

---

# Concepts de base et outils mathématiques

---

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Introduction .....   | 4  |
| 1.2. Systèmes flous .....   | 4  |
| 1.2.1. Modèle flou de Mamdani .....                               | 4  |
| 1.2.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno .....                         | 5  |
| 1.3. Construction d'un modèle flou de Takagi-Sugeno .....         | 7  |
| 1.4. Inégalités matricielles linéaires .....                      | 9  |
| 1.4.1. Principe des LMIs .....                                    | 10 |
| 1.4.2. Techniques d'analyse et transformations matricielles ..... | 10 |
| 1.5. Placement de pôles dans des régions LMI.....                 | 13 |
| 1.6. Stabilité au sens de Lyapunov .....                          | 15 |
| 1.6.1. Seconde méthode de Lyapunov .....                          | 15 |
| 1.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles .....                       | 17 |
| 1.7. Conclusion .....   | 19 |

---

## 1.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions et outils utilisés dans ce travail. Ce chapitre sera structuré comme suit : Nous présentons d'abord les deux types de modèles flous et les différentes techniques d'obtention d'un modèle flou TS et nous donnons un exemple d'illustration sur la méthode la plus employée pour y aboutir. Ensuite, la seconde partie est consacrée à la présentation des inégalités matricielles linéaires, les techniques d'analyse, les transformations matricielles utilisées dans ce travail. Enfin, nous donnons des rappels sur quelques concepts fondamentaux concernant la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques, et les fonctions de Lyapunov les plus utilisées dans la littérature.

## 1.2. Systèmes flous

Si d'un point de vue mathématique les systèmes sont classés selon la nature des équations qui les caractérisent (linéaires, non linéaires, ...etc.), les systèmes flous sont quant à eux répertoriés selon leur nature structurelle [9].

On distingue classiquement deux grandes familles de modèles flous :

- Modèles flous à conclusions symboliques (modèles flous de Mamdani).
- Modèles flous à conclusion fonctionnelle (modèles flous de Takagi-Sugeno) [1].

Ces deux types de modèles flous sont basés sur une collection de règles « *Si ... Alors* ». Dans les deux cas, les prémisses de règles sont exprimées symboliquement. Seule l'expression des conclusions de règles permet alors de dissocier les deux familles de modèles. Les modèles de Mamdani utilisent des conclusions symboliques de même nature que les prémisses alors que, dans les modèles de Takagi-Sugeno, les conclusions sont des fonctions ordinaires des variables des prémisses. Il est à noter que les modèles flous relationnels peuvent être considérés comme une généralisation du modèle flou de Mamdani, où un seul terme prémisses peut être associé à plusieurs termes de la conclusion par une relation floue.

### 1.2.1. Modèle flou de Mamdani

La forme générale d'une règle dans le modèle flou de Mamdani est de la forme :

$$R^i : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^i \text{ et } \dots x_p \text{ est } A_p^i \text{ Alors } y \text{ est } B^i$$

où  $x_j (j = 1, \dots, p)$  sont les variables des prémisses représentant les entrées du système flou,  $y$  est la variable conséquence représentant la sortie du système flou,  $A_j^i (i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, p)$  et  $B^i (i = 1, \dots, r)$  sont respectivement les ensembles flous des prémisses et les ensembles flous des sorties.

La relation entrée-sortie du système flou est réalisée par le mécanisme d'inférence flou. Étant donné une base de règles et une valeur de l'entrée, il délivre la valeur de sortie correspondante. Puisque les valeurs traitées à l'entrée et à la sortie sont des valeurs non floues, alors le système flou doit être équipé par des mécanismes de conversion appelés fuzzificateur et défuzzificateur.

### 1.2.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno (TS)

Le modèle flou TS a été introduit en 1985 par Takagi et Sugeno [1]. Il peut être représenté par une collection de règles de la forme suivante :

$$R^i : \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^i \text{ et } \dots x_p \text{ est } A_p^i \text{ Alors } y = B_i(x_1, \dots, x_p)$$

où la conséquence fonctionnelle prend, généralement, la forme suivante:

$$B_i(x_1, \dots, x_p) = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_p^i x_p$$

Dans ce cas, le modèle flou est dit à conséquences affines, si par contre la conséquence est de la forme:

$$B_i(x_1, \dots, x_p) = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_p^i x_p$$

le système est dit linéaire non affine.

Ce type de modèles flous est très intéressant pour la représentation des systèmes non linéaires tels que les systèmes électriques, mécaniques ou chaotiques. Dans ce cas les modèles flous proposés par Takagi et Sugeno [1] sont décrits par des règles floues représentant des relations entrées-sorties locales linéaires en différents points de fonctionnement d'un système. Ces représentations locales, appelées « sous-modèles », permettent d'exprimer la dynamique d'un système autour des points de fonctionnement particuliers de l'espace d'état. Le formalisme flou intervient donc dans la détermination de la contribution de chacun de ces sous-modèles dans la représentation du système global [10].

Les modèles flous TS représentés dans l'espace d'état sont décrits par des règles de type :

**Cas des modèles TS continus (MFC) :**

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.1)$$

**Cas des modèles TS discrets (MFD) :**

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} x(t+1) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.2)$$

où  $r$  est le nombre de règles,  $x(t) \in R^n$  représente le vecteur d'état du modèle,  $u(t) \in R^m$  le vecteur des entrées et  $y(t) \in R^q$  le vecteur des sorties.  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $B_i \in R^{n \times m}$ ,  $C_i \in R^{q \times n}$  sont respectivement la matrice d'état, la matrice des entrées et la matrice de sortie de la  $i^{\text{ème}}$  règle,  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  sont les variables des prémisses,  $F_j^i (j = 1, \dots, p)$  sont les sous-ensembles flous des prémisses.

Les systèmes (1.1) et (1.2) peuvent être réécrits sous une forme unique :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et ... et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \delta x(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (1.3)$$

où dans le cas des modèles continus  $\delta$  représente l'opérateur de dérivation et dans le cas des modèles discrets l'opérateur d'avance.

A chaque règle  $i$  est attribué un poids  $w_i(z(t))$  qui dépend du degré d'appartenance des  $z_j(t)$  aux sous-ensembles flous  $F_j^i$ , notée  $F_j^i(z(t))$ .

La sortie du modèle global est obtenue par agrégation des  $r$  modèles locaux.

$$\begin{cases} \delta x(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{cases} \quad (1.4)$$

avec :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z(t)), \quad i = 1, \dots, r \quad (1.5)$$

On pose :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad (1.6)$$

où  $h_i(z(t))$  est la fonction d'activation du  $i^{\text{ème}}$  modèle local, et vérifie les conditions (propriété de somme convexe) suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, r \end{cases} \quad (1.7)$$

Le modèle TS (1.4) s'écrit :

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

**Remarque 1.1 :** Un ensemble  $C$  est dit convexe si une ligne joignant deux points  $C_1$  et  $C_2$  de cet ensemble  $C$  reste dans cet ensemble. Ainsi quels que soient  $C_1$  et  $C_2 \in C$  et  $0 < \lambda < 1$ , on a alors :

$$\lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2 \in C \quad (1.9)$$

### 1.3. Construction d'un modèle flou de Takagi-Sugeno

Pour obtenir un modèle flou TS, trois méthodes distinctes peuvent être employées :

- La première dite par identification, permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement. Cette méthode, est utilisée dans le cas où aucun modèle de connaissance du système n'est disponible.
- La deuxième approche est basée sur la linéarisation d'un modèle non linéaire autour d'un ensemble de points de fonctionnement judicieusement choisis. Dans ce cas il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'activation conçues de manière judicieuse en fonctions des spécifications souhaitées (triangulaire, gaussienne,...etc.). Cette façon est plus proche des approches dites multimodèles et présente l'inconvénient de ne pas représenter exactement le modèle non linéaire.
- La troisième méthode est l'approche par secteur non linéaire, elle permet, à partir d'un modèle non linéaire, d'obtenir un modèle TS représentant de manière exacte le

modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état [11]. C'est cette troisième approche qui est utilisée dans la suite de ce mémoire.

Il faut noter que dans les deux dernières approches, on suppose la disponibilité d'un modèle mathématique non linéaire. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle TS n'est pas unique.

Pour obtenir des modèles flous TS à partir d'une non linéarité, on utilise le lemme suivant [11].

**Lemme 1.1 :** Si  $\forall x \in [-b, a]$ ,  $a, b \in R^+$ ,  $f(x) : R \rightarrow R$  bornée sur  $[-b, a]$ , alors il existe deux fonction  $w_1(x)$  et  $w_2(x)$  ainsi que deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x) \quad (1.10)$$

$$w_1(x) + w_2(x) = 1, \quad w_1(x) \geq 0, \quad w_2(x) \geq 0 \quad (1.11)$$

**Preuve :**

En considérant une fonction  $f(x)$  bornée telle que  $\underline{f} \leq f(x) \leq \overline{f}$ , on peut toujours écrire :

$$f(x) = \alpha \cdot w_1(x) + \beta \cdot w_2(x)$$

avec :

$$\alpha = \overline{f}, \quad \beta = \underline{f}, \quad w_1(x) = \frac{f(x) - \underline{f}}{\overline{f} - \underline{f}} \quad \text{et} \quad w_2(x) = \frac{\overline{f} - f(x)}{\overline{f} - \underline{f}} \quad (1.12)$$

**Remarque 1.2 :** le nombre de modèles linéaires augmente exponentiellement avec le nombre  $k$  de fonctions non linéaires [12]. Il est de  $2^k$ .

**Exemple 1.1 :** Soit le modèle non linéaire sous forme de représentation d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)} - 8 & 1 \\ -\frac{2}{1+x_1^2(t)} + 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \cdot \left( \frac{2}{1+x_1^2(t)} + 1 \right) \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.13)$$

Les non linéarités du modèle (1.13) sont :

$$N_1(x_1(t)) = \frac{1}{1+x_1^2(t)} \in ]0,1] \text{ et } N_2(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)} \in ]0,1] \quad (1.14)$$

Ces non linéarités étant bornées pour tout  $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ , on peut appliquer le lemme 1.1 et le modèle TS obtenu sera valable dans tout l'espace des variables d'état :

$$N_1(x_1(t)) = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x_1^2(t)}}_{F_1^1(x_1(t))} + 0 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)}\right)}_{F_1^2(x_1(t))} \quad (1.15)$$

$$N_2(x_1(t), x_2(t)) = 1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)}}_{F_2^1(x_1(t), x_2(t))} + 0 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+x_1^2(t)+x_2^2(t)}\right)}_{F_2^2(x_1(t), x_2(t))} \quad (1.16)$$

Un modèle flou TS représentant exactement le modèle non linéaire (1.13) est ainsi composé de 4 règles :

- $R^1$  : Si  $x_1(t)$  est 0 et  $x_2(t)$  est 0 alors  $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$
- $R^2$  : Si  $x_1(t)$  est 0 et  $x_2(t)$  est  $\infty$  alors  $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$
- $R^3$  : Si  $x_1(t)$  est  $\infty$  et  $x_2(t)$  est 0 alors  $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$
- $R^4$  : Si  $x_1(t)$  est  $\infty$  et  $x_2(t)$  est  $\infty$  alors  $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$

avec :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T \quad (1.17)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} -9 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

#### 1.4. Les inégalités matricielles linéaires (LMI)

Depuis quelques années, de nombreux problèmes, concernant l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques, ont été résolus par l'intermédiaire de problèmes convexes, notamment, la programmation semi définie (SDP) [4]. Parmi ces méthodes, on distingue la méthode du point intérieur développée initialement par Karmakar (1984) [13] pour la résolution de problèmes de programmation linéaire qui a été étendue ensuite par Nesterov et Nemirovski (1994) [14] pour le cas de la programmation convexe dans l'espace des matrices définies positives. En automatique, cette approche est connue sous le nom de LMI (Linear

Matrix Inequalities) [3], cette méthode est l'une des méthodes les plus appliquées dans le domaine de la commande grâce à l'existence de méthodes de résolution numérique efficaces [15].

Dans les paragraphes suivants nous allons présenter le principe de base de cette approche, puis les différents lemmes permettant de manipuler les inégalités matricielles de les rendre linéaires par rapport aux inconnues quand cela est possible.

### 1.4.1. Principe des LMI

Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une inégalité de la forme [3]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (1.19)$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$  est la variable et les matrices  $F_i, i=1, \dots, m$  sont des matrices symétriques connues de dimension  $n \times n$ . La satisfaction de l'inégalité (1.19) signifie que la matrice  $F(x)$  est symétrique et définie positive, c'est-à-dire :

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (z \text{ non nul}) \quad (1.20)$$

Notons que puisque le cône des matrices définies positives est convexe et que la matrice  $F(x)$  est une fonction affine de  $x$ , la contrainte  $F(x)$  est une contrainte convexe en  $x$  que l'on appelle aussi contrainte LMI.

L'équation (1.19) est une LMI stricte. Si  $F(x)$  est seulement semi définie positive (non négative) la LMI est dite non stricte. La LMI stricte est faisable si l'ensemble  $\{x : F(x) > 0\}$  n'est pas vide (une définition similaire s'applique aux LMIs non strictes). N'importe quelle LMI non stricte faisable peut être réduite à une LMI stricte équivalente qui est faisable en éliminant les contraintes d'égalité et puis en réduisant la LMI résultante en enlevant n'importe quel espace nul constant [16]. Notons que l'on peut regrouper plusieurs contraintes LMIs en une seule contrainte LMI bloc diagonale :

$$F(x) = \text{diag}(F^{(1)}(x), F^{(2)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0, \text{ avec } F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0 \quad (1.21)$$

### 1.4.2. Techniques d'analyse et de transformations matricielles

En général, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles pour permettre une mise en forme de LMI.



Certaines inégalités matricielles non linéaires peuvent être reformulées en terme de LMI à l'aide du complément de Schur [3] d'écrit dans le lemme suivant.

**Lemme 1.2** (Complément de Schur) : Soient trois matrices  $R(x) = R^T(x)$ ,  $Q(x) = Q^T(x)$  et  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ . Alors la condition LMI:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (1.22)$$

est équivalente à :

$$Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0, \quad R(x) > 0 \quad (1.23)$$

ou encore

$$R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0, \quad Q(x) > 0 \quad (1.24)$$

**Preuve :**

La démonstration se fait facilement en multipliant (1.22) à droite par :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}(x)S^T(x) & I \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

et à gauche par la transposée de cette dernière matrice. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.26)$$

**Remarque 1.3 :** Le lemme et encore valide en changement le sens des inégalités [17].

Enfin, les différents lemmes suivants seront également utilisés dans ce mémoire.

**Lemme 1.3** (congruence) : Soient deux matrices  $P(x)$  et  $Q(x)$ , si  $P(x)$  est définie positive et si  $Q(x)$  est de rang plein en colonne alors la quantité  $Q(x)P(x)Q^T(x)$  est définie positive.

**Lemme 1.4 :** Soient  $A, P, X, Y$  et  $Q$  des matrices de dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont équivalentes [12] :

$$1. A^T P A - Q < 0, \quad P > 0 \quad (1.27)$$

$$2. \begin{bmatrix} -Q & A^T P \\ P A & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.28)$$

$$3. \exists X \begin{bmatrix} -Q & A^T X \\ X^T A & -X - X^T + P \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.29)$$

$$4. \exists X, Y \begin{bmatrix} -Q + A^T Y^T + Y A & -Y + A^T X \\ -Y^T + X^T A & -X - X^T + P \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.30)$$

**Preuve :**(1.27)  $\Leftrightarrow$  (1.28) : Complément de Schur (lemme 1.2)(1.28)  $\Rightarrow$  (1.29) et (1.30) : Il suffit de choisir  $X=P$  et  $Y=0$ (1.29) et (1.30)  $\Rightarrow$  (1.27) : Par congruence avec  $[I \ A^T]$ 

**Lemme 1.5 :** Soient  $A, P, X, Y$  et  $Q$  des matrices de dimensions appropriées. Les propriétés suivantes sont équivalentes [18] :

$$1. PA^T + AP + Q < 0, \quad P > 0 \quad (1.31)$$

$$2. \exists X, Y \begin{bmatrix} XA^T + AX^T + Q & P - X + AY \\ P - X^T + Y^T A^T & -Y - Y^T \end{bmatrix} < 0, \quad P > 0 \quad (1.32)$$

**Preuve :**(1.32)  $\Rightarrow$  (1.31) : Par congruence avec  $[I \ A^T]$ (1.31)  $\Rightarrow$  (1.32) : Si  $PA^T + AP + Q < 0$  est vérifiée,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que :

$$PA^T + AP + Q + \frac{\varepsilon}{2} A^T A < 0 \quad (1.33)$$

En utilisant le complément de Schur, (1.33)  $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} PA^T + AP + Q & \varepsilon A \\ \varepsilon A & -2\varepsilon I \end{bmatrix} < 0$ . Le résultat

s'obtient en choisissant  $X = P$  et  $Y = \varepsilon I$ .

**Lemme 1.6 :** Soient  $X$  et  $Y$  deux matrices de dimensions appropriées, un scalaire  $\varepsilon > 0$ , et une matrice  $S = S^T > 0$  alors les deux propriétés suivantes sont vérifiées:

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y \quad (1.34)$$

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y \quad (1.35)$$

**Preuve :**

$$(1.34) : \left( \sqrt{\varepsilon} X - (\sqrt{\varepsilon})^{-1} Y \right)^T \left( \sqrt{\varepsilon} X - (\sqrt{\varepsilon})^{-1} Y \right) = \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y - Y^T X - X^T Y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \varepsilon^{-1} Y^T Y$$

$$(1.35) : S > 0 \Rightarrow (SX - Y)^T S^{-1} (SX - Y) = X^T S^{-1} X + Y^T S Y - X^T Y - Y^T X \geq 0$$

$$\Leftrightarrow X^T Y + Y^T X \leq X^T S^{-1} X + Y^T S Y$$

## 1.5. Placement de pôles dans des régions LMI

L'idée est de pouvoir construire de façon systématique n'importe quelle région convexe du plan complexe à partir de l'intersection de régions convexes élémentaires (demi-plan, bandes, cercles, cônes ...) appelées régions LMI.

**Définition [19] :** Un sous ensemble  $D$  du plan complexe est dit une région LMI s'il existe une matrice symétrique  $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que :

$$D = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) < 0\} \quad (1.36)$$

avec  $f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T$ . La notation  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$  et  $f_D(z)$  est appelée la fonction caractéristique de la région LMI  $D$ .

Les valeurs propres d'une matrice  $A$  sont placées dans une région LMI  $D$  du plan complexe [20], si et seulement si, il existe une matrice symétrique  $P > 0$  telle que :

$$M_D(A, P) = \alpha \otimes P + \beta \otimes (AP) + \beta^T \otimes (AP)^T < 0 \quad (1.37)$$

avec  $\otimes$  représente le produit matriciel de Kronecker.

Considérons  $N$  sous-régions LMI  $D_1, D_2, \dots, D_N$  du plan complexe. Les valeurs propres de la matrice  $A$  appartiennent à la région LMI  $D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_N$  avec des fonctions caractéristiques  $f_{D_1}(z), f_{D_2}(z), \dots$  et  $f_{D_N}(z)$  respectivement, si et seulement si il existe une matrice symétrique  $P > 0$  solution des inégalités suivantes :

$$M_{D_i}(A, P) = \alpha_i \otimes P + \beta_i \otimes (AP) + \beta_i^T \otimes (AP)^T < 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.38)$$

Une région LMI a la propriété d'être convexe et symétrique par rapport à l'axe des abscisses. De plus, l'intersection de régions LMI est une région LMI. Dans le cadre des modèles TS, l'idée est de caractériser des régions dans le demi plan complexe gauche [19] avec une fonction de Lyapunov en terme de problèmes LMI. Pour ce faire, on définit un domaine  $\mathfrak{R}$  par l'intersection de trois régions LMI intéressantes pour la commande de systèmes [31] :

- Le demi-plan  $\Re(z) < \frac{\lambda}{2}$  :

$$f_D(z) = \lambda + z + \bar{z} < 0 \quad (1.39)$$

- Le cercle de rayon  $\rho$  centré en  $(0,0)$  :

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} -\rho & z \\ \bar{z} & -\rho \end{bmatrix} < 0 \quad (1.40)$$

- Le cône issu de l'origine et d'angle  $2\vartheta$  :

$$f_D(z) = \begin{bmatrix} (z + \bar{z}) \sin(\vartheta) & (\bar{z} - z) \cos(\vartheta) \\ (\bar{z} - z) \cos(\vartheta) & (z + \bar{z}) \sin(\vartheta) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.41)$$

L'intersection de ces trois régions définit la région  $\mathfrak{R}$  représentée sur la figure 1.1.

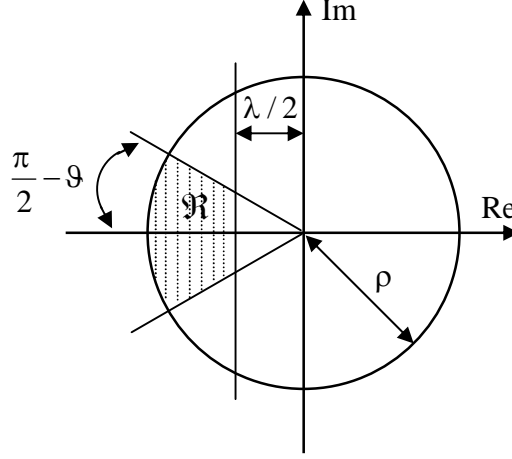


Figure 1.1 : Définition d'une région  $\mathfrak{R}$

Dans le cas du modèle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.42)$$

Les valeurs propres de la matrice d'état  $A$  sont situées dans la région  $\mathfrak{R}$  s'il existe une matrice  $P > 0$  telle que [20] :

$$A^T P + PA + \lambda P < 0 \quad (1.43)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & A^T P \\ PA & -\rho P \end{bmatrix} < 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)(A^T P + PA) & \sin(\vartheta)(-A^T P + PA) \\ \sin(\vartheta)(A^T P - PA) & \cos(\vartheta)(A^T P + PA) \end{bmatrix} < 0 \quad (1.45)$$

## 1.6. Stabilité au sens de Lyapunov

Le principe de stabilité selon Lyapunov repose sur le comportement du système dynamique du point de vue de son énergie totale. Si cette énergie, représentée généralement par une fonction scalaire, est continûment dissipée, on parle alors de système dissipatif. Dans ce cas, on peut espérer que le système tende vers un point d'équilibre. En l'occurrence, en étudiant la variation de cette fonction scalaire, nous pouvons éventuellement conclure sur la stabilité du système étudié.

Dans ce mémoire nous étudions la stabilité plus particulièrement grâce à la méthode de Lyapunov, proposé en 1892 [21] dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques. Il s'agit de construire une fonction  $V(x)$  de l'état  $x$  du système telle que les signes de cette fonction et de sa dérivée temporelle dans un certain voisinage du point d'équilibre donnent une information sur la stabilité du système.

### 1.6.1. Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

Considérons tout d'abord le système non linéaire en régime libre (non commandé) suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.46)$$

avec  $x(t)$  représente l'état du système et la fonction  $f(x(t)) \in C^1, x(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente la dynamique du système. La fonction  $f$  décrit les dynamiques du système et peut être modélisée par des équations algébriques classiques et/ou un modèle flou.

Le système (1.46) est dit en équilibre autour  $x_0$  si, en l'absence d'influence externe, son état ne varie pas au cours du temps,  $x_0$  est alors appelé point d'équilibre.

**Définition 1.1 :** Le point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est dit point d'équilibre du système (1.46) si :

$$f(x_0) = 0, \forall t > 0 \quad (1.47)$$

Dans ce travail, on considère que le point d'équilibre du système (1.46) est l'origine ( $x_0 = 0$ ) de l'espace d'état. Cette supposition est assez générale et ne change rien à l'étude de la convergence de l'état du système, car si  $x_0 \neq 0$  est un point d'équilibre du système (1.46) alors  $x_0 = 0$  est un point d'équilibre du système [22]:

$$\dot{z}(t) = f(z(t) + x_0) \quad (1.48)$$

La stabilité au sens de Lyapunov est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov dont la définition est comme suit :

**Définition 1.2 :** La fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Lyapunov, si elle satisfait les deux conditions suivantes :

1.  $V(x)$  est continue et ses dérivées partielles  $\dot{V}_i(x)$  ( $\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}$ ) existent et sont continues pour tout  $i = 1, \dots, n$ .
2.  $V(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$  et  $V(0) = 0$ .
3.  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour tout  $x \neq 0$ .

Il existe de nombreuses définitions de la stabilité de Lyapunov dans la littérature et nous ne présentons que les plus utilisées dans l'étude de stabilité des modèles flous TS. Pour cela, la définition d'une certaine classe de fonctions est nécessaire.

**Définition 1.3 :** Une fonction continue  $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  appartient à la classe  $k$  si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Si  $a = \infty$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ , la fonction est dite de classe  $k_\infty$ .

**Théorème 1.1 :** Soit une fonction scalaire  $V(x(t)) \in C^1$  telle que :

$$\alpha_1(x(t)) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(x(t)) \quad (1.49)$$

$\forall \|x\| < d$  où  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont des fonctions de classe  $k$  définies sur  $[0, d)$ ,  $d \in \mathbb{R}^{+*}$

- Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ ,  $\forall \|x\| < d$  alors le point d'équilibre ( $x_0 = 0$ ) de (1.48) est localement stable. Il est globalement stable si de plus  $d = \infty$  et les fonctions  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont de classe  $k_\infty$ .
- Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$ ,  $\forall \|x\| < d$  avec  $\alpha_0(\cdot)$  fonction de classe  $k$  définie sur  $[0, d)$ , alors le point d'équilibre de (1.48) est localement asymptotiquement stable.
- Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$ ,  $\forall x (d = \infty)$  avec  $\alpha_0(\cdot)$  et les fonctions  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  de classe  $k_\infty$ , alors le point d'équilibre de (1.48) est globalement asymptotiquement stable.
- Si  $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq -\alpha_0(\|x\|)$ ,  $\forall x (d = \infty)$  avec les fonctions  $\alpha_0(\cdot)$ ,  $\alpha_1(\cdot)$  et  $\alpha_2(\cdot)$  sont des fonctions de classe  $k_\infty$  de la forme :

$$\alpha_1(\|x\|) = a\|x\|^p, \alpha_2(\|x\|) = b\|x\|^p, \alpha_0(\|x\|) = c\|x\|^p, \quad (1.50)$$

telles que  $a, b, c \geq 0, p \geq 1$ , alors le point d'équilibre de (1.48) est globalement exponentiellement stable.

Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera à la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre du système dynamique (1.48).

### 1.6.2. Fonctions de Lyapunov usuelles

En général, il n'existe pas de méthodes systématiques pour trouver les fonctions candidates de Lyapunov. Dès lors, la théorie de Lyapunov conduit à des conditions suffisantes de stabilité dont le pessimisme dépend de la forme particulière imposée à la fonction  $V(x(t))$  et de la structure du système. Cependant, il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaires, systèmes continus par morceaux, systèmes à retard, systèmes linéaires incertains...). Parmi ces fonctions on distingue les formes suivantes :

**a)- Fonction de Lyapunov quadratique :** Une classe de fonctions candidates de Lyapunov quadratiques que l'on utilisera tout au long de ce travail peut être décrite sous la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P = P^T > 0 \quad (1.51)$$

Cette fonction est définie positive si la matrice  $P$  est une matrice symétrique définie positive,  $P = P^T > 0$ . Ce type de fonctions s'avère être une fonction de Lyapunov du système car elle satisfait tout les conditions de la définition 1.2. Dans ce cas, le système (1.46) est dit stable quadratiquement s'il existe une matrice  $P = P^T > 0$  telle que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique soit négative.

De très nombreux travaux utilisent ce type de fonctions pour l'étude de la stabilité. Notamment dans le cas des systèmes incertains, des systèmes linéaires ainsi que dans celui des modèles TS [23]. L'atout majeur de cette fonction dans le cas des modèles TS est que la formulation convexe du problème permet aisément l'extraction d'une telle fonction lorsqu'elle existe. L'inconvénient de cette fonction réside dans l'obtention des conditions de stabilités très conservatives comme on le verra dans les chapitres 2, 3 et 4, d'où l'intérêt de chercher des conditions qui sont beaucoup moins conservatives (conditions relaxées ou

relâchées). Une autre variante de ces fonctions candidates peut être exprimée de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.52)$$

avec  $P_i > 0$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}^{+}$ . Ces fonctions quadratiques sont utilisées dans le cas des systèmes interconnectés et dans les modèles TS.

**b)- Fonction polyquadratique :** Cette fonction est de la forme :

$$V(x(t), z(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.53)$$

où les  $h_i$  sont les fonctions d'activation définies précédemment. Ce type de fonction, est plus général dans le sens où il inclut le cas quadratique, car il suffit de choisir  $P_i = P$ , pour se ramener au cas des fonctions quadratiques. Il est aussi intéressant de noter que, par apposition à la méthode quadratique, ce type de fonction tient compte de la vitesse de variation des variables de décision du modèle TS continu ce qui explique la réduction du conservatisme de la méthode. Plusieurs travaux ont utilisé ce type de fonctions que ce soit dans le cas continu [11] [24], ou bien dans le cas discret [11] [22] [25].

**c)- Fonction affine paramétrique :** Cette fonction est de la forme suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P(\theta) x(t) \quad (1.54)$$

avec  $P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \dots + \theta_k P_k > 0$  est souvent utilisée pour étudier les systèmes linéaires à paramètres incertains variants dans le temps.

**d)- Fonctions continues par morceaux :** Ce type de fonctions est donné par la forme :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_r(x(t))) \quad (1.55)$$

avec

$$V_i(x(t)) = x^T(t) P_i x(t), \quad P_i > 0 \quad (1.56)$$

Ce type de fonctions présente l'avantage d'être moins conservatif que les fonctions quadratiques. Il a été l'objet d'étude dans le cas des systèmes linéaires variant dans le temps (LTV) [3], puis adopté pour l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques hybrides notamment les systèmes à commutations [26]. Récemment, ce type de fonctions a été utilisé pour l'étude de la stabilité des systèmes flous [22].



## 1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils fondamentaux utilisés dans ce mémoire, à savoir, le modèle flou de type Takagi-Sugeno, les différentes méthodes pour l'obtention des modèles flous et les inégalités linéaires matricielles (LMI). Nous avons présenté également la notion de stabilité au sens de Lyapunov et les types des fonctions candidates de Lyapunov les plus utilisés.