

Capítulo 4

Rotaciones y Cuaternios

El presente capítulo es el más importante en nuestro trabajo. Se divide en dos partes: en la primera se discuten algunos resultados importantes sobre rotaciones en tres dimensiones, más concretamente el teorema de Euler, el cual es demostrado utilizando herramientas del álgebra lineal, y la fórmula de Rodrigues. En la sección correspondiente a la fórmula de Rodrigues, se discute su derivación además de la relación que tiene con matrices de rotación ya conocidas en la teoría de rotaciones.

En la segunda parte del capítulo se aborda la relación entre rotaciones en el espacio tridimensional y los cuaternios. En esta sección se discute también la relación existente entre la fórmula de Rodrigues y las rotaciones mediante cuaternios. Tal relación nos dará pie para poder llevar a cabo una de las primeras aplicaciones que se discuten en capítulos más adelante.

4.1 Euler, Rodrigues y rotaciones en \mathbb{R}^3

Aún cuando Hamilton fue el primero en construir los cuaternios como una álgebra, éstos tienen una historia anterior, empezando con el descubrimiento de Euler conocido como la identidad de los cuatro cuadrados, la cual dice que el producto de dos números, cada uno de los cuales es una suma de cuatro cuadrados, es, en sí, una suma de cuatro cuadrados.

Más aun, un tratamiento estrictamente geométrico de las rotaciones en el espacio euclidiano tridimensional, lleva necesariamente, a una caracterización de las rotaciones en \mathbb{R}^3 que está muy cerca del trabajo de Hamilton para representar estas rotaciones por medio de cuaternios. Este trabajo lo realizó el matemático francés Olinde Rodrigues (1795-1851) en 1840, antes del descubrimiento de los cuaternios por Hamilton en 1843.

Consideremos rotaciones de la esfera unitaria centrada en el origen. El primer problema a resolver es probar que si aplicamos una rotación seguida de otra, el resultado final es una rotación de la esfera alrededor de algún eje por un ángulo. (Esto es crucial para establecer la estructura de grupo de el conjunto de todas las posibles rotaciones en la esfera). Euler ([1]) resolvió un problema aún más general que este, pues él consideró la composición de dos transformaciones afines (traslaciones-rotaciones) y mostró que la orientación de los ejes resultantes de tal composición dependían de seis parámetros angulares, tres de los cuales podían ser eliminados algebraicamente, dejando simplemente tres parámetros solamente, y así

determinaba una rotación. Cabe mencionar que el enfoque de Euler es algebraico, no geométrico, y que no es constructivo. Esto es, que no provee expresiones para determinar el ángulo y eje de la rotación resultante. Sin embargo, Euler, es a menudo acreditado por la solución existencial, geométrica, y problemas constructivos concernientes a la composición de dos rotaciones.

El problema que se acaba de describir está relacionado con otro aún más general: probar que el movimiento general de una esfera con centro fijo es una rotación, es decir, que cualquier movimiento de la esfera puede ser expresado como la composición o el producto de dos rotaciones. Éste resultado es el conocido como *Teorema de Euler*

Fue en su tesis doctoral, publicada en 1840 ([1]), que Rodrigues resolvió todos los tres aspectos del problema de Euler concerniente al producto de dos rotaciones. En tal artículo, Rodrigues describe una construcción geométrica la cual, dados los ángulos y ejes de dos rotaciones, determina la orientación del eje resultante de rotación y el valor de su ángulo de rotación. Esta construcción geométrica es llamada por varios autores la “construcción de Euler-Rodrigues”.

A pesar de que la construcción de Euler-Rodrigues contiene la llave geométrica para el grupo de rotaciones, ha sido ignorada en los estudios sobre el grupo de rotaciones y momento angular. En 1848, ocho años después del artículo de Rodrigues, Stokes hace incapié en el hecho de que no existía un método geométrico para la composición de dos rotaciones. Sylvester, en 1850, produce una buena figura de la construcción de Rodrigues -la primera en ser publicada- con una clara explicación sin hacer referencia alguna a Rodrigues ni a Euler. Hamilton, en 1853, redescubrió geoméricamente los resultados de la construcción de Rodrigues.

Una vez resueltos los problemas de existencia y geométricos debido al producto de dos rotaciones, Rodrigues provee, en su artículo, fórmulas para determinar el ángulo y el eje de la rotación resultante. Para llevar a cabo esto, él parametriza una rotación con cuatro parámetros. Si ϕ es el ángulo de rotación y (n_x, n_y, n_z) son las componentes del vector unitario que denota el eje de rotación, sus parámetros son:

$$\cos \frac{1}{2}\phi, \quad \text{sen} \frac{1}{2}\phi n_x, \quad \text{sen} \frac{1}{2}\phi n_y, \quad \text{sen} \frac{1}{2}\phi n_z,$$

Si hacemos corresponder estos parámetros con los números α, x, y, z de la ecuación (3.2), entonces la fórmula para la multiplicación que propuso Rodrigues es precisamente la regla de multiplicación de Hamilton para cuaternios. Esto nos dice que Rodrigues fue, en cierta manera, precursor de Hamilton.

El teorema de Euler. Uno de los resultados más importantes sobre rotaciones, el cual enunciamos a continuación, es el teorema de Euler. Este teorema nos asegura que toda rotación por un cierto ángulo en cualquier espacio deja fija una línea recta que es el eje de rotación.

Teorema 4.1 (Euler) *Si R es una matriz que representa una rotación en \mathbb{R}^3 , entonces R tiene un vector propio $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que*

$$R \mathbf{n} = \mathbf{n},$$

esto es, \mathbf{n} es un vector propio con valor propio 1.

Demostración. Como R es una rotación, $R \in SO(3)$ y $\det(R) = 1$. Además, $RR^T = I = RR^{-1}$ y $R^T = R^{-1} \in SO(3)$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \det[R - I] &= \det[(R - I)^T] = \det[R^T - I] = \det[R^{-1} - I] = \det[-R^{-1}(R - I)] \\ &= (-1) \det[R^{-1}(R - I)] = -\det[R^{-1}] \det[R - I] = -\det[R - I], \end{aligned}$$

es decir, $\det[R - I] = -\det[R - I]$, por lo que $\det(R - I) = 0$. Luego, $R - I$ tiene núcleo distinto de cero y por lo tanto, existe $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tal que $(R - I)\mathbf{n} = \mathbf{0}$. De esto se sigue que $R\mathbf{n} = \mathbf{n}$. ■

Este teorema nos permite ver una secuencia de rotaciones sobre distintos ejes como una sola rotación alrededor de un eje pues cada rotación, al tener asociada una matriz, hace que la secuencia de ellas tenga, a su vez, asociada una sola matriz y usando el teorema de Euler sabemos que tiene un eje de rotación.

4.2 Rotaciones

De los cursos de geometría analítica recordamos que al rotar un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alrededor del origen por un ángulo θ obtenemos otro vector $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son

$$x' = \cos(\theta)x - \text{sen}(\theta)y, \quad y' = \text{sen}(\theta)x + \cos(\theta)y,$$

lo cual expresamos por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

donde

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Observemos que

$$R(\theta) \cdot R^T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que $R \in SO(2)$.

La forma de mitad de ángulo. Podemos obtener la matriz de rotación para un vector en el plano como sigue. Consideremos:

$$A = a^2 - b^2, \quad B = 2ab.$$

Si $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \sin\theta, \end{aligned}$$

de modo que la matriz de rotación no cambia

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

En el espacio \mathbb{R}^3 no es tan inmediato especificar la matriz que rota un vector por un ángulo α alrededor de un eje arbitrario. Para ello utilizaremos las siguientes matrices conocidas como matrices fundamentales, las cuales son rotaciones en el plano que determina cada par de ejes ortogonales,

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix},$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso se tiene:

- $R_x(\alpha)$ rota el plano yz alrededor del origen por un ángulo α .
- $R_y(\phi)$ rota el plano xz alrededor del origen por un ángulo ϕ .
- $R_z(\theta)$ rota el plano xy alrededor del origen por un ángulo θ .

Consideremos ahora un vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3, \|\mathbf{n}\| = 1$. En coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) se tiene que $\mathbf{n} = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$. Una rotación por un ángulo α , teniendo como eje de rotación el vector \mathbf{n} , queda representada mediante la matriz

$$R(\alpha, \mathbf{n}) = R_z(\theta) \cdot R_y(\phi) \cdot R_x(\alpha) \cdot R_y^T(\phi) \cdot R_z^T(\theta) \quad (4.1)$$

Realizando los cálculos en el lado derecho de (4.1) se obtiene

$$R(\alpha, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} c + n_1^2(1-c) & n_1n_2(1-c) - sn_3 & n_1n_3(1-c) + sn_2 \\ n_2n_1(1-c) + sn_3 & c + n_2^2(1-c) & n_2n_3(1-c) - sn_1 \\ n_3n_1(1-c) - sn_2 & n_3n_2(1-c) + sn_1 & c + n_3^2(1-c) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde $c = \cos \alpha$ y $s = \sin \alpha$.

Podemos pensar la fórmula (4.1) de la siguiente manera: si $\mathbf{z} = (0, 0, 1)^T$, entonces es fácil ver que $\mathbf{n} = R_z(\theta) \cdot R_y(\phi) \mathbf{z}$. Así, para construir la matriz de rotación que representa un giro por un ángulo α sobre el eje \mathbf{n} , transformamos este vector al vector \mathbf{z} invirtiendo la fórmula previa, luego giramos alrededor de \mathbf{z} por el ángulo α aplicando la matriz $R_z(\alpha)$ y nos regresamos con \mathbf{z} al vector \mathbf{n} , donde comenzamos. Este proceso está dado precisamente por la fórmula (4.1) y se puede apreciar en la Figura 4.1:

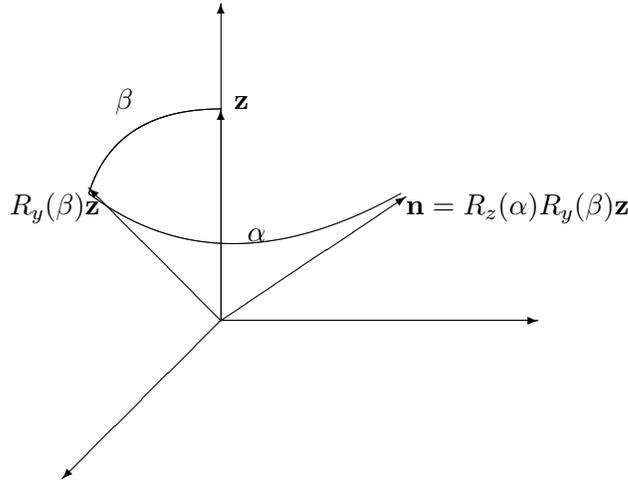


Figura 4.1: Derivación de la matriz de rotación en \mathbb{R}^3 alrededor de un eje unitario \mathbf{n} por un ángulo θ .

La fórmula de Rodrigues. Otra forma de calcular rotaciones en el espacio \mathbb{R}^3 , equivalente a la fórmula (4.1), es mediante la llamada *fórmula de Rodrigues*, en honor al matemático del mismo nombre, Olinde Rodrigues.

Sea \mathbf{v} un vector cualquiera en \mathbb{R}^3 . Si \mathbf{v}_{rot} es el vector que se obtiene al rotar el vector \mathbf{v} alrededor del vector unitario $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ por un ángulo α , entonces la fórmula de Rodrigues nos da las coordenadas de este vector:

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \cos \alpha \mathbf{v} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos \alpha) \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n}, \quad (4.3)$$

donde \times indica el producto vectorial en \mathbb{R}^3 y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto punto en este espacio.

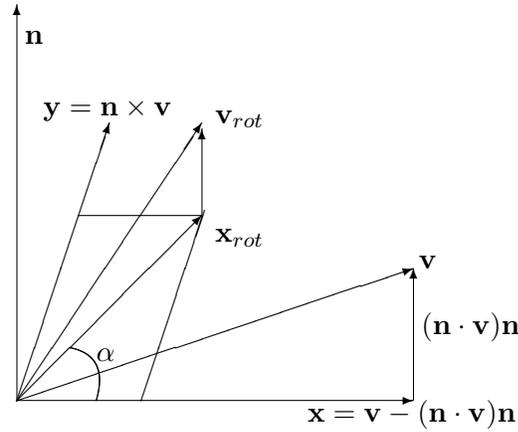


Figura 4.2: Derivación de la fórmula de Rodrigues

Para derivar esta fórmula se procede como sigue. El vector $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle$, es la proyección del vector \mathbf{v} en el plano ortogonal a \mathbf{n} , como se muestra en la Figura 4.2. Ahora, sea $\mathbf{y} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$. Por medio de un poco de trigonometría, vemos que al rotar el vector \mathbf{x} alrededor de \mathbf{n} , por un ángulo α , se obtiene la proyección del vector \mathbf{v}_{rot} :

$$\mathbf{x}_{rot} = \mathbf{x} \cos \alpha + \mathbf{y} \operatorname{sen} \alpha.$$

De esto se tiene que

$$\mathbf{x}_{rot} = (\mathbf{v} - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle) \cos \alpha + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \operatorname{sen} \alpha.$$

Si ϕ denota el ángulo formado por \mathbf{n} y \mathbf{v} , y tomamos un vector unitario \mathbf{u} , ortogonal a ambos, entonces podemos calcular el producto escalar y el producto vectorial de \mathbf{n} y \mathbf{v} , por medio de las fórmulas

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \cos \phi, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \phi \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

De esto se sigue que los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} tienen la misma longitud. Como \mathbf{n} es unitario, de (4.5) se tiene

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \phi.$$

Si usamos (4.4) podemos calcular la longitud de $\mathbf{n}\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle$ y este vector junto con \mathbf{v} y \mathbf{x} forman los lados de un triángulo rectángulo. De esto se sigue que $|\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle| \|\mathbf{n}\|$ es también la longitud de \mathbf{x} .

Finalmente, para obtener el vector \mathbf{v}_{rot} tenemos que sumarle al vector \mathbf{x}_{rot} la componente de \mathbf{v} que es paralela al vector \mathbf{n} : $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n}$. El resultado que se obtiene es

$$\mathbf{v}_{rot} = (\mathbf{v} - \mathbf{n}\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle) \cos \alpha + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \operatorname{sen} \alpha + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n},$$

la cual claramente se expresa como

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v} \cos \alpha + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \sin \alpha + \mathbf{n} \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle (1 - \cos \alpha), \quad (4.6)$$

que es la fórmula de Rodrigues (4.3).

4.3 Relación entre rotaciones y cuaternios

Para entender la relación entre rotaciones en \mathbb{R}^3 y los cuaternios, es conveniente utilizar la notación $q = [\lambda, \mathbf{a}]$ para el cuaternio $q = \lambda + xi + yj + zk$, donde $\mathbf{a} = xi + yj + zk$. La separación del cuaternio q en dos partes nos permite distinguir su parte real λ y su “parte imaginaria” \mathbf{a} ; además, identificamos el cuaternio puro $\mathbf{a} = xi + yj + zk$ con el vector $\mathbf{a} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. De manera recíproca, dado un vector $\mathbf{b} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, le hacemos corresponder el cuaternio $q_{\mathbf{b}} = [0, \mathbf{b}]$, con $\mathbf{b} = ui + vj + wk \in \mathbb{H}_{\mathbb{P}}$.

De esta manera, dados los cuaternios $q = [\lambda, \mathbf{a}]$ y $r = [\mu, \mathbf{b}]$ definimos dos operaciones entre las partes imaginarias de q y r : El *producto punto* y el *producto cruz* de \mathbf{a} y \mathbf{b} los cuales se corresponden con el producto punto y el producto cruz de los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que con esta definición, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es otro cuaternio con parte real igual a cero y su “parte imaginaria” está dada por las componentes del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Usando esta notación se tiene que el producto (3.7) de los cuaternios $q = [\lambda, \mathbf{a}]$ y $r = [\mu, \mathbf{b}]$ se expresa como

$$q \cdot r = [\lambda, \mathbf{a}] \cdot [\mu, \mathbf{b}] = [\lambda\mu - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}], \quad (4.7)$$

y esta fórmula nos será muy útil para describir la relación entre los cuaternios unitarios y las rotaciones en \mathbb{R}^3 .

En efecto, supongamos que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se rota un ángulo α alrededor de un eje, determinado por un vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$. Suponemos también que el giro es positivo, es decir, contrario a las manecillas del reloj. Sea \mathbf{u} el vector que se obtiene de esta rotación.

Con cada vector \mathbf{v} , \mathbf{n} y \mathbf{u} asociamos el cuaternio correspondiente:

$$q_{\mathbf{v}} = [0, \mathbf{v}], \quad q_{\mathbf{n}} = [0, \mathbf{n}], \quad q_{\mathbf{u}} = [0, \mathbf{u}] \quad (4.8)$$

Sea q el cuaternio dado por

$$q = [\gamma, \sigma \mathbf{n}], \quad \text{con } \gamma = \cos(\alpha/2), \quad \sigma = \sin(\alpha/2). \quad (4.9)$$

Notemos que $q = \gamma + (\sigma n_1)i + (\sigma n_2)j + (\sigma n_3)k$ y $\|q\| = 1$. Calculando ahora el producto $q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1}$ por medio de (4.7) y utilizando varias propiedades muy conocidas del producto cruz y del producto punto, se obtiene:

$$q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1} = \mathbf{v} + 2\sigma\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{v} + 2\sigma^2 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (4.10)$$

Si utilizamos las identidades $\sin \alpha = 2 \sin(\frac{\alpha}{2}) \cos(\frac{\alpha}{2}) = 2\sigma\gamma$ y $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sigma^2$, la ecuación (4.10) se escribe como

$$q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1} = \mathbf{v} + (\sin \alpha) \mathbf{n} \times \mathbf{v} + (1 - \cos \alpha) \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}). \quad (4.11)$$

El lado derecho de la ecuación (4.11) es equivalente a aplicar la siguiente matriz al vector \mathbf{v} ,

$$A = I + \sin \theta \Lambda_{\mathbf{n}} + (1 - \cos \theta) (\Lambda_{\mathbf{n}})^2, \quad (4.12)$$

donde

$$\Lambda_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando ahora la identidad $\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n} - \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{v} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n} - \mathbf{v}$ tomando en cuenta que $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$, la ecuación (4.11) se escribe como

$$q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1} = \cos \alpha \mathbf{v} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos \alpha) \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n}. \quad (4.13)$$

Así, $q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1}$ es un cuaternio con parte real igual a cero y por medio de la correspondencia definida arriba, de (4.13) se tiene

$$q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1} \longmapsto \cos \alpha \mathbf{v} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos \alpha) \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.14)$$

Al comparar el lado derecho de (4.14) con la fórmula de Rodrigues (4.6), vemos que son exactamente lo mismo. Por lo tanto,

$$q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1} \equiv q_{\mathbf{u}} \longmapsto \mathbf{u} = \cos \alpha \mathbf{v} + \sin \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos \alpha) \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{n}. \quad (4.15)$$

Con esto se prueba que el producto de cuaternios $q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1}$, con $q_{\mathbf{v}}$ y q dados por (4.8) y (4.9), respectivamente, representa una rotación, por un ángulo α , del vector \mathbf{v} alrededor del eje \mathbf{n} .

Consideremos el cuaternio $q = [q_0, \mathbf{q}]$, con $\|q\| = 1$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, utilizando la ecuación (4.7) llegamos a una expresión equivalente a la ecuación (4.15), que será de gran utilidad más adelante, la cual está dada por

$$qq_{\mathbf{v}}q^{-1} = [0, (q_0^2 - \|q\|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v})]. \quad (4.16)$$

La matriz de rotación R correspondiente al cuaternio

$$\begin{aligned} q &= [\gamma, \sigma \mathbf{n}] = \gamma + \sigma n_1 i + \sigma n_2 j + \sigma n_3 k \\ &= \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)n_1 i + \sin(\alpha/2)n_2 j + \sin(\alpha/2)n_3 k \\ &\equiv \gamma + xi + yj + zk, \end{aligned} \quad (4.17)$$

se calcula del lado derecho de (4.15) para obtener $\mathbf{u} = R \mathbf{v}$, donde

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2\gamma z & 2xz + 2\gamma y \\ 2xy + 2\gamma z & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2\gamma x \\ 2xz - 2\gamma y & 2yz + 2\gamma x & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

la cual es precisamente la matriz de rotación $R(\alpha, \mathbf{n})$ obtenida en (4.2), como se puede ver fácilmente al sustituir γ, x, y, z en (4.18) por sus valores dados por (4.17) y tomando en cuenta que $\gamma^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Otra representación de la matriz R es la siguiente. Al sustituir $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ por

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\theta/2), \\ q_1 &= n_1 \operatorname{sen}(\theta/2), \\ q_2 &= n_2 \operatorname{sen}(\theta/2), \\ q_3 &= n_3 \operatorname{sen}(\theta/2), \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, tenemos que

$$R(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Por otra parte, la composición de rotaciones se determina fácilmente mediante el producto de cuaternios. En efecto, si p y q son cuaternios unitarios que representan rotaciones y si $q_{\mathbf{v}}$ es el cuaternio identificado con el vector \mathbf{v} , entonces la rotación que define q se logra mediante la identificación del cuaternio $q_{\mathbf{u}} = q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1}$ con el vector \mathbf{u} , como se mostró con anterioridad. Este, a su vez, es modificado por la rotación representada por p :

$$p \cdot q_{\mathbf{u}} \cdot p^{-1} = p \cdot (q \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot q^{-1}) \cdot p^{-1} = (pq) \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot (q^{-1}p^{-1}) = (p \cdot q) \cdot q_{\mathbf{v}} \cdot (p \cdot q)^{-1}. \quad (4.20)$$

Esta ecuación muestra que la composición de rotaciones en \mathbb{R}^3 se puede representar por medio del producto de cuaternios unitarios $p \cdot q$.

A continuación enunciamos un resultado que nos será de gran utilidad en el capítulo siguiente:

Lema 4.2 *Sea $q = [q_0, \mathbf{q}] \in \mathbb{H}$ con $\|q\| = 1$. Si $p = [0, \mathbf{p}] = q * [0, e_i] * q^{-1}$, donde e_i es cualquier elemento de la base estándar de \mathbb{R}^3 , entonces*

$$dp = dq * [0, e_i] * q^{-1} + q * [0, e_i] * dq^{-1}$$

Demostración. Procedemos a realizar los cálculos,

$$\begin{aligned} p &= [0, \mathbf{p}] = q * [0, e_i] * q^{-1} \\ &= [q_0, \mathbf{q}] * [0, e_i] * [q_0, -\mathbf{q}] \\ &= [(-\mathbf{q} \cdot e_i)q_0 + \mathbf{q} \cdot (q_0e_i + \mathbf{q} \times e_i), (\mathbf{q} \cdot e_i)\mathbf{q} + q_0^2e_i + 2q_0\mathbf{q} \times e_i], \end{aligned}$$

luego $dp = [dA, dB]$ donde

$$dA = dq_0(-\mathbf{q} \cdot e_i) + q_0(-e_i \cdot d\mathbf{q}) + d\mathbf{q} \cdot (q_0e_i + \mathbf{q} \times e_i) + \mathbf{q} \cdot (dq_0e_i + d\mathbf{q} \times e_i)$$

y

$$dB = (d\mathbf{q} \cdot e_i)\mathbf{q} + (\mathbf{q} \cdot e_i)d\mathbf{q} + 2q_0dq_0e_i + 2dq_0\mathbf{q} \times e_i + 2q_0d\mathbf{q} \times e_i.$$

Ahora, calculamos $dq * [0, e_i] * q^{-1}$,

$$\begin{aligned} dq * [0, e_i] * q^{-1} &= [q_0(-d\mathbf{q} \cdot e_i) + \mathbf{q} \cdot (dq_0 e_i + d\mathbf{q} \times e_i), \\ &\quad (-d\mathbf{q} \cdot e_i)(-\mathbf{q}) + q_0(dq_0 e_i + d\mathbf{q} \times e_i) + \\ &\quad (dq_0 e_i + d\mathbf{q} \times e_i) \times (-\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por último, calculamos $q * [0, e_i] * dq^{-1}$,

$$\begin{aligned} q * [0, e_i] * dq^{-1} &= [(-e_i \cdot \mathbf{q})dq_0 + d\mathbf{q} \cdot (q_0 e_i + \mathbf{q} \times e_i), \\ &\quad (-e_i \cdot \mathbf{q})(d\mathbf{q}) + dq_0(q_0 e_i + \mathbf{q} \times e_i) + \\ &\quad (q_0 e_i + \mathbf{q} \times e_i) \times (-d\mathbf{q})]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Sumando las partes escalares de (4.21) y (4.22) obtenemos dA y al sumar las partes escalares de (4.21) y (4.22) obtenemos dB como queríamos. ■

4.4 El operador cuaterniónico de rotación

Hemos observado que si $q \in \mathbb{H}$ con $\|q\| = 1$ y $v \in \mathbb{H}_p$, el producto

$$qvq^{-1},$$

representa una rotación en $SO(3)$. Esta asignación es muy importante y es necesario tratarla de manera especial.

Definimos el *operador cuaterniónico de rotación*, ρ_q , asociado con el cuaternio q y el cual se aplica a un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ correspondiente al cuaternio puro v , por la ecuación

$$w = \rho_q(v) = qvq^{-1}. \quad (4.23)$$

En esta sección, observaremos dos propiedades algebraicas del operador ρ_q . La primera de ellas es que el operador ρ_q es *lineal*, como lo indica el siguiente resultado.

Proposición 4.3 *El operador ρ_q es lineal. Esto es, para cualesquiera $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ y para cualquier escalar $k \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\rho_q(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\rho_q(\mathbf{a}) + \rho_q(\mathbf{b}),$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son los cuaternios puros asociados a los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , respectivamente.

Demostración. Para probar este resultado procedemos como sigue. Recordemos que el producto de cuaternios es asociativo, así

$$\begin{aligned} \rho_q(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= q(k\mathbf{a} + \mathbf{b})q^{-1} \\ &= (kqa + qb)q^{-1} \\ &= kqaq^{-1} + qbq^{-1} \\ &= k\rho_q(\mathbf{a}) + \rho_q(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

La segunda propiedad algebraica es que la norma o longitud de un vector es invariante bajo el operador ρ_q , esto es, que $\|\rho_q(v)\| = \|v\|$, con $v \in \mathbb{R}^3$. Esta propiedad se concluye directamente utilizando el Teorema 3.1. ■

La siguiente proposición establece que el operador ρ_q representa una rotación en \mathbb{R}^3 .

Proposición 4.4 *Para cualquier cuaternio unitario*

$$q = [q_0, \mathbf{q}] = \cos \theta + \mathbf{u} \operatorname{sen} \theta$$

y cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$, la acción del operador

$$\rho_q(v) = qvq^{-1},$$

donde v es el cuaternio puro asociado al vector v , sobre el vector v , se interpreta geoméricamente como una rotación del vector v por un ángulo 2θ alrededor del vector \mathbf{q} .

Demostración. Escribimos el vector v en la forma

$$v = \mathbf{a} + \mathbf{n},$$

donde \mathbf{a} es la componente de v que se encuentra sobre la parte vectorial del cuaternio q , y \mathbf{n} es la componente de v la cual es normal a la parte vectorial de q .

Como el vector \mathbf{a} está sobre el vector \mathbf{q} , \mathbf{a} es un múltiplo de \mathbf{q} , esto es

$$\mathbf{a} = k\mathbf{q}$$

para algún escalar $k \in \mathbb{R}$. Luego, utilizando la ecuación (4.16),

$$\rho_q(\mathbf{a}) = \rho_q(k\mathbf{q}) = k\mathbf{q} = \mathbf{a}.$$

Sólo nos falta mostrar que el operador ρ_q rota la componente \mathbf{n} un ángulo 2θ alrededor de \mathbf{q} . Esto se verifica utilizando la ecuación (4.16), reemplazando v por \mathbf{n} . De esta manera

$$\begin{aligned} \rho_q(\mathbf{n}) &= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{n} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{n}) \\ &= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{n} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{n}) \\ &= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{n} + 2q_0\|\mathbf{q}\|(\mathbf{u} \times \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Aquí utilizamos el hecho de que $\mathbf{u} = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$. Si escribimos $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{n}_\perp$, tenemos que

$$\rho_q(\mathbf{n}) = (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{n} + 2q_0\|\mathbf{q}\|\mathbf{n}_\perp. \quad (4.24)$$

Ahora veamos que $\|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{n}_\perp\|$. Como el ángulo entre \mathbf{n} y \mathbf{n}_\perp es $\pi/2$, entonces

$$\|\mathbf{n}_\perp\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{u}\| = \|\mathbf{n}\|\|\mathbf{u}\| \operatorname{sen} \pi/2 = \|\mathbf{n}\|. \quad (4.25)$$

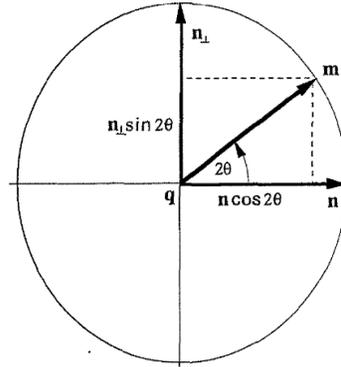


Figura 4.3: Componentes del vector $\rho_q(\mathbf{n})$.

Finalmente, utilizando la forma trigonométrica del cuaternio q , podemos escribir la ecuación (4.24) en la forma

$$\begin{aligned}\rho_q(\mathbf{n}) &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\mathbf{n} + (2 \cos \theta \sin \theta)\mathbf{n}_\perp \\ &= \cos 2\theta \mathbf{n} + \sin 2\theta \mathbf{n}_\perp.\end{aligned}$$

Las componentes de $\rho_q(\mathbf{n})$ se ilustran en la Figura 4.3. Hasta este punto, hemos probado que

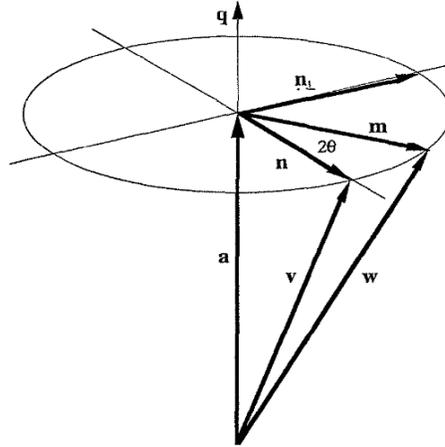
$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= q\mathbf{v}q^{-1} = \rho_q(\mathbf{v}) \\ &= \rho_q(\mathbf{a} + \mathbf{n}) \\ &= \rho_q(\mathbf{a}) + \rho_q(\mathbf{n}) \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{m},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{m} = \cos 2\theta \mathbf{n} + \sin 2\theta \mathbf{n}_\perp$. Utilizando la ecuación (4.25), obtenemos $\|\mathbf{m}\| = \|\mathbf{n}\| = \|\mathbf{n}_\perp\|$. Esto nos dice que \mathbf{m} es una rotación de \mathbf{n} por un ángulo 2θ . Como $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{m}$, es claro que $\mathbf{w} = q\mathbf{v}q^{-1}$ se puede interpretar como la rotación del vector \mathbf{v} por un ángulo 2θ alrededor de \mathbf{q} . ■

Notemos, en la Figura 4.4, que el vector \mathbf{v} y su imagen \mathbf{w} , bajo el operador ρ_q , se pueden ver como generadores del cono circular cuyo eje es el vector \mathbf{q} y cuya base circular en esta instancia contiene los vectores \mathbf{n} y \mathbf{m} . Así, el vector \mathbf{v} y su imagen \mathbf{w} están relacionados por la rotación descrita en la proposición anterior.

Recordemos que el conjunto de los cuaternios unitarios, \mathbb{S}^3 , es isomorfo a $SU(2)$. Definimos una función $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$ por $\rho(q) = \rho_q$. Así, mediante el operador ρ_q podemos definir una transformación entre $SU(2)$ y $SO(3)$. Además esta función es sobreyectiva ya que cualquier rotación puede ser representada mediante esta función, es decir, cualquier punto en $SO(3)$ le corresponde un cuaternio unitario en \mathbb{H} . Lo que no resulta natural es que esta función es también un homomorfismo de los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$. Esto motiva la siguiente proposición.

Proposición 4.5 *La función $\rho(q) = \rho_q$ es sobreyectiva y define un homomorfismo de grupos entre $SU(2)$ y $SO(3)$.*

Figura 4.4: Geometría del operador ρ_q .

Demostración. En la sección anterior hemos observado que a cualquier elemento de $SO(3)$ le podemos asociar un elemento en \mathbb{H} mediante la función ρ_q , por lo tanto ρ_q es sobreyectiva, de tal manera que sólo nos resta ver que es un homomorfismo. En efecto, sean $q, s \in \mathbb{H}$ con $\|q\| = \|s\| = 1$ y $t \in \mathbb{H}_p$. Luego,

$$\begin{aligned} \rho_{sq}(t) &= (sq)t(sq)^{-1} \\ &= (sq)t(q^{-1}s^{-1}) \\ &= s(qtq^{-1})s^{-1} \\ &= \rho_s(t) \circ \rho_q(t). \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado muestra la importancia de la función ρ_q .

Proposición 4.6 $SU(2)$ es una doble cubierta de $SO(3)$.

Demostración. Para probar este resultado tenemos que encontrar una función sobreyectiva que transforme el espacio $SU(2)$ en $SO(3)$. Dicha función es precisamente ρ . Para verificar que $SU(2)$ es una doble cubierta, consideremos la función $\rho(-q) = \rho_{-q} = (-q)x(-q)^{-1}$. Recordemos que el cuaternio $-q$ puede ser expresado como $-1 \cdot q$. Luego, dado que $-1 \in \mathbb{R}$ tenemos que $-1 \cdot q = q \cdot (-1)$. Ahora, si $x \in \mathbb{H}_p$ tenemos

$$\begin{aligned} \rho_{-q}(x) &= (-q)x(-q)^{-1} \\ &= q(-1)x(-1)q^{-1} \\ &= q(-1)(-1)xq^{-1} \\ &= qxq^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto $\rho_q = \rho_{-q}$, es decir

$$\rho(q) = \rho(-q).$$

Esto es, una rotación por el cuaternio q representa la misma rotación que el cuaternio $-q$. Luego, como $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$, con lo anterior mostramos que $SO(3)$ es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^3 módulo la función antípoda (la cual identifica a un punto en la esfera \mathbb{S}^3 con su antípoda). De esta manera $SU(2)$ es una doble cubierta de $SO(3)$. ■

Recordemos que el espacio proyectivo \mathbb{RP}^3 es el espacio cociente que se obtiene al identificar los puntos antípoda en la esfera \mathbb{S}^3 . De esta manera, por el resultado anterior tenemos que $SO(3)$ es homeomorfo a \mathbb{RP}^3 . Tal homeomorfismo se puede utilizar para transferir la estructura de grupo existente en $SO(3)$ a \mathbb{RP}^3 , y con esto se tiene que \mathbb{RP}^3 es un grupo topológico. Más aún, se puede mostrar que $SO(3)$ y \mathbb{RP}^3 son variedades difeomorfas. Así, $SO(3)$ y \mathbb{RP}^3 son, al mismo tiempo, grupos, espacios topológicos, variedades y por último, grupos de Lie.

De la Sección 1.3, observamos que la función ρ tiene un comportamiento similar a la fibración de Hopf. Esto no es una coincidencia, pues la función ρ y la fibración de Hopf son equivalentes.

Como se ha observado, la función ρ_q representa una rotación. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y $x \in \mathbb{H}$ el cuaternio asociado a tal vector de \mathbb{R}^3 . Al ángulo que forman el vector \mathbf{x} y el vector asociado al cuaternio $\rho_q(x)$ le llamaremos el *ángulo de $\rho_q(x)$* .

Recuperación del eje de rotación y el ángulo de giro. Ya sabemos cómo obtener la matriz asociada a una rotación por un eje unitario y un ángulo dados mediante cuaternios, pero surge ahora el problema de cómo obtener el cuaternio asociado a una matriz de rotación dada. Para resolver este problema se procede como sigue.

Siempre que $\sin \theta$ sea distinto de cero y lo suficientemente grande como para evadir errores numéricos, el eje de rotación \mathbf{n} puede calcularse utilizando la ecuación (4.2) y restando su traspuesta para encontrar

$$R - R^T = \begin{bmatrix} 0 & -2n_3 \sin \theta & 2n_2 \sin \theta \\ 2n_3 \sin \theta & 0 & -2n_1 \sin \theta \\ -2n_2 \sin \theta & 2n_1 \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix},$$

calculamos $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ y normalizamos para obtener el resultado

$$\mathbf{n} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d} \right).$$

Para obtener el ángulo de giro, volvemos a la ecuación (4.2) y al examinar su traza encontramos que

$$\text{tr}(R) = 1 + 2 \cos \theta. \quad (4.26)$$

De esta manera, el ángulo lo podemos obtener de la ecuación

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(R) - 1),$$

así

$$\theta = \arccos \left[\frac{\operatorname{tr}(R) - 1}{2} \right].$$

Esta forma de obtener el ángulo no siempre es tan precisa, por lo que es necesario hacer los cálculos de una manera más rigurosa. Por ejemplo, si $\theta = \pi$, es decir, al rotar 180 grados, la forma de la matriz $R - R^T$ ya no es útil, pues en este caso es una matriz cuyos elementos son todos cero.

El procedimiento básico general para extraer el cuaternio $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ asociado a una matriz de rotación R depende del hecho, citado en [11], de que siempre habrá al menos un elemento de la diagonal de R que será “grande”. Utilizando la ecuación (4.26) y la fórmula de mitad de ángulo, tenemos que el valor de q_0 es

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos \theta + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{tr}(R) + 1}. \quad (4.27)$$

Como un cuaternio y su negativo producen la misma matriz de rotación, podemos escoger la raíz positiva de la ecuación (4.27), siempre que se mantenga la parte vectorial del cuaternio con este signo.

Supongamos que $\operatorname{tr}(R) > 0$. Entonces, como $q_0 > \frac{1}{2}$, no tenemos problema al dividir por q_0 , de esta manera si usamos la ecuación (4.19) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} R_{32} - R_{23} &= 4q_0q_1, \\ R_{13} - R_{31} &= 4q_0q_2, \\ R_{21} - R_{12} &= 4q_0q_3, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{R_{32} - R_{23}}{4q_0}, \\ q_2 &= \frac{R_{13} - R_{31}}{4q_0}, \\ q_3 &= \frac{R_{21} - R_{12}}{4q_0}, \end{aligned}$$

Por lo que el cuaternio $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ queda totalmente determinado.

Supongamos ahora que $\operatorname{tr}(R) \leq 0$. En este caso, no sabemos con certeza si q_0 es un buen divisor, pues este podría ser un número cercano a cero. Bajo estas condiciones, examinamos las entradas de la diagonal de la matriz de la ecuación (4.19). Si R_{11} es el elemento mayor de las entradas R_{ii} , entonces q_1 es el mayor de las componentes de la parte vectorial de q . Repitiendo este razonamiento para cada caso, es decir, para R_{22} y R_{33} , podemos obtener los valores para q_i de los elementos

de la diagonal de R , de tal manera que

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{11} - R_{22} - R_{33}}, \\ q_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{22} - R_{33} - R_{11}}, \\ q_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + R_{33} - R_{11} - R_{22}}. \end{aligned}$$

De esta información, finalmente podemos determinar los valores restantes mediante las siguientes condiciones:

- Si q_1 es el elemento de mayor magnitud, entonces

$$q_0 = \frac{R_{32} - R_{23}}{4q_1}, \quad q_2 = \frac{R_{21} + R_{12}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{R_{13} + R_{31}}{4q_1}.$$

- Si q_2 es el elemento de mayor magnitud, entonces

$$q_0 = \frac{R_{13} - R_{31}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{R_{12} + R_{21}}{4q_2}, \quad q_3 = \frac{R_{23} + R_{32}}{4q_2}.$$

- Si q_3 es el elemento de mayor magnitud, entonces

$$q_0 = \frac{R_{21} - R_{12}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{R_{31} + R_{13}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{R_{23} + R_{32}}{4q_3}.$$

Los siguientes resultados nos ayudarán justificar el cálculo del ángulo de rotación.

Lema 4.7 *Dados dos cuaternios z, w , no nulos, entonces el ángulo de la rotación ρ_z es igual al ángulo de la rotación $\rho_{wzw^{-1}}$.*

Demostración. Para probar este resultado procedemos como sigue. Primero, sea $z = a\mathbf{1} + r$ con $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SU(2)$, $r \in \mathbb{H}_p$, $r \neq 0$, probaremos que el eje de la rotación $\rho_{wzw^{-1}}$ es $wrw^{-1} = \rho_w(r)$. En efecto, ya sabemos que un cuaternio de la forma wrw^{-1} es puro, y

$$wzw^{-1} = w(a\mathbf{1} + r)w^{-1} = w(a\mathbf{1})w^{-1} + w(r)w^{-1} = a\mathbf{1} + w(r)w^{-1}.$$

Luego, dado cualquier cuaternio no nulo x , ortogonal a r , el ángulo de la rotación z es el ángulo entre x y $\rho_z(x)$. Como las rotaciones preservan la orientación (pues preservan el producto cruz), el ángulo θ entre dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} es preservado bajo rotación. Ahora, como el producto interior también es preservado bajo rotaciones, si $x \cdot r = 0$, tenemos $\rho_w(x) \cdot \rho_w(r) = 0$, y el ángulo de la rotación $\rho_{wzw^{-1}} = \rho_w \circ \rho_z \circ (\rho_w)^{-1}$ es el ángulo entre los dos vectores $\rho_w(x)$ y $\rho_{wzw^{-1}}(\rho_w(x))$. Luego

$$\rho_{wzw^{-1}}(\rho_w(x)) = (\rho_w \circ \rho_z \circ (\rho_w)^{-1} \circ \rho_w)(x) = (\rho_w \circ \rho_z)(x) = \rho_w(\rho_z(x)),$$

el ángulo de la rotación $\rho_{wzw^{-1}}$ es el ángulo entre los dos vectores $\rho_z(x)$ y $\rho_w(\rho_z(x))$. Como las rotaciones preservan ángulos, éste también es el ángulo entre los dos vectores x y $\rho_z(x)$, el cual es el ángulo de la rotación ρ_z , como se había afirmado. ■

Con este hecho estamos en posición de probar el siguiente resultado,

Proposición 4.8 Para cualquier cuaternio $z = a\mathbf{1} + r$, donde $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SU(2)$, $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{H}_p, r \neq 0$, el eje de la rotación ρ_z asociado con z está determinado por el vector en \mathbb{R}^3 correspondiente a r , y el ángulo de rotación θ es igual a π cuando $a = 0$, o cuando $a \neq 0$ el ángulo de rotación está dado por

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\|r\|}{|a|},$$

con $0 < \theta \leq \pi$.

Demostración. Realizando los cálculos uno llega a que la recta que define r es invariante bajo la rotación ρ_z , y de esta manera es el eje de rotación. Note que para cualesquiera dos vectores no nulos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, existe alguna rotación ρ tal que $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ usamos la identidad, y si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, usamos la rotación cuyo eje lo determina $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ y rotamos \mathbf{x} a \mathbf{y} en el plano que contiene a \mathbf{x} y \mathbf{y} . Así, dados cualesquiera dos cuaternios puros x, y tales que sus normas coinciden, existe un cuaternio no nulo w tal que $y = wxw^{-1}$. Por el Lema 4.7, dados dos cuaternios no nulos arbitrarios z, w , afirmamos que el ángulo de la rotación ρ_z es el mismo que el ángulo de la rotación $\rho_{wzw^{-1}}$. Así, dado cualquier cuaternio $z = a\mathbf{1} + r$, donde $r \in \mathbb{H}_p, r \neq 0$, como existe algún cuaternio no nulo w tal que $wrw^{-1} = \|r\|i$ e $wzw^{-1} = a\mathbf{1} + \|r\|i$, es suficiente encontrar el ángulo de rotación para un cuaternio z de la forma $a\mathbf{1} + bi$ (una rotación del eje i). Es suficiente encontrar el ángulo de rotación entre j y $\rho_z(j)$, y como

$$\rho_z(j) = (a\mathbf{1} + bi)j(a\mathbf{1} + bi)^{-1},$$

obtenemos

$$\rho_z(j) = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\mathbf{1} + bi)j(a\mathbf{1} - bi) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}j + \frac{2ab}{a^2 + b^2}k.$$

Entonces si $a \neq 0$, debemos tener que

$$\tan \theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2(b/a)}{1 - (b/a)^2},$$

y como

$$\tan \theta = \frac{2 \tan(b/a)}{1 - \tan^2(b/a)},$$

bajo una cierta orientación del plano ortogonal al eje de rotación, obtenemos

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{|a|} = \frac{\|r\|}{|a|}.$$

Si $a = 0$, obtenemos

$$\rho_z(j) = -j,$$

y $\theta = \pi$. ■

