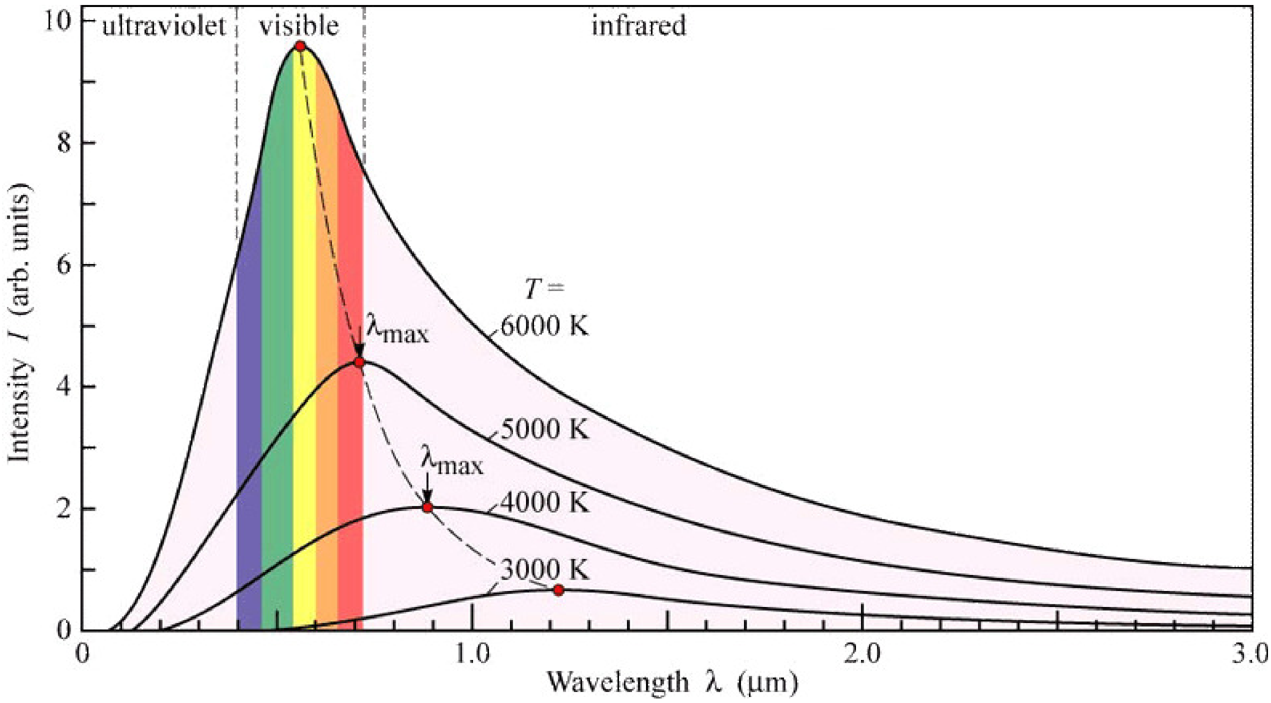
Tema 1: Resumen

Radiación emitida por un cuerpo negro. En general los cuerpos emiten, absorben y reflejan radiación. Se llama cuerpo negro a aquel que no refleja radiación. Un ejemplo es el siguiente.

En una cavidad vacía rodeada por un absorbente se practica un pequeño orificio en una de sus paredes y se introduce en un horno a temperatura uniforme, esperando a que se alcance el equilibrio térmico. Cuando éste se ha alcanzado, el orificio se comporta como un cuerpo negro. En efecto, la radiación que incide sobre él entra en la cavidad y experimenta numerosas reflexiones en la paredes interiores de la misma. Para que sea re-emitida deber incidir desde el interior sobre el agujero con una dirección perpendicular al mismo, lo que es muy poco probable si la cavidad es lo suficientmente grande y el agujero lo suficientemente pequeño, por lo que puede suponerse que la radiación reflejada es despreciable. En los experimentos realizados con dispositivos de este tipo se observa, a temperaturas suficientemente altas, radiación que emerge por el orificio y que tiene el espectro de la figura adjunta.



Para explicar estos resultados experimentales, Planck (1901) razonó de la siguiente forma. Al igual que sus coetáneos, supuso que los átomos en las paredes del interior de la cavidad se encuentran en equilibrio térmico con la radiación dentro de ella. Sin embargo, esto no era suficiente para reproducir el espectro observado. Su aportación fue hacer la hipótesis adicional y fundamental de que

> *Un átomo que interacciona con radiación EM de frecuencia ν sólo puede cambiar su energía en un múltiplo entero de una cantidad $\mathcal{E} = h\nu$ que es directamente proporcional, con constante de proporcionalidad h, a la frecuencia ν.*

Es decir, el intercambio de energía del átomo con el campo EM no es arbitrario, sino que sólo puede tomar valores discretos $\Delta E = \pm n\mathcal{E}$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ A la constante de proporcionalidad h se le llama constante de Planck.

A partir de aquí, y siguiendo a Boltzmann, Planck obtuvo que la densidad de energía (energía por unidad de volumen) emitida con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ por un cuerpo negro a temperatura T es

$$u(\nu, T)\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \, \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \; .$$

La densidad de energía emitida al exterior es la suma sobre frecuencias, es decir,

$$U(T) = \int_0^\infty u(\nu, T)\, d\nu \; .$$

La densidad de energía emitida con longitud de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$ se obtiene a partir de $u(\nu, T)$ usando

$$\nu\lambda = c \quad \Rightarrow \quad d\nu = -\, \frac{c\, d\lambda}{\lambda^2} \; .$$

Esto da

$$u\Big(\frac{c}{\lambda}, T\Big)\, d\lambda = -\, \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \, \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \; .$$

y

$$U(T) = \int_\infty^0 u(c/\lambda, T)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \, \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \; . \tag{1}$$

¡Ojo con los signos! Si $d\nu > 0$, entonces $d\lambda < 0$ y $u(c/\lambda, T)\, d\lambda > 0$. Se suele llamar radiancia espectral a la cantidad que resulta de multiplicar el integrando en (1) por $c/4$:

$$r(\lambda, T) = -\frac{c}{4}\, u\Big(\frac{c}{\lambda}, T\Big) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \, \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \; , \tag{2}$$

que tiene dimensiones de energía por unidad de volumen y de tiempo y es la magnitud que se mide experimentalmente. En la figura de la página anterior se representa $r(\lambda, T)$ frente a λ para distintas tremperaturas. Nótese que

$$r(\lambda, T)\, d\lambda \quad \text{y} \quad R(T) = \int_0^\infty r(\lambda, T)\, d\lambda$$

tienen dimensiones de energía por unidad de área y de tiempo, es decir, de potencia por unidad de área, es decir, de flujo de potencia. A $R(T)$ se le llama radiancia total.

Efecto fotoeéctrico. Einstein fue más alla y supuso que la radiación EM está formada por cuantos o pequeños paquetes elementales independientes los unos de los otros que viajan en el tiempo localizados, cada uno de ellos con energía $h\nu$. A partir de aquí y usando conservación de energía,

$$h\nu = W + K \, , \qquad \begin{aligned} W &= \text{energía necesaria para arrancar un electrón,} \\ K &= \text{energía cinética con la que sale el electrón,} \end{aligned}$$

explicó los resultados experimentales para el efecto fotoeléctrico.

Dispersión Compton. Si se acepta que los fotones son partículas que viajan a velocidad c, de acuerdo con la relativiad especial, estos deben tener

$$\text{masa nula:}\ \ m = 0\,, \qquad \text{momento}\ \ p = \frac{h}{\lambda}\,, \qquad \text{energía}\ \ E = h\nu\,.$$

Compton midió experimentalmente el momento de un fotón. Para ello estudió la dipersión de un fotón de longitud de onda λ_0 por un electrón y obtuvo que la longitud de onda del fotón dispersado es

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}\,(1 - \cos\theta)\,,$$

donde θ es el ńgulo de dispersión, formado por las direcciones incidente y saliente del fotón.

Hipótesis de de Broglie. de Broglie propuso extender la dualidad onda-corpúsculo para los fotones a todas las partículas, de forma que una partícula de masa m tendría momento y energía

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad E = h\nu\,.$$

Para una partícula libre, $E = p^2/2m$, por lo que

$$\nu\lambda^2 = \frac{h}{2m}\ ,$$

que no es del tipo $\nu\lambda = const.$ El **experimento de Davisson-Germer** confirmó experimentalmente la hipótesis de de Broglie.

Los exeprimentos de **doble rendija** ponen muy claramente de manifiesto el comportamiento ondulatorio de la materia.

Problema. Sabiendo que la ecuación $5(e^x - 1) = xe^x$ tiene como solución $x = 4.9651...$, dedúzcase la ley de Wien que relaciona la longitud de onda para la que la radiancia espectral es máxima con la temperatura del cuerpo negro.

Para calcular la longitud de onda a la que $r(\lambda, T)$ es máxima resolvemos la ecuación que resulta de igualar a cero su derivada con respecto a λ.

Conviene introducir la variable adimensional

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \ ,$$

La radiancia espectral, ec. (2), se escribe entonces

$$r(\lambda, T) = \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} \, \frac{x^5}{e^x - 1} \ .$$

Usando que

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{hc}{k_B T}\,\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{k_B T}{hc}\,x^2,$$

se tiene que

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{dx}\,\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{2\pi k_B^6 T^6}{h^5 c^4}\;x^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x - 1}\right) .$$

Por tanto,

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x - 1}\right) = 0$$

Hay dos soluciones. O bien $x = 0$ (que correpsonde a $\lambda \to \infty$) y es un punto de mínimo, pues $r(\lambda \to \infty, T) = 0$. O bien,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x - 1}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5\,(e^x - 1) = xe^x \,,$$

cuya solución se dice en el enunciado es $x = 4.9651\ldots$ Por tanto,

$$\lambda_{\rm max} T = \frac{hc}{4.9651\,k_B} = \frac{6.6261\times 10^{-34}\times 2.9979\times 10^{8}}{4.9651\times 1.3806\times 10^{-23}}\,\mathrm{m\,K} = 2.8979\times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}\,. \tag{3}$$

El carácter de máximo es obvio a partir de la figura para la radiancia espectral. La ec. (3) es la ley de Wien.

Hasta aquí al problema. Puede calcularse la segunda derivada y comprobarse explícitamente que

$$\left.\frac{d^2 r}{d\lambda^2}\right|_{\text{soluciones de } 5\,(e^x-1)=x\,e^x} = -\left.\left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 25\,e^{-x}x^6\,(x-4)\right|_{x=4.9651} < 0\,.$$

Problema. El Sol tiene una masa de $M_\odot = 2.99 \times 10^{30}$ kg y un radio $R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m, y emite aproximadamente como un cuerpo negro a 5700 K. ¿Qué energía es emitida cada año en forma de radiación? ¿Qué fracción de la masa solar representa esta energía?

La energía total emitida por un cuerpo negro a temperatura T durante un tiempo t es la energía que sale a través de su superficie durante ese tiempo. Es decir, el producto de la radiancia total $R(T)$ por la superficie del cuerpo por el tiempo.

$$E = R(T) \cdot S \cdot t = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_\odot^2 \cdot t\,.$$

Para el caso que nos ocupa $T = 5700\,\text{K}$, $S = 4\pi R_\odot^2$ y $t = 1\,\text{año}$, con lo que

$$E = 5.67 \times 10^{-8} \times 5700^4 \times 4\pi \times (6.96 \times 10^8)^2 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ J} = 1.15 \times 10^{34} \text{ J}\,.$$

La masa asociada a esta energía es

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{1.15 \times 10^{34}}{(2.99 \times 10^8)^2} = 1.13 \times 10^{17}\,\text{kg}\,,$$

que supone una fracción

$$\frac{m}{M_\odot} = \frac{1.13 \times 10^{17}}{2.99 \times 10^{30}} = 4.12 \times 10^{-14}$$

de la masa total del Sol.

Comentario. Téngase en cuenta que la edad del universo es aproximadamente 1.4×10^{10} años. Si se supone que el Sol se comporta como un cuerpo negro y que sólo emite energía en forma de radiación térmica, tardaría en agotarse un tiempo del orden de diez mil veces la edad del universo.