező merőleges merőleges a szakaszra és felezi azt.:
$f \perp AB$ és $AF = BF$



Szögek

A szög: Két közös kezdőpontú félegyenes a síkot két részre osztja. Ezeket **szögtartományoknak** nevezzük. A két félegyenes közös kezdőpontja (ábránkon az *O* pont) a szög **csúcsa**, a két félegyenes (*a* és *b*) a szög két **szára**.



Jelölés: a görög ábécé kis betűivel.

α - alfa **β - béta** **γ - gamma**

δ - delta **ε - epszilon** **ω -- omega**

Vagy a csúcs és szögszárak egy-egy pontjának segítségével:
$COB\sphericalangle$

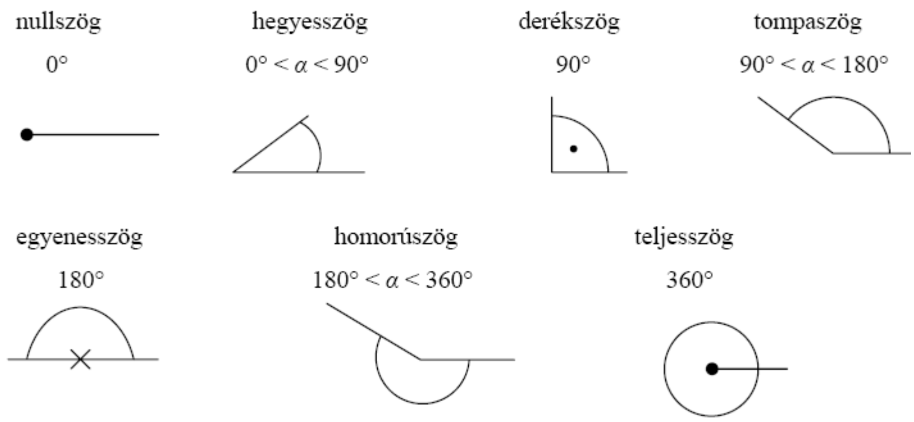
A szögek mérése

A szögmérés egysége:	**a fok.**	***Jele*: °**	
Kisebb egységei:	**a szögperc**	***Jele*: ′**	**1° = 60′**
	a szögmásodperc	***Jele*: ″**	**1′= 60″**
A szögmérés másik egysége:	**a radián**	***Jele*: π**	**π = 180°**

1) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit.

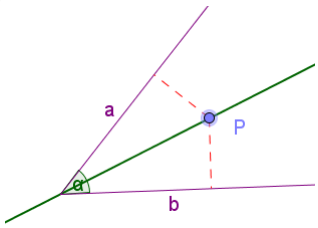
fok	radián	fok	radián	fok	radián	fok	radián
90°	$\frac{\pi}{2}$	180°	π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
60°	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	240°			$\frac{5\pi}{3}$
45°		135°			$\frac{5\pi}{4}$	315°	
30°			$\frac{5\pi}{6}$	210°		330°	

Szögfajták



A **szögfelező** azoknak a pontoknak a halmaza a szögtartományban, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak.

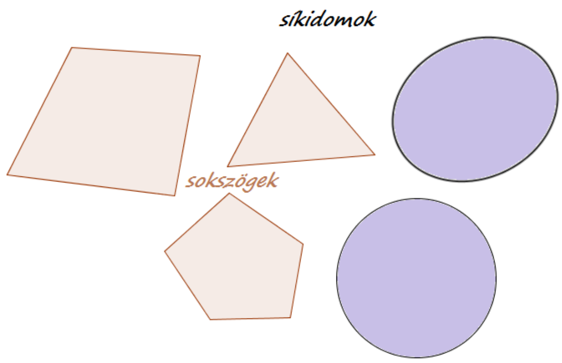
$$d(P;a) = d(P;b)$$



Síkidomok, sokszögek

Alapfogalmak

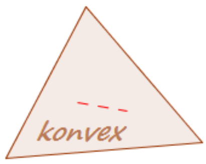
A **síkidom** a síknak zárt vonallal vagy vonalakkal körülhatárolt része.



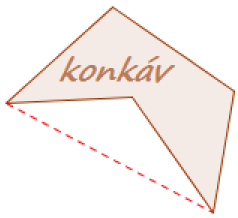
A **sokszög** olyan síkidom,

- amelyet csak egyenes szakaszok határolnak
- határvonala egyetlen zárt vonal
- ugyanannyi **oldala** van, mint **csúcsa**
- mindegyik csúcsához két oldal csatlakozik
- oldalai csak csúcsokban találkoznak.

Egy síkidom **konvex,** ha bármely két pontját összekötő szakaszt tartalmazza.



Egy síkidom **konkáv,** ha létezik két olyan pontja, amelyeket összekötő szakaszt nem teljes egészében tartalmazza.



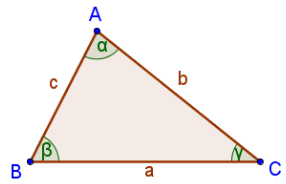
Háromszögek

Jelölések:

Három csúcs: $A; B; C$

A csúcsokkal szemközti oldalak rendre: a, b, c

A csúcsoknál lévő megfelelő belső szögeik rendre: $\alpha; \ \beta; \ \gamma$



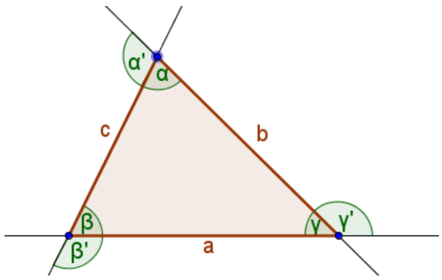
Háromszög szögeivel és oldalaival kapcsolatos összefüggések:

Tétel: Bármely háromszög belső szögeinek összege 180°.

$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Definíció: Egy háromszög egy **külső szöge** az a szög, mely egy belső szöget egyenes szögre egészíti ki.

$$\boldsymbol{\alpha + \alpha' = 180°}$$



Tétel: A háromszög külső szögeinek összege 360°.

$$\boldsymbol{\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°}$$

Tétel: Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbel szemben.

$$\boldsymbol{Ha\ b > a \iff \beta > \alpha}$$

Tétel (háromszög egyenlőtlenség): Bármely háromszögben két oldal hosszának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.

$$\boldsymbol{c < a + b}$$

2) Jelölje a háromszög belső szögeit $\alpha; \beta; \gamma$. A háromszög külső szögeit rendre $\alpha'; \beta'; \gamma'$. Számítsa ki a háromszög belső és külső szögeit a megadott adatok alapján az egyes esetekben.

a) $\alpha = 30°; \beta = 45°$ **b)** $\alpha' = 100°; \beta = 40°$ **c)** $\alpha' = 170°; \gamma' = 80°$

3) Van-e olyan háromszög, amelynek oldalai

a) 2 cm, 4 cm, 5 cm; **b)** 10m, 12 m, 22 m; **c)** 2,5 cm, 32 mm, 0,58 dm hosszúak?

4) Egy háromszög két oldalának hossza

a) 2,7 cm és 5,1 cm; **b)** 1,8 cm és 0,7 cm; **c)** 2,32 cm és 1,16 cm.

Mekkora lehet a háromszög harmadik oldala, ha centiméterekben mérve egész szám?

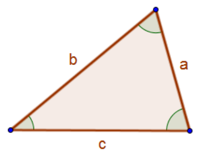
5) Egy háromszög három oldalára teljesül, hogy $a \leq b \leq c$, két szögének nagysága pedig:

a) 84° és 36°; **b)** 18° és 11° **c)** 120° és 40°.

Melyik oldal fekszik a harmadik szöggel szemben?

Háromszögek csoportosítása oldalai alapján:

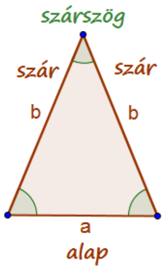
Definíció: Ha egy háromszög minden oldala különböző hosszú, akkor **általános háromszögnek** nevezzük.



Definíció Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor **egyenlőszárú háromszögnek** nevezzük.

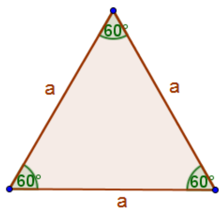
A két egyenlő oldalt **szárnak**, a harmadik oldalt **alapnak** nevezzük.

A két szár által bezárt szög a **szárszög**, a másik kér szög – melyek egyenlők – **az alapon fekvő szögek.**



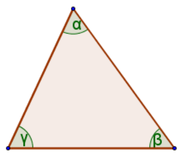
Definíció: Ha egy háromszögnek minden oldala egyenlő, akkor **egyenlő oldalú háromszögnek (szabályos háromszögnek)** nevezzük.

Az egyenlő oldalú háromszög mindhárom szöge egyenlő, vagyis 60°-osak.



A háromszögek csoportosítása a szögei alapján:

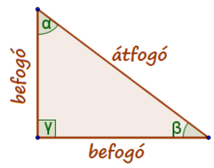
Definíció: Ha egy háromszög minden szöge hegyesszög, akkor a háromszög **hegyesszögű háromszög**.



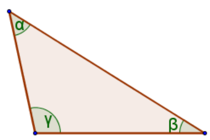
Definíció Ha egy háromszög egyik szöge derékszög, akkor a háromszöget **derékszögű háromszögnek** nevezzük.

A derékszöggel szemközti oldalt **átfogónak**, a másik két oldalt **befogónak** nevezzük.

A derékszögű háromszögben a két hegyesszög összege mindig 90°.



Definíció: Ha egy háromszögnek egyik szöge tompaszög, akkor a háromszöget **tompaszögű háromszögnek** nevezzük.



6) Egy egyenlő szárú háromszög egy szögének nagysága

a) 84° **b)** 11° **c)** 120°.

Mekkora lehet a másik két szöge?

7) Egy derékszögű háromszög egy szögének nagysága

a) 84° **b)** 11° **c)** 60°.

Mekkora lehet a másik két szöge?

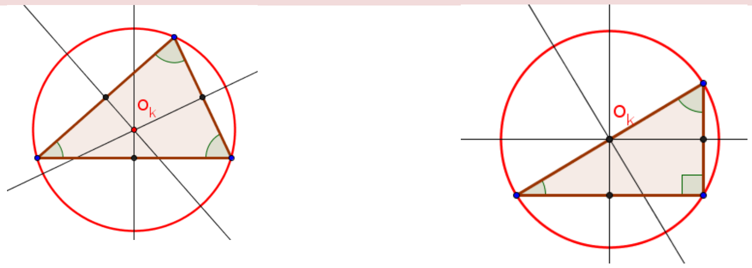
8) Hány fokosak egy egyenlőszárú, derékszögű háromszög szögei?

A háromszög nevezetes pontjai, vonalai

Definíció: Az **oldalfelező merőleges** az oldal két végpontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon. (Merőleges az oldalra és felezi azt)

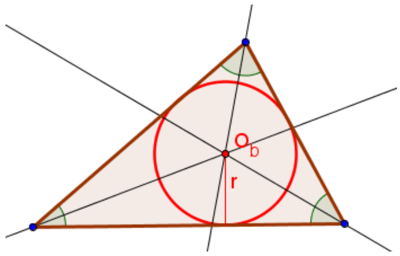
Tétel: Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást. Ez a pont a **háromszög köré írható kör középpontja.**

(Ez a pont hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében van; tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül van; derékszögű háromszög esetén pedig éppen az átfogó felezőpontja.)



Definíció: A **szögfelező** a szög két szárától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon.

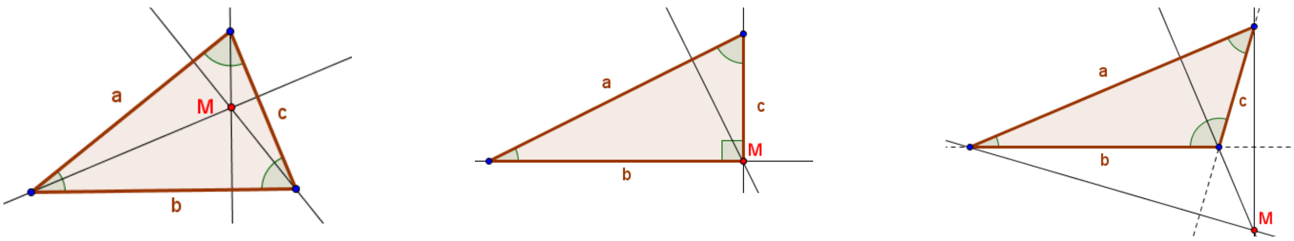
Tétel: Bármely háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont **a beírható kör középpontja.**



Definíció: A **magasságvonal** a háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges egyenes.

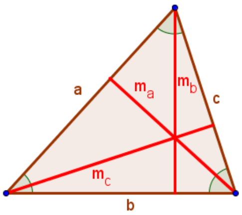
Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **magasságpontja**.

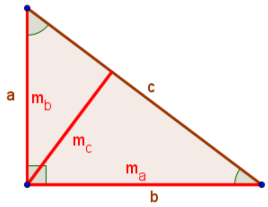
(Ez a pont hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében van; tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül van; derékszögű háromszög esetén pedig éppen a derékszög csúcspontja.)

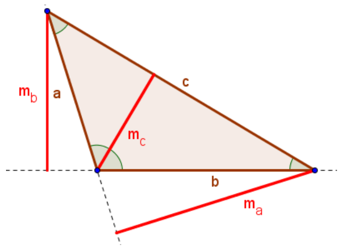


Definíció: A **magasság** a háromszög csúcsának és a szemközti oldalegyenesnek a távolsága.

Jelölés: $\boldsymbol{m_a} -\ a$ oldalhoz tartozó magasság; $\boldsymbol{m_b} -\ b$ oldalhoz tartozó magasság







Megjegyzés: A derékszögű háromszög egyik befogóhoz tartozó magassága egyenlő a másik befogó hosszával.

Háromszög területe: A háromszög területe egyenlő egy oldala és a hozzá tartozó magasság szorzatának a felével.

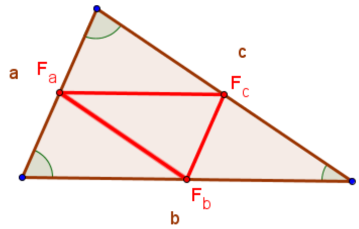
$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

Megjegyzés: Az előző megjegyzésből adódóan a derékszögű háromszög területe a két befogó szorzatának felével egyenlő.

$$T = \frac{ab}{2}$$

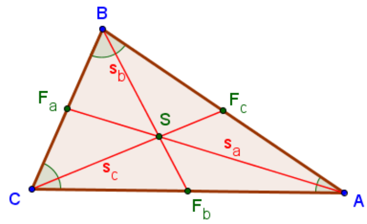
Definíció: A háromszög **középvonala** a háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz.

Tétel: Két oldal felezőpontját összekötő középvonal párhuzamos a harmadik oldallal és feleakkora, mint a harmadik oldal.



Definíció: A háromszög **súlyvonala** a háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz.

Tétel: Bármely háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **súlypontja** (***S***).

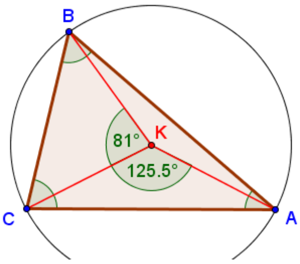


Tétel: A súlypont egy súlyvonalnak az oldalfelező ponthoz közelebb eső harmadoló pontja. (Másképp a súlypont 1:2 arányban osztja a súlyvonalat.)

$$2 \cdot F_bS = SB \qquad 2 \cdot F_aS = SA \qquad 2 \cdot F_cS = SC$$

9) Számítsuk ki az egyenlőszárú háromszög szögeit, ha alapjának végpontjaiból kiinduló belső szögfelezők által bezárt szög 120°!

10) Az ábrán látható háromszög köré írható körének középpontja K-val van jelölve. A megadott szögek alapján határozzuk meg a háromszög belső szögeit.



11) A háromszög egy oldalát jelöljük a-val, és az oldalhoz tartozó magasságot m_a-val. Számolja ki a háromszög területét.

12) Egy háromszög súlyvonalainak hossza 3 cm, 5 cm, és 7 cm hosszú. Határozza meg a súlypont távolságát az egyes csúcsoktól!

13) Egy háromszög középvonalainak hossza 1,5 cm, 2,3 cm, és 4 cm. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

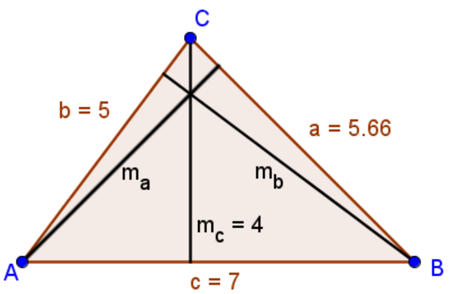
14) Jelölje a háromszög egy oldalát, és m_a az oldalhoz tartozó magasságot. Számolja ki a háromszög területét az egyes esetekben.

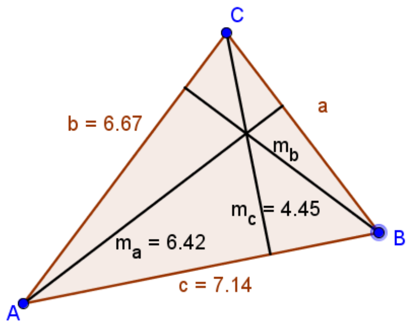
a) $m_a = 5$ cm; $a = 8$ cm **b)** $m_a = 11$ m; $a = 2$ m **c)** $m_a = 5$ dm; $a = 7$ m

15) Egy háromszög területe 18 cm^2. Határozza meg a háromszög két oldalának hosszát, ha az oldalakhoz tartozó magasságok:

a) $m_a = 5$ cm; $m_b = 8$ cm **b)** $m_a = 11$ cm; $m_b = 2$ m

16) Az alábbi ábrákon egy-egy háromszög és az oldalakhoz tartozó magasság látható. Számolja ki a nem megadott adatokat!

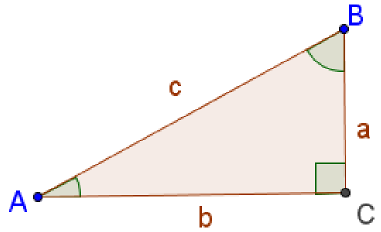




Pitagorasz-tétel

Pitagorasz-tétel: A derékszögű háromszög átfogóinak négyzetösszege egyenlő a befogók négyzetösszegével.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszög két rövidebbik oldalának négyzetösszege egyenlő a leghosszabb oldal négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

17) Határozza meg a derékszögű háromszög átfogójának hosszát, ha befogói…

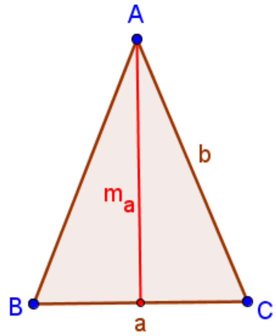
a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm **b)** $a = 9$ m, $b = 40$ m **c)** $a = 5$ dm, $b = 7$ dm

18) Jelölje a egy derékszögű háromszög egyik befogóját és c az átfogóját. Határozza meg a másik befogó hosszát az egyes esetekben!

a) $a = 12$ cm, $c = 15$ cm **b)** $a = 4{,}5$ m, $c = 20{,}5$ m **c)** $a = 5$ dm, $c = 10$ dm

19) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának hosszát jelöljük a-val, míg szárai hosszát b-vel. Határozza meg az alaphoz tartozó magasság hosszát, és a háromszög területét!

a) $a = 12$ cm, $b = 10$ cm **b)** $a = 10$ m, $b = 13$ m



20) Egy egyenlőszárú háromszög területét jelöljük T-vel, és alapjának hosszát a-val. Számítsa ki a háromszög kerületét!

a) $a = 14$ cm, $T = 168$ cm **b)** $a = 16$ m, $T = 120$ m

21) Egy háromszögről tudjuk, hogy az egyik oldala 3 cm egy másik oldala pedig 7 cm. A harmadik oldal centiméterben mérve szintén egész szám.

a) Hány ilyen háromszög létezik?

b) Van-e köztük derékszögű háromszög? (Válaszát indokolja!)

c) Az egyik háromszög ezek közül egyenlőszárú. Számítsa ki ennek a területét két tizedesjegy pontossággal!

22) Egy 6 m hosszú létrát 4,8 m magas falhoz támasztunk. Milyen távol van a faltól a létra alja?

23) Egy háromszög két oldalának hossza, 3 cm és 5 cm hosszú. A harmadik oldal is centiméterben mérve egész szám.

a) Hány olyan háromszög létezik, ami megfelel a feltételeknek?

b) Van-e köztük derékszögű háromszög?

c) A megadott feltételekkel két egyenlőszárú háromszög létezik. Számolja ki ezeknek a területét.

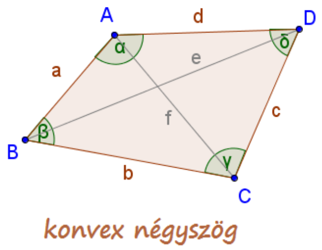
Négyszögek

Jelölések:

Három csúcs: $A; B; C, D$

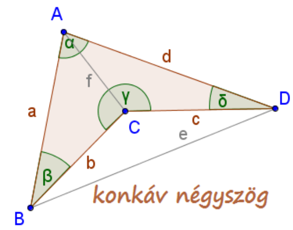
A csúcsokkal szomszédos oldalak rendre: a, b, c, d

A csúcsoknál lévő megfelelő belső szögeik rendre: $\alpha;\ \beta;\ \gamma, \delta$



Definíció: A négyszögben a nem szomszédos csúcsokat összekötő két szakaszt a négyszög **átlóinaik** nevezzük.
Jelölés: $e,\ f$

Definíció: Ha egy négyszögnek van homorúszöge, akkor **konkáv négyszög**nek nevezzük, ha nincs homorúszöge, akkor **konvex négyszög**.

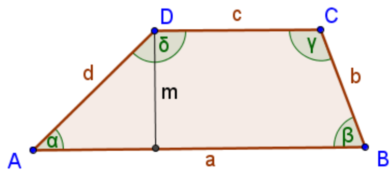


Tétel:
Bármely négyszög belső szögeinek összege 360°. $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°}$
Bármely konvex négyszög külső szögeinek összege 360°. $\boldsymbol{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=360°}$

Speciális négyszögek:

TRAPÉZOK

Definíció: A **trapéz** olyan négyszög, amelynek van egy párhuzamos oldalpárja. A párhuzamos oldalakat a trapéz **alapjainak**, a másik két oldalt a trapéz **szárainak** nevezzük.



Tétel: A trapéz egy száron fekvő szögei 180°-ra egészítik ki egymást.

$$\boldsymbol{\alpha+\delta=180°\quad \beta+\gamma=180°}$$

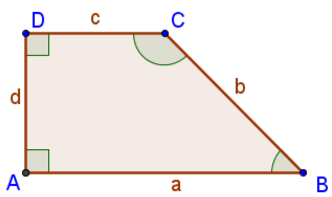
Definíció: A trapéz magassága két alap oldalegyenesi közti távolsága.

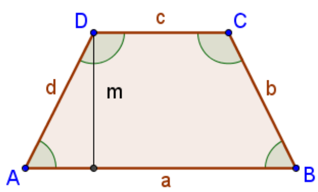
Tétel: **A trapéz területe** a két alap számtani közepének és a magasságának a szorzata.

$$\boldsymbol{T=\frac{(a+c)}{2}\cdot m}$$

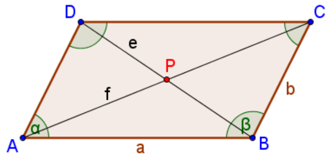
Definíció: A **derékszögű trapéz** olyan trapéz, melynek van legalább egy derékszöge.

Definíció: A **húrtapéz**, olyan trapéz, melynek szárai egyenlő hosszúak, és az alapon fekvő szögei egyenlők.





Definíció: A **paralelogramma** olyan négyszög (olyan trapéz) melynek szemközti oldalai párhuzamosak.



A parallelogramma tulajdonságai (további definíciói):

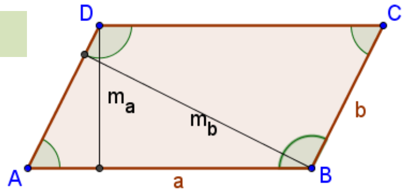
A parallelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúak.

A parallelogramma két szomszédos szöge 180°-ra egészíti ki egymást.

A paralelogramma szemközti szögei egyenlők.

A parallelogramma átlói felezik egymást.

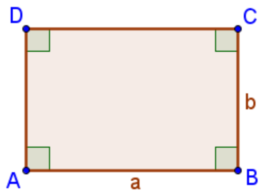
Definíció: A **paralelogramma** (két) magassága a szemközti oldalegyenesek közti távolság.



Tétel: **A paralelogramma területe** egy oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a szorzata.

$$\boldsymbol{T = a \cdot m_a = b \cdot m_b}$$

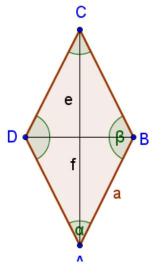
Definíció: A **téglalap** olyan négyszög (paralelogramma), amelynek minden szöge egyenlő.



Tétel: **A téglalap területe** két szomszédos oldalának szorzata.

$\boldsymbol{T = a \cdot b}$

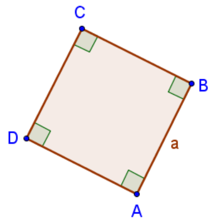
Definíció: A **rombusz** olyan négyszög (paralelogramma), amelynek minden oldala egyenlő.



Tétel: **A rombusz területe** két átlójának szorzatának a fele.

$\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$

Definíció: A **négyzet** olyan négyszög amelynek minden oldala és minden szöge egyenlő.



DELTOIDOK

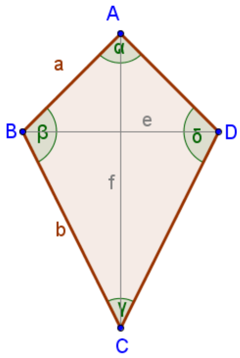
Definíció: A **deltoid** olyan négyszög, melynek két-két szomszédos oldala egyenlő.

A deltoid tulajdonságai (további definíciói):

A deltoidnak van két szemközti szöge, melyek egyenlők.

A deltoid átlói merőlegesek, és az egyik átló felezi a másikat.

A deltoid egyik átlója szögfelezője egy-egy szemközti szögének.

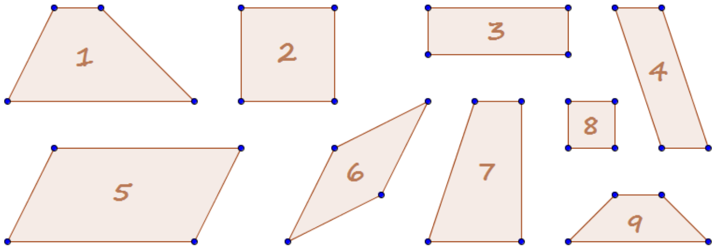


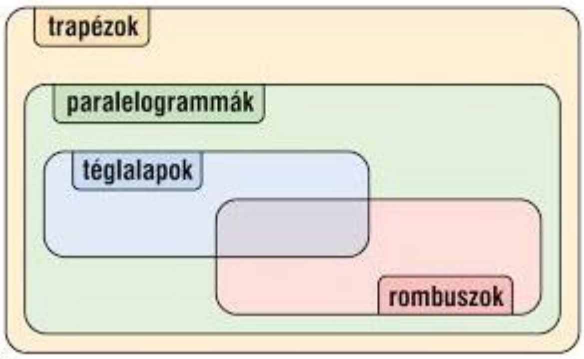
Tétel: **A deltoid területe** két átlójának szorzatának a fele.

$$\boldsymbol{T = \frac{e \cdot f}{2}}$$

Megjegyzés: A rombusz megfelel a deltoid definíciójának, így a rombusz is (és így a négyzet is) deltoid.

24) Helyezd el a négyszögek sorszámait a halmazábrán!





25) Egy konvex négyszög belső szögei α , β , γ , δ , a megfelelő külső szögek rendre α' , β' , γ' ,δ' . Számítsa ki a megfelelő belső és külső szögeket, ha

a) $\alpha = 100°$, $\beta = 72°$, $\gamma' = 84°$ **b)** $\alpha = 136°$, $\beta' = 88°$, $\delta' = 170°$

26) Mekkorák a négyszög belső és külső szögei, ha belső szögeinek aránya

a) $2 : 3 : 3 : 4$ **b)** $2 : 3 : 5 : 8$

27) Melyik igaz, melyik hamis?

Van nem konvex trapéz.
Van olyan trapéz, amelynek csak egy derékszöge van.
Van olyan trapéz, amelynek pontosan két derékszöge van.
Van olyan trapéz, amelynek pontosan három derékszöge van.
Minden paralelogramma trapéz.
Minden trapéz paralelogramma.
Van olyan paralelogramma, melynek minden szöge derékszög.
A téglalap átlói felezik egymást.

A téglalap átlói egyenlő hosszúak.
Van olyan téglalap, melynek átlói merőlegesek egymásra.
A téglalap két magassága egyenlő hosszú.
Van derékszögű rombusz.
A rombusz átlói merőlegesek egymásra.
A rombusz átlói felezik egymást.
A négyzet átlói egyenlő hosszúak.
A négyzet átlói felezik egymást.

28) Számolja ki az alábbi négyszögek területét, és kerületét.

29) Egy rombusz két átlója 12 cm és 16 cm hosszú. Számolja ki a rombusz kerületét és területét!

30) Egy derékszögű trapéz alapja 10 cm és 15 cm hosszúak. A merőleges szára 3 cm. Határozza meg a trapéz területét és kerületét!

31) Egy téglalap kerülete 25 cm. A területe 36 cm^2. Határozza meg a téglalap oldalainak hosszát!

32) Egy húrtrapéz két alapja 12 m és 15 m hosszú. A szárai 5 méteresek. Számolja ki a trapéz területét.

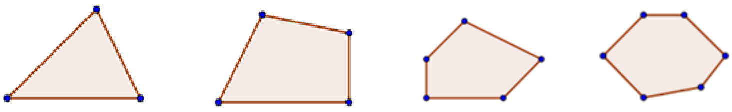
33) Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1. Mekkora a rombusz magassága?

34) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! A táblázatban karikázza be a helyes választ!
A állítás: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van.
B állítás: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye.
C állítás: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.
D állítás: Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van.

35) Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 4,2 cm és 5,6 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara?

Konvex sokszögek jellemzői

Szögek összege



általánosan

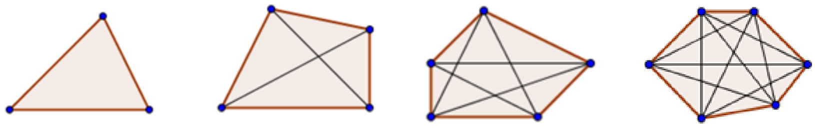
	háromszög	négyszög	ötszög	hatszög	n oldalú sokszög
belső szögek összege	180°	360°	540°	720°	$(\boldsymbol{n-2})\cdot\mathbf{180°}$

Tétel: A konvex sokszög belső szögeinek összege a 180° és az oldalak számánál kettővel kisebb szám szorzata. $(\boldsymbol{n-2})\cdot\mathbf{180°}$

Tétel: Bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360°.

Átlók száma

Definíció: Egy **sokszög átlója** a nem szomszédos oldalakat összekötő) szakasz.



általánosan

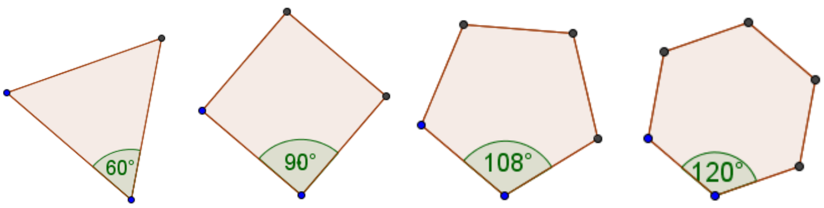
	háromszög	négyszög	ötszög	hatszög	n oldalú sokszög
átlók száma	0	2	5	9	$\frac{\boldsymbol{n(n-3)}}{\mathbf{2}}$

Tétel: Egy sokszög átlóinak száma a csúcsok számának és a csúcsok számánál hárommal kisebb szám szorzatának a fele.

$$\frac{\boldsymbol{n(n-3)}}{\mathbf{2}}$$

Szabályos sokszögek

Definíció: Azokat a sokszögeket, melyeknek minden oldala és minden szöge egyenlő nagyságú, **szabályos sokszögeknek** nevezzük



Tétel: Egy szabályos sokszög belső szöge a szögei összegének és oldalai számának hányadosa.

$$\frac{(\boldsymbol{n-2})\cdot\mathbf{180°}}{\boldsymbol{n}}$$

36) Hány átlója van annak a konvex sokszögnek, mely oldalainak száma 3; 4; 9; 18; 34?

37) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelynek egy csúcsából 2; 3; 4; 10; 15; 31 átló húzható?

38) Mekkora a 3; 6; 9; 13; 20; 35; oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege?

39) Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben a belső szögek összege 540°; 1620°; 2340°; 600°?

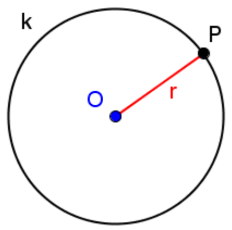
40) Mekkora a szabályos sokszög egy belső szöge, ha a sokszög oldalainak száma 3; 5; 6; 8; 10; 18 ?

41) Egy szabályos sokszög egy külső szöge 120°; 30°; 24°; 12°. Hány oldalú a szabályos sokszög?

Kör

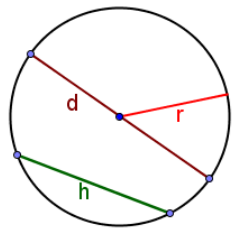
Definíció: A **körvonal (*k*)** azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak.
Az adott pontot **középpontnak (*O*)**, a középpontot és a körvonal egy pontját összekötő szakaszt **sugárnak (*r*)** nevezzük.

A **körlap** azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyek a sík egy adott pontjától egy adott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.



Megjegyzés: Gyakran a körvonalat röviden csak körnek hívjuk.

Definíció: A körvonal két pontját összekötő szakasz a kör **húrja (*h*)**.
A kör középpontján átmenő húrt a kör **átmérőjének (*d*)** nevezzük.



Tétel: A kör átmérőjének hossza kétszerese a sugárnak.

$$d = 2r$$

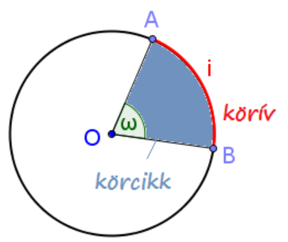
Tétel: A kör kerülete (a körvonal hossza) az átmérő és a π szorzata.

$$K = d\pi = 2r\pi$$

Tétel: A kör területe a sugár négyzetének és a π szorzata.

$$T = r^2\pi$$

Definíció: A körvonalat két pontja két **körívre(i)** bontja.
A körlemezt két sugár két **körcikkre** darabolja.
A körcikket két sugár és egy körív határolja. A két sugár által bezárt szöget az adott ívhez tartozó **középponti szögnek(ω)** nevezzük.



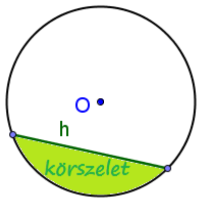
Tétel: A körív hossza a kör kerületének a középponti szög és a teljes szög arányának szorzata.

$$i = 2r\pi \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$$

Tétel: A körcikk területe a kör területének és a középponti szög és a teljes szög arányának szorzata.

$$T_{\text{cikk}} = r^2\pi \cdot \frac{\omega}{360^\circ}$$

Definíció: A körlemezt egy húr két körszeletre osztja. A körszeletet egy húr és egy ív határolja.



Definíció: A közös középpontú köröket koncentrikus köröknek nevezzük.
Két közös középpontú, különböző sugarú kör egy körgyűrűt fog közre

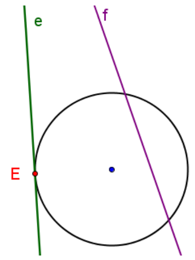
A körszelet területe a körcikk területének és a húr, valamint a két sugár által határolt háromszög területének az összege.

$$T_{\text{szelet}} = T_{\text{cikk}} - T_{\text{háromszög}}$$

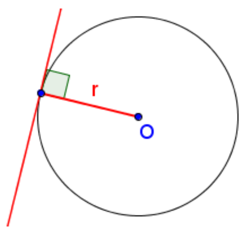
A körgyűrű területe a két koncentrikus kör területének különbsége.

$$T_{\text{gyűrű}} = r_1^2\pi - r_2^2\pi$$

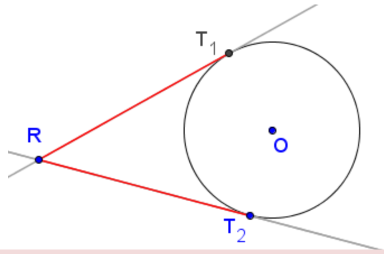
Definíció: Ha a körnek és egy egyenesnek két közös pontja van, akkor az egyenest **szelőnek (*f*)** nevezzük.
Ha a körnek és egy egyenesnek egy közös pontja van, akkor az egyenest **érintőnek (*e*)** nevezzük. A körvonal és az érintő közös pontját pedig érintési pontnak (***E***) nevezzük.



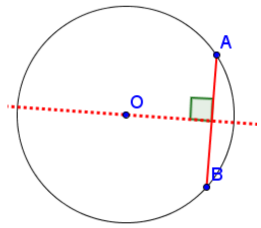
Tétel: Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.



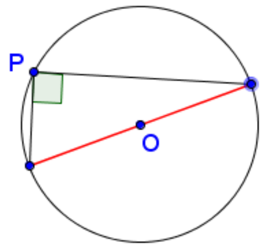
Tétel: Közös pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő



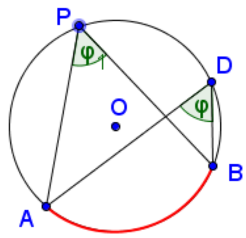
Tétel: Egy húr szakaszfelező merőlegese illeszkedik a középpontra.



Thalész tétele: A kör átmérője, a kör bármely pontjából derékszög alatt látszik.

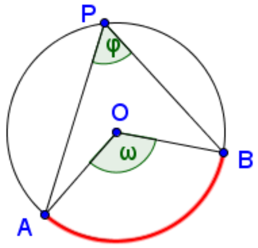


Definíció: Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal pontja, szárai pedig egy körív két végpontjára illeszkedik a kör adott ívhez tartozó **kerületi szögének (*φ*)** nevezzük.



Középponti és kerületi szögek tétele: Egy körben adott ívhez tartozó bármely kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának.

$$\varphi = \frac{\omega}{2}$$



42) Határozzuk meg a kör kerületét és területét, ha sugara 4 cm!

43) Határozzuk meg a kör kerületét és területét, ha átmérője 1,6 dm!

44) Számítsuk ki a kör sugarát, ha kerülete 54 m!

45) Számítsuk ki a kör sugarát, ha területe 40,24 mm2!

46) A gépkocsi egy kereke a 3,4 km-es úton 1800-at fordul. Mekkora a gépkocsi kerekének átmérője?

47) Határozzuk meg a 10 cm átmérőjű kör 60°; 15°; 22,5° nagyságú középponti szögéhez tartozó körcikk kerületét és területét!

48) Határozzuk meg az r és R sugarú koncentrikus körök által határolt körgyűrű területét, ha

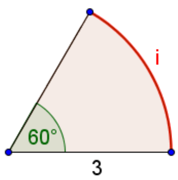
a) $r = 3$ cm és $R = 5$ cm; b) $r = 5$ cm és $R = 2$ dm;

49) Milyen távol van egy 26 cm átmérőjű kör középpontjától a 10 cm hosszú húrja?

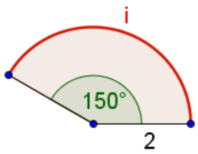
50) Egy 4 cm sugarú kör O középpontjának és a sík egy P pontjának a távolsága 5 cm. Számítsuk ki a körhöz P-ből húzható érintőszakasz hosszát!

51) Határozza meg az ábrán látható körcikkek területét, és a körívek hosszát!

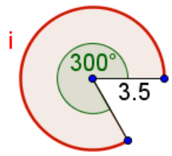
a)



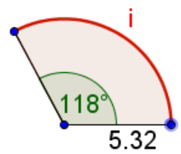
b)



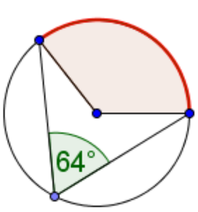
c)

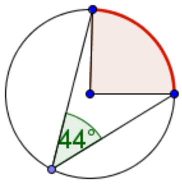


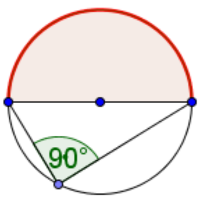
d)

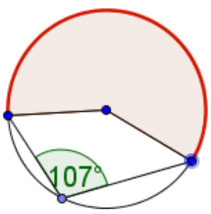


52) Határozza meg az ábrán látható körcikkek területét, és a körívek hosszát, ha a körök sugara 2 cm!



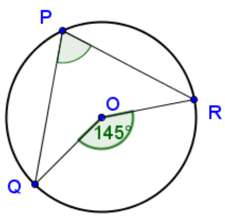




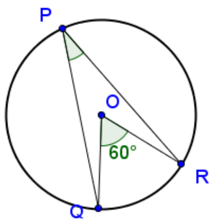


53) Határozza meg a QPR szög értékét.

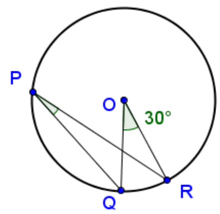
a) $QPR\sphericalangle =$



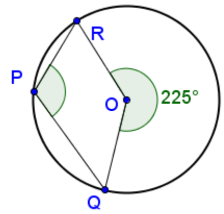
b) $QPR\sphericalangle =$



c) $QPR\sphericalangle =$

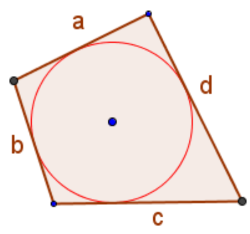


d) $QPR\sphericalangle =$



Érintőnégyszögek és húrnégyszögek

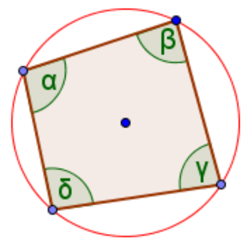
Definíció: Az olyan négyszöget, melynek minden oldala a kör egy-egy érintőjén fekszik (van beírt köre), **érintőnégyszögnek** nevezzük.



Érintőnégyszögek tétele: Az érintőnégyszög két szemközti oldalának hossza megegyezik a másik két oldal hosszának összegével.

$$\boldsymbol{a + c = b + d}$$

Definíció: Az olyan négyszöget, melynek oldalai ugyanazon kör egy – egy húrja (van köré írható köre), azt **húrnégyszögnek** nevezzük.



Húrnégyszögek tétele: A húrnégyszögek szemközti szögei 180°-ra egészítik ki egymást.

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = 180°}$$
$$\boldsymbol{\beta + \delta = 180°}$$

54) Egy érintőnégyszög három oldala 3 cm, 4 cm, 7 cm. Milyen hosszú lehet a negyedik oldal?

55) Egy húrnégyszög három szöge 10°, 70° és 110°. Mi a negyedik szöge?

56) Egy deltoid egyben húrnégyszög is. Egyik szöge 100°. Határozza meg a másik három szögét!

57) Egy deltoid egyben húrnégyszög is. Egyik oldalának hossza 1.5 cm, a másik oldalának hossza 2 cm. Határozza meg az átlóinak hosszát!

58) Egy parallelogramma egyben húrnégyszög is. Határozza meg a parallelogramma szögeit!

Geometriai transzformációk

Definíció: A **geometriai transzformációk** olyan függvények (egyértelmű hozzárendelések), amelyek ponthoz pontot rendelnek hozzá, azaz értelmezési tartományuk is, értékkészletük is ponthalmaz.

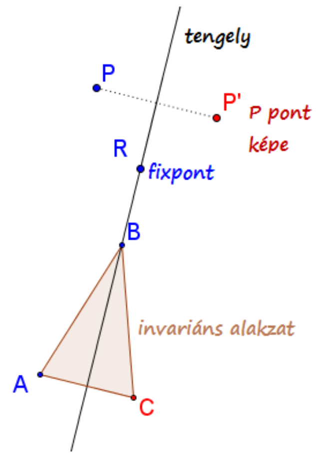
Definíció: **Egybevágósági (távolságtartó) transzformációk** azok a geometriai transzformációk, amelyeknél bármely szakasz képe az eredetivel egyenlő hosszúságú szakasz.

Tengelyes tükrözés definíciója: Adott a sík egy t egyenese. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:

ha $P \in t$, akkor $P' = P$; (A tengely pontjai *fixpontok*)

ha $P \notin t$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP' szakasz felező merőlegese a t egyenes.

A t egyenes a **tükrözés tengelye**.



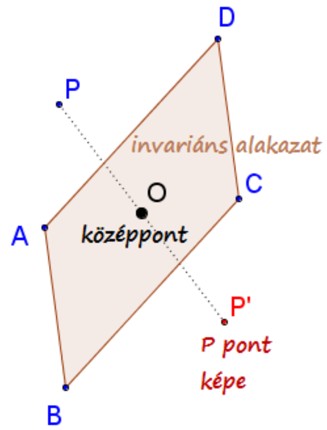
Definíció: Egy síkbeli alakzat **tengelyesen szimmetrikus**, ha van a síknak olyan egyenese, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat *invariáns*.

Középpontos tükrözés definíciója: Adott a sík egy O pontja. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:

O-hoz önmagát rendeljük, azaz $O' = O$; (az egyetlen fixpont)

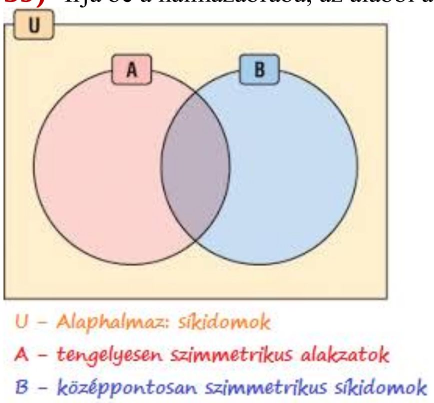
ha $P \neq O$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre teljesül, hogy a PP' szakasz felezőpontja O.

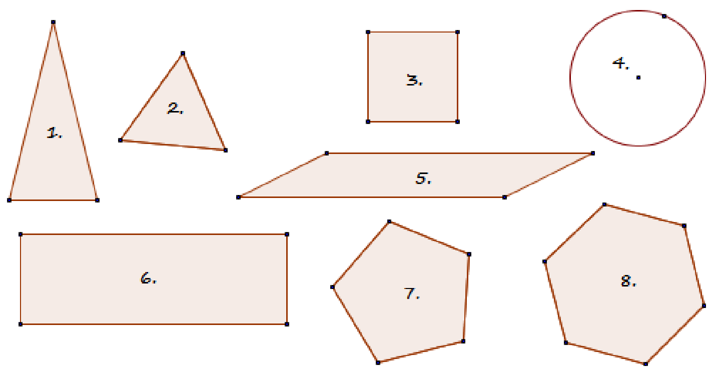
Az O pont a **tükrözés középpontja** (centruma).



Definíció: Egy síkbeli (vagy térbeli) alakzat **középpontosan (centrálisan) szimmetrikus,** ha van a síknak olyan pontja, amelyre vonatkozó tükrözésnél az alakzat *invariáns*.

59) Írja be a halmazábrába, az alábbi alakzatok sorszámát.





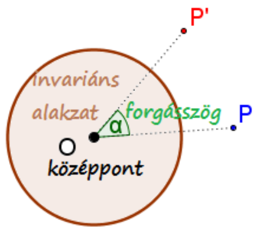
60) Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50º és 60º. A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot. Mekkorák a hatszög szögei?

Középpontos forgatás definíciója: Adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög. A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:

O-hoz önmagát rendeljük, azaz $O' = O$;

ha $P \neq O$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre $OP = OP'$, és az OP félegyenes α irányított forgásszögű elforgatottja az OP' félegyenes.

Az O pont a **forgatás középpontja** (centruma).



Definíció: Egy síkbeli alakzat **forgásszimmetrikus**, ha van a síknak olyan O pontja és van olyan α pozitív irányítású szög, hogy az O körüli $\boldsymbol{\alpha}$ szögű forgatásnak az alakzat invariáns alakzata.

Definíció: Adott a sík egy $\underline{v}$ vektora. A sík minden egyes P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$ a párhuzamos eltolás vektora.

Definíció: Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi.

Tétel: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha rájuk a következő feltételek egyike teljesül:

(1) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő;

(2) megfelelő oldalaik hossza és megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő

61) Adja meg, hogy az alábbi geometriai transzformációk közül melyek viszik át önmagába az ábrán látható, háromszög alakú (sugárveszélyt jelző) táblát!

a) 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül.

b) 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül.

c) Középpontos tükrözés a tábla középpontjára.

d) Tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre.

62) Az alábbi síkidomok közül, döntse el, mely tengelyesen szimmetrikus, melyik középpontosan szimmetrikus, és melyik forgásszimmetrikus. Tengelyes szimmetria esetén adja meg a szimmetriatengelyek számát, forgásszimmetria esetén, adja meg a forgatás szögét (vagy szögeit).

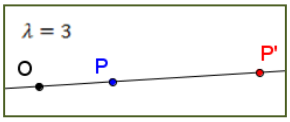
Síkidom	Tengelyes szimmetria	Középpontos szimmetria	Forgásszimmetria	Tengelyek száma	Forgatás szöge
Húrtrapéz					
Parallelogramma					
Rombusz					
Téglalap					
Négyzet					
Szabályos háromszög					
Szabályos ötszög					
Szabályos hatszög					

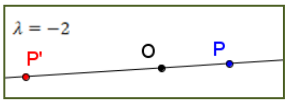
Középpontos hasonlóság definíciója: Adott egy O pont és egy λ valós szám. A tér minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:

ha $P = O$, akkor $P' = P$.

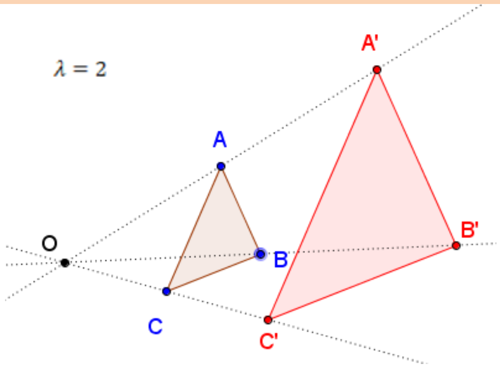
ha $P \neq O$, akkor P' az OP egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, és ha $\lambda > O$, akkor P' az OP félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor P-t és P'-t O elválasztja egymástól.

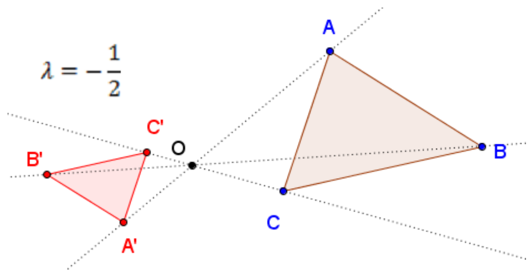
Az O pont a transzformáció középpontja vagy centruma, λ a középpontos hasonlóság aránya





Megjegyzés: Ha $|\lambda| < 1$, akkor **középpontos kicsinyítésről**, ha $|\lambda| > 1$, akkor **középpontos nagyításról** beszélünk.





Definíció: Két alakzat **hasonló**, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. (A hasonlóság jele: ~)

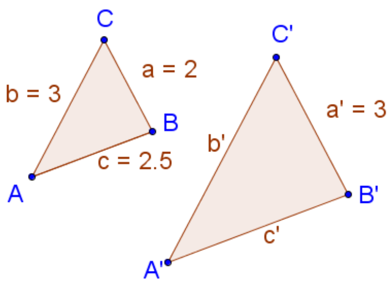
Tétel: Két sokszög akkor és csak akkor hasonló, ha megfelelő oldalhosszaik aránya páronként egyenlő, és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Definíció: Két hasonló alakzat **hasonlóságának aránya** az egymásnak megfelelő szakaszok hosszának aránya.

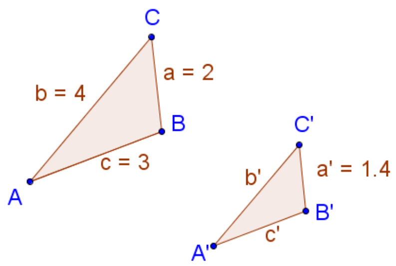
Tétel: A hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.

63) Az alábbi ábrán $ABC\Delta \sim A'B'C'\Delta$. Határozza meg b' és c' hosszát..

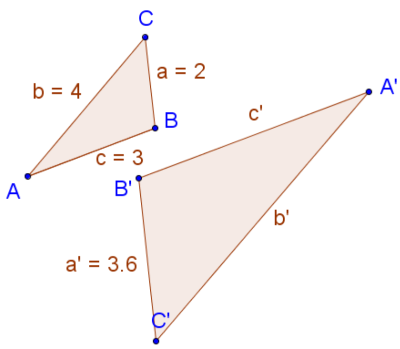
a)



b)

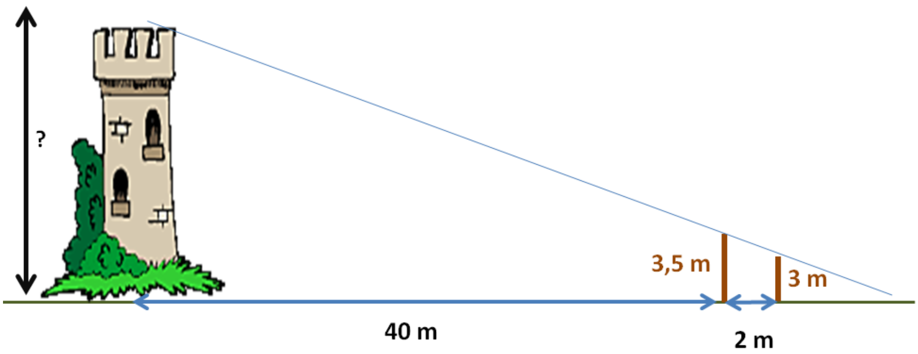


c)



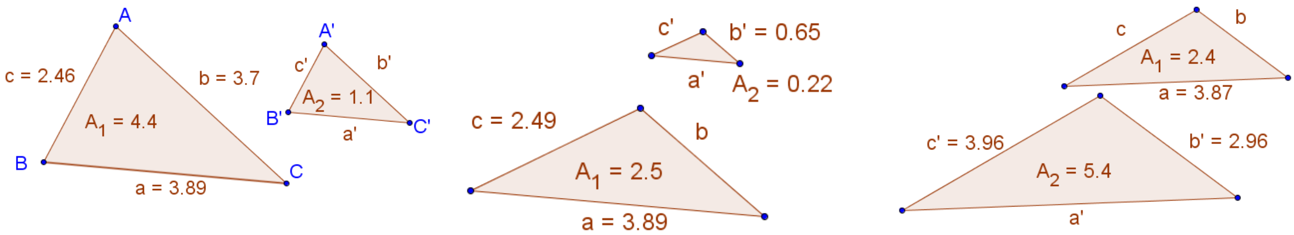
64) Egy 180 cm-es fiú 5 méterre áll egy lámpaoszloptól. A lámpa fénye által vetett árnyéka 3 méter hosszú a vízszintes talajon. Milyen magas a lámpaoszlop?

65) Egy torony magasságát szeretnénk megmérni olyan módon, hogy két rudat, melyek hossza 3,5 m és 3 m, leszúrunk a földbe egymás mellé, úgy, hogy a torony teteje, és a két bot vége egy vonalban legyenek. A két bot távolsága 2 m, és a hosszabbik bot távolsága pedig 40 m. Milyen magas a torony?



66) Az alábbi háromszögek páronként hasonlók. Határozza meg az ismeretlen oldalak hosszát.

a) **b)** **c)**

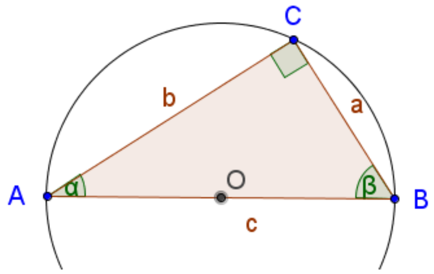


67) Egy pizzériában a 28 cm átmérőjű pizza ára egységesen 1000 Forint, és a 42 cm átmérőjű pizza ára pedig egységesen 2000 Forint. Mi éri meg jobban? Két darab 28 cm átmérőjű pizza, vagy 1 db 42 cm átmérőjű pizza?

További tételek a derékszögű háromszöggel kapcsolatban.

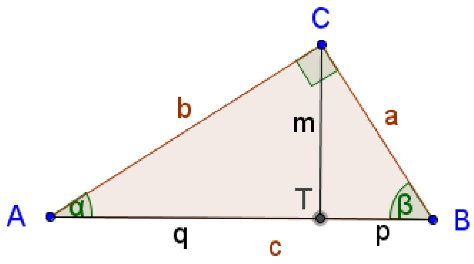
Thalész tételének megfordítása: A derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az átfogó felezőpontja. Így a köré írt kör sugara az átfogó hosszának a fele.

$$R=\frac{c}{2}$$



Magasságtétel: Derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

$$m=\sqrt{p\cdot q}$$



Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogónak az átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

$$a=\sqrt{p\cdot c}\quad illetve\quad b=\sqrt{q\cdot c}$$

69) Az alábbi táblázatban soronként egy-egy derékszögű háromszög két-két adata van megadva. A megadott adatok alapján töltse ki a táblázatot! Ahol kell, ott kerekítsen két tizedes-jegyre.

a **(befogó)**	***b*** **(befogó)**	***c*** **(átfogó)**	***p***	***q***	***T*** **(terület)**	***K*** **(kerület)**	***m*** **(magasság)**	***R*** **(köré írt kör sugara)**
10	11							
			3	4				
7			5					
			8					5
		7					8	
						12		2.5