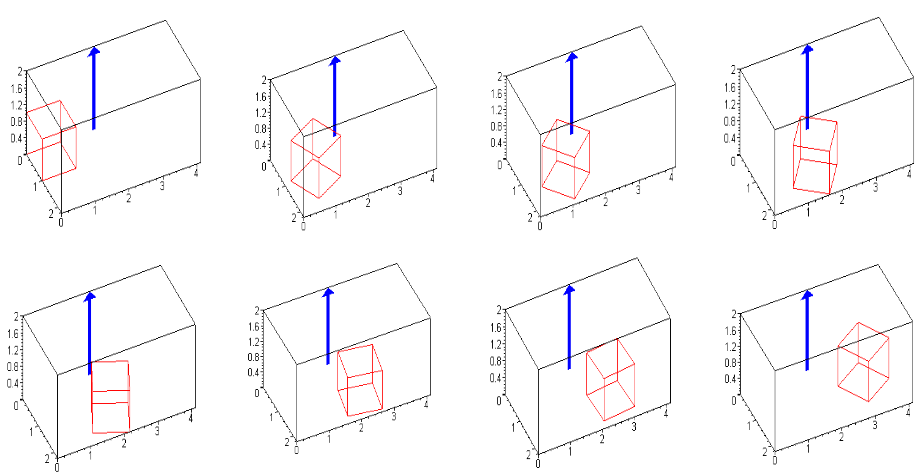
Capítulo 6

Aplicaciones

6.1 Una primera aplicación de los cuaternios: rotación de un cuerpo rígido

Como hemos visto en secciones anteriores, una característica muy importante de los cuaternios es que con éstos es posible representar rotaciones en el espacio $\mathbb{R}^3$, la cual es una alternativa a hacer lo propio con matrices de 3×3. Una de las principales ventajas al utilizar cuaternios en vez de matrices, es que se reducen las operaciones que se llevan a cabo para llegar al mismo resultado. Además, se obtiene una mayor precisión utilizando cuaternios, lo cual es de vital importancia cuando se implementa en computación.

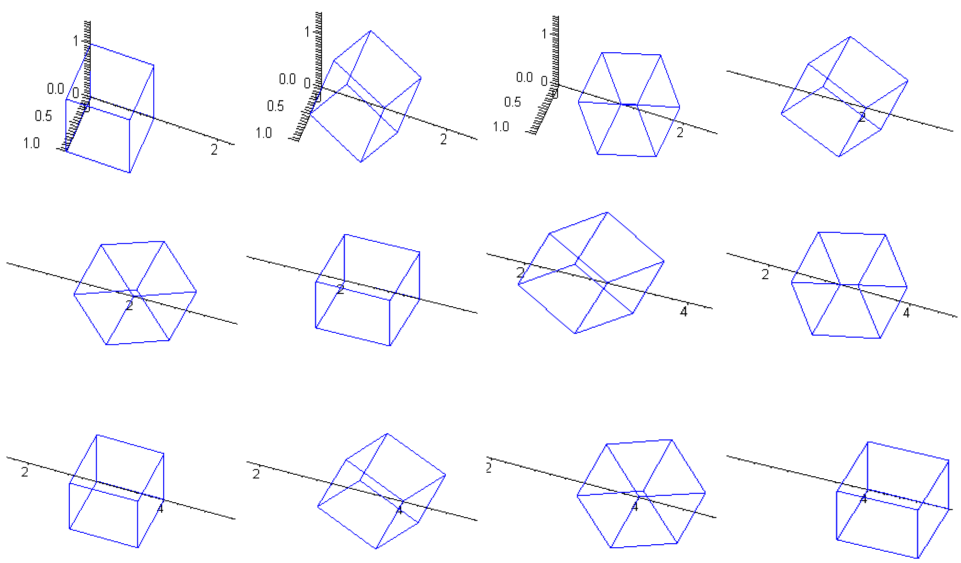
A continuación se presenta un programa implementado en Maple, el cual rota un cuerpo rígido (un cubo en este caso) alrededor de un eje dado utilizando cuaternios, como se muestra en las siguientes figuras



La animación se llevó a cabo mediante el siguiente algoritmo([14]):

1	Definir los vértices.
2	Definir el eje de rotación.
3	Definir el ángulo de rotación.
4	Crear funciones para obtener el cuaternio asociado a un vector, sumar cuaternios, restar cuaternios, multiplicar cuaternios, obtener la i-ésima coordenada de un cuaternio, calcular el inverso de un cuaternio, obtener la norma de un vector, generar el cuaternio asociado a la rotación del ángulo dado.
5	Dividir el ángulo de rotación en partes y almacenarlos en un arreglo.
6	Para cada vértice: Calcular la nueva posición del vértice con la función $R(V-P)R^{-1}+P$ para cada componente del arreglo recién creado. Crear la figura con los nuevos vértices y almacenar cada figura en un arreglo.
7	Mostrar en secuencia las figuras del arreglo.

El código del programa se anexa en el apéndice. Como ya sabemos como generar una rotación de un objeto alrededor de un eje, en el apéndice se anexa el código para generar una secuencia de rotaciones de un objeto, un cubo en este caso, como se muestra en las siguientes figuras:



6.2 Superposición de ejes

Uno de los problemas clásicos que surgen cuando se utilizan matrices de 3×3 para representar rotaciones en $\mathbb{R}^3$ es la posibilidad de que dos o mas ejes de rotación se empalmen. Tal efecto resulta cuando se tienen ejes coplanares de rotación. Cuando intentamos controlar cambios continuos de la orientación de un objeto en $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar, esencialmente, este hecho. Si tenemos una sucesión de orientaciones

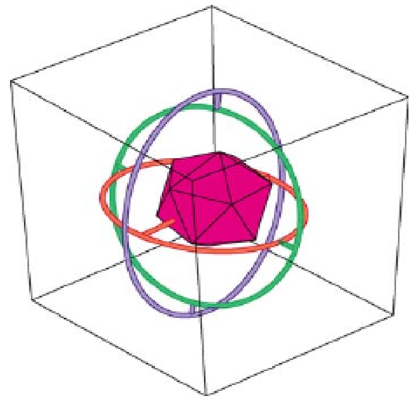


Figura 6.1: Configuración básica en los sistemas de navegación, con tres ejes de rotación ortogonales.

que cambian continuamente, y la sucesión llega a un punto en el cual los ejes de rotación se alinean en un mismo plano, no existe manera alguna de realizar una rotación alrededor del eje perpendicular a tal plano.

En los sistemas de navegación, hay un problema mecánico que ocurre precisamente cuando dos ejes se alinean. El problema es crítico cuando se tienen tres aros concéntricos de rotación (o ejes), el mínimo para simular los sistemas de navegación. En el momento en el que dos de los aros son coplanares, cualquier rotación alrededor del eje perpendicular genera una torca en el sistema de navegación, como se muestra en la figura (6.2). Este es un problema serio, pues los aros son diseados para moverse libremente y prevenir la acción de cualquier fuerza sobre el sistema de navegación. Una vez llegado este punto, o bien el sistema de navegación o el objeto que se está simulando se ve afectado por una fuerza destructiva, pues el sistema de navegación no puede cambiar la dirección sin aplicar una torca que equilibre a la fuerza externa que actúa sobre él.

Si utilizamos cuaternios para representar rotaciones en lugar de matrices, el efecto de superposición de ejes no se presenta. Esto es debido a que la rotación mediante cuaternios sólo utiliza un eje de rotación, mientras que las matrices utilizan tres. De esta manera, cuando usamos cuaternios no hay manera de que ocurra la superposición de ejes, pues sólo tenemos uno.

Así, la simulación de rotaciones mediante cuaternios es más precisa que llevarla a cabo mediante matrices.

6.3 El truco del cinturón

Un entretenimiento popular bastante conocido es el llamado *truco del cinturón*, el cual consiste en fijar un extremo de un cinturón y rotar el otro extremo un ángulo de 360 o bien de 720 grados sobre su eje más largo. La idea aquí es desdoblar

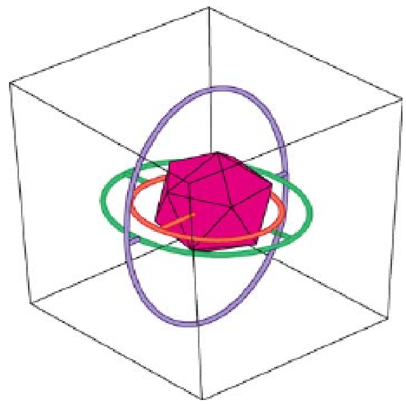


Figura 6.2: Un efecto de superposición de ejes ocurre cuando dos aros de rotación son coplanares.

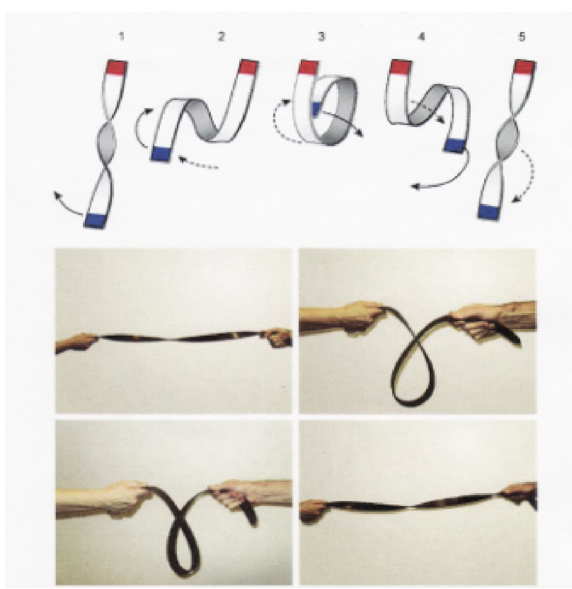


Figura 6.3: El truco del cinturón con un giro de 360 grados.

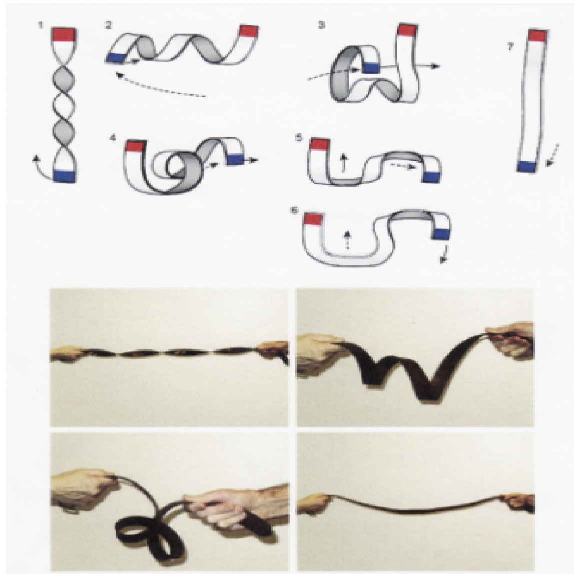


Figura 6.4: El truco del cinturón con un giro de 720 grados.

el cinturón con movimientos que no cambien la orientación los extremos. Lo que resulta interesante es que para el giro de 360 grados es imposible desdoblarlo, como se muestra en la figura (6.3). Sin embargo, para el giro de 720 grados sí es posible hacerlo, como se muestra en la figura (6.4).

El hecho de que podamos resolver el truco para 720 pero no para 360 grados se basa en los siguientes hechos. El grupo correspondiente a los cuaternios unitarios es el grupo $\mathbf{SU}(2)$, con espacio topológico $\mathbb{S}^3$, el cual es un espacio simplemente conexo; las rotaciones de 720 grados corresponden a trayectorias cerradas en el grupo $\mathbf{SU}(2)$ que pueden ser deformadas de manera suave a la identidad. Las rotaciones ordinarias corresponden al grupo $SO(3)$, con espacio topológico el *espacio proyectivo* $\mathbf{RP}^3$, el cual no es simplemente conexo. Esto hace que no todas las trayectorias cerradas en $SO3$ puedan deformarse de manera continua a un punto. Sabemos que $\mathbf{SU}(2)$ es una *doble cubierta* de $SO(3)$; esto es, que hay dos cuaternios para cada marco de orientación distinto en el espacio tridimensional. El truco del cintuón refleja esta doble relación, distinguiendo una rotación de 360 grados de una equivalente de 720 grados. En lo siguiente, veremos qué es lo que pasa realmente.

Utilizando cuaternios, podemos construir una visualización del cinturon y del truco del cinturón la cual resulta interesante y precisa matemáticamente.

La idea básica es la siguiente. Como un pedazo pequeño del cinturón (una línea dibujada en el cinturón en su dirección más corta) y el vector perpendicular al cinturón forman un marco en $\mathbb{R}^3$, y como cada marco es un punto en el espacio de cuaternios, todo el cinturón se puede representar como una *trayectoria conexa de puntos* en el espacio de cuaternios $\mathbb{S}^3$. De esta manera, la deformación inicial del cinturón y los movimientos llevados a cabo por los que sujetan el cinturón intentando deformarlo a su posición inicial, no son nada mas que curvas en $\mathbb{S}^3$, y se pueden

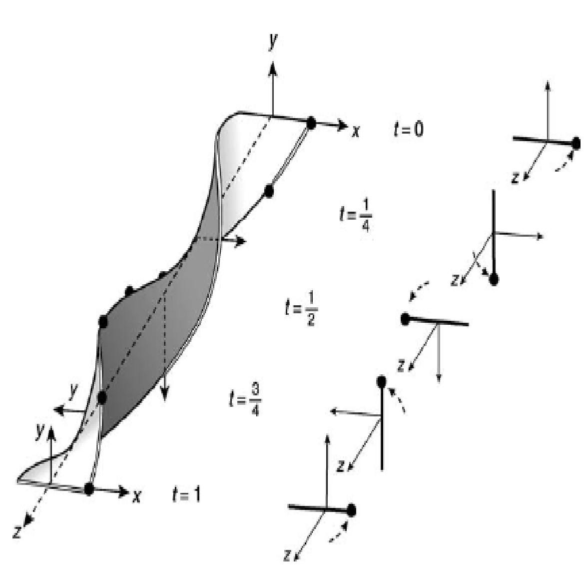


Figura 6.5: Cada sección del cinturón define un marco en $\mathbb{R}^3$ anclado en la línea transversal del cinturón y la normal de la superficie del cinturón en ese punto.

visualizar usando proyecciones apropiadas de las curvas.

Cuando el cinturón no está deformado, todos sus marcos son el marco identidad, y por lo tanto están acomodados como una pila de cuaternios iguales, $w = 1$, que se corresponden con los marcos del cinturón cuando no está deformado. Si t representa el parámetro que describe al cinturón, con $t = 0$ el inicio del cinturón y $t = 1$ el extremo del mismo, entonces

$$q(t) = (1, 0, 0, 0)$$

y no hay cambio alguno en el marco cuando t varía. Cuando rotamos el cinturón alrededor de su eje más largo, digamos el eje z, una rotación por un ángulo θ en $\mathbb{R}^3$ queda determinada por

$$q(t) = \left(\cos\frac{t\theta}{2}, 0, 0, \operatorname{sen}\frac{t\theta}{2}\right).$$

En la figura (6.5), se muestra el cinturón como una secuencia de marcos, junto con marcos aislados que están determinados por

$$\begin{bmatrix} \cos t\theta & -\operatorname{sen} t\theta & 0 \\ \operatorname{sen} t\theta & \cos t\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, si deformamos el cinturón 2π o 360 grados, entonces

$$\begin{aligned} q(0) &= (1, 0, 0, 0), \\ q(t) &= (\cos t\pi, 0, 0, \operatorname{sen} t\pi), \\ q(1) &= (-1, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

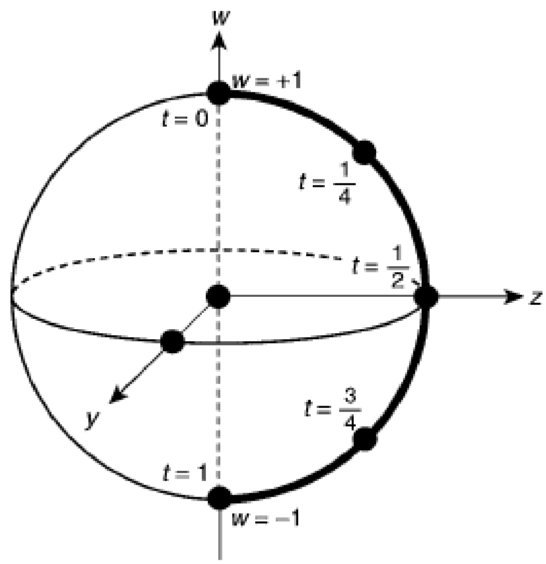


Figura 6.6: El conjunto de marcos de un cinturón con un giro de 360 grados sobre su eje más largo.

y los marcos del cinturón se corresponden con la curva de cuaternios que se muestra en la figura (6.6), la cual inicia en el polo norte y termina en el polo sur.

Si consideramos ahora una rotación de 4π o 720 grados, tenemos

$$\begin{aligned} q(0) &= (1,0,0,0), \\ q(t) &= (\cos 2t\pi, 0, 0, \operatorname{sen} 2t\pi), \\ q(1) &= (1,0,0,0). \end{aligned}$$

En este caso los marcos del cinturón se corresponden con una curva cerrada, como se muestra en la figura (6.7).

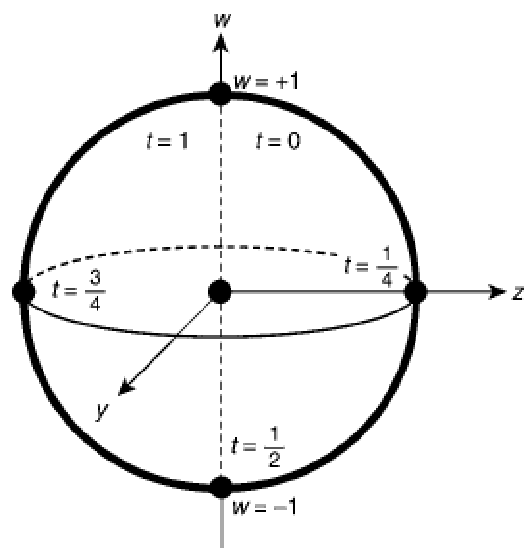


Figura 6.7: El conjunto de marcos de un cinturón con un giro de 720 grados sobre su eje más largo.