IMFUFA tekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Breddeopgaver
løst og kommenteret i Kvant

Jens Højgaard Jensen
februar 2022

nr. 517 – 2022 (1. udgave)

Roskilde University,
Department of Science and Environment, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Email: imfufa@ruc.dk

Breddeopgaver løst og kommenteret i Kvant

1. udgave februar 2022

IMFUFA tekst nr. 517/2022 (1. udgave) – 178 sider – ISSN: 0106-6242

Teksten indeholder løste og kommenterede breddeopgaver i tidsskriftet Kvant fra marts 2000 og fremad i tiden. Her i februar 2022 drejer det sig om 94 opgaver. I takt med, at der fremover bringes nye opgaver i Kvant, vil de løbende blive tilføjet teksten. Opgaverne er nummereret i kronologisk rækkefølge, som det fremgår af indholdsfortegnelsen.

Nogle af artiklerne i Kvant er holdt sammen af en fælles didaktisk kommentar vedrørende mere end en enkelt breddeopgave. For at læseren skal kunne lede efter løsning og kommentar til en bestemt opgave, er opgaverne angivet hver for sig i indholdslisten. Hvis der er flere opgaver behandlet i samme artikel, er artiklen koblet til hver af opgaverne.

Fra og med artiklen om opgave 11 i Kvant fra april 2003 bringes der i artiklerne, ud over opgaven, løsningen af opgaven og en didaktisk kommentar, en invitation til læseren til at overveje løsningen til den næste opgave i rækken. Min løsning og didaktiske kommentar til denne opgave kommer så i det efterfølgende nummer af Kvant. Det tog de første tre år, at finde frem til denne rytme. Derfor har det for de 10 første opgaver været nødvendigt at sammenstykke og redigere kopieringsbidder fra Kvant. Men fra og med opgave 11 er artiklerne i det væsentlige kopieret, som de var trykt i Kvant.

IMFUFA tekst 504a og 504b indeholder samlingen af breddeopgaver (på dansk og engelsk) og opdateres løbende med nye eksamensopgaver fra Problem Solving in Physics (bredde) kurset på RUC.

Jens Højgaard Jensen, februar 2022

Breddeopgaver løst og kommenteret i Kvant

Jens Højgaard Jensen

2000 — 2021

Indhold

Læseropgaver i Kvant

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Kvant vil i hvert af de kommende numre bringe en lille læseropgave med tilhørende "løsning" og kommentar. Opgaverne er eksamensopgaver fra det såkaldte breddekursus på fysikoverbygningen på RUC, og de går derfor under betegnelsen breddeopgaver. Formålet med at bringe dem i Kvant er dobbelt. Dels håber jeg at opgaverne kan have en underholdningsværdi i sig selv for fysikere. Dels håber jeg at deres afvigende form i forhold til traditionen kan bidrage til overvejelser og diskussion af formål med og udbytte af fysikundervisning blandt fysikundervisere.

Som optakt til breddeopgaven i dette nummer, d.v.s. den første i rækken, vil jeg forklare lidt om breddekurset og breddeopgaverne. Breddekurset indleder overbygningsstudiet i fysik efter den to-årige naturvidenskabelige basisuddannelse. Det strækker sig over et helt år med undervisning 2 halve dage om ugen. Omfanget er normeret til 30% af de studerendes tid i dette år. Formålet med breddekurset er populært sagt, at man skal lære at tænke som en fysiker. Endvidere skal kurset styrke deltagernes viden om og forståelse af et bredt udsnit af fysiske fænomener og teorier indenfor klassisk og moderne fysik. Kurset afsluttes med to skriftlige 4-timers eksamener, hvor de studerende uden hjælpemidler skal besvare 4 ud af 5 stillede breddeopgaver ved hver eksamen. Tendentielt har undervisningen i kurset mere karakter af arbejde med opgaverne i den oparbejdede eksamensopgavesamling, hvor lærebogen fungerer som hjælpemiddel hertil, end af lærebogsgennemgang støttet af opgaveregning. Breddekurset fungerer som introduktion til fysikoverbygningsstudiet. Men det fungerer også som opsamling af de studerendes forudgående fysikerfaringer fra basisuddannelsen. Disse varierer en del på grund den indbyggede valgfrihed i særlig projektarbejdet i basisuddannelsen.

I overenstemmelse hermed er de to skriftlige eksamener ikke tilrettelagt på den traditionelle måde, der tjener til at afprøve de studerendes evne til at reproducere og anvende et umiddelbart forud for eksamen gennemgået pensum. (Sådan tilrettelægges de senere skriftlige eksamener i fysikoverbygningen). Det har været afgørende at finde frem til en opgaveform, der fremfor afprøvning af matematisk/tekniske manipulationsfærdigheder og detailviden netop afprøvede de studerendes overblik over fysikken i dens helhed, deres forståelse af de centrale begrebsdannelser og deres evner til at anvende dem, således at eksamen kommer til at fungere som en "modenhedsprøve", hvortil en pedantisk eksamensrepetition af det uoverkommeligt store pensum kun har begrænset værdi.

Samtidig med, at der altså er særlige strukturelle årsager til opgaveformen, er den også valgt ud fra mere almene pædagogiske overvejelser. Opgaverne er udarbejdet med tanke på den tilbagevirkning på den forudgående undervisning og indlæring, eksamensopgaver uvægerligt har.

Ved udarbejdelsen af opgaverne er der forsøgt taget følgende 7 hensyn:

1) Rimelig behandling af de antydede problemer, skal forudsætte fysisk forståelse.

2) Opgaverne skal vedrøre de centrale begrebsdannelser og forståelsesmåder i fysikken.

3) Opgaverne skal tilsammen udspænde pensum.

4) Løsning af opgaverne skal kunne ske ved simple regninger.

5) Problemstillingerne skal kunne formuleres i dagligdags sprog, således at den nøjere præcisering af problemerne i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen.

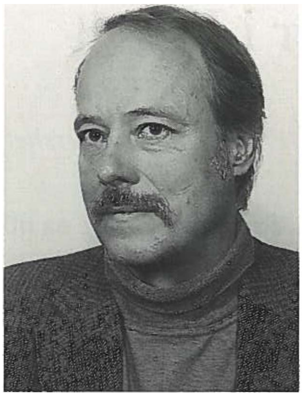
6) Opgaverne skal have en rimelig sværhedsgrad.

7) Opgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger.

At opgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger skyldes dels et motiveringshensyn i forhold til de studerende, dels at det ønskes illustreret, at fysikkens karakter af teoretisk, forklarende videnskab netop gør den brugbar til at overskue dele af virkeligheden med, og at fysikken ikke er det skolatiske, selvbestemmende system, som den på grund af sit stærkt teoretiske præg ofte forveksles med. At de i opgaverne rejste problemstillinger skal kunne formuleres i dagligdags sprog skyldes en opfattelse af, at det væsentligste udbytte af fysikundervisning først opnås gennem opøvelsen af evnen til aktiv anvendelse af tillærte begreber og forståelsesmåder på ikke i forvejen velkendte eller tilrettelagte problemer. For at tilgodese dette hensyn er en stor del af problemstillingerne nogle, der allerede behandles i gymnasiet.

Det kan måske for nogle forekomme overraskende, at den slags "lette" problemer skal være udgangspunkter for universitetsundervisning. Det er imidlertid en erfaring, at der er megen forskel på udbyttet af og vanskelighederne ved arbejdet med et problem, når det leveres i en blot antydet form uden tilknytning til et bestemt sted i pensum, og når det leveres i parametriseret og præciseret form i sammenhæng med gennemgang af netop det relevante pensum.

Den første eksamen i fysikbreddemodulet på RUC blev afholdt sommeren 1976. I sammenhæng hermed forelå en opgavesamling med 68 opgaver. Samlingen er nu vokset til 470 opgaver ved at inkludere eksamensopgaverne fra årene, der er gået. Den forligger som IMFUFA Tekst nr. 370 og kan købes for trykkeudgifterne ved henvendelse til sekretariatet, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Postbox 260, 4000 Roskilde.



Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik ved IMFUFA, RUC. Han er uddannet og har haft midlertidig ansættelse ved Københavns Universitet til 1972. Har siden deltaget i opbygningen af RUC, bl.a. som dekan for det naturvidenskabelige hovedområde og prorektor. Faglig hovedinteresse i de eksakte fags didaktik og videnskabsteori.

Cykeltramp - breddeopgave 1 med didaktisk kommentar

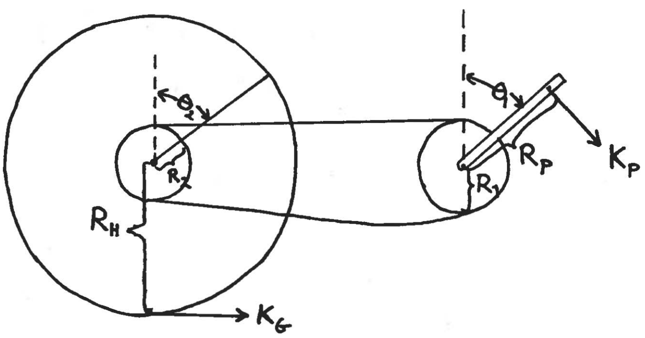
Bragt i Kvant marts 2000

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til den første opgave i samlingen af breddeopgaver løst og kommenteret i Kvant (fra eksamen på RUC juni 1999). Opgaven var:

Breddeopgave 1. Cykeltramp

Hvor stor er kraften mellem fod og pedal i forhold til gnidningskraften mellem vej og dæk ved cykling? Begrund svaret.



"Løsning" *

Uanset om gnidningskraften mellem vej og dæk overvinder luftmodstand, accelererer eller løfter op ad bakke, må arbejdet den udfører på cykel plus person af energibevarelsesgrunde være omtrent det samme som det arbejde personen udfører ved at trampe i pedalen:

$$K_G R_H \Delta\theta_2 = K_P R_P \Delta\theta_1. \qquad (1)$$

Da

$$R_2 \Delta\theta_2 = R_1 \Delta\theta_1. \qquad (2)$$

fås:

$$\frac{K_P}{K_G} = \frac{R_H}{R_P}\frac{R_1}{R_2} \qquad (3)$$

Det samme resultat kan opnås ved at udnytte at de resulterende kraftmomenter på henholdsvis pedaltandhjul og cykelbaghjul omkring deres omdrejningsakser er nul, og at pedaltandhjulets træk i kæden er det samme som kædens træk i baghjulstandhjulet.

Kommentar

Selvom jeg ikke er stødt på dem, går jeg ud fra at opgavens gearingsproblem findes behandlet udførligt og mange steder i litteraturen. Derimod ville jeg blive overrasket over at finde problemet formuleret som undervisningsopgave i fysik i den åbne form det er gjort her. Den åbne formulering gør opgaven svær. Til gengæld går man måske glip af noget helt afgørende ved ikke selv at skulle levere præcisering og parametrisering. Det er i alle tilfælde synspunktet bag breddeopgaverne på RUC.

* "Løsning" er sat i gåseøjne, fordi der ifølge breddeopgavernes karakter ikke altid findes bestemte, entydige og autoriserede svar på dem.

Temperatur i lyn - breddeopgave 2 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant juni og december 2000

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til den anden opgave i samlingen af breddeopgaver løst og kommenteret i Kvant (fra eksamen på RUC juni 1999). Opgaven var:

Breddeopgave 2. Temperatur i lyn

Hvad er temperaturen i en gnistudladning eller et lyn? Begrund svaret.

"Løsning"

"Løsningen[1]" til opgaven findes ved at bemærke, at i gnistudladningen eller lynet er mange af luftmolekylerne åbenbart anslået således at de ved henfald udsender synligt lys. Anslagene skyldes deres indbyrdes sammenstød. Da anslagsenergierne er af størrelsesordenen eV og $k_B T$ ved 300 K er ca. 1/40 eV, er temperaturen i gnistudladningen eller lynet størrelsesordensmæssigt 40 gange 300 K, dvs. af størrelsesordenen 10.000 K.

Kommentar

Fænomenerne er dybt komplicerede og næppe forstået til bunds. Alligevel giver overslaget en vis mening. Det er vel rigtigere at knytte temperaturen 10.000 K til dem end f.eks. 1.000 K eller 100.000 K?

Breddekurset på RUC dækker som navnet udsiger fysik i bredden. Derfor er det muligt som her at stille eksamensopgaver, hvis løsning kræver kombination af normalt separat behandlede dele af fysikken. Hjælpemidler er ikke tilladte ved eksamen. Løsningen af opgaven forudsætter derfor også, at man har nogle fysiske nøgletal present.

Se i øvrigt Henrik Leths artikel om lyn i Kvant, bind 9, nr. 4 (december 1998), side 34, og Thomas Højgaard Allins artikel om feer og elver på nattehimlen i dette nummer side 3.

[1] "Løsning" er sat i gåseøjne, fordi der ifølge breddeopgavernes karakter ikke altid findes bestemte, entydige og autoriserede svar på dem.

Tørretumbler - breddeopgave 3 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant december 2000

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Denne tredje opgave er af ældre dato og stammer fra en eksamen på RUC i januar 1986. Jeg trækker den bl.a. frem, fordi den spillede en lidt pudsig rolle, da vi på RUC havde besøg af evalueringspanelet ved fysikuddannelsesevalueringen i 1998. Opgaven lyder:

Breddeopgave 3. Tørretumbler

Hvor hurtigt roterer en tørretumbler? Begrund svaret.

Løsning

Løsningen gives i form af en udfoldning af opgaven:

En cylinder med radius R roterer med vinkelfrekvensen w om sin akse, der er vandret i tyngdefeltet. Tyngdeaccelerationen kaldes g. En genstand med massen m befinder si gpå cylinderens inderside, hvor den tvinges med rundt i cylinderens rotation.

1) Hvor stor er normalreaktionen N fra cylinderen på genstanden, når denne befinder sig i toppunktet af sin bevægelse?

2) Hvad er den mindste vinkelfrekvens, hvor genstanden følger med rundt i cylinderens rotation uden at være fasthæftet til den?

3) Hvor stor er den tilsvarende omløbstid, når $R = 0.5$ m?

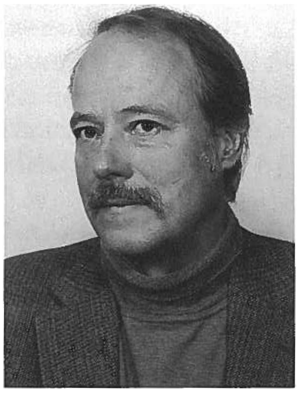
Således hjulpen bliver løsningen på opgaven $N = mv^2/R - mg$, $w_{min} = (g/R)^{1/2}$ og en omløbstid på omkring et sekund for situationen, hvor tørretumbleren hverken funger centrifugeagtigt eller roterer så langsomt, at tøjet alene ruller i bunden af den.

Kommentar

Ved besøget af fysikevalueringspanelet på RUC i 1998 illustrerede jeg vores breddekursus og tankerne bag det ved hjælp af tørretumbleropgaven i dens åbne og dens udfoldede formulering. Pointen var og er, at det er skridtet fra den åbne formulering "Hvor hurtigt roterer en tørretumbler?" til den udfoldede formulering anført ovenfor som "løsning", der udgør den største vanskelighed på vejen mod et svar, hvorfor både eksamen og den forudgående undervisning handler om netop åbent formulerede opgaver af tørretumblertypen.

I toget hjem fra RUC til København senere på dagen mødte jeg en del af panelet, der også var på vej hjem. De havde – efter mødet med bl.a. mig og uafhængigt heraf – mødtes med nogle af de fysikstuderende og gratulerede mig med forslaget, de havde mødt. Ved samtalen med de studerende havde en af dem således tilbudt at illustrere ideen i breddekurset med et eksempel: Man kunne f.eks. spørge: "Hvor hurtigt roterer en tørretumbler?" ...

Pudsigheden skyldes, at jeg som et af midlerne til at tydeliggøre hensigterne med breddekurset og demonstrere kontrasten til en mere traditionel opgaveform for de studerende har lavet et sæt udfoldede og formaliserede opgaver, der modsvarer 12 af de åbent formulerede breddeopgaver. Og at den første opgave i sættet er tørretubmleropgaven. Som breddeopgave står den ikke så alene, som det tilsyneladende så ud. Som omtalt tidligere i KVANT foreligger der en breddeopgavesamling med 470 opgaver (IMFUFA Tekst nr. 370). Den kan købes for trykkeudgifterne ved henvendelse til sekretariatet, IMFUFA, RUC, Postboks 260, 4000 Roskilde.



Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik ved IMFUFA, RUC. Han er uddannet og har haft midlertidig ansættelse ved Københavns Universitet til 1972. Har siden deltaget i opbygningen af RUC, bl.a. som dekan for det naturvidenskabelige hovedområde og prorektor. Faglig hovedinteresse i de eksakte fags didaktik og videnskabsteori.

Dybfryser - breddeopgave 4 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant december 2000 og april 2001

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Løsningen af breddeopgave 3 i Kvant, ”*Hvor hurtigt roterer en tørretumbler? Begrund svaret.*”, blev givet i form af en udfoldning af opgaven. Som et af midlerne til for de fysikstuderende på RUC at tydeliggøre, hvad det er for en slags bolde, der gås efter i en undervisning bygget på åbent formulerede breddeopgaver, har jeg som nævnt ved løsningen af breddeopgave 3 for kontrastvirkningens skyld lavet et sæt udfoldede og formaliserede opgaver, der modsvarer 12 af breddeopgaverne. Og tørretumbleropgaven er den ene af disse 12 opgaver med modsvarende udfoldede versioner. Som breddeopgave nr. 4 bringes her en af de andre i sættet (fra eksamen januar 1977):

Breddeopgave 4. Dybfryser

Hvor mange gange større er strømforbruget om vinteren af en dybfryser placeret i køkkenet fremfor i udhuset? Begrund svaret.

Løsning

Den udfoldede version af opgaven lyder:

Varmepumpen (kompressoren) i en dybfryser udfører pr. tidsenhed arbejdet A. Herved fjernes der pr. tidsenhed varmemængden Q_i fra dybfryserens indre, der har den absolutte temperatur T_i. Samtidigt afleveres der pr. tidsenhed varmemængden Q_o til omgivelserne, der har den absolutte temperatur T_o Dybfrysertemperaturen T_i holdes konstant.

1) Hvor stor er A udtrykt ved Q_i og Q_o?

Den størst mulige effektivitet af varmepumpen svarer til den situation, hvor entropien, der fjernes fra det indre af fryseren pr. tidsenhed, er lige så stor som entropien, der tilføres omgivelserne pr. tidsenhed.

2) Hvor stor er Q_o udtrykt ved Q_i, T_i og T_o i dette grænsetilfælde?

3) Hvor stor er A udtrykt ved Q_i, T_i og T_o i grænsetilfældet?

Varmemængden, der skal fjernes fra fryserens indre pr. tidsenhed, er lig med den varmemængde, der siver ind fra omgivelserne gennem isoleringen pr. tidsenhed. Denne antages at have størrelsen $K(T_o - T_i)$, d.v.s. proportional med temperaturforskellen mellem det indre og omgivelserne. Proportionalitetskonstanten K afhænger af isoleringen af dybfryseren.

4) Hvor stor er A udtrykt ved K, T_i og T_o?

Størrelsen af $T_o - T_i$ er om vinteren ca. 40 grader, hvis dybfryseren er placeret i køkkenet, og ca. 20 grader, hvis dybfryseren er placeret i udhuset.

5) Hvad er forholdet mellem strømforbruget, eller rettere sagt A. ved de to placeringer?

Da svarene på delspørgsmålene er 1) $A = Q_o - Q_i$, 2) $Q_o = Q_i(T_o/T_i)$, 3) $A = Q_i(T_o - T_i)/T_i$, 4) $A = K(T_o - T_i)(T_o - T_i)/T_i$ og 5) $A_{køkken}/A_{udhus} = 4$, er strømforbruget af dybfryseren placeret i køkkenet om vinteren 4 gange større end ved udhusplaceringen.

Kommentar

Det intuitive svar, som ser bort fra temperaturforskellens indvirkning på effektiviteten af kompressoren som varmepumpe, er, at det nok kræver den dobbelte effekt at holde temperaturforskellen mellem dybfryserens indre og dens omgivelser dobbelt så stor. Men sådan er det altså ikke. Heller ikke i praksis ifølge en redegørelse fra Husholdningsrådet, der, hvis jeg husker rigtigt, netop sagde en faktor fire. Det er således ikke helt ved siden af, som gjort, at læne sig op af det reversible grænsetilfælde ved besvarelsen af opgaven.

Det er bevidst, at den effekt, der skal til for at drive dybfryseren, i breddeopgaven er kaldt strømforbrug svarende til almindeligt sprogbrug. På samme måde som matematikbeherskelse ikke skal være bundet til, at den uafhængige variabel hedder x, den afhængige y og den vilkårligt valgte konstant a, skal fysikbeherskelse også kunne skue igennem varierende symboler og sprogbrug.

Den udfoldede version af dybfryseropgaven er som sagt lavet som kontrast til den åbent formulerede breddeopgave som bidrag til dialog med de studerende om, hvad der er flaskehalsen for at opleve fysik som et aktivt og udadrettet tænkeapparat. Der ligger selvfølgelig også en indirekte kritik af fremherskende opgavetyper i fysikundervisningstraditionen gemt i modstillingen, selvom den udfoldede opgave er på grænsen til at være en karikatur. Under alle omstændigheder har sættet af udfoldede opgaver været meget befordrende for forståelsen hos de studerende af plottet for breddekurset på RUC.

Modstand i elpære og sand i roterende tragt -
breddeopgave 5 og 6 med didaktisk kommentar

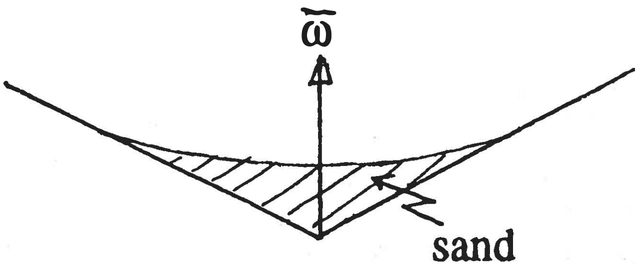
Bragt i Kvant april 2001

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Breddeopgave 5 og 6

Denne gang er der valgt to breddeopgaver ud. Opgave 5, som er fra sommereksamen 1996, hører til i den nemme afdeling. Opgave 6, som er fra sommereksamen 1999, er i modsætning hertil en af de matematisk besværlige inden for genren. De to opgaver bringes således sammen for at vise nogen om variationen i sværhedsgraden af opgaverne, som RUC's breddekursus er bygget op omkring.

Opgave 5 lyder: *Er modstanden størst i en 60 W's eller en 40 W's pære? Begrund svaret*



Figur 1. Tegning til opgave 6.

Opgave 6 lyder: *Hvor meget sand kan en glat roterende tragt (jvf. figuren) indeholde uden at der slynges sand ud af tragten? Begrund svaret.*

Løsning og kommentar til breddeopgave nr. 5

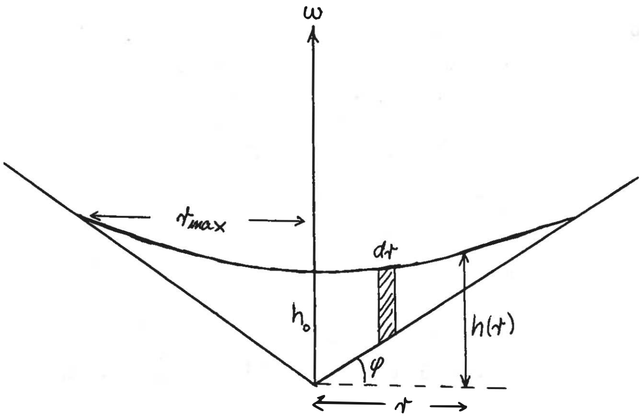
Fra $P = UI$ og $U = RI$ fås $R = U^2/P$. Da U er den samme for de to pærer, nemlig netspændingen, er modstanden R altså størst, når P er mindst, dvs. i 40 W's pæren.

Det er ikke fysikken, der vanskeligheden i denne opgave. Formlerne $P = UI$ og $U = RI$ er velkendte fra gymnasiet. Vanskeligheden består først of fremmest i at identificere, hvad der i problemet har rollen som uafhængig variable (P), hvad der har rollen som afhængig variable (R), hvad der har rollen som konstant (U), og at I er en størrelse, man skal skaffe sig af med. Som omtalt hører opgaven til blandt de nemme breddeopgaver. Ved eksamen blev den rigtigt besvaret af næsten alle. Man skal imidlertid ikke undervurdere vanskeligheden ved at stille formelt skarpt på selv ret simple problemer, når de ikke leveres i en formel form. Mit gæt er, at kun et fåtal af de studerende på den naturvidenskabelige basisuddannelse på RUC ville kunne løse opgave, selvom de kunne huske gymnasieformlerne.

Løsning til breddeopgave 6

Hvor meget sand tragten kan indeholde uden at der slynges noget ud, må alene afhænge af hældningen ϕ, vinkelfrekvensen ω og tyngdeaccelerationen g. Det følger af dimensionsgrunde heraf, at formlen for det maksimale volumen som funktion af ϕ, ω og g nødvendigvis må have udseendet:

$$V_{max} = f(\phi)\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^3 \tag{1}$$



Figur 2. Figur til løsning af opgave 6.

For at finde funktionen $f(\phi)$ er det nødvendigt at regne: Sandoverfladen er vinkelret på det samlede kraftfelt i det medroterende system, dvs.:

$$\frac{dh}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}, \tag{2}$$

hvoraf

$$h(r) = h_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2. \tag{3}$$

I det almene tilfælde, hvor der godt kan være mindre sand i tragten end det maksimalt mulige, er r_{max} (jævnfør figuren) fastlagt ved skæringsbetingelsen:

$$h_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r_{max}^2 = r_{max}\tan\phi \tag{4}$$

Ved den på figuren antydede integration fås den almene sammenhæng mellem volumen, h_0 og r_{max}:

$$V = \int_0^{r_{max}} 2\pi r(h(r) - r\tan\phi)dr =$$

$$2\pi\left(\frac{1}{2}h_0 r_{max}^2 + \frac{1}{8}\frac{\omega^2}{g}r_{max}^4 - \frac{1}{3}(\tan\phi)r_{max}^3\right), \tag{5}$$

som ved indsættelse af h_0 fra (4) giver

$$V = \pi r_{max}^3\left(\frac{1}{3}\tan\phi - \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{g}r_{max}^2\right) \tag{6}$$

Fordelingen af sandet i tragten kan derfor i almindelighed for et givet volumen findes ved at bestemme r_{max} af (6) og herefter h_0 af (4). Betingelsen for at sandet ikke skrider udad er, at komposanten langs tragten af det samlede kraftfelt ved det yderste sandkorn ikke er udadrettet:

$$g \sin\phi > r_{max}\omega^2 \cos\phi. \tag{7}$$

Det maksimale volumen er således givet ved $r_{max} = g/\omega^2 \tan\phi$, som indsat i (6) giver

$$V = \frac{\pi}{12}\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^3 \tan^4\phi. \tag{8}$$

Funktionen $f(\phi)$ er altså $\frac{\pi}{12}\tan^4\phi$.

Kommentar til opgave 6

Efter at opgaven havde været stillet til eksamen blev jeg gjort opmærksom på, at stablingsfænomenerne i granulære medier også i det foreliggende tilfælde kan give anledning til lidt af hvert. Der er faktisk i litteraturen rapporteret om andre sandfordelinger i roterende tragte end den ovenfor beregnede. Så opgaven havde været stillet mere indiskutabelt, hvis der i opgaveteksten havde stået vand, hvor der står sand.

For de studerende ved eksamen gjorde det ikke nogen forskel, at den handlede om sand og ikke om vand. Og i den situation er jeg ikke så ked af det diskutable i opgaven. For den senere brug af opgaven i undervisningen er det diskussionsåbnende i den en fordel, når diskussionen – som her – kan ske i sammenhæng med klarhed på visse præmisser (sand=vand). For de studerende ved eksamen bestod hovedvanskelighederne dels i ad udføre de nødvendige matematiske manipulationer, dels i at få opstillet de udtryk, der skulle manipuleres med. Der var ingen, der nåede frem til facit, selvom flere var i stand til at anføre rigtige løsningsstrategier. Opgaven er således som typeopgave betragtet uhensigtsmæssig besværlig i forhold til det matematiske træningsniveau hos de studerende på breddekurset.

I almindelighed er det vanskeligere at finde på nemme breddeopgaver som opgave 5 end breddeopgaver som opgave 6, hvor fysifiseringen og matematiseringen kan komme til at drukne i teknikaliteter. En af grundene til at eksamenen i breddekurset er uden hjælpemidler er, at det gør det nemmere at stille enkle opgaver. Behovet for afstand til medbragte lærebøger kan nemt komme til at presse opgaverne i retning af teknisk betonede raffinementer.

Neutronbestråling på DR3 og ledningsevner og båndgab
- breddeopgave 7 og 8 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant maj 2002

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsninger og kommentar til breddeopgave 7 og 8 i Kvant (fra sommereksamen 2000 og vintereksamen 1999):

Breddeopgave 7. Neutronbestråling på DR3

I reaktoren DR3 på RISØ skabes der urenhedsatomer i rent silicium gennem kernereaktioner ved neutronbestråling. Opnås der herved en p-type halvleder eller en n-type halvleder? Begrund svaret.

Breddeopgave 8. Ledningsevne og båndgab

Ledningsevnerne af henholdsvis rent silicium og rent germanium er størrelsesordensmæssigt henholdsvis 10^{-11} og 10^{-7} gange ledningsevnen af typiske metaller.
Hvad er forholdet imellem båndgabene i silicium og germanium? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar findes på næste side.

Løsning til opgave 7

Den kernereaktion, der er tale om, må være en neutronindfangning i en siliciumkerne med en efterfølgende omdannelse af en neutron til en proton og en elektron. Herved er der skabt et atom i siliciumgitteret med en ekstra proton i kernen samtidigt med, at der er frigivet en elektron, der kan bevæge sig relativt frit, fordi den er i overskud i forhold til gitterstrukturen. Ved neutronbesrålingen frembringes der derfor en n-type halvleder, da der fremkommer ekstra bevægelige negative ladninger.

Løsning til opgave 8

Det er ikke forskelle i mobiliteten af ladningsbærerne i henholdsvis metaller og halvledere, men forskellen i antallet af frie ladningsbærere, der medfører størrelsesordensforskellene i ledningsevner. Brøkdelen af en ren halvleders elektroner i valensbåndet, der er eksiteret op i ledningsevnebåndet, og derfor kan bevæge sig frit, er $\exp(-E_g/k_BT)$, hvor E_g er halvlederens båndgab. Da der størrelsesordensmæssigt er det samme antal elektroner i halvlederens valensbånd, som der er frie elektroner i metallernes ledningsevnebånd, angiver denne Boltzmann-faktor også forholdet mellem frie ladninger i halvlederen og i et metal, og derfor også forholdet mellem halvlederens og metallets ledningsevner. Altså gælder:

$$\exp(-E_{gSi}/k_BT) = 10^{-11}\,, \quad \exp(-E_{gGe}/k_BT) = 10^{-7}, \tag{1}$$

$$\frac{E_{gSi}}{k_BT} = 11\ln(10)\,, \quad \frac{E_{gGe}}{k_BT} = 7\ln(10), \tag{2}$$

og

$$\frac{E_{gSi}}{E_{gGe}} = \frac{11}{7} \tag{3}$$

Kommentar

I breddekurset er der blot indlagt én kursusgang (af tre timer) til kernefysik, én kursusgang til atom-, molekyl- og faststoffysik, og én kursusgang til statistisk mekanik. De studerende har derfor ikke på dette trin af deres fysikuddannelse forudsætninger for at bedømme værdien af de anførte opgaveløsninger ud fra mere grundlæggende kernefysiske (andre kernereaktioner end neutronindfangning og beta-henfald), faststoffysiske (urenhedstilstande) og statistisk mekaniske (Fermi-Dirac fordeling) forståelser. Men måske er det en pædagogisk fordel, at de derfor her i første omgang tvinges til at orientere sig imod at se skoven før de mange træer siden komplicerer billedet. De studerende er godt klar over, at de kun er blevet præsenteret for en introduktion til de nævnte fysikemner.

I introduktionsartiklen til rækken af breddeopgaver i KVANT nr. 1, marts 2000, nævnte jeg, at der ved udarbejdelsen af opgaverne er forsøgt taget følgende 7 hensyn:

1) Rimelig behandling af de antydede problemer skal forudsætte fysisk forståelse.

2) Opgaverne skal vedrøre de centrale begrebsdannelser og forståelsesmåder i fysikken.

3) Opgaverne skal tilsammen udspænde pensum.

4) Løsning af opgaverne skal kunne ske ved simple regninger.

5) Problemstillingerne skal kunne formuleres i dagligdags sprog, således at den nøjere præcisering af problemerne i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen.

6) Opgaverne skal have en rimelig sværhedsgrad.

7) Opgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger.

De to opgaver denne gang er bl.a. valgt for at illustrere den erfaring, at det kan være vanskeligere at leve op til disse hensyn i forbindelse med moderne fysik end i forbindelse med klassisk fysik. Især kan det volde vanskeligheder at honorere punkt 5 og punkt 7. Dybfrysere og tørretumblere er tættere på dagligdags erfaringer end halvledere.

Alligevel mener jeg, at opgave 7 opfylder kravene til en breddemodulopgave. For de studerende fungerer "neutronbesråling", "p-type halvleder" m.m. som tekniske termer, der går forud for de fysiske præciseringer ved opgaveløsningen. Og opgaven vedrører også en virkelig problemstilling, selvom den jo nu med lukningen af DR3 desværre er blevet historisk. Derimod forbryder opgave 8 sig imod konceptet ved at spørge til det udpræget internt fysiske begreb båndgab.

Storebælt og skinnetryk - breddeopgave 9 og 10 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant september og december 2002

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsninger og kommentar til breddeopgave 9 og 10 i Kvant (fra vintereksamen 1999 og sommereksamen 2000):

Breddeopgave 9. Storebælt

Vurder størrelsesordenen af vandstandsforskellen mellem østsiden og vestsiden af Storebælt ved en strømhastighed gennem bæltet på ca. 5 km i timen.

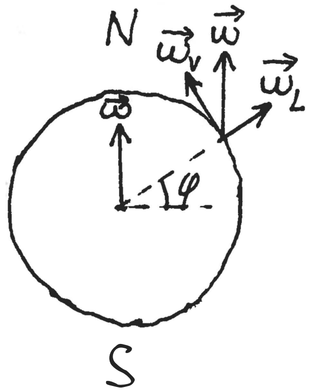
Breddeopgave 10. Skinnetryk

Det lodrette tryk på skinnerne fra et hurtigtkørende tog er svagt afhængigt af om toget kører imod øst, vest, nord eller syd. I hvilken kørselsretning er trykket størst og i hvilken mindst? Hvad er størrelsesordenen af den relative trykforskel? Begrund svarene.

Løsninger og kommentarer findes på de næste sider.

Løsning til opgave 9

Vandoverfladen af Storebælt stiller sig vinkelret på det sammensatte kraftfelt af tyngdekraft (rettet efter lodlinien) og corioliskraft (rettet imod Korsør ved nordgående strøm og imod Nyborg ved sydgående strøm). Det betyder, at vandstandsforskellen mellem østsiden og vestsiden af bæltet forholder sig til afstanden imellem Korsør og Nyborg som corioliskraften forholder sig til tyngdekraften.



Det almene udtryk for corioliskraften er $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}$, hvor $\vec{V}$ er hastigheden af en masse m i forhold til et referencesystem, der roterer i forhold til inertialsystemerne med den momentane rotationshastighed $\vec{\omega}$. I tilfældet bevægelse på overfladen af den roterende jordklode ses det ved opløsning af $\vec{\omega}$ i dens lodrette komposant $\vec{\omega}_L$ og dens vandrette komposant $\vec{\omega}_V$ som vist på figuren, at corioliskraften har en vandret komposant $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_L$, som er vinkelret på $\vec{V}$ (mod højre på den nordlige halvklode) og af størrelsen $2mV\omega_L$, og en lodret komposant $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_V$, hvis størrelse og retning (opad eller nedad) afhænger af retningen af $\vec{V}$.

Idet $\omega_L = \omega \cdot \sin\phi$, hvor ϕ angiver breddegraden af Storebælt, fås, at vandstandsforskellen mellem Korsør og Nyborg er:

$$\begin{aligned} \approx 20\,km \cdot \frac{2V\omega\sin\phi}{g} &\approx 20km \cdot \frac{2 \cdot 5\frac{km}{time} \cdot \frac{2\pi}{24\,time} \cdot \frac{1}{2}}{10\frac{m}{sek^2}} \\ &\approx 20\,cm \end{aligned} \tag{1}$$

Løsning til opgave 10

Hvis toget kører imod nord eller syd er $2m \cdot \vec{V} \times \vec{\omega}_V$, som er corioliskraftens lodrette komposant, nul. Hvis toget kører imod øst er $\vec{V} \times \vec{\omega}_V$ rettet bort fra Jordens centrum, medens retningen er imod Jordens centrum, hvis der køres imod vest. Det lodrette tryk på skinnerne er derfor størst, når der køres imod vest og mindst, når der køres imod øst. Det gælder både på den nordlige og den sydlige halvklode.

Størrelsesordenen af den relative trykforskel imellem kørsel imod vest og øst for et TGV-tog i Frankrig er:

$$2 \cdot \frac{2V\omega\cos\phi}{g} \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 300\frac{km}{time} \cdot \frac{2\pi}{24\,time} \cdot \frac{1}{2}}{10\frac{m}{sek^2}} \approx 10^{-3} \tag{2}$$

Kommentarer

1. Niels Kristian Højerslev har i KVANT nr. 2 (maj 2002) gjort et "pædagogisk" forsøg på at beskrive og udlede corioliskraften som alternativ til gængse lærebogsfremstillinger. Jeg synes ikke forsøget er lykkedes. Tværtimod virker udledningen mystificerende på mig ved at tage udgangspunkt i den kinematiske ligning

$$\vec{a}_a = \vec{a}_m + \vec{a}_r \tag{3}$$

for sammenhængen imellem absolut acceleration, medføringsacceleration og relativ acceleration, som jo gælder for beskrivelsen af en bevægelse i forhold til to forskellige koordinatsystemer, hvis nulpunkter er accelererede i forhold til hinanden, og hvis koordinatakser ligger fast i forhold til hinanden. Hvorimod corioliskraften hører til bevægelsesbeskrivelse i et koordinatsystem, hvis akser roterer i forhold til inertialsystemerne.

Mit bud på en pædagogisk indføring i corioliskraften består af tre skridt:

1. Erfaringsmæssigt findes der koordinatsystemer, inertialsystemerne, hvor bevægelse sker i overensstemmelse med Newtons 2. lov:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_a \tag{4}$$

Her er $\vec{F}$ summen af såkaldte *naturkræfter* i spil. Naturkræfter er sådanne, hvor kræfterne kan forklares ved henvisning til en genstand, der forårsager dem. F.eks. tryk- og trækkræfter (der er noget, der trykker eller trækker), gnidningskræfter (der er noget, der gnides imod), massetiltrækningskræfter (der er en masse, der trækker) eller elektriske til- og frastødningskræfter (der er f.eks. en ladning, der trækker eller frastøder).

2. *Matematisk* kan der findes en kinematisk ligning for sammenhængen imellem accelerationerne i samme bevægelse set i forhold til to forskellige koordinatsystemer, som har fælles nulpunkt og akser, der roterer i forhold til hinanden:

$$\vec{a}_a = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{a}_r \quad (5)$$

Her er $\vec{\omega}$ den momentane rotation af r-systemet set fra a-systemet, $\vec{r}$ stedvektoren for bevægelsen (som afhænger af nulpunkt, men ikke akseretninger, for koordinatsystemet, som bevægelsen beskrives i forhold til) og $\vec{a}_r$ og $\vec{V}_r$ bevægelsens acceleration og hastighed relativt til r-systemet.

Ligningen udledes mest kompakt ved at gøre sig klart, at der for enhver vektor, $\vec{A}$, gælder:

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_r + \vec{\omega} \times \vec{A}, \quad (6)$$

hvor $d\vec{A}/dt|_a$ betyder flytningen af $\vec{A}$ per tidsenhed i forhold til a-systemet og $d\vec{A}/dt|_r$ tilsvarende flytningen af $\vec{A}$ per tidsenhed i forhold til r-systemet. Først fås:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7)$$

ved at anvende operatorligheden (6) med $\vec{r}$ på $\vec{A}$'s plads. Dernæst fås den efterspurgte ligning (5) ved at anvende operatorligheden (6) én gang til, nu med $\vec{V}_a$ på $\vec{A}$'s plads og indsætning af udtrykket for $\vec{V}_a$ fra ligning (7). Udledningen, som findes i større detalje i f.eks. Ture Eriksson, Torbjörn Lagerwall, Olof Beckman: "Fysik 1" , Almqvist & Wiksell Förlag AB, Stockholm 1970, side 125 til side 130, er udtømmende og eksakt.

3. *Kombineres* den matematiske ligning (5) med den fysiske erfaringsligning (4), Newtons 2. lov for inertialsystemer, fås

$$\vec{F} + m\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} + 2m\vec{V}_r \times \vec{\omega} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} = m \cdot \vec{a}_r \quad (8)$$

som bevægelsesligningen for bevægelser set i forhold til et i forhold til inertialsystemerne roterende system. I skemaet "kraft = masse × acceleration" må der øjensynligt på kraftsiden udover naturkræfterne også opereres med tre såkaldte *systemkræfter*, som ikke kan forklares ved henvisning til en genstand, der forårsager dem. Deres størrelser og retninger hænger, som vist matematisk, sammen med koordinatsystemets grad af afvigelse fra at være et inertialsystem. Corioliskraften er den ene af de tre systemkræfter. Hvis nulpunktet for koordinatsystemet, som en bevægelse beskrives i forhold til, er accelereret i forhold til inertialsystemerne, skal der yderligere opereres med en fjerde systemkraft i modsat retning af nulpunktsaccelerationen og af størrelse som denne gange massen, i overensstemmelse med kombinationen af ligning (3) og ligning (4).

Det er min erfaring, at det almene udtryk for corioliskraften kun lader sig introducere formelt matematisk. Det er muligt at forstå den mere fysisk i specialtilfælde som radial bevægelse i forhold til $\vec{\omega}$ og cirkulær bevægelse omkring $\vec{\omega}$. Men alment er det næsten umuligt intuitivt at overskue indholdet i udregninger, der involverer krydsprodukter og differentiationer i flere omgange, hvorfor der ikke er nogen vej uden om en formel indføring. Både ved introduktion af specialtilfælde og ved den almene udledning er det erfaringsmæssigt helt afgørende for begrebsforståelsen at dvæle ved, at bevægelse er bevægelse i forhold til noget. Og at dette noget nødvendigvis skal præciseres.

2. De studerendes svar til eksamen på opgave 9 svarede i det væsentlige til min ovenstående løsning. De erindrede sig formlen for corioliskraften og satte den i forhold til tyngdekraften. Hvad ellers kunne tænkes at være i spil i denne opgave end corioliskraften?

Med opgave 10 forholdt det sig helt anderledes. Her blev ordet corioliskraft typisk ikke nævnt. I stedet ræsonneredes der over øst- eller vestkørende tog på ækvator, altså specialtilfældet cirkulær bevægelse om $\vec{\omega}$, svarende til ligningen:

$$m\frac{(R\omega \pm V)^2}{R} = mg - N, \quad (9)$$

hvor N er trykkraften mellem tog og skinner, R Jordens radius, g gravitationskraftfeltstyrken, og hvor + gælder for kørsel mod øst, medens – gælder for kørsel mod vest. Og det er jo rigtigt af de studerende ikke at referere til en corioliskraft som ligning (9) er skrevet op, idet de jo – typisk uden eksplicit at gøre opmærksom på det – regner i inertialsystemet.

Ved udgangning af parentesen og omflytning af leddene fås bevægelsesligningen, som den ser ud i det roterende jordsystem:

$$m\frac{V^2}{R} = mg - mR\omega^2 \mp 2m\omega V - N \quad (10)$$

I specialtilfældet her – som også Niels Kristian Højerslev behandler i sin artikel – ses corioliskraften (og centrifugalkraften) at dukke op på en måde, der er til at overskue. En bevægelsesligning i Newtons mekanik består af masse gange acceleration i forhold til det valgte referencesystem på den ene side og summen af de virkende kræfter på den anden. Og hvis vi vil regne accelerationen i forhold til det roterende jordsystem, som i ligning (10), dukker der tydeligvis ekstra kraftled op i ligningen sammenlignet med ligning (9), hvor vi regner accelerationen ud i forhold til inertialsystemet, hvis ikke de to ligninger skal være i modstrid med hinanden.

De studerende gjorde sig ikke sådanne overvejelser ved opgavebesvarelsen. For dem havde ligning (10), hvis de havde skrevet den ud, nærmere karakter af en mellemregning fra ligning (9) til deres (rigtige) svar på opgaven.

3. I modsætning til nogle af de øvrige breddemodulopgaver gør disse to ikke krav på originalitet. Jeg tror, at begge opgaverne i forskellige iklædninger er hyppigt forekommende i diverse lærebøger. Originalitet er imidlertid ikke et afgørende udvalgskriterium for breddemodulopgaverne, som vi benytter dem i undervisningen på RUC. Det afgørende er, om de for de studerende repræsenterer en åben problemstilling, uanset om den er ny eller standard for læreren eller lærebogen. Når vi ikke tillader brug af hjælpemidler ved eksamen, skyldes det blandt andet et ønske om også at kunne stille opgaver, som – selvom de er nye for de studerende – findes besvaret i standardlærebøgerne.

Kanonløbslængde - breddeopgave 11 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant april 2003

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

I KVANT nr. 4 (december 2002) bragte vi breddeopgave nr. 11: *Hvordan afhænger ildkraften af en kanon af kanonløbets længde? Begrund svaret.* Her er så løsning og kommentar til opgaven.

Løsning

"Ildkraft" vælger jeg at tolke som den bevægelsesenergi, som kanonen tilfører kanonkuglen. Dernæst antager jeg, at kanonaffyringer sker ved, at der først sker en eksplosion af krudtet i et begrænset volumen, V_o, bag kuglen, hvorefter eksplosionsgassen presser kuglen ud af kanonen ved at udvide sit volumen til kanonløbsvoluminet V_L, uden at gassen når at afgive varme til eller modtage varme fra kanonløbet.

Ildkraften er så det samme som arbejdet udført af eksplosionsgassen på kanonkuglen ved denne adiabatiske ekspansion:

$$
\begin{aligned}
\text{Ildkraft} &= \int_{V_o}^{V_L} P\,dV \\
&= V_o^{\gamma} P_o \int_{V_o}^{V_L} V^{-\gamma}\,dV \\
&= \frac{V_o^{\gamma} P_o}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_o^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_L^{\gamma-1}}\right) \\
&= \frac{V_o P_o}{\gamma - 1}(1 - (\frac{L_o}{L})^{\gamma-1}) \\
&= U_o(1 - (\frac{L_o}{L})^{\gamma-1})
\end{aligned}
$$

Ved udregningen er benyttet den adiabatiske ligning $V^{\gamma} P = V_o^{\gamma} P_o$, hvor γ er forholdet mellem gassens varmefylde ved konstant tryk og varmefylden ved konstant volumen og P_o er gassens tryk efter krudteksplosionen medens voluminet stadig er V_o. Det er også benyttet, at $V_o/V_L = L_o/L$, hvor L_o er længden af det stykke kanonløb, der ligger bag kuglen før den begynder at bevæge sig, og L er længden af hele kanonløbet. Endelig er $V_o P_o/(\gamma - 1)$ identificeret som den indre energi af gassen efter eksplosionen, U_o.

Det ses, at ildkraften asymptotisk går mod U_o, når kanonløbslængden L bliver stor. Hvilket virker rimeligt.

Kommentar

Jeg forventede ikke nødvendigvis, at de studerende til eksamen skulle fremkomme med min løsning som her skitseret. F.eks. rummer svaret, at ildkraften er proportional med kanonløbets længde, fordi det gælder for det udførte arbejde på kanonkuglen ved konstant tryk bag den på dens vej ud gennem kanonløbet, også en del fysikforståelse til forskel fra f.eks. at mene, at kanonløbslængden alene tjener sigteformål og ingen betydning har for ildkraften. Om tidsskalaen for eksplosionen af krudtet og tidsskalaen for kanonkuglens bevægelse ud gennem kanonrøret i praksis kan adskilles som forudsat i min løsning, ved jeg ikke. Hvis krudtet brænder samtidigt med at kuglen bevæger sig ud gennem kanonrøret behøver den isobare betragtning ikke nødvendigvis være så forkert.

Jeg går ud fra, at der findes våbeneksperter, der kan fortælle, hvor gode eller dårlige tilnærmelser den adiabatiske, den isobare eller andre approksimationer er for kanoner, selvom det ikke er så afgørende for fysikundervisningsformålet med at beskæftige sig med dem. Tværtimod at uafklaretheden om det faktuelle virker forstyrrende på undervisningen, er det min erfaring fra breddemodulkurset på RUC, at det i en undervisning bygget op omkring tidligere eksamensopgaver som denne kan virke som en ansporing, at ikke alt ligger klart. Hvilket ikke skal misforstås derhen, at det er i orden, at læreren er et tågehorn, der overlader alt til de studerende.

Breddeopgaver nr. 12 og 13

Breddeopgaverne nr. 12 og nr. 13 er benyttet i undervisningen i det såkaldte breddekursus på RUCs overbygningsuddannelse i fysik, men de er undtagelsesvist ikke opgaver fra en afholdt eksamen. Opgave nr. 12 lyder:

Hvor langt væk er horisonten? Begrund svaret.

Opgave nr. 13 lyder:

Hvordan afhænger den samlede beskatningsprocent af arbejdsmarkedsbidraget, indkomstskatteprocenten og størrelsen af momsen?

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Horisontens afstand og samlet beskatningsprocent - breddeopgave 12 og 13 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant oktober 2003

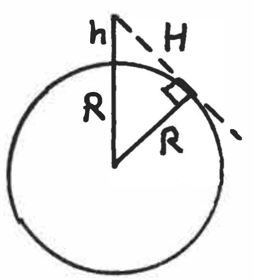
Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

I sidste nummer af KVANT bragte vi opgaverne (nr. 12 og 13):

Hvor langt væk er horisonten? – og

Hvordan afhænger den samlede beskatningsprocent af arbejdsmarkedsbidraget, indkomstskatteprocenten og størrelsen af momsen?

Den første opgave kan regnes ved at betragte figuren nedenfor.



Vi lader H være afstanden til horisonten, R er Jordens radius og h udsigtspunktets højde over jordoverfladen. Ved brug af Pytagoras sætning fås nu:

$$H = \sqrt{(h+R)^2 - R^2} \approx \sqrt{2Rh} \qquad (1)$$

Indsættes $R = 6000$ km og $h = 2$ m i denne horisontformel fås f.eks. at horisonten er ca. 5 km væk. Medens horisonten for $h = 32$ m (dvs. set fra f.eks. toppen af Rundetårn fremfor set fra strandbredden) er 4 gange længere væk. Altså ca. 20 km væk.

I den anden opgave kalder vi procenten, der betales i arbejdsmarkedsbidrag, for a. Dermed er der af en indtægt I beløbet $I(1 - a/100)$ tilbage, når arbejdsmarkedsbidraget er betalt. Med indkomstskatteprocenten i er der herefter beløbet $I(1 - a/100)(1 - i/100)$ tilbage, når indkomstskatten også er betalt. For dette beløb kan der med en momsprocent på m købes varer til en værdi før moms, V, givet ved:

$$I(1 - a/100)(1 - i/100) = V(1 + m/100) \qquad (2)$$

Den samlede beskatningsprocent, s, må per definition være:

$$s = ((I - V)/I)100 \qquad (3)$$

Kombineres de to ligninger fås:

$$s = (a(1 - i/100) + i + m)(100/(100 + m)) \qquad (4)$$

som formlen for den samlede beskatningsprocent som funktion af arbejdsmarkedsbidragsprocent, indkomstskatteprocent og momsprocent. Af formlen kan f.eks. udregnes, at $s = 64$ for $a = 10, i = 50$ og $m = 25$ (og ikke f.eks. $85 = a + i + m$).

Kommentar

Hvis undervisning afsluttes med en krævende eksamen, som det er tilfældet med breddekurset på RUC, er det velkendt, at de studerendes læringsstrategi typisk vil rette sig imod at bestå eksamen på tværs af undervisningsafholdelsen og dens erklærede mål. F.eks. har Arne Jacobsen i samarbejde med forskellige kursusholdere på DTU undersøgt sammenhængen mellem, på den ene side de studerendes præstationer ved de sædvanlige skriftlige kursusprøver, og på den anden side nogle efterfølgende skriftlige prøver alene tilrettelagt med henblik på at undersøge de studerendes forståelser og kompetencer, svarende til undervisernes opfattelser af målene med undervisningen. Resultatet var, at de, der klarede sig dårligt i første omgang også klarede sig dårligt i anden omgang. Men der var også en meget stor gruppe, der klarede sig dårligt ved de kompetenceorienterede prøver i anden omgang, selvom de havde klaret sig godt ved de mere pensumbeherskelsesorienterede prøver i første omgang. Undersøgelsen dokumenterede således, at en meget stor andel af de studerende evnede at lære at bestå de sædvanlige eksaminer uden at leve op til hensigten med undervisningen. Og at det er illusorisk ikke at tage højde for eksaminernes helt afgørende tilbagevirkning på undervisningsudbyttet.

På fysikuddannelsen på RUC har vi – ved de såkaldte dybdekurser – også det, jeg her har kaldt sædvanlige pensumbeherskelsesorienterede skriftlige eksaminer. Men på breddekurset har vi vovet at lægge eftertrykket på afprøvning af kompetencer frem for på pensumbeherskelse ved den skriftlige eksamen. Og vi har indrettet undervisningen, således at der er en tæt sammenhæng mellem eksamen, undervisning og undervisningsmål. Kursets mål annonceres primært at være "at lære at tænke som fysikere", sekundært "at lære noget fysik i bredden". "Pensum" er i højere grad samlingen af opgaver fra tidligere eksaminer end det er en emneliste eller en bogopgivelse, således at lærebogen er et blandt flere mulige hjælpemidler. Og vi har gode erfaringer med både de studerendes udbytte af kurset og deres tilfredshed med det gennem mere end 20 år. Kurset anses for svært, men det har et godt omdømme, fordi vanskelighederne i det regnes for relevante. Og fordi der er god lærerstøtte på de små kursushold med typisk mellem 10 og 20 deltagere.

For at sikre de studerendes oplevelse af både kurset og eksamen som relevant fra starten har det ved hver kursusafholdelse fra starten været afgørende at gå i dialog med deltagerne om, hvad der er kursets sigte. Det er ikke uden videre nemt. Det er selvfølgelig nemt nok at fortælle, at det går ud på at lære dem "at tænke som fysikere". Lige så nemt som det f.eks. er at sige, at et kursus drejer sig om at lære "elektrodynamik". Men hvis det ikke skal lyde som en tom frase, stiller "at tænke som fysikere" som programerklæring større krav til uddybning af, hvad der menes, end f.eks. programerklæringen "elektrodynamik". Uddybningen er da, at de studerende har "lært at tænke som fysikere", når de kan regne eksamensopgaverne. Og at eksamensopgaverne efter bedste evne løbende udarbejdes i overensstemmelse hermed. Hvilket bl.a. er forsøgt tydeliggjort ved kontrasten til mere sædvanlige skriftlige fysikeksamensopgaver gennem et sæt udfoldede og formaliserede opgaver, der modsvarer 12 af de åbent formulerede breddeopgaver. To eksempler på breddeopgaver med modsvarende udfoldninger har været trykt i henholdsvis KVANT nr. 3, oktober 2000, og KVANT nr. 1, april 2001.

De to opgaver, der her er præsenteret som breddemodulopgave 12 og 13 i serien her i KVANT, er som sagt ikke tidligere eksamensopgaver. De er to ud af en halv snes tilsvarende opgaver, som jeg, når det er mig, der har holdt kurset, har konfronteret kursusdeltagerne med den første kursusgang som endnu et bidrag til dialogen om hensigten med kurset (udover sættet af udfoldede opgaver og selve breddeopgavesamlingen). Denne halve snes opgaver er mindre teknisk forudsætningskrævende end de typiske breddeopgaver. Samtidig rækker de emnemæssigt ud over fysik, som de to her, hvor det jo drejer sig om geometri og økonomi. Meningen er for det første at signalere, at kompetencen "at kunne tænke som fysikere" som en afgørende ingrediens involverer evnen til gennem idealisering og formalisering at transformere åbne problemer til matematiske beregningsproblemer. For det andet skal opgaverne signalere, at en sådan matematificeringskompetence, som vil være påkrævet for at bestå eksamen, har et bredere anvendelsesperspektiv end fysik, selvom fysik er et af de bedre øvelsesterræner til at opøve matematificeringskompetencen i.

Magnetiske dipoler og monopoler

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave (nr. 14):

Når et stof med permanente atomare magnetiske dipolmomenter anbringes i feltet mellem polerne i en elektromagnet, forstærker ensretningen af dipolerne feltet. Hvad skulle vi forvente, hvis de atomare magnetiske dipoler skyldtes par af henholdsvis nordpols- og sydpols- magnetiske monopoler og ikke kredsende ladninger? Begrund svaret.

Løsning og kommentarer til opgaven bringes i næste nummer af bladet.

Magnetiske dipoler og monopoler - breddeopgave 14 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant december 2003

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

I sidste nummer af KVANT bragte vi opgaven (nr. 14):

Når et stof med permanente atomare magnetiske dipolmomenter anbringes i feltet mellem polerne i en elektromagnet, forstærker ensretningen af dipolerne feltet. Hvad skulle vi forvente, hvis de atomare magnetiske dipoler skyldtes par af henholdsvis nordpols- og sydpols- magnetiske monopoler og ikke kredsende ladninger? Begrund svaret.

Her er så løsning og kommentarer til opgaven.

Hvis de atomare magnetiske dipoler skyldtes par af henholdsvis nordpols- og sydpols- magnetiske monopoler er situationen analog til den i et dielektrika mellem to kondensatorplader. Her vil det elektriske felts ensretning af de elektriske dipoler i dielektrikaet mellem kondensatorpladerne medføre en negativ resulterende overfladeladning på den side af dielektrikaet, som vender imod den positivt ladede kondensatorplade, og en positiv resulterende overfladeladning på den side af dielektrikaet, som vender imod den negativt ladede kondensatorplade. Det elektriske felt mellem kondensatorpladerne svækkes derfor, når der anbringes et dielektrika imellem dem. På samme måde skulle vi forvente, at magnetfeltet imellem polerne i en elektromagnet ville blive svækket, når vi udfylder mellemrummet imellem polerne med et stof med permanente atomare magnetiske dipolmomenter, hvis dipolmomenterne skyldtes par af magnetiske monopoler. Da magnetfeltet som sagt forstærkes, skyldes de atomare magnetiske dipolmomenter derfor ikke par af magnetiske monopoler.

Selvom de magnetiske fjernfelter fra en kredsende ladning og fra et par af magnetiske monopoler er ens, er nærfelterne det ikke, men tværtimod modsatrettede. Og det er nærfelterne, der er afgørende for, om magnetfeltet inden i det magnetiske materiale er større eller mindre end magnetfeltet imellem elektromagnetens poler før materialet blev skudt ind imellem polerne.

Kommentarer

1. Ifølge en vandreanekdote – som jeg husker den – skulle fysikeren og filosoffen Ernst Mach (1838–1916) være besvimet på grund af symmetribruddet, da han i sin ungdom for første gang ved Ørsteds forsøg med den strømførende ledning og kompasnålen så, at naturen i den helt højre- venstre- symmetriske forsøgsopstilling gjorde forskel på højre og venstre. Ernst Mach er også kendt for med sin antiontologiske opfattelse af naturen så sent som i 1883 ikke at tillægge atomer anden eksistens end at være regnestørrelser.

Nu ved vi, at Ernst Mach ved at anskue magnetisme som en virkning af atomare kredsstrømme kunne være kommet sig hurtigt over sit symmetribrudschok. Enten bevæger de kredsende ladninger i kompasnålen sig imod højre, når de er nærmest den strømførende ledning, eller de bevæger sig imod venstre, når de er nærmest ledningen. Og deraf afhænger, til hvilken side kompasnålen slår ud.

Også breddeopgavens problem med magnetfeltsforstærkningen modsat svækkelsen af det elektriske felt i dielektrika peger imod de atomare kredsstrømme. Og det ser for mig ud til at være en lidt overset undervisningsmæssig pointe i lærebøgerne.

2. Opgaven er som breddeopgave betragtet atypisk. Den handler om en fysikintern problemstilling, som ikke kan formuleres i dagligdags sprog. I modsætning til den typiske breddeopgave, hvor den nøjere præcisering af opgavens problem i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen, er opgaven her derfor allerede formuleret i fysiktermer. Når den alligevel har været brugt som eksamensopgave skyldes det blandt andet et hensyn til efterfølgende at kunne inddrage dens pointe i undervisningen. Og den sikreste måde at tilvejebringe den mulighed på er, at opgaven indgår i samlingen af breddeeksamensopgaver. Som omtalt i tidligere artikler er breddemodulkurset i fysik på RUC tilrettelagt med samlingen af tidligere eksamensopgaver som vigtigste pejlemærke.

Vandstandsstigning og husopvarmning

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje løsningerne til disse to opgaver (nr. 15, fra sommereksamen 1997, og nr. 16, fra vintereksamen 1977):

For at rense en brønd pumpes den tom for vand. Vandtilstrømningen til brønden kan ses at komme fra kilder nær ved bunden. Hvordan stiger vandstanden i brønden efter tømningen, som tiden går? Begrund svaret. og

Ved ankomsten til et koldt hus tændes elvarmepanelerne. Hvordan ændrer temperaturen sig i huset som funktion af tiden? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af bladet.

Vandstandsstigning og husopvarmning - breddeopgave 15 og 16 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant marts 2004

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Vandstandsstigning og husopvarmning

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

I sidste nummer af Kvant bragte vi opgaverne:

15. For at rense en brønd pumpes den tom for vand. Vandtilstrømningen til brønden kan ses at komme fra kilder nær ved bunden. Hvordan stiger vandstanden i brønden efter tømningen, som tiden går? Begrund svaret.

16. Ved ankomsten til et koldt hus tændes elvarmepanelerne. Hvordan ændrer temperaturen sig i huset som funktion af tiden? Begrund svaret.

For at svare på brøndopgaven skal man gøre sig klart, at det – som opgaven er stillet –, på ethvert tidspunkt under vandstigningen er forskellen på trykket i bunden af brønden fra det overliggende brøndvand (plus atmosfæren) og trykket i grundvandet i samme højde uden for brønden, der driver vandtilstrømningen. Hvis højden af grundvandsspejlet over bundniveauet for brønden kaldes H og vandstandshøjden i brønden kaldes h, vil vandtilstrømningen til brønden pr. tidsenhed som mest nærliggende tilnærmelse derfor være proportional med $(H - h)$. Da ændringen af vandstandshøjden pr. tidsenhed (forudsat ens tværsnitsareal op igennem brønden) også er proportional med vandtilstrømningen pr. tidsenhed, er udviklingen af h som funktion af tiden derfor givet ved:

$$\frac{dh}{dt} = k \cdot (H - h);\ h(0) = 0 \qquad (1)$$

med løsningen:

$$h(t) = H(1 - e^{-kt}). \qquad (2)$$

Vandstanden i brønden stiger altså efter tømningen asymptotisk imod det omgivende grundvandsniveau på samme måde som spændingen over en kondensator under opladning stiger imod opladningsspændingen. Den karakteristiske tid, $1/k$, afhænger af brøndens tværsnitsareal, tyngdeaccelerationen, vandets massefylde og vandets viskositet, som er kendte størrelser, men også af geometrien af tilløbet, som vi ikke ved noget om.

Den anden opgave drejer sig om et energiregnskab. Kaldes effekten af elvarmepanelerne i huset for W, husets varmekapacitet for C, temperaturen inde i huset for T_i og temperaturen udenfor for T_u, har vi:

$$W = C\frac{dT_i}{dt} + K(T_i - T_u);\ T_i(0) = T_u \qquad (3)$$

som energiregnskabet: Varmen fra elpanelerne går dels til at varme huset op, dels til at erstatte den varme, der siver ud af huset. Varmeudsivningen er som nærliggende tilnærmelse sat til $K(T_i - T_u)$, hvor K så er en karakteristisk isoleringskonstant for huset. Ligningen er matematisk set magen til (1), og har derfor også en løsning, som ved opladningen af en kondensator:

$$T_i(t) - T_u = \frac{W}{K} \cdot (1 - e^{-(K/C) \cdot t}) \qquad (4)$$

Her er den karakteristiske tid altså givet ved C/K. Det tager længere tid at opvarme et stenhus (stor C) end et træhus (lille C). Da vi kender W, kan vi ved at måle temperaturstigningen i huset som funktion af tiden bestemme C og K for huset.

Kommentar

I efterskriftet fra 1969 til sin meget refererede bog "Videnskabens Revolutioner" karakteriserer Thomas Kuhn fag ved deres såkaldte "faglige matrix" (i første omgang brugte han begrebet "paradigme" til også at karakterisere fag). En afgørende ingrediens i et fags matrix er en række "eksemplarer", konkrete problemløsninger, som fagets udøvere via deres uddannelse er fælles om, og som kan tjene som forbilleder for en større klasse af problemløsninger. "Opladningen af en kondensator" er, som jeg ser det, et sådant eksemplar i faget fysik. Og opgaverne om vandstandsstigning og husopvarmning og løsningen af dem er eksempler på den større klasse af problemløsninger eksemplaret hører sammen med. Sammen med svaret på, hvordan hastigheden af en faldende regndråbe, udsat for luftmodstand, ændrer sig med tiden. Og.... Og....

Fælles for eksemplerne er, at en størrelse (kondensatorens ladning eller spænding, brøndvandstanden, temperaturforskellen mellem inde og ude, dråbens faldhastighed), fra i udgangspunktet at være 0, ændrer sig imod en konstant (kendt eller ukendt) slutværdi. Denne konstante slutværdi er givet ved en eller anden ligevægtsbetingelse, hvor en ændring ikke mere kan finde sted (kondensatorspænding = opladningsspænding, brøndvandstanden på højde med grundvandsspejlet, varmeudsivning fra huset = varmelevering fra elpanelerne, gnidningskraft = tyngdekraft). Endelig er tempoet, hvormed størrelsen ændrer sig, proportional med størrelsens afvigelse fra den konstante slutværdi. Eksemplerne lader sig altså alle matematisk sammenfatte på formen:

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot (S_k - S); \; S(0) = 0 \qquad (5)$$

med løsningen:

$$S(t) = S_k(1 - e^{-kt}) \qquad (6)$$

I Kuhns tankegang til forklaring af "videnskabelige samfund" og "videnskabens revolutioner" er tilegnelsen af det videnskabelige samfunds fælles række af eksemplarer afgørende i uddannelsen til at blive et af samfundsmedlemmerne. Og tilegnelsen drejer sig eksempelvis i tilfældet "opladningen af en kondensator" om mere end at kunne reproducere lærebogsstof i elektricitetslære og om mere end at kunne finde løsningen til (5). En færdiguddannet fysiker er nærmere karakteriseret ved, at eksemplaret er tilegnet til et niveau, så vandstandsstigningen og husopvarmningen kan identificeres som analoge til kondensatoropladningen.

Hvor mange eksemplarer skal der så tilegnes i løbet af en fysikuddannelse ifølge Kuhn? 8? Eller 3500? Det er hans begreb ikke skarpt nok til – eller ment til –, at svare på. Det afgørende for ham er at tydeliggøre, at et videnskabeligt samfund er bærere af en faglig matrix (eller paradigme), som også udgør den kultur, der holder det videnskabelige samfund sammen. Og at den faglige matrix, paradigmet, kulturen ikke alene kan aflæses ud af lærebøgerne og forskningsartiklerne eller emnerne og teorierne, men i høj grad også drejer sig om tillærte anskuelsesmåder.

Jeg ved ikke, hvor rimeligt det er at anvende Kuhns tankegang på videnskabsfag i almindelighed. Kuhn er selv uddannet fysiker. Og næsten alle hans eksempler er fra fysik og kemi. Men i forhold til fysik, synes jeg, at han i høj grad rammer plet. Og blandt andet derfor har jeg også bidraget til udviklingen af "Breddekurset" i fysik på RUC i en retning, hvor eksemplariske opgaver som de to i artiklen her skydes foran pensum. Opgaver er eksemplariske, når arbejdet med dem inviterer til tilegnelsen af et eksemplar, et mønstereksempel, der viser vej til noget alment i faget. I stedet for at tilrettelægge undervisningen som først og fremmest teorigennemgang, hvor tilegnelsen af de Kuhnske eksemplarer sker som en sidevirkning, sigter undervisningen på Breddekurset via opgaverne mere direkte på denne tilegnelse.

Varmeudvikling i stik

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave (nr. 17, fra sommereksamen 2003):

I en stikkontakt, hvortil der er tilsluttet en vandvarmer, sker der en varmeudvikling på grund af en løs forbindelse i stikkontakten. Hvor stor varmeudvikling kan komme på tale? Begrund svaret.

Løsning og kommentar til opgaven bringes i næste nummer af bladet.

Varmeudvikling i stikkontakt - breddeopgave 17 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant marts 2004

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra for-rige nummer samt en ny opgave. I KVANT nr. 1 (2004) blev denne breddeopgave fra RUC (fra sommereksamen 2003) bragt:

17. Varmeudvikling i stikkontakt.
I en stikkontakt, hvortil der er tilsluttet en vandvarmer, sker der en varmeudvikling på grund af en løs forbindelse i stikkontakten. Hvor stor varmeudvikling kan komme på tale? Begrund svaret.

Ved løsning af opgaven kan man til en start gøre sig de to ydertilfælde klart. Både når modstanden i den løse forbindelse i stikkontakten er meget lille, og når den er meget stor, bliver varmeudviklingen i stikkontakten forsvindende. I det sidste tilfælde på grund af den forsvindende strøm. Der vil derfor være en mod-stand mellem 0 og ∞ i den løse forbindelse, der giver den største varmeudvikling, der kan komme på tale i stikkontakten, givet ved netspændingen og modstanden i vandvarmeren.

Kaldes netspændingen V, vandvarmerens modstand og dimensionerede effekt R_v og W_v, modstanden og varmeudviklingen i den løse forbindelse R_s og W_s, og strømstyrken I, har vi:

$$W_s = R_s \cdot I^2 = R_s V^2/(R_v + R_s)^2 \qquad (1)$$

og

$$dW_s/dR_s = V^2 \cdot (R_v + R_s - 2R_s)/(R_v + R_s)^3 = 0 \qquad (2)$$

for $R_s = R_v$, hvorfor den maksimale varmeudvikling i stikkontakten er givet ved:

$$W_{s,max} = R_v \cdot V^2/(R_v + R_v)^2 = \frac{1}{4}V^2/R_v = \frac{1}{4}W_v \qquad (3)$$

Der kan altså, hvis uheldet er ude, komme op til en fjerdedel af vandvarmerens dimensionerede effekt på tale som varmeudviklingen i stikkontakten med den løse forbindelse.

Kommentar

I det sidste nummer af KVANT blev der kommenteret dels en opgave om vandstandsstigning i en brønd efter tømning og dels en opgave om opvarmning af et koldt hus. Begge disse opgaver henter deres motiver fra den ødegård i Sverige, som jeg har en andel i, og som gennem en årrække har været rammen om de matematik- og fysikstuderende og personalet ved IMFUFAs årlige strategiseminar. Opgaven her henter også sit motiv fra ødegården. Blandt de fysikstuderende på RUC er det ofte en selvstændig sport, ud fra kendskabet til ødegården, i breddemodulopgavesamlingen at identificere sådanne "sverigesopgaver". Der findes nok en snes stykker af dem i samlingen.

"Sverigesopgaverne" giver deres beskedne bidrag til at tydeliggøre breddeopgavegenren, som blandt andet indebærer, at opgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger. Dels af motivationshensyn i forhold til de studerende, dels for at illustrere, at fysikkens karakter af teoretisk, forklarende videnskab netop gør den brugbar til at overskue dele af virkeligheden med, og at fysikken ikke er det skolastiske, selvbestemmende system, som den på grund af sit stærkt teoretiske præg ofte forveksles med.

Ved at knytte an til de fælles oplevelser fra ødegården giver "sverigesopgaverne" også deres – igen beskedne – bidrag til, at de studerende kan identificere sig med breddeopgaveplottet. Og en sådan identifikation eller accept fra de studerendes side er selvsagt vigtig. Og på den anden side slet ikke triviel i betragtning af, at breddeopgaverne både er og opleves vanskelige for og af de studerende på grund af deres åbne formuleringer. En manglende identifikation kunne f.eks. medføre studenter- , lærer- eller censorkrav om mere lukkede og præcise opgaveformuleringer med henvisning til de studerendes retsstilling. Desværre med den konsekvens, at hvad der blev vundet i henseende til retsstilling til gengæld ville blive sat over styr i henseende til relevansen af eksamensopgavernes virkning tilbage på udbyttet af undervisningen. Heldigvis har de fleste fysikstuderende på RUC indtil nu ladet sig udfordre af de vanskelige, åbent formulerede opgaver, fordi de har set relevansen i at arbejde med dem.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje denne noget anden type breddeopgave (fra vintereksamen 2002):

18. Relativistisk tyngdepunktsflytning.
En pistolkugle affyres fra en pistol fastgjort på den ene endevæg af en kasse og stoppes i en klods på den anden endevæg. Kassen er anbragt på et vandret, glat underlag. Flytter kassen sig? Begrund svaret.

Max Born opstillede et "Gedankenexperiment", hvor pistolen er erstattet med en lyskilde og klodsen med en absorber. Ved at benytte relationen mellem energi og impuls for elektromagnetisk stråling (som leveres af den elektromagnetiske feltteori) og reglen om bevarelse af tyngdepunktsimpulsen for et isoleret system, kan man nemt nå frem til Einsteins energi-masse-ækvivalensrelation ($E = mc^2$). Eftervis dette.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Relativistisk tyngdepunktsflytning - breddeopgave 18 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant december 2004

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. I sidste nummer af KVANT blev denne breddeopgave fra RUC (fra vintereksamen 2002, nr. 18 i rækken af KVANT) bragt:

18. Relativistisk tyngdepunktsflytning.

En pistolkugle affyres fra en pistol fastgjort på den ene endevæg af en kasse og stoppes i en klods på den anden endevæg. Kassen er anbragt på et vandret, glat underlag. Flytter kassen sig? Begrund svaret.

Max Born opstillede et "Gedankenexperiment", hvor pistolen er erstattet med en lyskilde og klodsen med en absorber. Ved at benytte relationen mellem energi og impuls for elektromagnetisk stråling (som leveres af den elektromagnetiske feltteori) og reglen om bevarelse af tyngdepunktsimpulsen for et isoleret system, kan man nemt nå frem til Einsteins energi-masse-ækvivalensrelation ($E = mc^2$). Eftervis dette.

Løsning

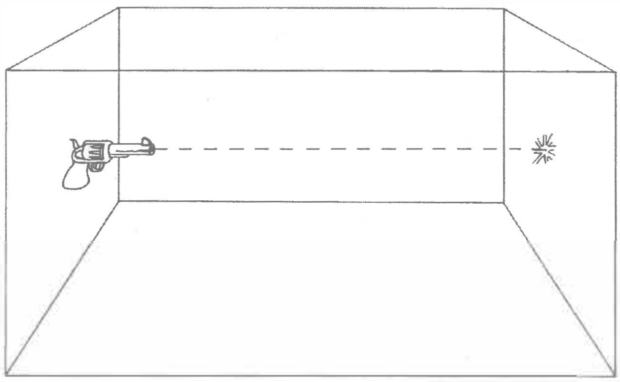
Kaldes pistolkuglens masse for m, kassens masse for M og kassens længde for L, flytter kassen sig afstanden x, givet ved:

$$M \cdot x = m \cdot (L - x) \tag{1}$$

idet tyngdepunktet for systemet kasse + pistolkugle ligger fast, fordi der ikke er ydre kraftpåvirkninger på systemet. I den tid pistolkuglen bevæger sig fra kassens ene endevæg til den anden, flytter kassen sig altså på grund af rekylen fra affyringen af pistolkuglen afstanden:

$$x = m/(M + m) \cdot L \tag{2}$$

Herefter står kassen igen stille på grund af opbremsningen medens pistolkuglen stoppes af klodsen.



Figur 1. Pistolen i kassen. Tegning: Kaj Ove Roland.

I Max Borns Gedankenexperiment (Max Born: Moderne Physik. Berlin 1933. Side 36) udsendes et lyssignal, dvs. elektromagnetisk strålingsenergi, E, fra lyskilden på kassens ene endevæg. Al strålingsenergien, E, absorberes siden i absorberen på kassens anden endevæg. I tidsrummet mellem lysudsendelse og lysabsorption bevæger kassen sig. Da lyssignalets impuls ifølge den elektromagnetiske feltteori er givet ved $P = E/c$, er farten, v, som kassen bevæger sig med, på grund af impulsbevarelsen for systemet kasse + lyssignal givet ved:

$$E/c = M \cdot v \tag{3}$$

Max Born forestiller sig så, at lyskilden og absorberen i kassen er ens apparater, der kan befinde sig i en anspændt eller en udløst tilstand. Ved lysudsendelsen overgår apparatet fra den anspændte tilstand til den udløste tilstand. Og ved absorptionen overgår apparatet fra den udløste tilstand til den anspændte tilstand. Vi kan derfor efter lyssignalets flytning af energi fra den ene endevæg til den anden og kassens samtidige flytning i modsat retning genetablere udgangssituationen inden i kassen, hvis vi inde i kassen foretager en ombytning af de to apparater. Og hvis apparaterne vejer det samme i deres anslåede tilstand og deres udløste tilstand, kan det ske uden at kassen bevæger sig, således at den eneste forskel på situationen før lysudsendelsen og situationen efter ombytningen af apparaterne er, at kassen er flyttet et stykke. Øvelsen kan så gentages et vilkårligt antal gange, hvorved vi indefra kan flytte kassen, som det passer os, uden at kassen er påvirket af ydre kræfter. For at undgå denne absurditet er vi derfor nødt til at regne med, at der i tankeeksperimentet udover energien E også er flyttet en vis masse m fra det ene apparat til det andet. Altså at apparatet i den anspændte tilstand har en masse, der er m større end massen af apparatet i den udløste tilstand. Så vil kassen nemlig flytte sig tilbage svarende til (2), når vi ombytter de to apparater.

Udover således kvalitativt at kunne benyttes til at indse nødvendigheden af, at energioverførslen følges af en masseoverførsel, kan tankeeksperimentet også benyttes til at udregne, hvor stor denne masseoverførsel er. Den tid lyssignalet er om at bevæge sig fra den ene endevæg til den anden er $(L - x)/c$. Da kassen i det samme tidsrum bevæger sig afstanden x med farten v, har vi:

$$(L - x)/c = x/v \tag{4}$$

Da massen m skal have en størrelse, så tyngdepunktet af vores isolerede system ligger fast, skal (1) gælde for den. Sammenholdes (1) og (4) fås:

$$v/c = m/M \tag{5}$$

Sammenholdes dette igen med (3) fås:

$$E = m \cdot c^2, \tag{6}$$

som var det, der ifølge opgaven, skulle eftervises.

Kommentar

Ved besvarelsen af opgaven har jeg i det væsentlige refereret Max Born. Herved er besvarelsen blevet mere udpenslet end det, der kunne forventes af de studerendes eksamensbesvarelser. Opgaven skyldes ikke mig, men min kollega Bent Jørgensen (og altså Max Born). Da jeg, som den på RUC der skulle gennemse det pågældende opgavesæt for Bent forud for eksamen, regnede på opgaven, generede den mig. Einsteins fundamentale energi-masse-ækvivalensrelation fremkommer jo ud fra tilnærmede beregninger. Og hvis der regnes eksakt og relativistisk opstår der tilsyneladende problemer. Så kan det ikke være (6) vi skal nå frem til, da noget af hvileenergien mc^2 ved lysudsendelsen går til kassens rekylenergi. Den eksakte energibevarelsesligning må være:

$$E = mc^2 - Mc^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) \tag{7}$$

Den elektromagnetiske strålingsenergi E er lidt mindre end mc^2. Men indsættes (5) i den eksakte udgave af impulsbevarelsesligningen (3):

$$E/c = \frac{M \cdot v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{8}$$

fås:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{9}$$

altså at E i modstrid med (7) er større end mc^2!!! Et eller andet er ravruskende galt. Hvad? En opgave for læseren inden der læses videre? Modstriden fremkommer ved kombinationen af ligningerne (1), (4), (7) og (8). I hvilken af dem ligger fejlen? Det var min kollega Jeppe Dyre, som ledte mig på sporet af, at fejlen ligger i ligning (1). Max Borns grundantagelse om at tyngdepunktet ikke flytter sig i vores isolerede system er kun rigtig til samme orden af de små størrelser m/M og v/c som ligning (3) og ligning (6) er det. Det helt grundlæggende i den klassiske mekanik, at tyngdepunktet i et hvilende system ikke kan sætte sig i bevægelse uden ydre påvirkninger, gælder ikke relativistisk. I den klassiske mekanik kan det fastholdte tyngdepunktudledes fra impulsbevarelsen for et isoleret system, fordi masserne af systemets bestanddele ikke afhænger af tiden. Men den forudsætning holder ikke relativistisk.

Tværtimod at ligge fast flytter tyngdepunktet sig i Max Borns tankeeksperiment, selvom der ikke finder ydre påvirkninger sted af systemet. Og vi kan også finde ud af hvor meget det flytter sig. Ved kombination af ligning (7) og (8) kan v/c findes som funktion af m/M, hvorefter kassens flytning, x, kan findes som funktion af m/M ved indsætning i (4). Ligning (2) viser, når der regnes eksakt, ikke kassens flytning, men tyngdepunktets flytning i forhold til kassen i modsat retning. Ved at trække tyngdepunktets flytning i forhold til kassen fra kassens flytning i forhold til underlaget kan tyngdepunktets flytning i forhold til underlaget efter mellemregninger findes til at have størrelsen:

$$\Delta x_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \cdot L \tag{10}$$

Retningen af tyngdepunktsflytningen er den samme som den lyssignalet bevæger sig i. Kassens flytning i modsat retning finder jeg til at have størrelsen:

$$x = \frac{m}{m+M} \cdot L - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \cdot L \tag{11}$$

Ved tilsvarende mellemregninger findes den eksakte sammenhæng imellem strålingsenergien, E, og den overførte hvileenergi, mc^2, at være:

$$E = mc^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m}{m+M}\right) \tag{12}$$

Det er en pudsighed, at Max Born i sin påvisning af $E = mc^2$ betjener sig af en egenskab ved tyngdepunktet, som netop ikke gælder relativistisk. Når det går godt, skyldes det at han regner til laveste betydende orden i de små størrelser v/c og m/M. Og at tyngdepunktet, som det ses af (10), faktisk ligger stille til første orden af m/M.

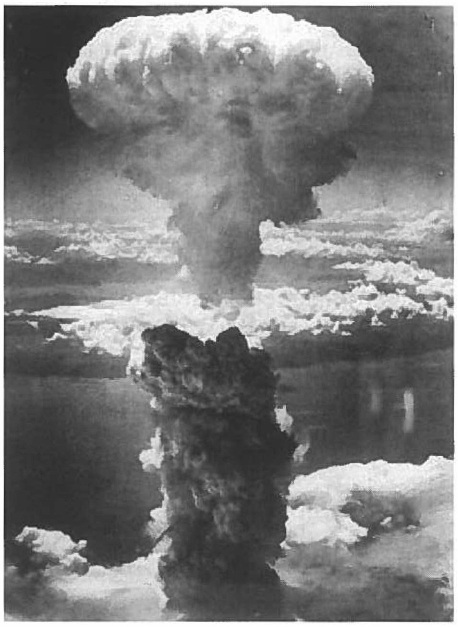
Jeg har ikke hørt andet end at opgaven fungerede tilfredsstillende som eksamensopgave. Og der er åbenbart problemer, der sidenhen kan forfølges i undervisningen. Jeg har også selv stadig problemer med den: Flytter tyngdepunktet afstanden givet ved (10) tilbage til udgangspunktet, hvis der på Born-vis byttes rundt på absorber og emitter efter energioverførslen? Og hvorfor det, hvis det er tilfældet? Hvis det ikke er tilfældet er vi på en ny måde tilbage ved Borns vilkårligt flytbare kasse uden vekselvirkning med omgivelserne. Måske er der blandt KVANTs læsere med et mindre overfladisk forhold til relativitetsteori end mit nogle, der kan rede trådene ud?

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne overveje denne breddeopgave (fra den første breddemoduleksamen sommeren 1976):

19. Havebål og brintbomber

Hvad er forholdet mellem typiske temperaturer i brændende havebål og eksploderende brintbomber? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.



Figur 2. Brintbombe.

Kommentarer til breddeopgave om Relativistisk tyngdepunktsforskydning

Bragt i Kvant maj 2005

af
Ulrik I. Uggerhøj, Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet
og
Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Relativistisk tyngdepunktsforskydning

I december-nummeret af Kvant (nr. 4, 2004) diskuteres den relativistiske tyngdepunktsflytning og der udbedes kommentarer til diskussionen, nedenfor kaldet `disk1`. Jeg har et par punkter der måske kan lette lidt på 'de filtrede tråde'.

Den første ligning (1) i `disk1` gælder kun i grænsen for lave hastigheder (som der muligvis sigtes til via Jeppe Dyres kommentar). Den korrekte version - i første omgang for to legemer med hvilemasse m og M - udledes fra bevarelsen af den relativistiske impuls, $\gamma\beta mc$:

$$\gamma_M M \frac{dx_M}{dt} = \gamma_m m \frac{dx_m}{dt} \tag{2}$$

hvorfra man finder ved at integrere over t idet (M) bevæger sig afstanden x og (m) afstanden $L - x$:

$$\gamma_M M \cdot x = \gamma_m m \cdot (L - x) \tag{3}$$

hvor som vanligt $\gamma_x = 1/\sqrt{1 - v_x^2/c^2}$ og $\beta = v/c$. Her giver γ_m kun mening hvis partiklen med massen m har en hvilemasse.

I tilfældet hvor der udsendes en foton er det den 'endnu ukendte masse' (med Borns ord) m vi gerne vil finde. I dette tilfælde fås

$$\gamma_M M \cdot x = m \cdot (L - x) \tag{4}$$

hvor m er massen for hvilken vi endnu ikke kender sammenhængen med energien.

Kombinerer man ligning (4) med

$$(L - x)/c = x/v \tag{5}$$

som var korrekt i `disk1` fås:

$$v/c = m/\gamma_M M \tag{6}$$

der kan indsættes i impulsligningens relativistiske udgave

$$E/c = \gamma_M M \cdot v \tag{7}$$

hvorved man opnår

$$E = mc^2 \tag{8}$$

som *eksakt* er det ønskede, dvs. den til strålingsenergien ækvivalente masse. Der er ikke anden forskel på denne udledning og den tidligere i `disk1`, ligning (1)-(6), end at γ_M er inkluderet korrekt.

Konklusionen er at en flytning af tyngdepunktet *også relativistisk* kræver en ydre kraft, hvis blot man benytter sig af de 'relativistiske masser' hvor Lorentz faktoren er inkluderet som i ligning (2). Det er altså ikke rigtigt at "Det helt grundlæggende i den klassiske mekanik, at tyngdepunktet i et hvilende system ikke kan sætte sig i bevægelse uden ydre påvirkninger, gælder ikke relativistisk." og fejlen optræder af to årsager: Fotonens energi under udsendelsen omsættes direkte til en forøgelse af kassens hvilemasse og der kombineres relativistiske og ikke-relativistiske ligninger. Hvis der i udgangssituationen antages en totalenergi på $(m+M)c^2$ er det klart at kassen kun kan bevæge sig på bekostning af at fotonenergien ikke kan blive $E = mc^2$. Der skal altså regnes på impulsbevarelse (som er rigtigt for $v/c \ll 1$ i `disk1`, ligning (1)-(6)) og ikke på en antagelse om udgangssituationens energi.

Dette 'Gedankenexperiment' blev oprindeligt publiceret af Einstein i Annalen der Physik **20**, 627 (1906).

Ulrik I. Uggerhøj
Institut for Fysik og Astronomi
Aarhus Universitet

Svar til Ulrik I. Uggerhøj

Af *Jens Højgaard Jensen*

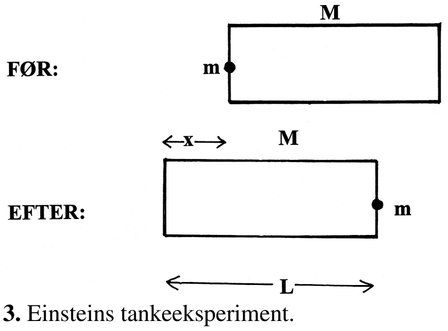
Ulrik I. Uggerhøj (UIU) skal have tak for at have reageret på min opfordring i decembernummeret af KVANT til at kommentere mine – for mig selv parakdoksale - udregninger af tyngdepunktsflytningen i Max Borns tankeekperiment. Jeg vil forsøge at svare, selvom relativitetsteori – som antydet i decembernummeret - ikke er min hjemmebane:

1. Inspireret af UIUs kommentar kan jeg godt se, at der i systemet, hvor den samlede impuls er nul, gælder, "at en flytning af tyngdepunktet også relativistisk kræver en ydre kraft, hvis blot man benyttet sig af 'relativistiske masser". For et system af punktformige partikler er det således definerede tyngdepunkt givet ved:

$$x_{cm} = \frac{\sum (E_i/c^2)x_i}{\sum E_i/c^2}, \tag{9}$$

idet der ved 'relativistiske masser' netop forstås $m_i = E_i/c^2$. Der er altså tale om et tyngdepunkt for systemets energier, E_i. Hvis disse energier er konstante i tiden giver differentation af (9), at dx_{cm}/dt er nul, fordi $p_i = (E_i/c^2)dx_i/dt$ for hver partikel (uanset om den har hvilemasse eller ej) og fordi den samlede impuls $\sum p_i$ er nul. Sætningen om tyngdepunktets bevarelse kan altså med den justerede definition af tyngdepunktet opretholdes for et isoleret system af punktformige partikler, der ikke vekselvirker med hinanden. Den kan også opretholdes, hvis partiklerne vekselvirker punktvis og momentant, idet momentane omlejringer af nogle af energierne E_i på grund af energibevarelsen ikke ændrer x_{cm}, hvis de pågældende energier befinder sig i samme punkt. Men kan sætningen om tyngdepunktets bevarelse opretholdes for lyskvantet og kassen i Max Borns tankeeksperiment? Kassen er jo ikke en punktpartikel.

2. Jeg kendte ikke til Einsteins artikel fra 1906, som UIU gør opmærksom på. Oprindeligt fandt jeg frem til Max Borns fremstilling (i en lærebog) via en henvisning i E.S. Johansens lærebog Mekanisk Fysik I, 2.oplag, 1945, side 361, hvor tankeeksperimentet også gennemgås. Hverken i Max Borns eller i E.S. Johansens lærebog henvises der til Einsteins artikel. Jeg vil herefter omtale tankeeksperimentet som Einsteins.



Figur 3. Einsteins tankeeksperiment.

3. Da UIU og jeg tilsyneladende taler forbi hinanden, vil jeg for præciseringens skyld i korthed repetere Einsteins tankeeksperiment og mine heraf afledte problemer. Essensen i tankeeksperimentet kan, sådan som både Einstein, Max Born og E.S. Johansen fremstiller det, pointeres ved figur 3.

Der er et før og et efter. Før er den stillestående kasse med massen M og længden L forsynet med en ekstra masse m i sin venstre endevæg. Efter er den stillestående kasse rykket stykket x mod venstre og forsynet med den ekstra masse m i sin højre endevæg. Da tyngdepunktet ligger fast, gælder der:

$$Mx = m(L - x) \tag{10}$$

Men hvad nu, hvis det ikke var affyring og absorption af en geværkugle inden i kassen, men udsendelsen og absorptionen af et lyskvant inden i kassen, der havde flyttet kassen? Så må der også være overført noget masse fra den højre endevæg til den venstre endevæg i overensstemmelse med (10), hvis vi går ud fra, at tyngdepunktet ikke kan flytte sig uden påvirkninger udefra. Ligningen viser at *den overflyttede masse m* må være lig med $Mx/(L - x)$.På den anden side kan vi udregne lyskvantets energi til at være $E = Mc^2x/(L - x)$ ved kombination af den klassiske impulsbevarelsesligning $E/c = Mv$ og ligningen $(L - x)/c = x/v$ for tiden det tager lyskvantet at bevæge sig fra den ene endevæg til den anden og tiden det tager kassen at bevæge sig afstanden x. Sammenholdt fås $E = mc^2$, alene ud fra klassisk mekanik og sammenhængen imellem impuls og energi for elektromagnetiske felter.

Men det vi har bevist er kun tilnærmelsesvis Einsteins energi-masse-ækvivalensrelation. Relationen siger, at den overflyttede masse fra den ene endevæg til den anden er ækvivalent med den overflyttede energi fra den ene endevæg til den anden. Og den overflyttede energi er kun tilnærmelsesvis det samme som lyskvantets energi, da energien mc^2 ved emissionen omsættes til E *og* kassens kinetiske energi, ligesom energiforøgelsen af kassens højreside ved absorptionen både kommer fra lyskvantets energi og kassens kinetiske energi. Einstein, Max Born og E.S. Johansen gør da også alle opmærksom på, at deres regninger er approksimative.

4. I UIUs udregning af $E = mc^2$ *eksakt* står m ikke for den på figur 3 overførte masse, men for "den til strålingsenergien ækvivalente masse". Som jeg forstår udregningen, siger den alene, at hvis vi med m for et lyskvant mener proportionalitetskonstanten mellem impuls og hastighed, $p = mc$, så følger det af $p = E/c$, at E er lig mc^2. Og det har ikke så meget med Einsteins tankeeksperiment at gøre.

5. Jeg regner stadig mine eksakte relativistiske regninger i december nummeret på Einsteins kasse for rigtige. Da energien før og efter lyskvantet er $Mc^2 + mc^2$ og under lysets transport fra den ene væg til den anden væg er $E + \gamma_M Mc^2$, må energibevarelsen indebære $E = mc^2 - Mc^2(\gamma_M - 1)$. Og sammenholdes det med impulsbevarelsesligningen $E/c = \gamma_M Mv$ kan $\frac{v}{c}$ findes til at være:

$$v/c = \frac{2m/M + (m/M)^2}{2 + 2m/M + (m/M)^2} \qquad (11)$$

Dette kan herefter, som gjort i december-nummeret, indsættes i $(L - x)/c = x/v$ til bestemmelse af x udtrykt ved m, M og L. Eller det kan indsættes i UIUs ligning (4) med m forstået som E/c^2 (og $E = mc^2 - Mc^2(\gamma_M - 1)$). Da UIUs ligning (4) er en kombination af hans ligninger (5) og (6), er det ikke overraskende, at der i begge tilfælde fås samme resultat, nemlig:

$$x = \frac{m}{m+M}L - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 L \qquad (12)$$

Sammenholdt med x bestemt af ligning (10) viser ligning (12), at tyngdepunktet i Einsteins tankeeksperiment, når der regnes eksakt relativistisk, tværtimod at ligge fast altså flytter sig afstanden:

$$\Delta x_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 L \qquad (13)$$

Udgangspunktet for Einsteins klassiske og approksimative regning på kassen med resultatet $E = mc^2$ var, at kassens tyngdepunkt lå fast svarende til ligning (10), i betragtning af at der ikke er nogen ydre påvirkninger af kassen. Men regnes der i overenstemmelse med Einsteins relativitetsteori finder der altså ironisk nok en tyngdepunktsflytning sted uden ydre påvirkning.

6. Efter at have tænkt yderligere over sagen og læst i A. P. French: Special Relativity, s. 27 (UIUs henvisning) tror jeg imidlertid alligevel ikke, at udregningen modbeviser, at tyngdepunktet i et hvilende system ikke kan sætte sig i bevægelse uden ydre påvirkninger. Einsteins kasse er nemlig principielt set ikke et system, der kan regnes eksakt på. Da begrebet 'stift legeme eksakt set ikke er af denne verden.

Allerede klassisk set må man gå ud fra, at energien, der i Einsteins tankeeksperiment frigives fra den ene endevæg fordeler sig på svingningsenergi for kassen som helhed og energiabsorption i den anden endevæg, og ikke alene omsættes til det sidste, som antaget. Som illustration overlades følgende opgave til læseren:

Et system består af to ens masser af størrelsen $\frac{M}{2}$, der er indbyrdes forbundne med en fjeder. Fra den ene masse affyres en pistolkugle med masse m, som dernæst absorberes i den anden masse. Tiden for passagen af pistolkuglen fra den ene masse til den anden er forsvindende i forhold til systemets svingningstid. Hvordan er fordelingen af krudtenergien på henholdsvis svingningsenergi og varme i den absorberende endevæg som funktion af $\frac{m}{M}$? (uafhængigt af fjederkonstantens størrelse)

Og relativistisk kan man ikke gå ud fra, at bevægelsen af lysafsendelsesvæggen momentant kan forplante sig til bevægelse af den modsatte endevæg. Den anden endevæg kan faktisk tidligst registrere, at lyskvantet blev afsendt, når det når frem til den.

7. For et isoleret system af punktformige partikler, der alene vekselvirker punktvist og momentant, kan den klassiske sætning om tyngdepunktets bevarelse for et isoleret system med samlet impuls 0, som vist, ved hjælp af (9) generaliseres til også at gælde relativistisk. I overensstemmelse hermed er der i French, s. 27 vist en udregning, der erstatter Einsteins kasse med blot dens endevægge, uden indbyrdes kobling. Hvor udregningen både læst klassisk og læst relativistisk giver eksakt overensstemmelse imellem $E = mc^2$ og fastholdelse af tyngdepunktet. Behandlingen i French viser også, at det problematiske ved at operere med begrebet 'stift legeme' er en kendt sag.

Om der helt generelt gælder, at energityngdepunktet ligger fast for upåvirkede systemer med samlet impuls 0, ved jeg ikke.

Havebål og brintbomber - breddeopgave 19 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant marts 2005

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra sidste nummer samt en ny opgave. I sidste nummer af KVANT blev denne breddeopgave fra RUC (fra sommereksamen 1976, nr. 19 i rækken af KVANT) bragt:

19. Havebål og brintbomber.

Hvad er forholdet mellem typiske temperaturer i brændende havebål og eksploderende brintbomber?
Begrund svaret.

Løsning

Ved forbrændingen i et havebål foregår der den kædeproces, at kul- og brintatomer forbinder sig med iltatomer til kultveilte- og vandmolekyler under afgivelse af energi, der blandt andet bruges til at sønderdele det organiske materiale i bålet og sønderdele luftens iltmolekyler, således at der frembringes nye kul- , brint- og iltatomer, der forbinder sig til kultveilte- og vandmolekyler under afgivelse af yderlig energi, der osv.

Ved forbrændingen/eksplosionen i en brintbombe foregår der den kædeproces, at to brintkerner forbinder sig til en heliumkerne under afgivelse af energi, der blandt andet bruges til at overvinde den elektriske frastødning mellem to nye brintkerner, således at de kommer tæt nok på hinanden til at forbinde sig til en heliumkerne under afgivelse af yderligere energi, der osv.

Størrelsesordenen af den energi, der skal til for at rive et kul- eller brintatom ud af organisk materiale eller til at splitte et iltmolekyle, er eV (typisk energi i kemi). Temperaturen, der skal til for at en given andel af molekylerne i havebålet har kinetisk energi af mindst denne størrelsesorden, er proportional hermed.

Størrelsesordenen af den energi, der skal til for at overvinde den elektriske frastødning mellem to brintkerner, er MeV (typisk energi i kernefysik). Temperaturen, der skal til for at en tilsvarende andel af brintkernerne i brintbomben har kinetisk energi af mindst denne størrelsesorden, er proportional hermed.

Da de to proportionalitetskonstanter imellem temperatur og karakteristisk energi er de samme, er forholdet mellem temperaturerne i et havebål og i en brintbombe som forholdet mellem energierne eV og MeV. *Temperaturen i en brintbombe er altså i størrelsesordenen én million gange større end i et havebål.*

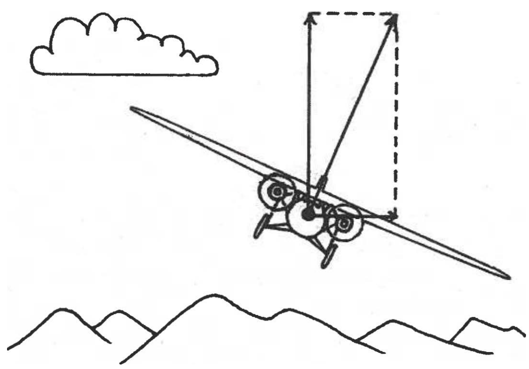
Kommentar

Ifølge K.A.Jensens "Almen kemi II" er typiske temperaturer i kemiske forbrændingsprocesser af størrelsesordenen 10^3 K. Og ifølge Politikens Forlags "Atomenes hvem·hvad·hvor" er antændelsestemperaturen af en brintbombe over 10^8 K. Så på trods af de forsimplede fremstillinger af både forbrændingsprocesserne i et havebål og fusionsprocesserne i en brintbombe i overslagsbesvarelsen her af opgaven, er svaret 10^6 for forholdet mellem de to temperaturer ikke helt skævt.

Opgaven er et eksempel på en eksamensopgave fra det såkaldte "Breddefysikkursus" på RUC, hvor netop bredden udnyttes. Løsningen på opgaven beror jo på at kombinere indsigter fra forskellige fysiske deldiscipliner. Ved undervisning inden for rammerne af en enkelt deldisciplin – og altså ikke på tværs af deldisciplinerne – er der en del af breddeopgaverne, der som denne ville sprænge rammerne. De fleste breddeopgaver bevæger sig dog faktisk inden for fysiske enkeltdiscipliner. Det vigtigste ved breddeopgavegenren er efter min mening ikke så meget det fysiktværfaglige. Selvom det har sin charme. Det vigtigste er de åbne formuleringer af opgaverne. Med deraf følgende krav til fysifiseringer og matematefiseringer. Inden for fysiske enkeltdiscipliner eller på tværs af dem.

20. Vipning af flyvemaskine

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne overveje denne breddeopgave (fra sommereksamen 2000, nr. 20 i rækken her i KVANT):
Hvorfor hælder/vipper en flyvemaskine ved kursændring? Hvordan hænger vipningen og kursændringen sammen? Begrund svarene.



Figur 1. Fly der vipper. Tegning af Kaj Roland.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.
Der er kommet kommentarer til breddeopgaven i december-nummeret om "Relativistisk tyngdepunktsforskydning". En diskussion af disse bringes i næste nummer af KVANT.

Vipning af flyvemaskine- breddeopgave 20 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant maj 2005

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra sidste nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (fra sommereksamen 2000, nr. 20 i rækken i KVANT):

20. Vipning af flyvemaskine

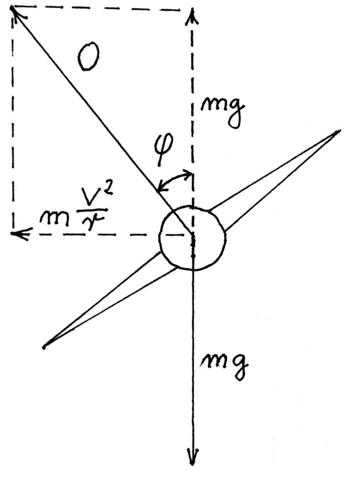
Hvorfor hælder/vipper en flyvemaskine ved kursændring? Hvordan hænger vipningen og kursændringen sammen? Begrund svarene.

Løsning

En ligeud flyvende flyvemaskine holdes oppe af en opdriftkraft vinkelret på planet udspændt af vingerne og flyets krop. Opdriftkraften skyldes trykfordelinger omkring flyet i sammenhæng med luftstrømningerne omkring flyet. Når flyet vipper følges systemet af luftstrømme og fly ad. Derfor vipper opdriftkraften, O, også, således at den får en vandret komposant. Og det er denne vandrette komposant, der sørger for kursændringen. Uden vipning ingen vandret komposant af opdriftkraften og ingen kursændring. Derfor vipper en flyvemaskine ved kursændring.

Forudsættes det, at flyet holder højde under kursændringen, så må opdriftkraftens lodrette komposant være lig med og modsat rettet tyngdekraften. Kaldes flyets fart v, krumningsradius af dets banekurve under kursændring r og flyets masse m, må opdriftkraftens vandrette komposant være lig med $m \cdot v^2/r$. Af figuren ses da, at sammenhængen mellem vipningen (givet ved vinklen ϕ) og kursændringen (udtrykt ved r) er:

$$\tan\phi = v^2/(r \cdot g) \qquad (1)$$



Figur 1. Sammenhængen mellem vipning og kursændring.

Kommentar

Den opgave fra den forudgående undervisning på breddemodulkurset, der i min optik er mest beslægtet med flyvemaskineopgaven, er:

Hvor stor hældning skal en motorvej anlægges med i en kurve? Begrund svaret.

Denne opgave er i mere udfoldede former almindeligt forekommende i mekaniklærebøger. Den har i den åbne formulering her også været stillet ved den første breddemoduleksamen sommeren 1976. En af fordelene ved, at breddemoduleksamen på RUC er uden hjælpemidler, er, at vi ikke er forhindret i også at stille centrale standardopgaver, som vi ville være, hvis lærebøgerne måtte medbringes til eksamen.

Den optimale hældning af en motorvej i en kurve er den, der kan tvinge en bil sikkert rundt i kurven, selvom vejen er isbelagt, dvs. selvom gnidningskraften fra vejen på bilen, parallel med vejbanen og vinkelret på bilens køreretning, er tilnærmelsesvis nul. I dette tilfælde er flyvemaskinens og bilens kursændringer helt analoge fænomener. Den ovenstående figur for involverede kræfter og kraftkomposanter for en flyvemaskine ved kursændring kan overtages for bilen i den isglatte motorvejskurve alene ved at erstatte opdriftkraften O med normalreaktionen N fra vejen på bilen. Og svaret på hvor stor en hældning (udtrykt ved vinklen ϕ) en motorvej skal anlægges med i en kurve (karakteriseret ved kurvens krumningsradius r) er derfor også givet ved ligning (1).

Ved eksamen var det imidlertid kun i 3 ud af 11 af besvarelserne af flyvemaskineopgaven, at der argumenteredes på den analoge måde til den måde, de fleste ville besvare motorvejsopgaven på. Blandt de øvrige besvarelser var mange præget af vanskelige overvejelser over, hvordan et fly bærer sig ad med at vippe, som en (ikke gennemførlig) vej frem mod at besvare spørgsmålet om sammenhængen mellem vipning og kursændring. Der tænkes altså i årsager og deres virkninger. Hvorimod der i min ovenstående og de 3 af besvarelserne tænkes i den lovmæssighed, at cirkelbevægelse og centripetalkraft hænger sammen. Og en sådan lovmæssighedsstyret tankegang er åbenbart mere abstrakt og krævende end en tankegang, der efterforsker mekanismer. Det abstrakte i analogien gjorde det svært for flertallet af de studerende at overføre deres erfaringer fra motorvejsopgaven til flyopgaven. Formentlig ville de f.eks. have haft nemmere ved at overføre erfaringerne til den udvidede motorvejsopgave at bestemme den tværgående gnidningskraft fra vejen på bilen, når bilens hastighed ikke er afstemt efter motorvejshældningen. Selvom denne opgave er mere teknisk besværlig end flyopgaven og kræver en anden slags tegning af indgående kræfter end på figuren, så handler den om fænomener og mekanismer i lige forlængelse af den første motorvejsopgave. Hvis bilen f.eks. kører ind i motorvejskurven med for lav fart vil de fleste jo fornemme, at den vil skride sidelæns ned af vejbanen, hvis ikke dæk og vej griber fat i hinanden, så det forhindres. Man vil fornemme vejgrebet/gnidningskraften som en reaktion på skridningstendensen. I modsætning hertil er der ikke tilsvarende fornemmelser at støtte sig til ved behandling af flyproblemet. Her er man alene overladt til abstrakt fysikertankegang.

Didaktiske overvejelser

Kirsten Ringgaard Jensen har behandlet den pointe, jeg forsøger at skitsere her, i et nyligt speciale fra RUC med titlen “Fysiske forklaringer i undervisning” (IMFUFA tekst nr. 425). Hun gør opmærksom på, at faget fysik betjener sig af to væsensforskellige slags forklaringer. Dels hvad hun, med henvisning til den bredere erkendelsesteoretiske/filosofiske litteratur, kalder *nomologiske forklaringer*. Og dels hvad hun kalder *kausale forklaringer*. Ved en nomologisk forklaring (ordet nomos er fra græsk og betyder regel eller lov) består forklaringen af et fænomen i at redegøre for, hvordan fænomenet er udtryk for gennemsætningen af en overordnet lovmæssighed under de foreliggende omstændigheder. Ved en kausal forklaring (ordet kausal er fra latin og betyder årsagsbestemt) består forklaringen af et fænomen i at redegøre for, hvad i de foreliggende omstændigheder der forårsager fænomenet. Selvom der oftest ved forklaringer i fysik er tale om et miks af de to forklaringstyper, er det didaktisk set vigtigt for fysikundervisere at gøre sig forskellen klar. Og at de går i dialog med deres elever og studerende om forskellen. Fordi kausale forklaringer tilsyneladende er nemmere fordøjelige end nomologiske forklaringer for elever og studerende.

Som illustration af forskellen mellem nomologiske forklaringer og kausale forklaringer benytter KRJ bl.a. den første i denne række af breddeopgaver (i KVANT nr. 1, marts 2000, side 24):

Hvor stor er kraften mellem fod og pedal i forhold til gnidningskraften mellem vej og dæk ved cykling? Begrund svaret.

En nomologisk orienteret måde at besvare denne opgave på kører af et spor, der kunne se sådan ud: En del af den løbende sænkning af cyklistens indre energi går til arbejde på pedalen. Den anden del af sænkningen går til varmeafgivelse fra cyklisten til først og fremmest luften. Delen af sænkningen i cyklistens indre energi, der går til pedalarbejde, må på grund af energibevarelse for cykel, cyklist og omgivelser under et være lig med den ydre genererede energi. (Udover cyklistens direkte opvarmning af omgivelserne). Uanset om denne ydre energi har form af øget energi i den omgivende luft ved overvindelse af luftmodstand, af øget potentiel energi ved kørsel op ad bakke eller af øget kinetisk energi ved acceleration. På den anden side må den ydre genererede energi ifølge mekanikkens arbejdssætning også være lig med gnidningskraftens arbejde på cykel plus cyklist, forudsat der ikke finder energiophobning sted i cyklen. Gnidningskraftens arbejde og pedalkraftens arbejde er altså lige store. Opgaven løses herefter hurtigt ved at sætte pedalkraft gange pedalflytning lig med vejkraft gange cykelflytning som vist i KVANT nr. 1, marts 2000, side 26.

En kausalt orienteret måde at løse opgaven på kører af et spor, der kunne se sådan ud: Først ses på systemet pedal plus forreste tandhjul plus et stykke af kæden. Ved at udnytte, at det samlede kraftmoment på systemet må være nul, udregnes sammenhængen mellem pedalkraft og kædetræk. Ved at udnytte, at den samlede kraft på kædestykket mellem forreste og bagerste tandhjul må være nul, har vi herefter kædetrækket på bagerste tandhjul. Ved at udnytte, at det samlede kraftmoment på systemet baghjul plus det bagerste tandhjul plus et stykke af kæden må være nul, findes sammenhængen mellem kraften fra vejen på baghjulet og kædetrækket. Og dermed sammenhængen mellem vejkraft og pedalkraft.

Det var den første, nomologisk orienterede opgavebesvarelse jeg havde i tankerne, da jeg stillede opgaven til eksamen. Og det er også denne måde jeg har besvaret opgaven på i KVANT. Ved eksamen var der imidlertid ingen af de 11 besvarelser, der fulgte dette spor, styret af energibevarelse. Alle forfulgte med større eller mindre held det andet, kausalt orienterede spor, styret af kausalkæden (undskyld!): Først er der foden, der trykker. Det får så tandhjulet til at dreje. Og det får kæden til at strammes. Hvilket igen får det andet tandhjul og baghjulet til at dreje. Endelig udvirker det gnidningskraften mellem vej og dæk.

For så vidt angår cykelopgaven er den kausalt orienterede løsningsstrategi lige så god som min nomologisk orienterede. Den kausale giver en smule flere mellemregninger end den nomologiske, men er klart gennemførlig. Det er jo imidlertid ikke altid, at et kausalt ræsonnement er gennemførligt, fordi der findes et nomologisk ræsonnement, som er det. F.eks. er det ikke tilfældet i flyopgaven. Hverken jeg eller KRJ drager derfor den slutning af elevers og studerendes større vanskeligheder med nomologiske forklaringer end med kausale forklaringer, at nomologiske forklaringer skal undgås i undervisningen. Tværtimod er demonstrationen af nomologiske forklaringer et tilbud, som specielt faget fysik er særligt leveringsdygtig i. Det er fremfor andre fag først og fremmest i fysik, at der kan sættes fokus på, at det at forstå ikke kun er et spørgsmål om at kende til mekanismer, men også at indse lovbundetheder. Og den indsigt har betydning for såvel elevers og studerendes kognitive udvikling, som for deres omverdensforståelse og deres selvforståelse.

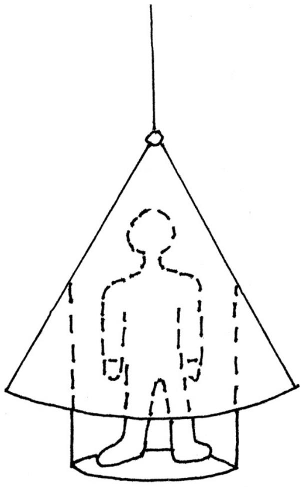
Men det er vigtigt, at såvel underviserne som deres elever eller studerende er opmærksomme på, at det måske også netop er de nomologiske forklaringer, der gør fysik til et svært fag.

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje denne breddeopgave (fra sommereksamen 1997, nr. 21 i rækken i KVANT):

21. Dykkerklokke

I 1628 kæntrede det svenske flagskib Wasa på sin jomfrurejse i Stockholms havn og sank på 30 m's dybde. Inden dets nøjagtige position gik i glemmebogen i ca. 300 år lykkedes det i 1664 at bjerge 53 af skibets kostbare bronzekanoner. Ved bjergningen benyttedes dykkerklokker, der i princippet så ud som antydet på figuren, dvs. som et omvendt træmmerhus i et tov og med et påhægtet ståbrædt under det.

Hvor højt stod vandet i klokken, når den var sænket ned ved siden af vraget? Begrund svaret.



Figur 2. Dykkerklokke.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Dykkerklokke- breddeopgave 21 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant september 2005

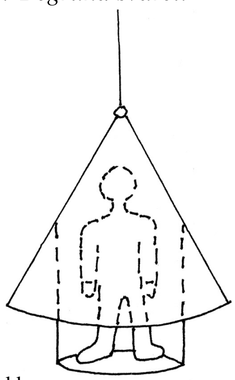
Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra sidste nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (fra sommereksamen 1997, nr. 21 i rækken i KVANT):

21. Dykkerklokke

I 1628 kæntrede det svenske flagskib Wasa på sin jomfrurejse i Stockholms havn og sank på 30 m's dybde. Inden dets nøjagtige position gik i glemmebogen i ca. 300 år lykkedes det i 1664 at bjerge 53 af skibets kostbare bronzekanoner. Ved bjergningen benyttedes dykkerklokker, der i princippet så ud som antydet på figuren, dvs. som et omvendt kræmmerhus i et tov og med et ståbrædt under det.

Hvor højt stod vandet i klokken, når den var sænket ned ved siden af vraget? Begrund svaret.



Figur 1. Dykkerklokke.

Løsning

En vandsøjle på 10 m leverer et tryk på ca. 1 atmosfære. Trykket i 30 m's vanddybde er derfor ca. 4 atmosfærer. Mens trykket ved vandoverfladen jo er ca. 1 atmosfære, altså ca. $1/4$ af trykket ved skibsvraget. Hvis vi antager, at temperaturen af luften i klokken er den samme oppe som nede, betyder det ifølge luftarternes tilstandsligning, at det rumfang luften udfylder i klokken, når den er nede ved vraget, er ca. $1/4$ af klokkens rumfang. Rumfanget af den indesluttede luft i klokken er proportional med afstanden fra vandoverfladen inden i klokken til klokkens spids opløftet til tredje potens. Derfor er højden i klokken, hvori man kan trække vejret ved neddykningen, reduceret til 63% af højden før neddykning, idet $(1/4)^{1/3} \cong 0,63$.

Kommentarer

1. Mere realistisk end at antage isoterm sammentrykning af luften i klokken under neddykningen er det måske at gå ud fra, at sammentrykningen sker adiabatisk, altså uden varmeudveksling med omgivelserne. Så får dykkeren lidt mere plads at ånde i. Benyttes Poisson's ligning for adiabatiske ændringer af ideale luftarter med $C_p/C_v = 7/5$ (luftmolekylerne er altovervejende diatomige) fås forholdet mellem de to rumfang at være $(1/4)^{5/7}$ og højden, som dykkeren kan holde næsen oven vande i, fås følgelig til at være 72% af klokkehøjden, idet $(1/4)^{5/7 \cdot 1/3} \cong 0,72$.

Større betydning, end om sammentrykningen sker isotermt eller adiabatisk, har imidlertid klokkens form. Hvis den var cylinderformet ville højden over vandoverfladen under neddykning udgøre den sammen brøkdel af klokkehøjden som det indesluttede rumfang luft under neddykning udgør af cylinderens rumfang. Dvs. 25% i det isoterme tilfælde og 37% i det adiabatiske ($(1/4)^{5/7} \cong 0,37$). Dykkerne ville altså have haft afgørende mindre manøvrerum i lodret retning i en cylinderformet dykkerklokke end i en kræmmerhusformet og det er vel én af grundene til, at kræmmerhusformen har været foretrukket.

2. Navnet på mit institut på RUC er Institut for studiet af Matematik og Fysik samt deres funktioner i Undervisning, Forskning og Anvendelser (IMFUFA). Udover at instituttet således både beskæftiger sig med faginterne og faganskuende problemer, er det altså også et institut for både matematik og fysik. En ikke sjælden diskussion imellem matematikere og fysikere på instituttet drejer sig om, hvor grænsen går imellem fysikkompetencer og matematikkompetencer. Dykkerklokkeopgaven her er naturligvis klart en fysikopgave. Men hvor meget skulle der egentlig pilles af den for at den ligeså godt kunne regnes for en matematikopgave?

Overvejelser over adiabatiske kontra isoterme processer hører selvfølgelig ikke matematik til. Ved den oprindelige breddemoduleksamen var der i øvrigt heller ikke nogen af de fysikstuderende, der gjorde sig sådanne overvejelser. De regnede alle isotermt. Hvis vi på linie med de fysikstuderende ubegrundet antager, at temperaturen af luften i dykkerklokken er konstant ved neddykningen, kræver løsning af opgaven kombination af følgende tre indsigter: 1) Trykket under en vandsøjle på 10 m er ca. 1 atmosfære. 2) Tryk og rumfang for en indespærret luftmængde varierer omvendt proportionalt, hvis luftens temperatur holdes konstant (Boyles lov). 3) Forholdet mellem rumfangene af to ligedannede tredimensionale legemer er lig med forholdet mellem to tilsvarende lineære udstrækninger i legemerne i tredje potens. Her vil matematikerne så typisk hævde, at kendskab til 1) og 2) og evne til at fremdrage dem til lejligheden forudsætter erhvervet fysikkompetence på universitetsniveau. Der er derfor ikke grund til at forvente, at f.eks. universitetsmatematikstuderende, der ikke har fysik som deres andet fag, skulle kunne løse opgaven. Mens f.eks. jeg typisk vil hævde, at 1) og 2) kan forudsættes som almen viden hos studenter med en matematisk studentereksamen. Og at den store vanskelighed i opgaven nærmere er af anvendt matematisk art. Idet den består i at bevare overblikket ved fremdragelsen og den formelle kombination af 1), 2) og 3) til et svar på opgaven.

Det er oplagt, at kompetencen til at anvende matematik til formaliserende problemløsning er en del af den kompetence, som fysikundervisning tilstræber at udvikle. De fleste af matematikerne på mit institut mener fornuftigvis, at også matematikundervisningen blandt andet bør udvikle formaliserende problemløsningskompetence. Men er realiteten ikke dén, at de udviklede kompetencer fra matematikundervisningen først og fremmest er af ren og ikke anvendt matematisk art, hvis løsningen af dykkerklokkeopgaven er forbeholdt fysikstuderende? Spørger jeg mine matematikkolleger om.

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne breddeopgave (nr. 22 i rækken her i KVANT):

22. Træk i togvogne

Et godstog har 40 ens vogne og et lokomotiv, der vejer 5 gange så meget som en enkelt af vognene. Hvor stor er kraften, hvormed vognene nr. 30 og nr. 31 trækker i hinanden, i forhold til kraften, hvormed lokomotivet trækker i resten af toget? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Træk i togvogne- breddeopgave 22 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant december 2005

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 22 i rækken i KVANT):

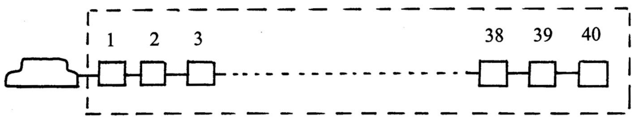
22. Træk i togvogne

Et godstog har 40 ens vogne og et lokomotiv, der vejer 5 gange så meget som en enkelt af vognene. Hvor stor er kraften, hvormed vognene nr. 30 og nr. 31 trækker i hinanden, i forhold til kraften, hvormed lokomotivet trækker i resten af toget? Begrund svaret.

Løsning

Lad os til en start tænke på den situation, at toget har holdt stille og er ved at komme op i fart.

For at finde kraften F_{lok}, hvormed lokomotivet trækker i den første vogn, må vi anvende Newtons 2. lov for et *system* af partikler. Og vi må *vælge* systemet af partikler på en måde, der gør F_{lok} til en ydre kraft. Som det er illustreret på figur 1.

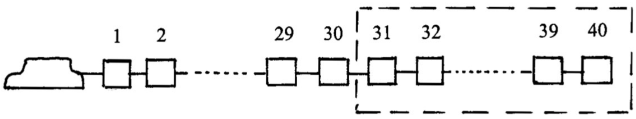


Figur 1. Systemafgrænsning til bestemmelse af lokomotivets træk i toget.

Hvis togets acceleration er a og massen af hver togvogn er m, har vi da ifølge Newtons 2. lov anvendt på systemet bestående af de 40 togvogne:

$$F_{lok} = 40m \cdot a \qquad (1)$$

For at finde kraften F_{30}, hvormed vogn nr. 30 trækker i den resterende del af toget, må vi tilsvarende anvende Newtons 2. lov på et system, der er valgt på en måde, så F_{30} er en ydre kraft på systemet. Et sådant system er illustreret på figur 2.



Figur 2. Systemafgrænsning til bestemmelse af vogn nr. 30's træk i vogn nr. 31.

Da accelerationen af togets 10 bagerste vogne naturligvis er den sammen som accelerationen af toget som helhed, har vi ifølge Newtons 2. lov anvendt på systemet bestående af de 10 bagerste vogne:

$$F_{30} = 10m \cdot a \qquad (2)$$

Svaret på opgaven er altså:

$$F_{30}/F_{lok} = 1/4 \qquad (3)$$

hvis der er tale om et først og fremmest accelererende tog.

Hvis toget kører med konstant fart op ad bakke, skal vi for at svare på opgaven benytte de samme to systemafgrænsninger igen. For hver af de to systemer gælder da, at summen af ydre kræfter på dem må være 0, hvorfor F_{30} må være lig med tyngdekrafkomposanten langs skinnerne af 10 vogne og F_{lok} må være tyngdekraftkomposanten langs skinnerne af 40 vogne. Hvorfor forholdet imellem de to træk også i denne situation er 1/4.

Hvis toget er ligeudkørende med konstant fart under overvindelse af gnidnings- og luftmodstand vil svaret på opgaven tilsvarende være 1/4, hvis gnidnings- og luftmodstanden antages ligeligt fordelt på togvognene.

Kommentarer

1. Gennem årene har jeg ved forskellige lejligheder prøvet at stille opgaven til ikke – fysikere, f.eks. tværfagligt sammensatte forsamlinger af gymnasielærere. Der har da sjældent været vanskeligheder med at få kommunikeret opgavens problem. Og det har heller ikke været svært at få de to typiske spontane bud på svarmuligheder:

1) Trækket fra lokomotivet i resten af toget og trækket fra vogn nr. 30 i vogn nr. 31 er lige store;

2) Trækket fra lokomotivet er 4 gange så stort som vogn 30's træk i vogn 31.

Men usikkerheden på, hvilken af de to svarmuligheder, der er den rigtige, har vist, at opgaven er vanskeligere end den fysikuddannede måske umiddelbart vurderer den til at være.

Men hvori ligger da det vanskelige i opgaven? I forståelsen af Newtons 2. lov? Faktisk ikke. Det er ikke de kendte tilegnelsesvanskeligheder ved at forstå det kontraintuitive begrebsindhold i Newtons bevægelsesligning til forskel fra Aristoteles opfattelse af kraft som forudsætning for opretholdelse af bevægelse, der her er tale om. Tværtimod lader opgaven sig besvare korrekt og nemt ved brug af Aristoteles bevægelsesskema: **kraft** $=$ **masse** $\times$ **hastighed**, idet hastigheden af den bagerste del af toget jo er den samme som hastigheden af toget i sin helhed, hvorfor forholdet imellem de to kræfter må være som forholdet imellem de to masser, dvs. 1/4.

Vanskeligheden i opgaven ligger tilsyneladende i selv at skulle tænke i de nødvendige systemafgrænsninger. At opdele og afgrænse systemer for at kunne analysere dem er ikke en selvindlysende kunnen. Træning heri indgår derfor også som et vigtigt element i mange ingeniøruddannelser. Og besvarelsen af opgaven her består i andet og mere end at anvende Newtons 2. lov. Eller rettere sagt: Anvendelse af Newtons 2. lov kræver mere end at kunne loven.

2. I den traditionelle lærebogsudledning af tyngdepunktssætningen ud fra Newtons 2. lov for en enkelt partikel, altså udledningen af Newtons 2. lov for et system af partikler, foretages der selvsagt en systemafgrænsning. Ved udledningen:

$$
\begin{aligned}
m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= \sum_j F_{ij,j\neq i} + F_{iy} \quad \text{for alle } i \Rightarrow \\
(\sum_i m_i)\frac{d^2x_{cm}}{dt^2} &= \sum_i m_i(\frac{d^2x_{cm}}{dt^2}) \\
&= \sum_i \sum_j F_{ij,j\neq i} + \sum_i F_{iy} \\
&= \sum_i F_{iy} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ligger systemafgrænsningen i, hvad der summeres over i summationerne, og hvilke kræfter, der tilsvarende regnes for henholdsvis systeminterne (F_{ij}) og systemeksterne (F_{iy}). Imidlertid er det langt fra sikkert, at fysikstuderende indforståede med rigtigheden af udledningen (4) er bevidste om, at den tilgrundliggende systemafgrænsning ikke er der fra naturens hånd. Og det er langt fra sikkert, at de kan besvare togopgaven her, fordi de finder udledningen (4) rigtig.

Derimod er det min erfaring, at arbejde med togopgaven (og tilsvarende opgaver) kan få de studerende til at interessere sig for og forstå (4) mere dybtgående end før. I det hele taget er læring jo for de fleste en udpræget induktiv proces, hvor abstrakte og generelle afklaringer fremkommer som ordninger af mængder af konkrete og mere håndfaste erfaringer. Hvorimod fysiklærebøgernes oftest deduktive fremstillinger er måden stoffet er present på for den, der har lært det. Derfor er – modsat fysikundervisningstraditionen på universiteterne – opgaverne i breddekurset på RUC forsøgt skudt foran lærebogen i profileringen af kurset.

3. Max Hansen, Sønderborg, har i et brev til KVANT leveret sin besvarelse af opgave 22. Udover at give det simple svar på opgaven, at trækket mellem vogn 30 og 31 er en fjerdedel af trækket mellem lokomotivet og første vogn, overvejer MH en længere række eventuelt komplicerende forhold. MH skriver blandt andet:

"Luftmodstanden vil ikke være ens for alle vogne. De første vogne vil have større luftmodstand end de sidste vogne på grund af, at luften rives med af toget, således at hastigheden og mængden af den medfølgende luft vil forøges langs toget. De sidste vogne vil være i læ af de første. Den sidste vogn vil derudover have et større tryk på bagsiden, da den medfølgende luft nu bremses op, og trykket ifølge Bernoulli forøges. Det sidste er en ikke ringe effekt, under gunstige forhold kan denne effekt være så stor at den sidste vogn ville følge med toget, selvom den ikke var fastgjort. Er der lang tid mellem, at der kommer tog, vil skinnerne være forurenede af rust og lignende. Det vil betyde, at de første vogne vil have større modstand end de sidste, da snavset vil blive mast væk af de første og efterlade helt blanke skinner til de sidste. Hjulenes rullemodstand og hastighed afgiver en effekt til skinnerne der opvarmer skinnerne efterhånden som toget passerer. Temperaturændringen ændrer skinnernes komplekse E-modul og tabene vil være forskellige foran og bagerst i toget. Det samme vil i nogen grad være tilfældet for hjulene, hvor de forreste kører på koldere skinner end de bagerste og dermed bliver koldere end de bageste. Da togvognene for en stor del er lavet af magnetisk materiale og der er tale om en lang kæde af magnetisk materiale, vil jordens magnetfelt koncentreres i vognene på en sådan måde at vognene vil tiltrække hinanden. Herved bliver trækket i trækkrogen mellem de midterste vogne mindre end det ellers ville have været. Denne virkning vil være størst, når toget kører retning nord syd."

For en jernbaneingeniør må det være afgørende på samme måde som MH så omfattende som muligt at kunne komme i tanke om eventuelt komplicerende forhold. Men vel også at kunne skelne små og store effekter fra hinanden. Umiddelbart vil jeg på linie med MH tro, at virkningerne af de aerodynamiske forskelle ned langs toget, faktisk kan være betydelige. Hvorimod jeg har svært ved at tro , at magnetiseringerne af togvognene skulle have nogen virkning af betydning i opgavesammenhængen. Men jeg vil i øvrigt ikke kommentere indlægget i detaljen. Derimod giver MHs opgavebesvarelse mig anledning til en almen bemærkning om breddeopgavegenren.

Når breddeopgaverne som led i en fysikuddannelse ofte vedrører virkelige, ikke tænkte, problemstillinger hentet uden for fysikken, skyldes det ikke en opfattelse af, at man kan tackle alle mulige problemer alene ved hjælp af fysik, og at ingeniørvidenskab kan reduceres til anvendt fysik. Valget af de ofte tilsyneladende ingeniørdrejede problemer skyldes dels et motiveringshensyn til de studerende, dels at det ønskes illustreret, at fysikkens karakter af teoretisk, forklarende videnskab netop gør den brugbar til at overskue dele af virkeligheden med, og at fysikken ikke er det skolastiske, selvbestemmende system, som den ofte på grund af sit stærkt teoretiske præg ofte forveksles med. Men forståelsen i bund af opgavernes problemstillinger er ikke målet med undervisningen. Opgaverne er et middel til at lære at tænke som fysiker.

23. Darcys lov.

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne breddeopgave (fra sygeeksamen september 1987, nr. 23 i rækken her i KVANT):

I hydrologien beskrives vands strømning i undergrunden ved den såkaldte Darcys lov. Den udsiger, at strømningshastigheden et givet sted er proportional med trykfaldet pr. længdeenhed det pågældende sted. Proportionalitetskonstanten afhænger af, om det f.eks. er ler, sand eller grus, der gennemstrømmes, og den kaldes det pågældende materiales permeabilitet for vand. Permeabiliteten må antages at afhænge af både størrelse, form og sammenpakning af de korn, materialet består af. Hvordan afhænger permeabiliteten af kornstørrelserne i materialer, hvis kornformer og sammenpakningsmåder antages ens? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Darcys lov- breddeopgave 23 med didaktisk kommentar

Bragt i Kvant marts 2006

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 23 i rækken i KVANT):

I hydrologien beskrives vands strømning i undergrunden ved den såkaldte Darcys lov. Den udsiger, at strømningshastigheden et givet sted er proportional med trykfaldet per længdeenhed det pågældende sted. Proportionalitetskonstanten afhænger af, om det f.eks. er ler, sand eller grus, der gennemstrømmes, og den kaldes det pågældende materiales permeabilitet for vand. Permeabiliteten må antages at afhænge af både størrelse, form og sammenpakning af de korn, materialet består af. Hvordan afhænger permeabiliteten af kornstørrelserne i materialer, hvis kornformer og sammenpakningsmåder antages ens? Begrund svaret.

Løsning

Darcys lov kan åbenbart skrives:

$$v = -k \cdot \frac{dP}{dx}, \tag{1}$$

hvor v er strømningshastigheden, $-dP/dx$ er trykfaldet per længdeenhed og k er permeabiliteten. De fysiske størrelser, som k kan tænkes at afhænge af, er vandets viskositet η, vandets massefylde ρ og størrelser, former og sammenpakninger af kornene i materialet. En given fordeling af kornstørrelser, kornformer og deres sammenpakningsmønstre må i princippet kunne beskrives ved en karakteristisk længde d og en dimensionsløs funktion $F(f)$ af en række geometriske forhold f karakteristisk for den pågældende fordeling af størrelser, former og sammenpakninger. Der må derfor gælde:

$$k = d^\alpha \cdot \eta^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot F(f), \tag{2}$$

hvor α, β og γ må vælges således, at højresiden får den rigtige dimension. Hvor en eventuel dimensionsløs talfaktor i den ukendte formel for k er indlemmet i $F(f)$.

Af (1) fremgår det, at k's dimension må være:

$$[k] = [v] \cdot \frac{[dx]}{[dP]} = \frac{L^2T^{-1}}{ML^{-1}T^{-2}} = M^{-1}L^3T. \tag{3}$$

Da [d] = L, $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$ og $[\rho] = ML^{-3}$ er det derfor tvingende, at:

$$M^{-1}L^3T = L^\alpha \cdot M^\beta L^{-\beta}T^{-\beta} \cdot M^\gamma L^{3\gamma}. \tag{4}$$

Ligningen kan kun opfyldes for dimensionen T, hvis $\beta = -1$. Dette taget i betragtning, kan den kun opfyldes for dimensionen M, hvis $\gamma = 0$. Herefter kan den kun opfyldes for dimensionen L, hvis $\alpha = 2$. Hvis Darcys lov kan gøres gældende, er konstanten i den således entydigt givet ved:

$$k = d^2 \cdot \eta^{-1} \cdot F(f) \tag{5}$$

Svaret på opgaven er således, at hvis det geometriske billede af sediment 1 fremgår af det geometriske billede af sediment 2 ved at alle længder er ganget med ε, da er k for sediment 1 ε^2 gange større end k for sediment 2.

Kommentarer

1. Darcys lov, jævnfør ligning (1), fremkommer af Newtons 2. lov anvendt på en infinittesimal kasse med vand og jordpartikler i, hvor vandet dels er påvirket af det varierende tryk fra vandet uden for kassen, dels af vekselvirkningen imellem vandet og jordpartiklerne i

kassen. Idet det dels antages, at det trykfald, der skal til for at sikre accelerationen i en given vandstrømning, er forsvindende i forhold til det trykfald, der skal til for at overvinde vandets gnidningmodstand imod jordpartiklerne, dels antages, at gnidningsmodstanden kan regnes for proportional med transporthastigheden af det strømmende vand. I lærebogen i hydrologi fra DTU, som jeg i sin tid konsulterede forud for formuleringen af opgaven, blev både (1) og (5) præsenteret som rene erfaringslove. Udledninger af dem fra en mere teoretisk ramme, som gjort her, skulle man til speciallitteraturen for at finde.

2. Når jeg har afholdt breddekurset på fysikstudiet på RUC, har jeg tidligt i forløbet fremhævet dimensionsanalyse som et undertiden kraftfuldt redskab til problemløsning i fysik. Pointen hermed har været dobbelt. Dels har jeg gjort det, fordi dimensionsanalyse som sagt kan være et slagkraftigt værktøj for de studerende at have til rådighed. Somme tider – som ved opgaven her – er det endda den eneste mulige vej til problemløsning. En del af eksamensopgaverne gennem årene har tilsvarende alene – eller som en mulighed blandt flere – kunnet løses ved dimensionsanalyse. Men jeg har også fremhævet dimensionsanalysen for i større almindelighed at henlede de studerendes opmærksomhed på de både historiske og filosofiske perspektiver i, at fysikken nu om dage formulerer sig i *størrelsesligninger*.

At symbolerne i fysik repræsenterer *størrelser* kan ses som det større abstraktionsspring nummer tre i udviklingen af brugen af symboler i matematik og fysik: Det første spring fandt sted i forhistorisk tid ved overgangen fra at tale om f.eks. syv får eller syv høns til at tale om syv i al abstrakthed, således at f.eks. syv plus fem gives mening uden henvisning til hverken får eller høns. Det andet spring skete ved udviklingen af algebraen over araberne til Descartes ("*Géometrie*", 1637), hvorefter vi ikke blot har kunnet regne med tal, men også som pladsholdere for vilkårlige tal har kunnet regne med bogstaver. Altså det spring, der har styret måden vore dages matematik udtrykkes på. Endelig kan det tredje abstraktionsspring, modsvarende henvisningen til Descartes som repræsentant for det andet spring, tidsfæstes til Maxwells "Treatise of electricty and magnetism" (1873). Heri introducerer Maxwell begebet en "*fysisk størrelse*" som produktet af et tal og en enhed. Og han gør opmærksom på, at bogstavregningen i fysik kan tolkes på to måder: Bogstaverne kan, som i matematik, opfattes som pladsholdere for tal gældende for et underforstået bestemt valg af enheder. Eller de kan opfattes som pladsholdere for fysiske størrelser. Hvorved han lægger op til den senere forståelse af ligningerne imellem disse størrelser som uafhængige af valgte måleenheder, på samme måde som f.eks. ligheden imellem to længder ikke afhænger af, om de måles i meter eller alen.(Uddybning kan findes i: Jan de Boer, "Symboler og betegnelser i matematikken og fysikken", Fysisk Tidsskrift 86, 1988, No. 2).

Siden Maxwells tid bredte opfattelsen af bogstavregningen i fysik som størrelsesregning sig til hele fysiklitteraturen i løbet af små hundrede år. I megen teknisk litteratur opereres der stadig med algebraiske udtryk, hvor symbolerne står for talværdier og rigtigheden af udtrykkene hænger på brugen af bestemte enheder. Men i fysik er ligningerne nu om dage altså ikke afhængige af valgte enheder. Symbolmanipulationerne handler om produkter af tal og enheder, således at der samtidigt gennemføres parallelle regnestykker for tal og enheder. Hvor kombinationen af tal og enhed refererende til en bestemt fysisk størrelse kan vælges frit så længe produktet af tal og enhed stadig repræsenterer det samme.

I modsætning til uafhængigheden af det specifikke valg af enheder afhænger udseendet af fysikkens ligninger derimod af, hvad der anses for grundstørrelser og hvad der anses for heraf afledte størrelser. Valget af, hvad der regnes for grundstørrelser, er også afgørende for, hvilke dimensionsanalyser, der kan gennemføres.

Breddeopgave 24. Kasserollehåndtag

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1978, nr. 24 i rækken her i KVANT):

Oftest brænder man sig på pander eller kasseroller med metalhåndtag, når man fjerner dem fra ilden. Hvordan afhænger temperaturen af enden af et sådant metalhåndtag af dets længde og tykkelse? Begrund svarene.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kasserollehåndtag – breddeopgave 24 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 24 i rækken i KVANT):

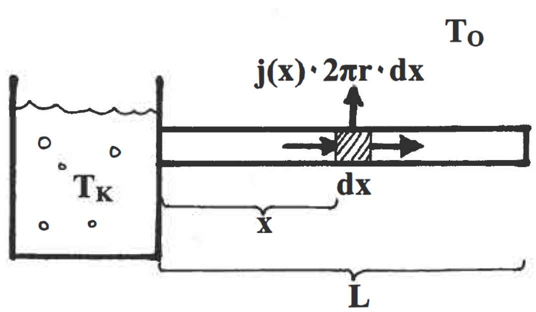
24. Kasserollehåndtag

Oftest brænder man sig på pander eller kasseroller med metalhåndtag, når man fjerner dem fra ilden. Hvordan afhænger temperaturen af enden af et sådant metalhåndtag af dets længde og tykkelse? Begrund svarene.

Løsning

Vi vil se på den stationære situation, hvor metalhåndtaget efter at være blevet varmet op har indstillet sig med en temperaturfordeling, der ikke mere ændrer sig med tiden. Temperaturfordelingen er da styret af varmeledningen i håndtaget og energiafgivelsen til den omgivende luft omkring håndtaget.

Vi kalder temperaturen i kasserollen (typisk vands kogepunkt) for T_K, temperaturen af den omgivende luft for T_O (typisk stuetemperatur) og temperaturen af metalhåndtaget i afstanden x fra kasserollen for $T(x)$. Håndtagets længde kaldes L og dets tværsnitsradius r.



Figur 1. Energistrøm gennem et kasserollehåndtag.

Da energistrømmen ind og summen af de to energistrømme ud af det skraverede område på figur 1 skal være lige store i den stationære situation, har vi:

$$-\kappa \cdot \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_x \cdot A \;=\; -\kappa \cdot \left.\frac{dT(x)}{dx}\right|_{x+dx} \cdot A + j(x)\cdot 2\pi r \cdot dx, \quad (1)$$

hvor κ er varmeledningsevnen for metallet, A metalhåndtagets tværsnitsareal og $j(x)$ er energiafgivelsen til den omgivende luft per tidsenhed per arealenhed fra det skraverede område. A er proportional med r, hvis håndtaget er konstrueret hult af en metalplade af given tykkelse, og proportional med r^2, hvis håndtaget er massivt.

Energiafgivelsen til omgivelserne sker både ved varmeledning, konvektion og varmestråling. Så længe håndtagets absolutte temperatur ikke er forholdsmæssigt meget større end den absolutte stuetemperatur, kan $j(x)$ som den simpleste antagelse regnes for proportional med $T(x)-T_O$. Dvs. $j(x) = K\cdot(T(x)-T_O)$, hvor K er en karakteristisk konstant for energistrømmen per arealenhed fra en varm overflade til luft. Med dette tilnærmede udtryk for $j(x)$ kan ligning (1) omformes til:

$$\frac{d^2(T(x)-T_O)}{dx^2} = 1/\lambda^2 \cdot (T(x)-T_O) \quad (2)$$

med

$$\lambda = \sqrt{(\kappa/K)\cdot A/2\pi r} \quad (3)$$

Af ligning (2) ses det, at λ er den afgørende parameter for udseendet af $T(x) - T_O$ som funktion af x. Og dermed også den afgørende parameter for temperaturen for $x = L$, dvs. for om man brænder sig ved at tage på enden af kasserollehåndtaget. Af ligning (2) ses også, at λ har dimension af en længde. Vi kan derfor roligt gribe om enden af kasserollehåndtaget, hvis L er en størrelsesorden større end den karakteristiske længde givet ved ligning (3). Hvorimod vi må påregne at brænde os, hvis L er mindre end eller af samme størrelsesorden som λ. Hvis håndtaget er hult, således at A er proportional med r, ses det, at tykkelsen af håndtaget er ligegyldig. Hvis håndtaget derimod er massivt, således at A er proportional med r^2, ses det, at f.eks. et dobbelt så tykt håndtag nødvendiggør, at længden gøres $\sqrt{2}$ gange større for at fastholde temperaturen af enden af håndtaget.

Opgaven kan også løses mere udførligt ved at løse ligning (2) med randbetingelserne $T(x)-T_O = T_K-T_O$ for $x = 0$ og $d(T(x)-T_O)/dx = 0$ for $x = L$. Hvor der er set bort fra energiafgivelsen fra håndtagets endeflade som betydningsløs. Løsningen til ligning (2) er da:

$$\begin{aligned} T(x) - T_O & \\ = \quad (T_K - T_O) \cdot \left[\frac{e^{x/\lambda}}{1 + e^{2L/\lambda}} + \frac{e^{-x/\lambda}}{1 + e^{-2L/\lambda}} \right] & \quad (4) \end{aligned}$$

Ved heri at sætte $x = L$ fås:

$$T(L) - T_O = \frac{2 \cdot (T_K - T_O)}{e^{L/\lambda} + e^{-L/\lambda}} \qquad (5)$$

som den mere præcise sammenhæng imellem temperaturen af enden af håndtaget og dets længde. Og via λ også sammenhængen imellem temperaturen af enden af håndtaget og dets tykkelse.

Kommentarer

1. Opgaven hører til i den matematiktunge ende af eksamensopgaverne fra breddekurset på RUC. De fleste af breddeopgaverne er udarbejdet, så de kan løses ved forholdsvis simple regninger. Fordi vi ikke ønsker, at matematiktekniske vanskeligheder kommer til at skygge for det centrale i breddekurset, nemlig træningen i at kunne bringe et problem på en form, så det kan gøres til genstand for matematisk/fysisk bearbejdning. I modsætning til de mere traditionelle dybdekurser i termodynamik, elektrodynamik og kvantemekanik på fysikstudiet på RUC, hvor der formidles på den sædvanlige matematikbårne vis. Alligevel stilles der undertiden altså også opgaver til breddeeksaminerne, der som denne er matematiktunge på niveau med de typiske eksamensopgaver på dybdekurserne. Én af retfærdiggørelserne herfor er, at det hører med til det at kunne fysificere og matematificere at være i stand til at vælge matematikteknisk niveau efter omstændighederne. I det lys er det en fordel, at matematikfordringerne til besvarelserne af breddeopgaverne er så varierede, som tilfældet er.

2. Hvornår er en breddeopgave løst tilfredsstillende? Er ræsonnementerne ovenfor med udgangspunkt i ligningerne (2) og (3) f.eks. en tilfredsstillende besvarelse af opgaven her? Eller er den tilfredsstillende besvarelse ligningerne (3) og (5)? Sådan spørger de studerende på breddekurset naturligvis. Hvor mit svar på spørgsmålet vil være, at begge former for besvarelser kan være mere eller mindre tilfredsstillende afhængig af, hvordan de begrundes. Og at det suveræne svar gør rede for begge måder at svare på.

3. Den matematiske udledning af (4) fra (2) kan være svær. Opstillingen af ligning (1) via figur 1 kan også være en vanskelig proces. Mere overraskende er det måske, at sådan noget som udledningen af ligning (2)+(3) fra ligning (1) for de studerende i begyndelsen af breddekursusforløbet også erfaringsmæssigt indebærer vanskeligheder udover modelleringen af $j(x)$. På det tidspunkt opfatter de studerende for det meste differentiation udelukkende som en operator, der afbilder en funktion ind i en anden funktion. Altså den opfattelse af differentiation, som udledningen af (4) fra (2) kræver. Hvorimod udledningen af (2)+(3) fra (1) jo kræver, at differentiation tænkes som en kvotient af infinitesimale differencer. Og for de studerende virker det i første omgang forvirrende at skulle veksle imellem to repræsentationer af det samme begreb. Som det er almindeligt i fysik. I mindre grad i matematik. Men helt afgørende ved matematisk modellering.

Breddeopgave 25. Stefans konstant

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1987, nr. 25 i rækken her i KVANT):

Stefan-Boltzmanns lov, at energitætheden i hulrumsstråling er lig med en universel konstant gange den absolutte temperatur i fjerde potens, kan udledes ud fra elektrodynamikken og termodynamikken. Størrelsen af den universelle konstant lader sig imidlertid kun forklare ud fra mere grundlæggende naturkonstanter inden for rammerne af kvantemekanikken, hvilket antyder en sammenhæng mellem kvantemekanik og termodynamik. Hvordan er sammenhængen mellem konstanten i Stefan-Boltzmanns lov og mere grundlæggende naturkonstanter? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Stefans konstant – breddeopgave 25 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 25 i rækken i KVANT):

25. Stefans konstant

Stefan-Boltzmanns lov, at energitætheden i hulrumsstråling er lig med en universel konstant gange den absolutte temperatur i fjerde potens, kan udledes ud fra elektrodynamikken og termodynamikken. Størrelsen af den universelle konstant lader sig imidlertid kun forklare ud fra mere grundlæggende naturkonstanter inden for rammerne af kvantemekanikken, hvilket antyder en sammenhæng mellem kvantemekanik og termodynamik. Hvordan er sammenhængen mellem konstanten i Stefan-Boltzmanns lov og mere grundlæggende naturkonstanter? Begrund svaret.

Løsning

Konstanten a i $u = aT^4$ for energitætheden i hulrumsstråling har dimension som $energi/(volumen \times temperatur^4)$, dvs. $ML^{-1}T^{-2}K^{-4}$, hvor M betegner dimensionen *masse*, L dimensionen *længde*, T dimensionen *tid* og K dimensionen *temperatur*. Elektromagnetisk stråling er underlagt den grundlæggende naturkonstant c, lysets hastighed, med dimensionen LT^{-1}. Tilsvarende er termodynamikken styret af størrelsen af Boltzmanns konstant k_B. Den har dimension som *energi/temperatur*, dvs. $ML^2T^{-2}K^{-1}$. Og det ses, at c og k_B ikke lader sig kombinere til noget med dimension som konstanten a.

Hvis vi derimod inddrager kvantemekanikkens grundlæggende naturkonstant, Plancks konstant h, åbner der sig måske en mulighed. Plancks konstant har dimension som *energi × tid*, dvs. ML^2T^{-1}. Så, hvis vi laver ansatsen:

$$a = tal \cdot c^\alpha \cdot k_B^\beta \cdot h^\gamma, \tag{1}$$

skal α, β og γ af dimensionsgrunde tilfredsstille:

$$ML^{-1}T^{-2}K^{-4} = \\ L^\alpha T^{-\alpha} \cdot M^\beta L^{2\beta} T^{-2\beta} K^{-\beta} \cdot M^\gamma L^{2\gamma} T^{-\gamma} \tag{2}$$

for at (1) kan være en brugbar fremstilling af a, og da de fire ligninger med tre ubekendte: $1 = \beta + \gamma$ (for dimensionen M); $-1 = \alpha + 2\beta + 2\gamma$ (for dimensionen L); $-2 = -\alpha - 2\beta - \gamma$ (for dimensionen T) og $-4 = -\beta$ (for dimensionen K) netop har løsningen $\alpha = -3$; $\beta = 4$; $\gamma = -3$, er altså

$$a = tal \cdot k_B^4/(hc)^3 \tag{3}$$

en mulig og den eneste mulige sammenhæng imellem a, c, k_B og h.

Kommentarer

1. Stefan- Boltzmanns lov blev fundet på eksperimentelt grundlag af Stefan i 1879 og teoretisk udledt af Boltzmann i 1884. Boltzmanns udledning tager udgangspunkt i, at strålingstrykket fra elektromagnetisk stråling i et hulrum ifølge elektrodynamikken er lig med en tredjedel af strålingens energitæthed. Ved almindelige termodynamiske beregninger på hulrummet som system og under antagelse af, at energitætheden u kun afhænger af den absolutte temperatur T og ikke af hulrumsvoluminet, findes da: $du/dT = 4u/T$. Hvoraf det kan konkluderes, at u er proportional med T^4. Men ikke hvor stor proportionalitetskonstanten a er. Den lader sig først beregne teoretisk (i overensstemmelse med (3)) ved integration af Plancks strålingslov, da den foreligger.

Plancks strålingslov (indeholdende Plancks konstant) blev som bekendt først og fremmest fremstillet for at undgå "ultravioletkatastrofen" i den daværende teori for hulrumsstråling. Det er tankevækkende, at allerede dimensionsanalyse af Stefan-Boltzmanns lov kunne have vist, at et opbrud måtte være på vej. Stefan – Boltzmanns lov drejer sig om hulrumsstråling uanset form eller størrelse af hulrummene og uanset materialeegenskaberne af deres vægge. Konstanten a måtte derfor regnes for universel. Hvilket også stemte overens med de eksperimentelle erfaringer. Og når a er universel, må den nødvendigvis fremgå ved kombination af andre kendte universelle konstanter, hvor termodynamikkens k_B og elektrodynamikkens c er de eneste, der byder sig til i situationen. Og de lader sig som nævnt ikke kombinere til den rigtige dimension. Fænomenet må derfor nødvendigvis være underlagt en yderligere teori med en yderligere universel naturkonstant, som sammen med k_B og c kan kombineres, således at kombinationen får dimension som a.

Om dimensionsovervejelser som disse har spillet nogen rolle for den faktiske historie, ved jeg ikke. Jeg tvivler. Opfattelsen af fysikkens ligninger som størrelsesligninger med den dertil hørende mulighed for dimensionsanalyse var ikke særlig udbredt heller blandt fysikere i slutningen af 1800-tallet.

2. Opgaven handler om energitætheden i hulrumsstråling. Interessen herfor har historisk knyttet sig til energistrømtætheden ud igennem et hul fra et hulrum (som model for strålingen fra et "sort legeme"). De to fremgår af hinanden ved at gange med lysets hastighed og en geometrisk bestemt talfaktor. Det er mit indtryk, at både formlen for energitætheden i hulrumsstråling og formlen for energistrømtætheden ud fra et hulrum går under betegnelsen Stefan-Boltzmanns lov. Derimod er a ikke det, der normalt kaldes Stefans konstant. Stefans konstant, σ , er proportionalitetskonstanten, når det drejer sig om udstråling. Dens afhængighed af h, k_B og c ses derfor af ligning (3) ved at gange med c.

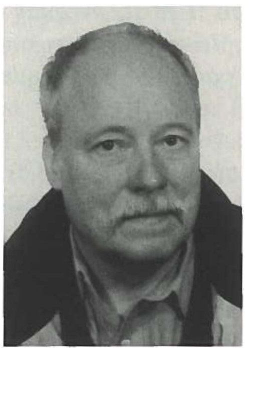
3. Opgaven har tidligere sammen med de øvrige femten eksamensopgaver fra sommereksamen 1987 været trykt med kommentarer i Fysisk Tidsskrift **86**, 1988, No.1.

Breddeopgave 26. Mælkevejens centrum

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2005, nr. 26 i rækken her i KVANT):

Ved at opmåle omløbstiden for de inderste stjerner i Mælkevejen som funktion af afstanden til centret for Mælkevejen har man kunnet konstatere tilstedeværelsen af en tilnærmelsesvis punktformig masse i centrum (et sort hul). Hvordan varierer omløbstiderne med afstanden? Hvordan ville sammenhængen have været, hvis massefordelingen havde været udsmurt i den centrale del af Mælkevejen?

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.



Jens Højgaard Jensen er lektor i fysik ved IMFUFA, RUC. Han er uddannet og har haft midlertidig ansættelse ved Københavns Universitet til 1972. Har siden deltaget i opbygningen af RUC, bl.a. som dekan for det naturvidenskabelige hovedområde og prorektor. Faglig hovedinteresse i de eksakte fags didaktik og videnskabsteori.

Mælkevejens centrum – breddeopgave 26 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra nr. 3, 2006, samt en ny opgave. Opgaven var denne breddeopgave fra RUC (nr. 26 i rækken i KVANT):

26. Mælkevejens centrum

Ved at opmåle omløbstiden for de inderste stjerner i Mælkevejen som funktion af afstanden til centret for Mælkevejen har man kunnet konstatere tilstedeværelsen af en tilnærmelsesvis punktformig masse i centrum (et sort hul). Hvordan varierer omløbstiderne med afstanden? Hvordan ville sammenhængen have været, hvis massefordelingen havde været udsmurt i den centrale del af Mælkevejen?

Løsning

Vi vil for nemheds skyld regne med, at stjernerne tilnærmelsesvis bevæger sig i cirkelbaner. Omløbstiden T for en stjerne med massen m, der i afstanden R kredser omkring den tilnærmelsesvis punktformige masse M, er da givet ved:

$$mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GmM}{R^2} \tag{1}$$

hvor G er gravitationskonstanten. Heraf fås:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} \cdot R^3 \tag{2}$$

Altså en sammenhæng imellem T og R svarende til Keplers tredje lov for planeternes bevægelser omkring Solen.

Hvis derimod massen i den centrale del af Mælkevejen havde været udsmurt med massetætheden ρ, så ville omløbstiden være givet ved:

$$mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = Gm \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{R^2} \tag{3}$$

hvoraf:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho} \tag{4}$$

Altså en omløbstid, der er uafhængig af afstanden til Mælkevejens centrum. I stærk kontrast til (2).

Kommentarer

1. Observationerne af de inderste stjerner i Mælkevejen har først kunnet lade sig gøre inden for de seneste år. Selvom teorien er på breddeopgaveniveau er det derfor af nyere dato, at sammenhængen (2) (fremfor f.eks. (4)) mellem de inderste stjerners omløbstider og deres afstande til Mælkevejens centrum har kunnet konstateres. Og dermed tilstedeværelsen af en stor centralmasse i Mælkevejens centrum, hvis størrelse fremgår af (2).

2. På breddemodulkurset på RUC er der indlagt et mindre forløb i astrofysik. Dets omfang er otte gange tre konfrontationstimer, som leveres af en særlig fagkyndig i astrofysik. Forløbet er der bl.a. af hensyn til de studerende, der skal være gymnasielærere. Og tidligere var nogle af eksamensopgaverne emneorienteret imod astrofysik. I modsætning til de øvrige eksamensopgaver, der altid har været kompetenceorienterede i deres karakter.

Formålet med breddemodulkurset er populært sagt, at de studerende skal trænes i at tænke som en fysiker. Herudover skal kurset styrke deltagernes viden om og forståelse af et bredt udsnit af fysiske fænomener og teorier indenfor klassisk og moderne fysik. I kurset behandles der centrale begreber fra følgende fysikdiscipliner: Klassisk mekanik, hydrodynamik, relativitetsteori, termodynamik og statistisk fysik, elektrodynamik, optik, kvantefysik, samt (summarisk) atom-, kerne-, partikel- og faststoffysik – og endelig altså astrofysik.

Umiddelbart understøtter formålet at træne de studerende i at tænke som fysikere og formålet at orientere de studerende bredt i fysikkens fænomen- og teoriunivers hinanden. Opøvelsen af kompetencen at kunne tænke som en fysiker kræver et øvelsesterræn fra fysikpensummet at træne i. Og kompetenceorienteringen inviterer til at der trækkes linier i det store pensum, så skoven kan ses på trods af de mange træer. Men, hvad angår typen af eksamensopgaver (med al deres styrende virkning), så erfarede vi dengang vi til eksamen stillede emneorienterede astrofysikopgaver parallelt med de øvrige kompetenceorienterede eksamensopgaver, at der må gøres et valg. Selvom det ikke er muligt at skille pensum og kompetencer fra hinanden mere end det er at skille ordforråd og sprogbeherskelse fra hinanden, så gav det anledning til helt forskellige typer opgaver, når fysikkompetencer skulle opfattes som midler til pensumbeherskelse (af astrofysik) som hovedmålet for undervisningen, eller når pensumstilegnelse (af det øvrige pensum) omvendt skulle forstås som et middel under vejs til mere almene fysikkompetencer som hovedmålet for undervisningen.

Da vi ønskede at fastholde breddekurset som et kompetenceorienteret kursus (imod at lære at tænke som en fysiker), og da eksamenopgavetypen er det vigtigste styringsredskab til at sikre den orientering, besluttede vi for en del år siden at tydeliggøre ambitionen med kurset yderligere ved at ophøre med faste astrofysikopgaver. Ligesom der ikke fast er opgaver i kursets øvrige deldiscipliner. Til gengæld har vi gjort os umage med at finde på opgaver, hvor astrofysik (på linie med de andre deldiscipliner) er øvelsesterrænnet for træningen i at tænke som fysiker. Opgaven her er et eksempel herpå.

Breddeopgave 27. Nedbremsning af neutroner

Til næste nummer af KVANT kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra sommereksamen 2006, nr. 27 i rækken her i KVANT:

Lette kerner er bedre til nedbremsning af neutroner i reaktorer end tunge kerner. Hvordan afhænger det maksimale forholdsmæssige energitab af en neutron ved et elastisk sammenstød med en kerne af dennes masse? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Nedbremsning af neutroner – breddeopgave 27 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

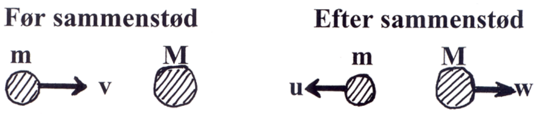
Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 27 i rækken her i KVANT):

27. Nedbremsning af neutroner

Lette kerner er bedre til nedbremsning af neutroner i reaktorer end tunge kerner. Hvordan afhænger det maksimale forholdsmæssige energitab af en neutron ved et elastisk sammenstød med en kerne af dennes masse? Begrund svaret.

Løsning

Det forholdsmæssige energitab for en neutron ved et sammenstød med en kerne med en given masse er størst ved et centralt sammenstød. Vi vil derfor nøjes med at regne i én dimension svarende til figuren:



Da der både er energibevarelse og impulsbevarelse under stødet, gælder der med figurens betegnelser, og idet vi regner klassisk:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mw^2 + \frac{1}{2}mu^2 \tag{1}$$

$$mv = Mw - mu \tag{2}$$

Ligning (1) kan omformes til $(v+u)\cdot(v-u) = (M/m)\cdot w^2$. Sammenholdes det med $v + u = (M/m)\cdot w$ fra (2) fås $v - u = w$. Lægges disse to sidste ligninger sammen fås $2v = (1 + M/m)\cdot w$, hvoraf vi får:

$$\Delta E/E = \frac{\frac{1}{2}Mw^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \tag{3}$$

for det forholdsmæssige energitab $\Delta E/E$.

Resultatet stemmer overens med, at $\Delta E/E$ skal gå imod 0 for m gående imod 0 og for M gående imod 0, og at $\Delta E/E$ skal være 1 for $m = M$.

Kommentarer

1. Umiddelbart skulle vi forvente, at $\Delta E/E$ afhang af de tre inputvariable m, M og v til problemet. Men det ses overraskende nok, at $\Delta E/E$ kun afhænger af forholdet imellem m og M, og ikke af v. Havde vi tænkt dimensionsanalytisk ville overraskelsen imidlertid have været til at forudse: det er ikke muligt at danne en dimensionsløs størrelse af m, M og v, der inddrager v.

Konklusionen ud fra dimensionsovervejelser, at det relative energitab ved nedbremsningen af neutroner ikke kan afhænge af deres fart, er bundet til, at fænomenet kan beskrives klassisk. Det kan det også i det væsentlige. Men sætter vi os for at udregne en relativistisk formel for det relative energitab, kan vi ikke forvente uafhængigheden af v. I det tilfælde må vi nemlig regne med lysets hastighed c som en ekstra inputvariabel for problemet. Af dimensionsgrunde må vi derfor forvente, at $\Delta E/E$ bliver en funktion af v/c udover af M/m.

Med forkortelsen γ_v for $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ og tilsvarende for γ_u og γ_w kan energibevarelsen og impulsbevarelsen for vores centralstød relativistisk skrives:

$$m\gamma_v c^2 + Mc^2 = m\gamma_u c^2 + M\gamma_w c^2 \tag{4}$$

og

$$m\gamma_v v = M\gamma_w w - m\gamma_u u \tag{5}$$

Ved at udtrykke $\gamma_v v$ ved γ_v og tilsvarende for u og w, herefter eliminere γ_u, således at γ_w findes som funktion af γ_v, finder jeg efter en del mellemregninger resultatet:

$$\Delta E/E_{\text{kin}} = \frac{Mc^2(\gamma_w - 1)}{mc^2(\gamma_v - 1)} = \frac{2\alpha(\gamma_v + 1)}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma_v + 1} \tag{6}$$

hvor α er en forkortelse for M/m. Altså som forventet en funktion af M/m $(= \alpha)$ og v/c (via γ_v).

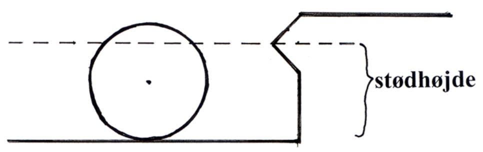
Jeg har valgt at sammenholde ΔE med neutronens kinetiske energi fremfor dens totalenergi for at kunne jævnføre med (3). Ligning (6) ses at stemme overens med (3) for $\gamma_v = 1$, som den skal. Resultatet stemmer – som det klassiske også gjorde – overens med, at $\Delta E/E_{\text{kin}}$ skal gå imod 0 for α gående imod 0 og for α gående imod ∞, og at $\Delta E/E_{\text{kin}}$ skal være 1 for $\alpha = 1$.

2. Den opmærksomme læser tænker måske, at jeg finder dimensionsbetragtninger vigtige i undervisningen på breddekurset, siden jeg i 4 af de sidste 5 artikler i rækken her har været inde på emnet. Det har den opmærksomme læser i givet fald ret i. Jeg regner dimensionsbetragtninger for en vigtig del af det at kunne tænke som en fysiker.

Breddeopgave 28. Billard

Inden næste nummer af KVANT udkommer kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1997, nr. 28 i rækken her i KVANT):

Banderne på et billardbord er konstrueret med en stødhøjde (jvf. figur) for stød mellem baller og bander, således at en rent rullende bevægelse vinkelret mod banden reflekteres i en rent rullende bevægelse bort fra banden. Hvor stor er stødhøjden? Begrund svaret.



Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Billard – breddeopgave 28 med didaktisk kommentar

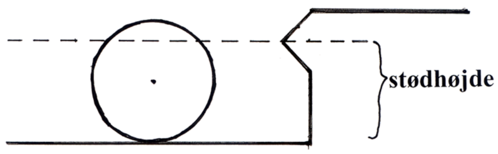
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 28 i rækken her i KVANT):

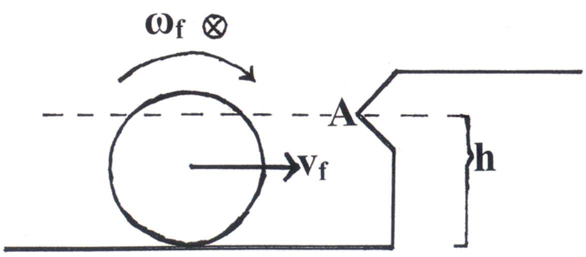
28. Billard

Banderne på et billardbord er konstrueret med en stødhøjde (jvf. figur) for stød mellem baller og bander, således at en rent rullende bevægelse vinkelret mod banden reflekteres i en også rent rullende bevægelse bort fra banden. Hvor stor er stødhøjden? Begrund svaret.



Løsning

Hvis stødhøjden er lille vil ballen ved sammenstødet med banden dreje sig om stødpunktet A (forudsat tilstrækkelig stor statisk gnidningskoefficient imellem bal og bande) og derved løfte sig fra bordet. Hvis stødhøjden er stor, vil ballen kile sig fast mellem bande og bord. Vi vil regne på en mellemsituation, hvor ballen på den ene side ikke løfter sig fra bordet under stødet, og hvor vi på den anden side kan se bort fra gnidningskraftpåvirkningen fra bordet i forhold til kraftpåvirkningen fra banden under stødet. Hvis vi derudover antager, at kun kræfter og ikke kraftmomenter angriber i A under stødet, kan vi benytte, at ballens samlede impulsmoment omkring A er bevaret.



Med de indførte betegnelser på figuren samt M og R for ballens masse og radius er impulsmomentet omkring A, regnet positiv ind i papirets plan, før stødet givet ved:

$$\begin{aligned} L_{A,f} &= \text{spinmoment} + \text{banemoment} \\ &= 2/5 \cdot MR^2 \cdot \omega_f - Mv_f \cdot (h-R) \\ &= Mv_f \cdot (7/5R - h), \end{aligned} \qquad (1)$$

idet der ved det sidste lighedstegn er benyttet, at $R\omega_f = v_f$ ved ren rulning. Tilsvarende er impulsmomentet omkring A, ligeledes regnet positiv ind i papirets plan, efter stødet givet ved:

$$\begin{aligned} L_{Ae} &= -2/5 \cdot MR^2 \cdot \omega_e + Mv_e \cdot (h-R) \\ &= -Mv_e \cdot (7/5R - h), \end{aligned} \qquad (2)$$

idet h forudsættes at have en størrelse, der fører til $R\omega_e = v_e$. Bevarelsen af impulsmomentet omkring stødpunktet for ren rulning reflekteret som ren rulning, $L_{Af} = L_{Ae}$, ses da at kunne opfyldes når og kun når $h = 7/5R$. For alle andre værdier af h har L_{Af} og L_{Ae} modsatte fortegn.

Kommentarer

1. Sammenhængen, at ren rulning er ensbetydende med, at impulsmomentet omkring A er 0, hvis stødhøjden er $7/5R$, gælder ikke kun bevægelse imod og bort fra banden vinkelret på den. Opfattes papirets plan i den ovenstående figur alment for at være planet udspændt af lodret og ballens bevægelsesretning, ses det for $h = 7/5R$, at $L_{Af} = 0$ ved ren rulning også ved skråt indfald imod banden. Impulsmomentbevarelsen under et skråt stød imod banden betyder så, at vi også efter stødet har impulsmomentværdien 0 og ren rulning, hvis det var tilfældet før stødet. Banderne på billardborde er derfor konstrueret med bandehøjden $7/5R$, således at der – med de gjorte antagelser om under et stød at kunne se bort fra gnidningskraftpåvirkningen fra bordet og at kunne regne med, at kun kræfter og ikke kraftmomenter angriber i A – helt alment gælder, at en rent rullende bal vil blive reflekteret fra banden rent rullende. Når der i eksamensopgaven var forudsat vinkelret indfald, var det derfor alene for ikke at gøre den for svær.

Hvis en rent rullende bal ikke blev reflekteret tilnærmelsesvis rent rullende ville det i øvrigt skabe problemer i forhold til vores forventning om, at udfaldsvinklen er lig indfaldsvinklen, dvs. at den normale refleksionslov gælder. Med en utilpasset rotation i forhold til translationen efter et stød, ville der komme gnidningskræfter på tværs af bevægelsesretningen og en deraf følgende parabolsk banekurve indtil betingelsen for ren rulning havde indstillet sig. Den sluttelige bevægelsesretning på bordet efter et stød ville derfor være forskellig fra bevægelsesretningen umiddelbart efter stødet. At refleksionsloven tilnærmelsesvis gælder for sammenhængen imellem bevægelsesretningen før stødet og umiddelbart efter er i øvrigt heller ikke selvfølgeligt, men skyldes tilpasninger af elastiske egenskaber af banderne og deres ruhed for at opnå det.

2. At refleksionsloven i billard således langt fra er udtryk for enkle fysiske principper, skal ikke bortlede opmærksomheden fra, at billardspillet i øvrigt med stor nøjagtighed lader sig beskrive ved den elementære mekaniks grundligninger anvendt på de enklest mulige forestillinger om indgående kræfter og kraftmomenter. Det er der forsøgt redegjort for i artiklen: Jens Højgaard Jensen: "Nogle træk af billardspillets mekanik", Fysisk Tidsskrift nr. 6, side 145-174, 1968. Det samme har Coriolis (ham med kraften) gjort i en hel bog fra 1835. Omfanget af bogen skyldes bl.a., at Coriolis i 1835 (i modsætning til mig i 1968) ikke havde vore dages vektornotation til sin rådighed, men regnede alt i koordinater.

Breddeopgave 29. Spektrallinier

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2000, nr. 29 i rækken her i KVANT):

Forud for Niels Bohrs forklaring på formlen:

$$\frac{1}{\lambda} = K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right); \quad n \text{ og } m \text{ hele tal.} \tag{3}$$

for spektrallinierne for brint i 1913 mente man også at have iagttaget spektrallinier for brint svarende til f.eks. $n = 3/2$ *og* m $=$ *helt tal* $+\frac{1}{2}$. *Det var en del af Niels Bohrs bedrift i 1913, at han kunne forklare disse ekstra spektrallinier som stammende fra helium. Hvordan kunne han det?*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Spektrallinier – breddeopgave 29 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 29 i rækken her i KVANT):

29. Spektrallinier

Forud for Niels Bohrs forklaring på formlen:

$$\frac{1}{\lambda} = K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right); \quad n \text{ og } m \text{ hele tal.} \qquad (1)$$

for spektrallinierne for brint i 1913 mente man også at have iagttaget spektrallinier for brint svarende til f.eks. $n = 3/2$ *og* $m =$ *helt tal* $+\frac{1}{2}$*. Det var en del af Niels Bohrs bedrift i 1913, at han kunne forklare disse ekstra spektrallinier som stammende fra helium. Hvordan kunne han det?*

Løsning

$K \cdot c$, hvor c er lysets hastighed, har dimension af T^{-1}, og afhænger i Bohrs atommodel, som den er konstrueret, udover af Plancks konstant, h, og elektronens masse, m_e, alene af konstanten $k_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Ze^2$ i Coulombs lov. (ε_o er dielektricitetskonstanten i vakuum, e elektronens ladning, og Z atomnummeret, dvs 1 for brint og 2 for helium). Spørgsmålet er, hvordan K for brint, K_H, og K for enkelt ioniseret helium, K_{He}, forholder sig til hinanden i Bohrs atommodel. Ved dimensionsanalyse indses det, at den eneste måde h (med dimensionen ML^2T^{-1}), m_e (med dimensionen M) og k_C (med dimensionen ML^3T^{-2}) kan kombineres på til en størrelse med dimensionen T^{-1} (som $K \cdot c$) er $k_C^2 \cdot m_e/h^3$. Derfor indgår Z i anden potens i K. Og derfor er K_{He} fire gange så stor som K_H.

Heraf følger for heliumspektret ifølge Bohrs atommodel:

$$\begin{aligned} 1/\lambda_{He} &= K_{He}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (2) \\ &= 4K_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \\ &= K_H\left(\frac{1}{(n/2)^2} - \frac{1}{(m/2)^2}\right); \; n \text{ og } m \text{ hele tal.} \end{aligned}$$

Altså, at bølgelængderne for brints spektrallinier ifølge Bohr udgør delmængden af bølgelængderne for heliums spektrallinier svarende til, at både n og m er lige tal. Eller omvendt: Bølgelængderne for heliums spektrallinier fremkommer af formlen for brints spektrallinier ved at tillade n og m at være både hel- og halvtallige. Spektrallinierne i lyset fra en blanding af brint og helium (som fra Solen og andre stjerner) vil altså have bølgelængder givet ved brintformlen med både hel- og halvtallige værdier af n og m.

Kommentarer

1. Når jeg har anført det som en større del af løsningen af opgaven at udregne, at K_{He} er fire gange så stor som K_H, skyldes det, at breddeeksamen foregår uden hjælpemidler. De studerende har altså til eksamen skullet kunne genkalde sig essensen af Bohrs atommodel uden at slå den op i lærebogen. Alternativet til at fastlægge K's afhængighed af Z ved dimensionsanalyse, som gjort her, er at udregne K ud fra Bohrs postulater, som det er gjort for cirkelbevægelser i lærebogen. Og hvor et af postulaterne er impulsmomentkvantiseringen.

2. Dimensionsanalyse var også for Niels Bohr en vigtig rettesnor, da han udviklede sin atommodel. I indledningen til gennembrudsartiklen "On the Constitution of Atoms and Molecules. Part I", Phil. Mag. 26, 1 (1913), varmer han således op til modellen ved at påpege umuligheden af at danne en karakteristisk længde svarende til atomernes størrelse alene ud fra k_C og m_e. Hvorimod man ved inddragelse af h netop opnår en karakteristisk længde af den rigtige størrelsesorden.

3. Et halvt år efter gennembrudsartiklen i Philosophical Magazine præsenterede Niels Bohr sit gennembrud på dansk ved et foredrag i Fysisk Forening, senere trykt i Fysisk Tidskrift: "Om brintspektret". Fysisk Tidskrift 12, 97 (1914). Jeg holder af at uddele denne artikel til studerende, da Bohr netop i denne danske version af historien udtrykker sig usædvanlig afklaret og læsbart. Samtidig er det bemærkelsesværdigt, at impulsmomentkvantiseringen – modsat de fleste lærebogsfremstillinger af Bohrs atommodel – ikke optræder i artiklen. Den teoretiske udledning af Rydbergs konstant, $K_H \cdot c$, udtrykt ved k_C, m_e og h med en værdi i overensstemmelse med det spektroskopisk målte, gennemføres alene ved hjælp af korrespondenskravet: at lysfrekvensen for elektronovergang imellem nabotilstande beregnet ud fra Bohrs model i stor afstand fra atomkernen skal nærme sig elektro-

nens omløbsfrekvens. I artiklen i Philosophical Magazine optræder impulsmomentkvantiseringen som et alternativ til korrespondenskravet som udgangspunkt for den teoretiske udledning af Rydbergs konstant. Baseres Bohrs atommodel på korresspondenskravet, fremstår impulsmomentkvantiseringen som en konsekvens af modellen. Benyttes impulsmomentkvantiseringen som postulat, følger opfyldelsen af korrespondenskravet heraf. For Bohr var korrespondenskravet tydeligvis det faste holdepunkt i 1913.

Breddeopgave 30. Luftmodstand

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sygeeksamen august 1983, nr. 30 i rækken her i KVANT):

Børn og voksne kommer i reglen ikke lige hurtigt ned ad bakke på cykel. Hvem kommer hurtigst ned? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Luftmodstand – breddeopgave 30 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentarer til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 30 i rækken her i KVANT):

30. Luftmodstand

Børn og voksne kommer i reglen ikke lige hurtigt ned ad bakke på cykel. Hvem kommer hurtigst ned? Begrund svaret.

Løsning

Vi vil se på tilfældet, hvor der køres i frigear ned ad bakken. Og vi vil antage luftmodstanden for afgørende større end rullemodstanden mellem dæk og vej. Det er det tilfælde, der kan gøres enkle fysiske overvejelser over. Fra bakketoppen vil farten i frigear vokse indtil den når den konstante frigearsfart, der får den modsatrettede luftmodstand til at være lige så stor som komposanten af tyngdekraften langs med vejen.

Hvis vi med konstant frigearsfart befinder os i den hydrodynamiske grænse, hvor cyklistens potentielle energi løbende umiddelbart omsættes til gnidningsvarme i den omgivende luft, må luftmodstanden, udover af farten, v, cyklistens form, og cyklistens størrelse, r, være bestemt af luftens viskositet, η. Da dimensionerne af v, r og η er henholdsvis LT^{-1}, L og $\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$, og dimensionen af luftmodstanden er MLT^{-2}, må luftmodstanden i denne grænse af dimensionsgrunde derfor være et dimensionsløst tal (afhængig af cyklistens form) gange $r \cdot v \cdot \eta$. Da komposanten af tyngdekraften langs med vejen er proportional med r^3, ses v at være proportional med r^2. Den konstante frigearsfart er således større for den voksne end for barnet.

Hvis vi med konstant frigearsfart befinder os i den modsatte hydrodynamiske grænse, hvor cyklistens potentielle energi løbende umiddelbart omsættes til kinetisk energi i hvirvler og strømninger i et kølvand, må luftmodstanden, udover af farten, v, cyklistens form, og cyklistens størrelse, r, være bestemt af luftens massefylde, ρ. Da dimensionerne af v, r og ρ er henholdsvis LT^{-1}, L og ML^{-3}, og dimensionen af luftmodstanden er MLT^{-2}, må luftmodstanden i denne anden grænse af dimensionsgrunde derfor være et dimensionsløst tal (afhængig af cyklistens form) gange $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$. Da komposanten af tyngdekraften langs med vejen er proportional med r^3, ses v at være proportional med $\sqrt{r}$. Også i denne grænse ses den konstante frigearsfart således at være større for den voksne end for barnet.

I begge hydrodynamiske grænser kommer voksne altså hurtigere end børn ned ad bakke på cykel.

Kommentar

Breddekurset under fysikstudiet på RUC indeholder blandt alle dets andre delemner fra fysik to halve dages undervisning i hydrodynamik. Det levner tid til opstilling af Bernoullis ligning, men ikke til opstilling af Navier-Stokes ligningerne. Derfor behandler jeg i kurset fænomener angående det, som Feynmann i sine Feynmann Lectures kalder vådt vand, ved hjælp af dimensionsbetragtninger som ovenstående: Trækkes en genstand igennem et medie, vil det udførte arbejde i den laminare grænse ved lavt Reynolds tal afsættes direkte som varme i mediet.

Trækkraftens nødvendige størrelse må derfor være bestemt af mediets viskositet udover af genstandens form, lineære udstrækning og fart. Og den må derfor af dimensionsgrunde være et tal gange $r \cdot v \cdot \eta$. Hvorimod det udførte arbejde i den modsatte grænse med turbulent kølvand og højt Reynolds tal umiddelbart afsættes som kinetisk energi i kølvandet, hvorfor trækkraftens nødvendige størrelse her må være bestemt af mediets massefylde udover af genstandens form, lineære udstrækning og fart. Og den må derfor af dimensionsgrunde være et tal gange $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$.

Reynolds tal kan for tilfældet luftmodstand netop udtrykkes ved forholdet imellem de nødvendige trækkræfter i de to grænser:

$$Re = \frac{r^2 \cdot v^2 \cdot \rho}{r \cdot v \cdot \eta} \qquad (1)$$

På kurset gennemgår jeg også strømning igennem rør i henholdsvis den laminare og den turbulente grænse ved hjælp af dimensionsanalyse på tilsvarende måde.

Jeg har søgt i litteraturen efter en lignende håndfast udmelding om den hastighedskvadratiske luftmodstand ved høje hastigheder (stort Reynolds tal). Og fundet en sådan i den populærvidenskabelige bog: Ascher H. Shapiro (1961): “Shape and Flow, The Fluid Dynamics of Drag”. Anchor Books, New York (en af bøgerne fra den amerikanske “Science Study Series”, der for en dels vedkommende – men ikke denne – udkom på dansk som “Gyldendals Kvantebøger” i begyndelsen af 1960’erne). Men typisk er lærebøger i hydrodynamik jo mere forsigtige.

Det er godt nok ρ og ikke η, der er den styrende materialekonstant for energitætheden i kølvandet efter en hurtigt bevæget genstand. Men det er kombinationen af ρ og η i form af Reynolds tal, der afgør, hvor udbredt kølvandet er. Hvorfor luftmodstanden i visse situationer sågar kan falde med øget fart på grund af kølvandsindsnævring. Derfor er den typiske lærebogsfremstilling den korrekte, at luftmodstanden er givet ved $r^2 \cdot v^2 \cdot \rho$ gange en dimensionsløs modstandskoefficient, der for en given form er en entydig funktion af Reynolds tal. Da luftmodstanden, udover af r og v, således afhænger af både ρ og η, er der derfor for mange inputvariable til, at den kan fastlægges ved dimensionsanalyse.

Men i praksis er hastighedskvadratisk luftmodstand det måske mest almindeligt dagligdags forekommende. Og sikkert også det, der er tilfældet ved cykling ned ad bakke. Fordi kølvandets udbredning ved store hastigheder bag ikke strømliniede genstande mere eller mindre må være bestemt alene af genstandenes tværsnit uafhængigt af η. Og så kan luftmodstanden fastlægges som gjort ved dimensionsanalyse.

I en situation, hvor det empirisk er konstateret, at luftmodstanden vokser kvadratisk med hastigheden, kan det omvendt ved dimensionsanalyse indses, at luftmodstanden må være uafhængig af η.

Breddeopgave 31. Springflod

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sygeeksamen september 1987, nr. 31 i rækken her i KVANT):

Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Springflod – breddeopgave 31 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 31 i rækken her i KVANT):

31. Springflod

Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.

Løsning

Løsningen gives i form af en udfoldning af opgaven:

"Masserne af Solen og Månen kaldes for henholdsvis M_S og M_M. Afstanden mellem Solens centrum og Jordens centrum kaldes R_J. Afstanden mellem Jordens centrum og Månens centrum kaldes R_M. Jordens radius kaldes for R og gravitationskonstanten for G.

1. *Hvor stor er Jordens acceleration i dens tilnærmelsesvise cirkelbevægelse omkring Solens centrum?*

I det følgende anskues tingene ud fra et koordinatsystem med nulpunkt i Jordens centrum og akser, der retter sig imod de samme fiksstjerner hele tiden. Set fra dette koordinatsystem medfører Solens tilstedeværelse udover gravitationsfeltet fra den også et "fiktivt" kraftfelt på grund af accelerationen af koordinatsystemet i forhold til et system med nulpunkt i Solen og faste akser i forhold til fiksstjernerne. Summen af de to kraftfelter er det såkaldte tidevandsfelt fra Solen.

2. *Angiv tidevandsfeltet fra Solen langs den rette linie gennem Jorden og Solen.*

3. *Hvor mange gange i døgnet er der flod og ebbe forårsaget af Solen?*

Set fra jordkoordinatsystemet medfører Månens tilstedeværelse udover gravitationsfeltet fra den også et "fiktivt" kraftfelt på grund af rotationen af Jorden og Månen omkring deres fælles tyngdepunkt. Summen af de to kraftfelter er det såkaldte tidevandsfelt fra Månen.

4. *Angiv tidevandsfeltet fra Månen langs den rette linie gennem Jorden og Månen.*

5. *Hvor mange gange i døgnet er der flod og ebbe forårsaget af Månen?*

6. *Indtræffer springflod (sammenfald af flod/ebbe fra Månen og Solen) ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne?* "

Ifølge Newtons 2. lov og Newtons gravitationslov er svaret på 1):

$$\frac{GM_S}{R_J^2}. \tag{1}$$

Svaret på 2) er så, at tidevandsfeltet regnet positivt i retningen bort fra Solen er:

$$\frac{GM_S}{R_J^2} - \frac{GM_S}{(R_J + x)^2}, \tag{2}$$

hvor stedet x på linien er regnet fra Jordens centrum som nulpunkt og positiv i retningen bort fra Solen. I Jordens centrum, dvs. for $x = 0$, ses tidevandsfeltet at være 0. For $x = -R$, dvs. i punktet på jordoverfladen rettet imod Solen, ses det at være rettet imod Solen med størrelsen:

$$\frac{GM_S}{(R_J - R)^2} - \frac{GM_S}{R_J^2}. \tag{3}$$

For $x = R$, dvs. i punktet af jordoverfladen rettet bort fra Solen, ses feltet at være rettet bort fra Solen med størrelsen:

$$\frac{GM_S}{R_J^2} - \frac{GM_S}{(R_J + R)^2}. \tag{4}$$

I begge punkterne svarende til $x = R$ og $x = -R$ har tidevandsfeltet maksimale værdier på jordoverfladen. Tilnærmelsesvis ses de ved rækkeudvikling i begge tilfælde at være:

$$\frac{GM_S}{R_J^2} \cdot \frac{2R}{R_J}. \tag{5}$$

Tidevandsfeltet fra Solen har således to pukler, en vendt imod Solen og en bort fra den, som Jorden drejer sig i en gang i døgnet.

Svaret på spørgsmål 3) er derfor, at der er flod og ebbe forårsaget af Solen to gange i døgnet.

Hvad angår tidevandsfeltet fra Månen gør det ingen forskel i forhold til tidevandsfeltet fra Solen, at det fælles tyngdepunkt ligger så forskelligt i de to situationer. Accelerationen af Jorden i dens bevægelse omkring Månen og Jordens fælles tyngdepunkt er GM_M/R_M^2. Svaret på spørgsmål 4) er derfor:

$$\frac{GM_M}{R_M^2} - \frac{GM_M}{(R_M + x)^2}, \tag{6}$$

og tilsvarende til tidevandsfeltet fra Solen.

Tidevandsfeltet fra Månen har således to pukler, tilnærmelsesvis af størrelsen:

$$\frac{GM_M}{R_M^2} \cdot \frac{2R}{R_M}, \tag{7}$$

én vendt imod Månen og én bort fra den, som Jorden drejer sig i en gang i døgnet. Svaret på spørgsmål 5) er derfor, at der er flod og ebbe forårsaget af Månen to gange i døgnet.

Tidevandsfelterne fra Solen og Månen ses at forstærke hinanden, når Solen, Månen og Jorden ligger på linie. Springflod finder derfor sted lige så vel ved fuldmåne, som ved nymåne. Men ikke ved halvmåne.

Kommentar

1. I KVANT nr. 3, oktober 2000, og i KVANT nr. 1, april 2001 blev løsningerne til to breddeopgaver som her givet i form af udfoldninger af opgaverne. De tre udfoldede og formaliserede opgaver tilhører et sæt på 12, der modsvarer 12 breddeopgaver. Sættet har jeg lavet som et af midlerne til for de fysikstuderende på RUC at tydeliggøre, hvad det er for en slags bolde, der gås efter i en undervisning byggende på de åbent formulerede breddeopgaver. Og kontrasten mellem de åbent formulerede breddeopgaver og deres udfoldede modstykker virker umiddelbart befordrende for forståelsen hos de studerende af plottet for breddekurset. De studerende oplever oftere udfoldning og formalisering end den efterfølgende opgaveløsning som flaskehalsen ved løsningen af breddeopgaver. Men det er også evnen til at takle åbent stillede problemer ved hjælp af fysik, der er flaskehalsen for at opleve fysik som et aktivt og udadrettet tænkeapparat. Derfor ligger der selvfølgelig også en indirekte kritik af fremherskende opgavetyper i fysikundervisningstraditionen gemt i modstillingen, selvom de udfoldede opgaver er på grænsen til at være karikaturer.

2. Indsættes talværdier for G, M_J, M_M og R_M i Newtons gravitationslov findes Jordens træk i Månen at være $1,99 \cdot 10^{20}$ N. Tilsvarende findes Solens træk i Månen ud fra gravitationsloven at være $4,34 \cdot 10^{20}$ N. Solens træk i Månen er altså mere end dobbelt så stort som Jordens træk i Månen. Hvordan kunne det da lade sig gøre for Newton at demonstrere sammenhængen imellem æblets fald fra træet og Månens omløbstid om Jorden ved at regne på Månen og Jorden som et isoleret system uden Solens tilstedeværelse? Jo, det er, fordi konsekvensen af Solens tilstedeværelse udover gravitationstrækket fra den også er det "fiktive" kraftfelt i jord-måne systemet, når Solen svinger det omkring sig. Og at det således resulterende tidevandsfelt på Månen inden for en nøjagtighed på 1 % kan negligeres i forhold til Jordens træk, da dets størrelse er ca. $\frac{2R_M}{R_J}$ gange Solens træk i Månen og $\frac{2R_M}{R_J} = 0,005$.

Denne historie er for mig et godt eksempel på, hvad jeg i andre sammenhænge (se f.eks. artiklerne fra min hånd i Naturkampen nr. 18, december 1980, og GAMMA 72 fra 1988, begge med overskriften "Matematiske modeller – vejledning eller vildledning?") har kaldt "teoretisk kontrol" af en matematisk model.

Berettigelsen af modelberegningen af Månens omløbstid om Jorden, hvor Jorden og Månen ved beregningen regnes for et isoleret system, kan, som gjort, kontrolleres til at være i orden til andet betydende ciffer ved hjælp af den udvidede model, hvor Solen medtænkes og et koordinatsystem med Solens centrum som nulpunkt og akser, der retter sig imod de samme fiksstjerner hele tiden, regnes for et inertialsystem. Fejlen på fejlvurderingen, der herved begås ved ikke at tage højde for gravitationen fra mælkevejen og at sol-koordinatsystemet er accelereret i forhold til mælkevejens centrum, kan vurderes på tilsvarende måde. Osv. Og dette kinesiske æskesystem, hvor de mere omfattende modeller kan bruges til at kontrollere de mindre omfattende modeller med, kan administreres gennemsigtigt, fordi hele spillet er underlagt Newtonsk mekanik som fælles universel ramme. Teoriafledte matematiske modeller, som der her er tale om, kan gøres til genstand for teoretisk kontrol. Det er det, jeg synes vurderingen af den korrigerende indflydelse fra de forskellige tidevandsfelter er et godt eksempel på.

Teoriafledte matematiske modeller kan selvfølgelig udover teoretisk kontrol også underlægges empirisk kontrol ved direkte konfrontation med måledata. I modsætning hertil kan ad hoc matematiske modeller, hvor der tages udgangspunkt – ikke i en teori og tillempningen af den til sammenhængen – men direkte i en foreliggende kontekst for at sammenfatte den i kompakt matematisk sprog, alene underlægges empirisk kontrol. Betydningen af forskellen ligger ikke i, at teoriafledte matematiske modeller nødvendigvis er mere troværdige end ad hoc matematiske modeller. Troværdigheden afhænger jo af de gjorte idealiseringer. Men det, at idealiseringerne kan kontrolleres teoretisk, gør teoriafledte matematiske modeller tilgængelige for offentlig kritik og kontrol (fra uafhængige eksperter). Hvorimod kritik af ad hoc modeller kræver adgang til data. Og denne forskel er det vigtigt at have blik for i betragtning af den omfattende samfundsmæssige brug af matematiske modelberegninger, hvor ensartet form (matematik) fejlagtigt tages til indtægt for ensartet slags erkendelsesindhold.

Breddeopgave 32. Ohms lov

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2000, nr. 32 i rækken her i KVANT):

Hvad er modstanden for en elektrisk strøm fra indersiden til ydersiden af en hul metalkugle? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Ohms lov – breddeopgave 32 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 32 i rækken her i KVANT):

32. Ohms lov

Hvad er modstanden for en elektrisk strøm fra indersiden til ydersiden af en hul metalkugle? Begrund svaret.

Løsning

Ifølge Ohms lov på differentiel form,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \tag{1}$$

gælder for den strømførende kugle:

$$E(r) = \rho \cdot j(r), \tag{2}$$

hvor $E(r)$ er størrelsen af det radialt rettede elektriske felt i afstanden r fra kuglens centrum, $j(r)$ er den radialt rettede ladningsstrømtæthed i afstanden r, og ρ er metallets resistivitet.

Da der ikke hobes ladning op i metalkuglen må den elektriske strøm, I, være den samme igennem alle kuglens kugleskaller. Derfor er:

$$4\pi r^2 \cdot j(r) = I \tag{3}$$

for alle r.

Spændingsforskellen, U, imellem indersiden og ydersiden af kuglen er givet ved integralet af $E(r)$ fra indersiden til ydersiden. Ved at indsætte $j(r)$ fra (3) i (2) og udføre integrationen fås:

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_i}^{r_y} E(r) \cdot dr \\ &= \int_{r_i}^{r_y} \frac{\rho \cdot I}{4\pi r^2} \cdot dr \\ &= \frac{\rho I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_y}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

hvor r_i er indersidens radius og r_y er ydersidens radius. Af ligningen ses modstanden for en elektrisk strøm fra indersiden til ydersiden af metalkuglen derfor at være:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_y}\right) \tag{5}$$

Kommentar

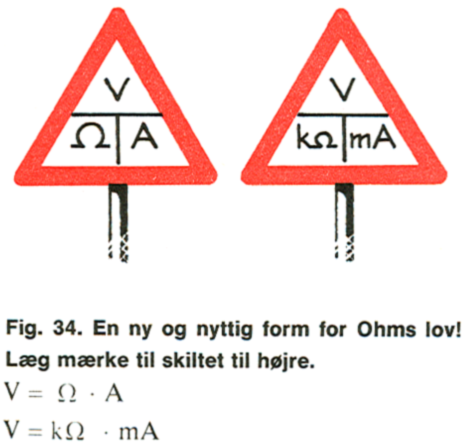
Med et lidt mindre grundlæggende udgangspunkt fås en lidt nemmere løsning af opgaven ved at opfatte kuglen som en række infinitesimale modstande i serie. Da kugleskallen imellem r og $r + dr$ har tykkelsen dr og tværsnitsarealet $4\pi r^2$ er dens modstandsbidrag givet ved:

$$dR = \rho \cdot dr/(4\pi r^2) \tag{6}$$

Den samlede modstand fås da ved at integrere dR fra r_i til r_y.

Den anførte løsning er mere grundlæggende end denne udregning ved blandt andet at repetere sammenhængen imellem elektrisk felt og spændingsforskel. Men den giver mig også anledning til en didaktisk kommentar. For hvad er det egentlig opgaven handler om? Er det Ohms lov?

I folkeskolen præsenteres Ohms lov således:



Figur 1. Advarslstavle med Ohms lov. Figuren er hentet fra "Fysik og kemi for 9. klasse. Grundbog", Andersen, I & Norbøll, K.W. (1979). P.Haase & Søns Forlag, København, side 20.

Advarselstrekanten fungerer som hjælpemiddel til at løse opgaver, hvor enten strømstyrke, spænding eller modstand kan findes ved at holde hånden over den ukendte størrelse og således se, hvorvidt de to kendte størrelser enten skal multipliceres eller divideres for at finde den ukendte.

I gymnasiet præsenteres Ohms lov algebraisk:

$$U = R \cdot I, \tag{7}$$

idet der gås ud fra, at eleverne her – i modsætning til i folkeskolen – kan forstå at regne med bogstaver.

Medens Ohms lov på universitetet altså blandt andet dukker op som en identitet imellem to vektorfelter som angivet i ligning (1).

På alle tre niveauer er der i sammenhæng med arbejde med Ohms lov forskellige læringsmæssige udfordringer i at forstå begreberne strøm, spænding, modstand og deres indbyrdes forbundenhed. Med modstillingen af folkeskolens, gymnasiets og universitetets repræsentationer af Ohms lov har jeg imidlertid gerne villet illustrere, at de virkeligt store forskelle imellem de læringsmæssige udfordringer i folkeskolens, gymnasiets og universitetets arbejde med f.eks. Ohms lov ligger i graden af matematisk abstraktion, der kræves bragt i spil. Denne artikels breddeopgave handler derfor dybest set ikke i særlig høj grad om Ohms lov. Den kunne f.eks. lige så godt have drejet sig om det matematisk set analoge problem om varmeledningen ud igennem en kugle på grund af en temperaturforskel imellem det indre og det ydre af kuglen. Og derfor handler opgaven her mere om at kunne håndtere matematik på et vist niveau og – ikke mindst – at kunne bringe den modelleringsmæssigt i spil, end den handler om Ohms lov. Arbejdet med Ohms lov er midlet, hvor det er matematisk modelleringskompetence, der er målet.

Og sådan burde det efter min mening også være i folkeskolen. Eksperimentelle øvelser med modstande er overkommelige og billige som udgangspunkter for at træne den symbolske beskrivelse af omvendte og ligefremme proportionaliteter ved hjælp bogstaver og bogstavregning. Og hvis dette undviges, som det jo er meningen med figur 1's tavler, kan jeg ikke se noget afgørende formål med at undervise i Ohms lov i folkeskolen. Jeg kan bedre se berettigelsen af manualagtige anvisninger som figurens i f.eks. uddannelsen af elektrikere, som skal arbejde specifikt med Ohms lov. Hvorimod folkeskoleundervisningen burde have et mere alment formål for øje.

Breddeopgave 33. Aircondition

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne eksamensopgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2007, nr. 33 i rækken her i KVANT):

Et aircondition anlæg holder en rimelig temperatur indendørs i en bygning. Udendørstemperaturen svinger mellem en maksimumsværdi om dagen og en minimumsværdi om natten, som er lig indendørstemperaturen. Hvor stor er elregningen sammenlignet med elregningen, hvis udendørstemperaturen havde maksimumsværdien døgnet rundt? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Aircondition – breddeopgave 33 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, Roskilde Universitet

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 33 i rækken her i KVANT):

33. Aircondition

Et aircondition anlæg holder en rimelig temperatur indendørs i en bygning. Udendørstemperaturen svinger mellem en maksimumsværdi om dagen og en minimumsværdi om natten, som er lig indendørstemperaturen. Hvor stor er elregningen sammenlignet med elregningen, hvis udendørstemperaturen havde maksimumsværdien døgnet rundt? Begrund svaret.

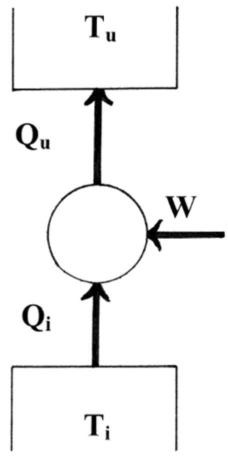
Løsning

Der siver til enhver tid en varmemængde ind i bygningen per tid, Q_i, som kan sættes proportional med forskellen mellem udendørstemperaturen, T_u, og temperaturen indendørs, T_i:

$$Q_i = K \cdot (T_u - T_i) \tag{1}$$

hvor proportionalitetskonstanten K karakteriserer bygningens varmeisolering. Det er denne varmemængde, som airconditionanlægget løbende skal pumpe ud af bygningen igen. Og i fysiksprog er opgaven at finde, hvor meget arbejde det kræver i løbet af et døgn med svingende udendørstemperatur sat i forhold til det nødvendige arbejde, hvis udendørstemperaturen konstant lå på dens maksimale værdi.

Til et vilkårligt tidspunkt ser situationen principielt således ud:



hvor W er det udførte arbejde per tidsenhed på airconditionanlæggets kredsløbsstof, Q_u den afleverede varmemængde per tidsenhed udendørs fra kredsløbsstoffet, og Q_i den af kredsløbsstoffet opsugede varmemængde per tidsenhed indendørs. Som sagt skal Q_i være lig med indsivningen givet ved (1).

Forudsat at kredsløbsstoffet i airconditionanlægget gennemløber kredsprocesser gælder ifølge termodynamikkens første hovedsætning om energibevarelse, at den tilførte energi til kredsløbsstoffet er lig med den fjernede energi fra det:

$$Q_i + W = Q_u \tag{2}$$

og ifølge termodynamikkens anden hovedsætning om umuligheden af den samlede entropis fald, at den per tid af airconditionanlægget fjernede entropi fra bygningens indre er mindre end eller lig med den per tid til omgivelserne tilførte entropi:

$$\frac{Q_i}{T_i} \leq \frac{Q_u}{T_u} \tag{3}$$

Ved kombination af (1), (2) og (3) fås:

$$W \geq K \cdot \frac{(T_u - T_i)^2}{T_i} \tag{4}$$

I stedet kan vi også skrive:

$$W = \alpha \cdot K \cdot \frac{(T_u - T_i)^2}{T_i}, \tag{5}$$

under antagelse af, at α er temperaturuafhængig, og hvor $1/\alpha$ så er det faktiske airconditionanlægs effektivitet i forhold til den fysisk principielt set størst mulige effektivitet svarende til lighedstegnet i ligning (4).

Vi skal nu sammenligne W integreret over et døgn, når T_u konstant er T_{umax}, og når T_u er en funktion af tiden t, der svinger imellem T_i og T_{umax}. $T_u(t) - T_i$ kunne da f.eks. se således ud:

$$T_u(t) - T_i = \frac{1}{2}(T_{umax} - T_i) \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right), \quad (6)$$

hvor τ her er et døgn.

Integreres $W(t)$ herefter fra 0 til τ med (6) indsat i ligning (5) fås:

$$\int_0^{\tau} W(t)dt = \frac{3}{8} \cdot \alpha \cdot K \cdot \frac{(T_{umax} - T_i)^2}{T_i} \cdot \tau \quad (7)$$

for det samlede arbejde udført på kredsløbsstoffet i airconditionanlægget i løbet af et døgn. Sammenholdt med højresiden af ligning (5) ganget med τ ses det at være 3/8 af det samlede arbejde, når udetemperaturen konstant er T_{umax}.

Når udendørstemperaturen svinger mellem en maksimumsværdi om dagen og en minimumsværdi om natten, som er lig indendørstemperaturen, bliver elregningen til airconditioneringen altså 3/8 af elregningen, hvis udendørstemperaturen havde maksimumsværdien døgnet rundt.

Kommentar

De åbent formulerede breddeopgaver, hvor formaliseringen af problemerne som led i deres løsninger er en vigtig del af besvarelserne, står i kontrast til opgavetraditionen i universitetsfysikundervisning, hvor opgaverne netop stilles i en formaliseret og præcis form ved hjælp af internt fysiske begreber. I denne tradition er der en tendens til, at opgaverne forfalder til at blive typeopgaver, man kan træne sig i at besvare uden dybere forståelse af, hvad der foregår. Er der også en tendens til, at breddeopgaverne forfalder til at blive typeopgaver, som ikke udfordrer begrebsindlæring i dybden? Censoren (Ove Nathan) ved den første breddeeksamen i 1976 spurgte til, om vi ikke frygtede, at det ville gå sådan. Kunne vi blive ved med at få øje på nye slags problemer?

Nu mere end 30 år efter synes det i overraskende grad at have været muligt. Ved løbende at samle opgaveidéer sammen og notere dem ned før de glemmes er det hvert år lykkedes at formulere de mindst 20 nye breddeopgaver, som eksamensafholdelserne har krævet. Og opgavesamlingen er nu på 630 opgaver. Men selvfølgelig er det ikke uden problemer at modarbejde et forfald til typeopgaver. Opgaven her kan bruges som illustration af et af de større.

Airconditionopgaven (fra sommereksamen 2007) indeholder essentielt den samme fysik som følgende opgave om dybfryseren i udhuset (stammende fra vintereksamen 1977, jf. KVANT nr.1, april 2001):

Hvor mange gange større er strømforbruget om vinteren af en dybfryser placeret i køkkenet frem for i udhuset? Begrund svaret.

Men hvor svaret på dybfryseropgaven ligger i regningerne frem til ovenstående ligning (5), er airconditionopgaven for ikke at være for identisk med dybfryseropgaven formuleret, så den herudover kræver de ekstra regninger frem til ligning (7). En lignende airconditionopgave til dybfryseropgaven kunne have lydt noget i retning af:

Hvad er sammenhængen imellem temperaturforskellen mellem ude og inde og strømforbruget af et airconditionanlæg? Begrund svaret.

Altså en opgave, hvor svaret er givet ved udregningerne frem til ligning (5) og altså en lettere opgave end den stillede. Der er således en tendens til, at sværhedsgraden af opgaverne stiger med årene i bestræbelsen på at undgå forfaldet til typeopgaver og den hertil hørende mindre indlæringsdybde. Den helt store udfordring er at få øje på lette, anderledes opgaver. Eller rettere sagt opgaver, der er svære ved at være anderledes og ikke ved at være teknisk komplicerede.

I den næste KVANT artikel om breddeopgaver vil jeg kommentere spørgsmålet om typeopgaver lidt mere principielt.

Breddeopgave 34 og 35. Billygter og laservåben

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra den indledende samling af 68 opgaver fra 1976 og fra eksamen i august 1983, nr. 34 og 35 i rækken her i KVANT):

I hvilken afstand ophører man med at kunne skelne de to lygter på en bil fra hinanden? Begrund svaret.

Pentagons planer for satellitbårne laservåben indeholder et linsearrangement med en diameter på 10 m for at opnå tilstrækkelig fokusering af laserenergien ved mål 1000 km borte. På hvor lille et område er energien fokuseret? Begrund svaret.

Løsninger og kommentarer bringes i næste nummer.

Billygter og laservåben
– breddeopgave 34 og 35 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 34 og 35 i rækken her i KVANT):

34 og 35. Billygter og laservåben

I hvilken afstand ophører man med at kunne skelne de to lygter på en bil fra hinanden? Begrund svaret.

Pentagons planer for satellitbårne laservåben indeholder et linsearrangement med en diameter på 10 m for at opnå tilstrækkelig fokusering af laserenergien ved mål 1000 km borte. På hvor lille et område er energien fokuseret? Begrund svaret.

Løsninger

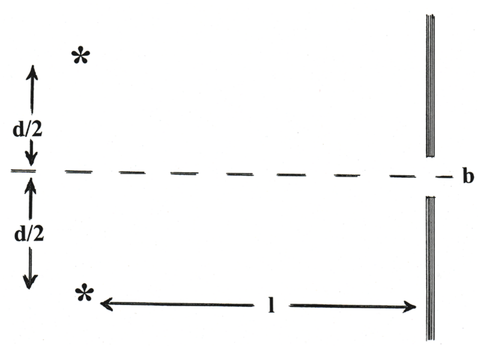
1.Løsningen til den første af opgaverne gives i form af en udfoldning af opgaven:

"Fra en lyskilde sendes lys med bølgelængden λ vinkelret mod en spalte. Afstanden fra lyskilden til spalten, l, er stor i forhold til spaltebredden, b.

1. *Skitser vinkelfordelingen af lysintensiteten bag spalten. Vinklen mellem retningen, hvor der er maksimal lysintensitet, og retningen, hvor lysintensiteten er 0 første gang kaldes $\Delta\theta$. Hvor stor er $\Delta\theta$?*

Lyskilden flyttes afstanden $d/2$ vinkelret på spaltenormalen, jvf. nedenstående figur.

2. *Ændrer det $\Delta\theta$, forudsat at d er meget mindre end l og $\Delta\theta$ lille?*



Herefter tænkes på to ens lyskilder anbragt som på figuren.

3. *Find den værdi af l udtrykt ved b, d og λ, hvor maksimum i vinkelfordelingen af lysintensiteten bag spalten hidrørende fra den ene lyskilde falder sammen med første nulpunkt i vinkelfordelingen af lysintensiteten fra den anden lyskilde.*

Hvis de to lyskilder er de to lygter på en bil og spalten er øjepupillen, er den fundne værdi af l ca. den afstand, hvori det bliver umuligt at skelne de to lygter fra hinanden med det blotte øje.

4. *Udregn afstanden, idet d = 2 m, b = 1 mm og λ = 500 nm.*"

Med svarene $\Delta\theta = \lambda/b$ på spørgsmål 1, *nej* på spørgsmål 2, og l givet ved $d/l = \Delta\theta$, dvs. $l = bd/\lambda$ som svaret på spørgsmål 3, bliver svaret på spørgsmål 4 og breddeopgaven, at man ophører med at kunne skelne de to lygter på en bil fra hinanden, når bilen er et sted mellem 1 km og 10 km borte (med de angivne størrelser 4 km borte, og 1,22·4 km borte, hvis der skal tages højde for, at pupillen er en cirkulær åbning og ikke en spalte).

2. Løsningen til den anden opgave (fra Reagans tid i 1983) er analog til løsningen til den første opgave på den måde, at det også her drejer sig om at sammenligne en geometrisk defineret vinkel med udtværingsvinklen af en lysstråle som følge af bøjningen ved dens passage igennem en åbning. Figuren kan igen benyttes, idet lyset nu i modsætning til i billygteopgaven bevæger sig mod venstre fra højre. b er så linsearrangementets diameter, l afstanden til målet og d størrelsen af det mindst mulige område, som det er muligt at fokusere laservåbnets energi på. Igen er den bestemmende ligning:

$$\lambda/b = d/l \qquad (1)$$

Med λ = 500 nm, b = 10 m og l = 1000 km fås heraf d = 5 cm. Laservåbnet vil altså ikke størrelsesordensmæssigt kunne fokusere skarpere end 10 cm.

Kommentar

1. I KVANT nr. 3, oktober 2000, i KVANT nr. 1, april 2001, og i KVANT nr.2, juli 2008 blev løsningerne til tre breddeopgaver, som i tilfældet med billygteopgaven her, givet i form af udfoldninger af opgaverne. De fire udfoldede og formaliserede opgaver tilhører et sæt på 12, der modsvarer 12 breddeopgaver. Som nævnt i tidligere KVANT artikler har jeg lavet sættet som et af midlerne til over for de studerende på RUC at tydeliggøre, hvad det er for en slags bolde, der gås efter i en undervisning byggende på de åbent formulerede breddeopgaver. Og som også tidligere nævnt ligger der selvfølgelig også en indirekte kritik af fremherskende opgavetyper i fysikundervisningstraditionen gemt i modstillingen imellem de åbne breddeopgaver og deres opdelte og formaliserede udfoldninger, selvom de udfoldede opgaver i forhold til traditionelle fysikopgaver er på grænsen til at være karikaturer.

2. I den forrige artikel i rækken i KVANT nr. 4, december 2008 nævnte jeg risikoen for, at også breddeopgaverne i længden forfalder til at blive typeopgaver, som ikke udfordrer begrebsindlæring i dybden. Men derimod appellerer til at træne situationsbundne løsningsstrategier uden dybere forståelse af, hvad der foregår. Jeg nævnte også problemet, at der er en tendens til, at sværhedsgraden af breddeopgaverne stiger med årene i bestræbelsen på at undgå forfaldet til typeopgaver.

Men spørgsmålet om nogle foreliggende opgaver kan karakteriseres som typeopgaver eller ikke, er ikke til at afgøre i al abstrakthed. For det første kan opgaven, der for den ene studerende fungerer rutinepræget, for den anden udfordre begrebsindlæringen, alt afhængig af den enes og den andens forudsætninger. For det andet er kernen i al fysisk problemløsning identificering af, hvilken type problem der foreligger. I Thomas Kuhns fysikinspirerede beskrivelse af videnskabelige paradigmer ved faglige matrixer er paradigmets sæt af bærende "eksemplarer" således en hjørnesten. Og sat på spidsen er en fysiker – i modsætning til f.eks. en ingeniør – i dette lys en person, der fungerer efter devisen: Løsninger (= eksemplarer = typer) haves, problemer søges. Eller sagt på en anden måde: Fysikeren undersøger, om foreliggende problemer kan studeres med en lup fra fysiker optiksættet, og lader problemet ligge, hvis det ikke er tilfældet.

Så spørgsmålet om nogle foreliggende opgaver kan karakteriseres som typeopgaver eller ikke bør konkretiseres til, om løsningen af opgaverne for de studerende fungerer som øvelser af situationsbundne færdigheder eller bidrag til tilegnelse af nye begreber og tænkemåder og – ikke mindst – udvidelse af anvendelsesrækkevidden af allerede delvis tilegnede begreber og tænkemåder. I forhold til undervisningen på breddekurset i fysik på RUC er laseropgaven og billygteopgaven efter min vurdering så tilpas forskellige, at løsningen af den ene ikke af de studerende umiddelbart opleves som afskrift af den anden. Og hvis de når til at forstå de to opgaver som variationer over det samme tema, er et hovedmål med undervisningen lykkedes.

Breddeopgave 36. Kaffeskvulp

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2008, nr. 36 i rækken her i KVANT):

Hvad er skvulpfrekvensen i en kaffekop? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kaffeskvulp – breddeopgave 36 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra KVANT nr. 1, 2009, samt en ny opgave. Opgaven i KANT nr. 1, 2009, var denne breddeopgave fra RUC (nr. 36 i rækken her i KVANT):

36. Kaffeskvulp

Hvad er skvulpfrekvensen i en kaffekop? Begrund svaret.

Løsning

For mig ser skvulp i en kaffekop ud som noget i retning af en stående bølge med knudepunkt i koppens midte og buge ved koppens kant og med det dobbelte af koppens diameter (d) som bølgelængde: $\lambda = 2d$. Da der må være tale om en lavtvandsbølge er bølgehastigheden (v) givet ved $v = \sqrt{gh}$, hvor h er højden af kaffen i koppen og g er tyngdefeltstyrken. Derfor er skvulpfrekvensen:

$$f = v/\lambda = \sqrt{gh}/2d \qquad (1)$$

Med $h = d = 5$ cm giver det en skvulpfrekvens på ca. 7 sek^{-1}. I betragtning af grovheden i beregningen skal det nok ikke tolkes mere nøjagtigt end, at skvulpfrekvensen ligger i området imellem 1 sek^{-1} og 10 sek^{-1}. Resultatet er i overensstemmelse med den irriterende erfaring, at kaffen nemt skvulper over, når den udsættes for gangfrekvens, som jo ligger i dette område.

Kommentar

Ved vintereksamen 1986 blev opgaven stillet i denne iklædning:

Med hvilken frekvens skvulper vandet i et stort badekar i forhold til skvulpfrekvensen i et mindre badekar af samme form? Hvad er forholdet, hvis det lille badekar hører til på et badeværelse, og det store er Genevesøen?

Det er en fra min side rigtig dårlig stillet opgave. I det første spørgsmål var det for mig underforstået, at ikke blot det store og det lille badekar er af samme form, men også at de to badekar er ligedannet fyldt med vand. I den situation ses det nemlig alene ved dimensionsanalyse, at skvulpfrekvensen er proportional med $\sqrt{g/d}$. (Svarende til formel (1) med h antaget proportional med d.) Hvorfor svaret på det første spørgsmål så er, at forholdet imellem skvulpfrekvenserne i det store og det mindre badekar er lig med kvadratroden af forholdet imellem den lineære udstrækning af det mindre og det større badekar. Og som sådan er opgaven en god illustration af, hvor slagkraftigt et redskab dimensionsanalyse kan være. Men altså forudsat, at det er badekarrene sammen med vandet i dem, der har samme form.

Anvendes formel (1) på et badekar med $h = 0{,}4$ m og $d = 2$ m fås en skvulpfrekvens på ca. 0,5 sek^{-1}, ikke fjernt fra min badeværelseserfaring. Det passer størrelsesordensmæssigt, at vandet skvulper frem og tilbage i badekarret en gang i sekundet efter at man har rejst sig fra badet. Og med udgangspunkt i den erfaring måtte man svare på spørgsmålet om, hvor lang tid det tager vandet i Genevesøen at skvulpe frem og tilbage, hvis Genevesøen havde nogenlunde samme form som badekarret, at tiden størrelsesordensmæssigt var 1 sekund gange kvadratroden af Genevesøens længde (ca. 100 km) divideret med badekarrets længde (ca. 2 m), hvilket er nogle få minutter.

Men det er forkert at stille spørgsmålet, som om Genevesøen og badekarret har samme form. Genevesøens gennemsnitsdybde er 153 m. Så den er kun tilnærmelsesvis ligedannet med badekarret, når vandhøjden i det er ca. 153 m $\cdot$ 2 m/100 km $\simeq$ 3 mm. Og det er jo ikke det, der er på tale, når man rejser sig fra badet. Ifølge min bekendte, oceanograf Martin Bohle, som fortalte mig om sit arbejde med vandskvulpet i Genevesøen, drevet af blandt andet tidevandskræfterne, og derved gav mig afsæt til at stille opgaven i 1986, tager det ikke nogle få minutter for vandet at skvulpe frem og tilbage, men 72 til 74 minutter. Indsættes $h = 153$ m og $d = 100$ km i formel (1) fås skvulptiden at være 85 minutter. Altså størrelsesordensmæssig overensstemmelse.

Der var ingen klager over den dårligt stillede eksamensopgave i 1986. Breddeopgavegenren inviterer ikke til det, da eksamenskontrakten ikke går ud på, at der skal svares præcist på et præcist stillet spørgsmål. Derimod skal der svares præcist på et spørgsmål, der skal præciseres af én selv. Men det skal ikke være en retfærdiggørelse af at stille nærmest vildledende spørgsmål, som det var tilfældet her.

Breddeopgave 37. Bordtennis

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 1986, nr. 37 i rækken her i KVANT):

Hvordan afhænger krumningen af banekurven for en bordtennisbold af dens spin og dens fart? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Bordtennis – breddeopgave 37 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

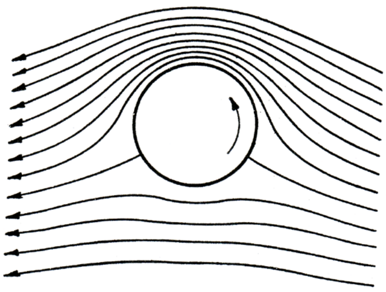
Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 37 i rækken her i KVANT):

37. Bordtennis

Hvordan afhænger krumningen af banekurven for en bordtennisbold af dens spin og dens fart? Begrund svaret.

Løsning

På grund af gnidningen imellem overfladen af bordtennisbolden og luften trækker boldens rotation luften med sig rundt i en hvirvelbevægelse. Set fra et ikke roterende koordinatsystem med nulpunkt i bordtennisbolden vil luftstrømningen omkring bolden være summen af hvirvelbevægelsen og strømningen rundt om bolden, hvis den ikke roterede. Med bordtennisbolden bevægende sig imod højre i forhold til bordtennisbordet vil det sammenlagte strømningsmønster i planen vinkelret på boldens omdrejningsakse iagttaget fra en medfølgende position oven over bolden se nogenlunde ud, som vist på figur 1.



Figur 1. Potentialstrømning omkring roterende cylinder (fra H.H.J., Deformerbare Stoffers Mekanik, side 213).

Kaldes boldens fart v, dens radius r og vinkelfrekvensen i dens rotation ω, vil luftens hastighed i den skitserede stationære strømning være $v + r\omega$ på oversiden af bolden og $v - r\omega$ på undersiden. Ifølge Bernoullis ligning vil der derfor opstå undertryk på oversiden af bolden og overtryk på undersiden af bolden i forhold til lufttrykket langt borte fra bolden, og bolden vil være påvirket af en samlet hydrodynamisk tværkraft opad på figur 1. Trykforskellen, ΔP, mellem oversiden og undersiden af bolden er ifølge Bernoullis ligning:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(v + r\omega)^2 - \frac{1}{2}\rho(v - r\omega)^2 = 2\rho v r\omega, \quad (1)$$

idet ρ er luftens massefylde. Derfor er den hydrodynamiske tværkraft, K, størrelsesordensmæssigt givet ved:

$$K \sim r^2 \cdot \Delta P = 2\rho v r^3 \omega \quad (2)$$

Ifølge Newtons 2. lov for en jævn cirkelbevægelse er krumningsradius, R, for bordtennisboldens banekurve (opadkrummet imod højre med figur 1's orienteringer) givet ved:

$$K = \frac{mv^2}{R}, \quad (3)$$

hvor m er boldens masse. Sammenholdes ligningerne (2) og (3) fås herefter:

$$R \sim \frac{mv}{\rho r^3 \omega} \quad (4)$$

som svar på opgaven. Det ses, at en meget krum banekurve svarende til lille R fås, når v er lille og ω er stor.

Kommentar

Ifølge museet "Teknikens Hus" i Luleå i Sverige er forskerne uenige om forklaringen på den hydrodynamiske tværkraft, som jo også er den, der gør flyvning mulig: Skal den hydrodynamiske tværkraft forklares med henvisning til neddrift af luften bagved flyveren eller ved anvendelse af Bernoullis ligning? Sådan var uenigheden i alle tilfælde præsenteret, da jeg besøgte museet i 2003. Og tilsvarende problematiseringer af naiv anvendelse af Bernoullis ligning er jeg også stødt på i litteraturen.

F.eks. kritiserer Klaus Weltner (KW) i en artikel fra 1987 (K. Weltner, *Am. J. Phys.* 55, 50 (1987).) den udbredte forklaring på opdriften på fly- og fuglevinger i fysiklærebøgerne, at opdriften skyldes den større afstand luften på grund af vingernes form skal bevæge sig langs oversiden af vingerne end langs undersiden. Da luften derfor må bevæge sig hurtigere langs oversiden end langs undersiden, forklares opdriftskraften ved, at luftens tryk da ifølge Bernoullis ligning er mindre på oversiden end på undersiden af vingerne. I denne forklaring byttes der ifølge KW om på årsag og virkning. Man kan ikke konkludere, at luften bevæger sig hurtigere langs oversiden af vingen end langs undersiden, fordi afstanden her er større. Det forudsætter en ubegrundet antagelse om, at luftdele der følges hen imod vingen og bevæger sig hver sin vej rundt om den vil mødes igen ved bagenden af vingen. Derimod kan undertrykket på oversiden af vinger forklares ud fra krumningen af strømlinierne, som vingeformen fører med sig. Strømliniernes krumning, som det også ses på figur 1, og den dertil hørende nedadrettede centripetalaccelleration, må ifølge Newtons 2. lov hænge sammen med et faldende tryk oppe fra og ned imod oversiden. Det lave tryk på oversiden kan så ifølge Bernoullis ligning anvendt langs en strømlinie forklare de større strømningshastigheder langs oversiden. Det er altså ikke den større strømningshastighed, der er årsag til det lave tryk, men det lave tryk, der er årsag til den større strømningshastighed.

I stedet for at benytte Bernoullis ligning til at beregne opdriften på en vinge er det ifølge KW både mere pædagogisk og rigtigere at knytte an til den grundlæggende fysik ved at forklare opdriften som reaktion på, at vingen presser luften nedad bag sig. Impulstilførslen til luften per tidsenhed i nedadgående retning er ifølge Newtons 2. lov lig med vingens kraftpåvirkning af luften nedad og derfor ifølge Newtons 3. lov også lig med størrelsen af opdriftskraften fra luften på vingen. Under antagelse af glat afstrømning fra vingens bagkant lader både opdriftkraftens sammenhæng med graden af skråstilling af vingen og opdriftkraftens proportionalitet med kvadratet på flyets fart sig forstå herved.

Hvad så med den hydrodynamiske tværkraft på den roterende bordtennisbold? Er forskerne også her uenige om, hvordan sagen skal gribes an? Kan Bernoullis ligning anvendes som gjort ved ovenstående løsning af opgaven, eller er det bedre mere grundlæggende at ræsonnere over impulsoverførslen til den forbistrømmende luft?

Den forbistrømmende luft opbremses som følge af bordtennisboldens rotation mere på den ene side af bolden end på den anden. Det fører til en drejning af luftstrømmen og en impulsoverførsel til luften på tværs af boldens bevægelsesretning. Og det forklarer den hydrodynamiske tværkraft kvalitativt. Men det er svært at udbygge dette ræsonnement kvantitativt uden yderligere antagelser.

I min far, Henning Højgaard Jensens bog "Deformerbare Stoffers Mekanik" side 82-85 beregnes den hydrodynamiske tværkraft på en langstrakt roterende cylinder ud fra impulsoverførslen til luften per tidsenhed ved strømningen vist på figur 1. Strømningen er som ved opgaveløsningen summen af hvirvelbevægelsen, der ville være, hvis cylinderen alene roterede, og strømningen omkring cylinderen, der ville være, hvis den alene bevægede sig i forhold til luften uden at rotere. Og det er forudsat, at der er tale om stationære strømninger uden lokale hvirvler (potentialstrømning) bortset fra i et tyndt grænselag ved cylinderens overflade. Disse forudsætninger er de samme, som de der skal til for at retfærdiggøre brugen af Bernoullis ligning som gjort ved opgaveløsningen.

Men forudsætningerne kan anfægtes og bliver det. Og undertiden afvises brugen af Bernoullis ligning, så vidt jeg kan se, med lige så forhastede argumenter som der undertiden har været tale om ved anvendelsen af den. (Se f.eks. A.B. Murphy, *Am.J.Phys.* **57**, 181 (1989)). Efter at have læst noget op på lektien tror jeg, at det største brud på forudsætningerne for ligning (1) i opgaveløsningen hænger sammen med, at bordtennisbolde hverken er langstrakte eller strømlinieformede og det kølvand, der følger af det. Men jeg er ikke ekspert. Så... bum... bum... ? Måske findes der blandt KVANTs læsere nogen, der kan kommentere, hvor uenige forskerne er?

I den næste artikel i KVANT vil jeg reflektere over pædagogiske fordele og ulemper ved breddeopgaver på henholdsvis sikker grund og usikker grund, som her.

Breddeopgave 38. Sandflugt

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2008 nr. 38 i rækken her i KVANT):

Afhængig af kornstørrelsen skal der en vis vindhastighed til at hvirvle støv op i luften. Hvordan er sammenhængen?

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Sandflugt – breddeopgave 38 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 38 i rækken her i KVANT):

38. Sandflugt

Afhængig af kornstørrelsen skal der en vis vindhastighed til at hvirvle støv op i luften. Hvordan er sammenhængen?

Løsning

Hvorfor kan støv- og sandkorn hvirvles op af vinden, når de bagefter falder ned igen og altså ikke kan holde sig svævende? Det skyldes den asymmetriske luftstrømning omkring dem, når de ligger på jorden. Når kornene svæver, strømmer der både luft under dem og over dem. Men når de ligger på jorden, strømmer luften kun over dem. Og det medfører ifølge Bernoullis ligning, at trykket på oversiden af kornene er $\frac{1}{2}\rho_{luft}v^2$ mindre end trykket på deres undersider, idet v står for luftstrømningshastigheden og ρ_{luft} for luftens massefylde.

Når sandkorn ligger på jorden er der altså en aerodynamisk opdriftkraft på dem af ca. størrelsen $\frac{1}{2}\rho_{luft}v^2 \cdot \pi r^2$, hvis deres radius er r. Og kornene hvirvles op, når denne kraft er større end tyngdekraften på kornene minus den statiske opdriftkraft på dem. Den kritiske hastighed for at der hvirvles sandkorn op er derfor givet ved ligningen:

$$\frac{1}{2}\rho_{luft}v_{krit}^2 \cdot \pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{sand} - \rho_{luft}) \cdot g \qquad (1)$$

dvs.

$$v_{krit} \approx \sqrt{rg(\rho_{sand}/\rho_{luft} - 1)}, \qquad (2)$$

hvor ρ_{sand} er sands massefylde og g er tyngdefeltstyrken.

Den statiske opdriftkraft er medtaget i regnestykket for at det også skal kunne dække fænomener, hvor det er strømmende vand, der løfter sedimenter op fra hav- og flodbunde, idet ρ_{vand} i modsætning til ρ_{luft} jo ikke er forsvindende i forhold til ρ_{sand}.

Kommentar

Jeg har tidligere i en artikel i KVANT i marts 2008 om luftmodstand ved cykling strejfet fænomenet, at krav om eksakthed i fysikundervisning undertiden kan risikere at være en udgave af “det bedste som det godes værste fjende”. Eller sagt på en anden måde: Fikseringen på eksakthed kan minde om Storm P. figuren, der leder efter det andetsteds tabte under gadelygten, fordi der dér er lys.

I artiklen om luftmodstand argumenterede jeg for, at den almindeligt dagligdags forekommende hastighedskvadratiske modstand ved store hastigheder og turbulent kølvand lader sig forstå ud fra en simpel dimensionsanalyse. Men i den matematisk fysiske undervisningstradition i hydrodynamik spærres der nærmest for denne forståelse. Hovedkonklusionen her er den eksakte, smukke og praktiske, at strømningsmønstrene i ligedannede geometrier, uanset hvad der strømmer, vil være ens, hvis Reynolds tallene er ens. Reynolds tallet bestemmer alt og dermed også den såkaldte modstandskoefficient, hvorfor luftmodstanden udover af en karakteristisk længde, en karakteristisk hastighed og luftens massefylde også må afhænge af luftens viskositet. Derfor er der en inputvariabel for meget til, at luftmodstanden kan fastlægges ved dimensionsanalyse ud fra en eksakt betragtning. Tages der imidlertid i stedet for dette eksakte matematisk fysiske udgangspunkt afsæt i fysisk snusfornuft, som gjort i artiklen i KVANT fra marts 2008, så ses grænserne for meget små Reynolds tal og meget store Reynolds tal at kunne undersøges ved hjælp af netop dimensionsanalyse.

Det typiske fravær af behandling i fysiklærebøgerne af den dagligdags forekommende hastighedskvadratiske luftmodstand (i modsætning til Stokes lov), tyder i dette tilfælde på en for indsnævrende binding til et matematisk fysisk paradigme for undervisningen. Situationen er måske tilsvarende til det beskrevne i en artikel, jeg engang læste i tidsskriftet *Technology and Culture* om udviklingen af turbineteknologien i USA i slutningen af 1800 tallet. Forfatteren undrede sig over, hvordan USA kunne være førende i forhold til Europa, når det på daværende tidspunkt var bagud, hvad angik universitetsmiljøer orienteret imod hydrodynamik. Og hvor svaret var, at netop dets ubundethed af et skolastisk universitetsparadigme var årsagen.

I artiklen i sidste nummer af KVANT om den hydrodynamiske tværkraft på bordtennisbolde i fart og med spin skitserede jeg noget af debatten om det betimelige i at forklare hydrodynamiske tværkræfter på både bordtennisbolde og flyvemaskinevinger ved hjælp af Bernoullis ligning. Det betimelige i at anvende Bernoullis ligning som gjort her ved vurdering af sandflugtsproblemet er formentlig endnu mere diskutabelt. Alligevel er ligning (2) som svar på opgaven næppe helt ved siden af. Den aerodynamiske opdriftkraft på et sandkorn er ikke umiddelbart – som modstandskræfter – relateret til gnidning og dermed luftens viskositet. Den er ifølge Newtons 2. og 3. lov lig med en nedadgående impulstilførsel per tidsenhed til luften. Opdriftskraften er dermed, udover af sandkornets lineære udstrækning og vindhastigheden, alene bestemt af luftens massefylde. Og så følger resultatet, som anvendelsen af Bernoullis ligning giver, at opdriftkraften er proportional med $\rho v^2 r^2$, alment af en dimensionsovervejelse.

Ved undervisning i hydrodynamiske tværkræfter er det måske ikke – som ved vurdering af modstandskræfter i højhastighedsgrænsen – blændingen fra det eksakte lys, der er det didaktiske hovedproblem, men nærmere det forhold, at der er rejst så megen (berettiget) tvivl om den eksakte brug af Bernoullis ligning, at fysikundervisere fristes til at holde sig borte fra emnet. Og det ville være ærgerligt. Netop fordi hydrodynamisk problemløsning typisk består i en pendulering imellem en eksakt matematisk side og en kvalitativ fysisk side er hydrodynamiske problemer ofte godt øvelsesterræn for at uddanne sig til at blive fysiker.

Breddeopgave 39. Telefonstrømme

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 1999, nr. 39 i rækken her i KVANT):

Et harmonisk signal vil i en telefonledning forplante sig svarende til formlen:

$$I(x,t) = I_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - \frac{\omega}{v} x) \qquad (3)$$

hvor β og v i almindelighed afhænger af signalfrekvensen ω. I telefonledninger med forsvindende lækstrømme til omgivelserne og store selvinduktionskoefficienter afhænger β og v imidlertid kun af ledningens selvinduktionskoefficient pr. længdeenhed, ledningens modstand pr. længdeenhed og ledningens kapacitet pr. længdeenhed. Hvordan afhænger β og v i denne (forvrængningsfri) grænse af de nævnte størrelser? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Telefonstrømme – breddeopgave 39 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 39 i rækken her i KVANT):

39. Telefonstrømme

Et harmonisk signal vil i en telefonledning forplante sig svarende til formlen:

$$I(x,t) = I_0 e^{-\beta x} \cos(\omega t - \frac{\omega}{v} x) \qquad (1)$$

hvor β og v i almindelighed afhænger af signalfrekvensen ω. I telefonledninger med forsvindende lækstrømme til omgivelserne og store selvinduktionskoefficienter afhænger β og v imidlertid kun af ledningens selvinduktionskoefficient pr. længdeenhed, ledningens modstand pr. længdeenhed og ledningens kapacitet pr. længdeenhed. Hvordan afhænger β og v i denne (forvrængningsfri) grænse af de nævnte størrelser? Begrund svaret.

Løsning

Opgaven løses ved dimensionsanalyse: Elektrisk spændingsforskel, U, har dimension af energi per ladning. Det vil sige $[U] = (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})/(S \cdot T) = M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot S^{-1}$, hvor [ ] læses “dimensionen af”, og hvor M står for massedimensionen, L for længdedimensionen, T for tidsdimensionen og S for dimensionen elektrisk strømstyrke, de fire grunddimensioner, der indgår i problemet. Heraf kan dimensionerne af henholdsvis selvinduktionskoefficient pr. længdeenhed, l, modstand pr. længdeenhed, r, og kapacitet pr. længdeenhed, c, aflæses til at være:

$$\begin{aligned}
[l] &= L^{-1}[U/(dI/dt)] \\
&= L^{-1}(M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot S^{-1})/(S \cdot T^{-1}) \\
&= M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot S^{-2} \qquad (2) \\
[r] &= L^{-1}[U/I] \\
&= L^{-1}(M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot S^{-1})/S \\
&= M \cdot L \cdot T^{-3} \cdot S^{-2} \qquad (3) \\
[c] &= L^{-1}[Q/U] \\
&= L^{-1}(S \cdot T)/(M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot S^{-1}) \\
&= M^{-1} \cdot L^{-3} \cdot T^4 \cdot S^2. \qquad (4)
\end{aligned}$$

I den forvrængningsfri grænse angives β og v alene at afhænge af l, r og c. Da l, r og c ses ikke at kunne kombineres til et dimensionsløst tal, er de eneste måder β og v kan afhænge af l, r og c produktfunktioner af potenser af l, r og c:

$$tal \times l^\alpha \cdot r^\gamma \cdot c^\delta \qquad (5)$$

Da β har dimensionen L^{-1} kan α, γ og δ i tilfældet β bestemmes ved kravet om at funktionen skal have dimensionen L^{-1}. Af kravet følger: $\alpha + \gamma - \delta = 0$ (β har massedimensionen 0); $\alpha + \gamma - 3\delta = -1$ (β har længdedimensionen -1); $-2\alpha - 3\gamma + 4\delta = 0$ (β har tidsdimensionen 0) og $-2\alpha - 2\gamma + 2\delta = 0$ (β har den elektriske strømdimension 0). Da ligningssystemet entydigt har løsningen: $\alpha = -1/2$, $\gamma = 1$ og $\delta = 1/2$, er formlen for β som funktion af l, r, og c derfor af dimensionsgrunde nødvendigvis:

$$\beta = tal \times \sqrt{r^2 \cdot c/l} \qquad (6)$$

Da v har dimensionen $L \cdot T^{-1}$, og α, γ og δ i tilfældet v derfor tilsvarende kan bestemmes ud fra ligningssystemet: $\alpha + \gamma - \delta = 0$, $\alpha + \gamma - 3\delta = 1$, $-2\alpha - 3\gamma + 4\delta = -1$, $-2\alpha - 2\gamma + 2\delta = 0$, med den entydige løsning: $\alpha = -1/2$, $\gamma = 0$, $\delta = -1/2$, er formlen for v på tilsvarende måde nødvendigvis:

$$v = tal \times \sqrt{1/(l \cdot c)} \qquad (7)$$

Kommentar

Opgaven er en god illustration af, at det ikke kun er i forbindelse med hydrodynamiske problemer, at dimensionsanalyse kan være et kraftfuldt redskab. Men det er langt fra at være en ideel breddeopgave.

Hovedformålet med breddeopgaverne er, at de studerende ved arbejdet med dem trænes i at kunne bringe matematik og fysik i anvendelse ved problemløsning. Og det formål understøtter opgaven ikke. Løsning af opgaven kan give anledning til en øget forankring af begreberne selvinduktion, modstand og kapacitet i forhold til spændingsforskel hos de studerende. Arbejdet med den kan også være med til at træne dimensionsanalyse som teknik. Og opgaven illustrerer på udmærket vis, at matematik og fysik har tekniske anvendelser, f.eks. beregning af telefonstrømme. Men hverken repetitionen af fysikbegreber, udviklingen af dimensionsanalysefærdigheder eller orienteringen om anvendelsessammenhænge giver umiddelbart afsæt for træning i matematisk-fysisk formaliserende problemløsning på universitetsniveau.

Når jeg trækker denne pointe frem ved valget af telefonstrømsopgaven til kommentering her i KVANT, er det, fordi der også bredere tilsyneladende er behov for at pointere den afgørende forskel imellem at undervise i matematik og fysik knyttet til anvendelser og at undervise i at kunne anvende matematik og fysik.

Ved foredrag for STX gymnasieelever har jeg spurgt dem om, hvad de mente om påstanden: "Man kan ikke blive til noget uden matematik". Den har de umiddelbart været uenige i indtil jeg gjorde dem opmærksom på, hvor stor en del af dem, der valgte matematik på højt niveau. Så, OK, det var der måske noget om. Derefter har jeg spurgt dem om, hvad de mente om påstanden: "Man kan ikke bruge matematik til noget." Den var de også i første omgang uenige i indtil jeg bad dem om at give et eksempel på, at de havde brugt matematik til noget. For det kunne de ikke. Det ser således ud til, at eleverne er sat i et uforløst paradoks: på samfundsplanet og for karrieren er matematik åbenbart en vigtig sag samtidigt med at matematik ikke opleves at kunne bruges til noget.

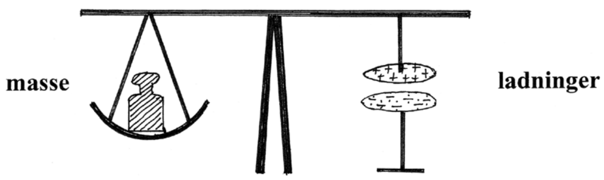
Jeg går ud fra, at det er denne og tilsvarende paradokstilstande, der forsøges forløst, når der slås på tromme for anvendelsesorientering af fysik- og matematikundervisning ved uddannelsesreformer, f.eks. ved den sidste gymnasiereform. Min pointe er så, at man i forhold hertil serverer stene for brød, når anvendelsesorienteringen forstås således, som det udbredt er tilfældet, at det ved undervisningstilrettelæggelsen drejer sig om at de internt matematiske og fysiske øveproblemer skal søges i tilknytning til anvendelser. Som det er tilfældet med breddeopgaven her.

Anvendelsesorienteringen kommer så alene til at tjene det – i øvrigt ok – formål at illustrere, at den abstrakte og tilsyneladende skolastiske matematik og fysik har praktiske anvendelser. Hvorimod en egentlig forløsning af paradokstilstandene først opnås, når elever og studerende oplever selv at kunne bringe matematik/fysik i anvendelse ved problemløsning. Sådan som ambitionen er i sammenhæng med den typiske breddeopgave.

Breddeopgave 40. Elektrostatisk vægt

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1997, nr. 40 i rækken her i KVANT):

Figuren viser en principskitse af en såkaldt elektrostatisk vægt:



Hvordan er sammenhængen mellem massen på vægtskålen og ladningerne på kondensatorpladerne, når vægten er i balance? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i et kommende nummer.

Elektrostatisk vægt – breddeopgave 40 med didaktisk kommentar

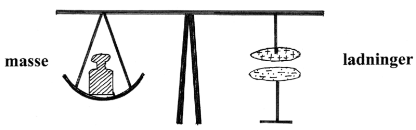
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 40 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 40. Elektrostatisk vægt

Figuren viser en principskitse af en såkaldt elektrostatisk vægt:



Hvordan er sammenhængen mellem massen på vægtskålen og ladningerne på kondensatorpladerne, når vægten er i balance? Begrund svaret.

Løsning

Vi antager, at kondensatorpladernes udstrækning er stor i forhold til afstanden imellem dem. Så er det elektriske felt imellem pladerne tilnærmelsesvist homogent, idet der ses bort fra randeffekter. Ifølge Gauss lov anvendt på en flade omkransende en af pladerne fås feltet imellem pladerne da til at være:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}, \tag{1}$$

idet Q er størrelsen af ladningerne på de to kondensatorplader, A deres areal og ε_0 dielektricitetskonstanten i vakuum. Og idet felterne fra ladningerne på de to plader ophæver hinanden uden for mellemrummet imellem pladerne.

Imellem pladerne forstærker felterne udgående fra de to plader hinanden med feltet givet ved ligning (1) som resultat. Styrken af det elektriske felt udgående fra hver enkelt af pladerne er derfor det halve af det i ligning (1). Hvorfor størrelsen af kraftpåvirkningen fra den ene plade på den anden er:

$$K = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon_0 A} \tag{2}$$

Hvis massen der skal vejes kaldes M, tyngdefeltstyrken g og vægtens to arme l_M og l_Q, er svaret på opgaven derfor:

$$l_M M g = \frac{l_Q Q^2}{2\varepsilon_0 A};\ \text{eller}\ M = \frac{l_Q}{l_M}\frac{Q^2}{2\,g\,\varepsilon_0 A} \tag{3}$$

Kommentar

Jeg synes opgaven som breddeopgave betragtet er god af to grunde.

Den første grund er, at opgaven både lever op til at vedrøre en virkelig, ikke tænkt, problemstilling, og til at være formuleret i et nogenlunde dagligdags sprog, således at den nøjere præcisering af problemet i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen. Og det til trods for, at det er en opgave vedrørende elektrodynamik, hvor det erfaringsmæssigt er sværere end i f.eks. mekanik eller termodynamik at undgå at forfalde til internt formulerede problemer. Som det f.eks. er tilfældet for opgaven om telefonstrømme i sidste nummer af KVANT.

Den anden grund til, at jeg synes, at det er en god breddeopgave, er, at den lader sig besvare mindre rigtigt uden at besvarelsen er helt forkert. Mere hyppig end eksamensbesvarelser svarende til ovenstående var, at kraftpåvirkningen fra den ene plade på den anden fandtes ved at gange feltet fra ligning (1) med Q, således at svaret på opgaven kom til at afvige fra ligning (3) med en faktor 1/2. Og der var også forkerte, men dog meningsfulde besvarelser, hvor Coulombs lov blev anvendt for den gensidige tiltrækning pladerne imellem som om de var punktformige. For mig at se er det med til at holde undervisningen på sporet, når de svagere eksamenspræstationer demonstreres ved ufuldstændige bud på løsning af problemer hørende til dagsordenen, frem for at den svagere gennemførsel finder sted ved besvarelse af hjælpespørgsmål delvis uden for dagsordenen og konstrueret med henblik på niveaudifferenciering.

Breddeopgave 41. Rulning

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2006, nr.41 i rækken her i KVANT):

En hul og en massiv cylinder med ens masser og ens radier ruller med samme fart hen imod et skråplan. Hvad er forholdet imellem, hvor langt de ruller op af skråplanet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i et kommende nummer.

Rulning – breddeopgave 41 med didaktisk kommentar

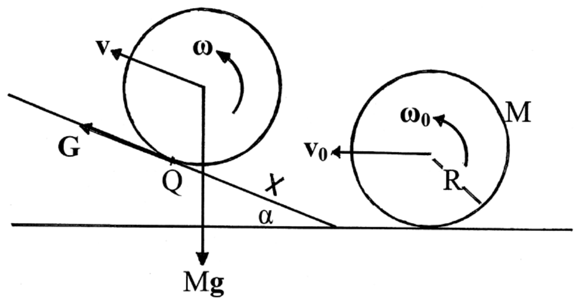
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave fra RUC (nr. 41 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 41. Rulning

En hul og en massiv cylinder med ens masser og ens radier ruller med samme fart hen imod et skråplan. Hvad er forholdet imellem, hvor langt de ruller op ad skråplanet? Begrund svaret.



Figur 1. Tværsnit af cylinder, der ruller op ad et skråplan.

Løsning

Opgaven kan løses på tre kvalitativt forskellige måder:

1. Den mest direkte måde er ved brug af *mekanisk energibevarelse*. Da den kinetiske energi af cylinderen før den ruller op ad skråplanet er lig med dens potentielle energitilvækst i topstillingen, fås med betegnelserne på figur 1, idet I_{CM} (inertimomentet om cylinderaksen) skrives som kMR^2 og $v_0 = R\omega_0$ ved ren rulning:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega_0^2 = \frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 = Mgx_{\mathrm{top}}\sin\alpha, \tag{1}$$

hvoraf

$$x_{\mathrm{top}} = \frac{(1+k)v_0^2}{2g\sin\alpha} \tag{2}$$

Da $k = 1$ for den hule cylinder og $k = \frac{1}{2}$ for den massive cylinder, er svaret på opgaven derfor:

$$\frac{x_{\mathrm{top,hul}}}{x_{\mathrm{top,massiv}}} = \frac{1+1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \tag{3}$$

2. Opgaven kan også besvares ved brug af *tyngdepunktssætningen og momentsætningen om tyngdepunktet*. Med betegnelserne på figur 1 fås:

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg\sin\alpha + G \quad \text{og} \quad I_{\mathrm{CM}}\frac{d\omega}{dt} = -RG \tag{4}$$

Indsættes G isoleret fra den anden ligning i den første samtidig med, at I_{CM} sættes lig med kMR^2 og $v = R\omega$, fås heraf, at cylindrenes bevægelse er bestemt ved:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g\sin\alpha}{1+k} \tag{5}$$

Integrationen af (5) en og to gange giver så:

$$v(t) = -\frac{g\sin\alpha}{1+k}t + v_0 \tag{6}$$

og

$$x(t) = -\frac{1}{2}\frac{g\sin\alpha}{1+k}t^2 + v_0 t \tag{7}$$

Og indsættes t for $v(t) = 0$ fra den første ligning i den anden, fås x_{top} som i ligning (2) og derved svaret på opgaven som i ligning (3). Denne måde at besvare opgaven på er besværligere end ved brug af energibevarelse. Til gengæld muliggør den som vist, at tidsforløbene kan undersøges. Og at størrelsen af den statiske gnidningskraft G kan findes ved indsættelse af (5) i momentsætningen under brug af $Rd\omega/dt = dv/dt$.

3. Den tredje måde at besvare opgaven på er ved at bruge *momentsætningen om røringspunktet* mellem cylinder og skråplan:

$$I_{\mathrm{Q}}\frac{d\omega}{dt} = -MgR\sin\alpha \tag{8}$$

Idet $I_{\mathrm{Q}} = MR^2 + I_{\mathrm{CM}} = (1+k)MR^2$ og $Rd\omega/dt = dv/dt$ kommer vi herved direkte frem til ligning (5) uden at have G som ubekendt variabel i første omgang. Hvorefter løsningen er som ved metode 2.

Kommentar

Opgaven eller tæt beslægtede opgaver er almindeligt forekommende i lærebøgerne i mekanik på universitetsniveau. Som tidligere nævnt i artikelserien om breddeopgaver må lærebøger ikke medtages til eksamen. Derfor er det også muligt at stille lærebogsklassikere som denne som opgaver til eksamen.

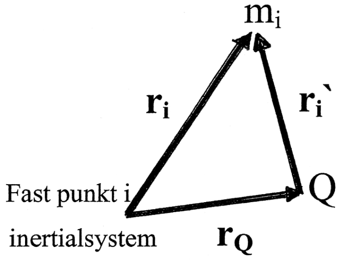
Min gennemgåede 3-foldige løsning af opgaven er også en lærebogsklassiker. Jeg husker den fra min egen universitetsundervisning. Og jeg har f.eks. genfundet den i Berkeley Physics Course, Volume 1, Second Edition, 1973, p. 249-252, og i Ohanian: Physics, Second Edition, 1989, p. 339-343. Ikke desto mindre bygger den tredje af løsningsmetoderne på et forkert udgangspunkt, hvilket er min grund til at skrive artiklen her om opgaven.

Retfærdiggørelsen af at bruge momentsætningen om røringspunktet, som gjort ved den tredje måde at løse opgaven på, er ifølge Berkeley Physics Course:

"The acceleration in the motion of the rolling object is calculated by recognizing that *instantaneously* the motion is simply a rotation about a point on the periphery of the object. Thus we shall require the moment of force about P to equal the rate of change of angular momentum about P." (P er røringspunktet), og ifølge Ohanian:

"The existence of an instantaneous fixed axis in rolling motion (without slipping) enables us to deal with this motion by methods developed in the preceding sections. The rotation about the instantaneous fixed axis obeys our old equation $I d\omega/dt = \tau_z$. From this, we can calculate the motion of a rolling body on which external forces and torques act." (z refererer til en stillestående z-akse).

Men denne retfærdiggørelse er en slags tanketorsk. Det er rigtigt, at en rent rullende genstands bevægelse momentant kan beskrives som en rotation om det faste underlagspunkt, der rører den rullende genstand. Men røringspunktet er noget andet end dette faste punkt. Røringspunktet er et geometrisk bestemt punkt, der flytter sig. Hvorfor man ikke umiddelbart kan tillade sig at anvende momentsætningen om røringspunktet som gjort.



Figur 2. Stedvektorer i tilknytning til et vilkårligt bevæget punkt Q.

Den størrelse, der opereres med ved den tredje udregning, impulsmomentet om punktet Q, er alment defineret som følgende vektor:

$$\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} = \Sigma_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \boldsymbol{v}_i, \qquad (9)$$

med figur 2's betegnelser og med Q som et vilkårligt bevæget punkt. Differentieres det sidste udtryk for $\boldsymbol{L}_\mathrm{Q}$, fås:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} &= \Sigma_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i - \Sigma_i \boldsymbol{v}_\mathbf{Q} \times m_i \boldsymbol{v}_i \\ &\quad + \Sigma_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}. \qquad (10) \end{aligned}$$

Her er første led 0. Andet led er lig med $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$, hvor M er den samlede masse og $\boldsymbol{v}_\mathbf{CM}$ er tyngdepunktets hastighed. Medens tredje led er lig med $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{Q}$, kraftmomentet omkring Q fra alle de systemeksterne kræfter, idet $m_i d\boldsymbol{v_i}/dt$ ifølge Newtons anden lov er lig med summen af eksterne og interne kræfter virkende på systempartikel i, og fordi krafmomentbidragene fra de systeminterne kræfter ophæver hinanden ved summationen som følge af loven om aktion og reaktion (idet kræfterne mellem to systempartikler forudsættes at være rettet langs deres forbindelseslinie). Ændringen af impulsmomentet om et vilkårligt bevæget punkt, og hermed om røringspunktet ved rulning, er således ikke alment lig med det samlede kraftmoment om punktet, men derimod givet ved:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{Q} + M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}. \qquad (11)$$

Momentsætningen brugt omkring røringspunktet som gjort i Berkeley Physics Course, af Ohanian og i min ovenstående løsning, burde altså retfærdiggøres ved ligning (11) sammenholdt med begrundelsen for at $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ er nul i det specialtilfælde, der er under behandling. Nemlig at $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM}$ og $\boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ er parallelle. Og ikke ved en misforstået henvisning til, at røringspunktet er et momentant fast punkt.

Når misforståelsen har kunnet finde udbredelse er det naturligvis, fordi den har ført til det rigtige resultat i de situationer, der er regnet på. Altså situationer, hvor det ekstra led er nul. Det ekstra led vil være ulig nul, hvis det der ruller f.eks. er et æg på højkant, dvs. noget ikke omdrejningssymmetrisk, eller hvis der f.eks. rulles ned gennem Rundetårn, dvs. på en skruet plan. Da jeg ikke kan forestille mig, at der ikke har været regnet på sådanne fænomener, kan jeg heller ikke forestille mig, at der ikke findes speciallitteratur, hvor ligning (11) er alment erkendt. I fysiklærebogslitteraturen har jeg imidlertid kun været i stand til at finde ligningen følgende to steder: Jacob Nielsen: Rationel Mekanik II, 3. udgave, 1952. p. 148, og J.M.Knudsen og P.G.Hjorth: Elements of Newtonian Mechanics, 3. Edition, 2000, p. 257. Altså pudsigt nok en rent dansk sag.

I Jens Martin Knudsens eksempelsamling fra 1968 til Fysik 1 på Københavns Universitet, som jeg har stående som duplikerede noter på reolen, fordi jeg var studenterinstruktor på kurset, ser jeg under skrivningen af artiklen her på side 274-275, at den fejlagtige tredje metode er anført og derefter overstreget før trykningen.

De fleste lærebøger, der omhandler momentsætningen og anvender den på rulning, nøjes med at udlede momentsætningen i specialtilfældet, hvor Q er et fast punkt og $\boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ altså nul, og specialtilfældet, hvor Q er CM og $M\boldsymbol{v}_\mathbf{CM} \times \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}$ derfor også altid er nul, og nøjes i forlængelse heraf med de to første besvarelser af rulleopgaven. De fleste lærebøger holder sig altså borte fra den forkert begrundede tredje måde at løse opgaven på.

I flere af de mere avancerede mekaniklærebøger findes en anden generel ligning end ligning (11) udledt.

Til forskel fra ligning (9) er $\boldsymbol{L}_\mathbf{Q}$ her defineret ved:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_\mathrm{Q} &= \Sigma_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \\ &= \Sigma_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}), \end{aligned} \tag{12}$$

altså impulsmomentet om Q i et system, der følger med Q. Mens der i ligning (9) er tale om impulsmomentet i laboratoriesystemet, men taget om et punkt der flytter sig.

Ved differentiation af (12) fås med denne betydning af $\boldsymbol{L}_\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} &= \Sigma_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}) \times m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_\mathbf{Q}) \\ &\quad +\Sigma_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \\ &\quad -\Sigma_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_\mathbf{Q}) \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt}. \end{aligned} \tag{13}$$

Her er første led nul og andet led lig med $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{Q}$ som ovenfor. Da $\Sigma_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt} = \boldsymbol{r}_\mathrm{CM} \times M \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt}$ og $\Sigma_i \boldsymbol{r}_\mathrm{Q} \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt} = \boldsymbol{r}_\mathrm{Q} \times M \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt}$, fås så modsvarende ligning (11):

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L}_\mathrm{Q} = \boldsymbol{\tau}_\mathrm{Q} + (\boldsymbol{r}_\mathrm{CM} - \boldsymbol{r}_\mathrm{Q}) \times (-M \frac{d\boldsymbol{v}_\mathrm{Q}}{dt}). \tag{14}$$

Det ekstra led her i forhold til den simple momentsætning ses at være kraftmomentet omkring Q fra det homogene systemkraftfelt, der gør sig gældende i et koordinatsystem, der accelererer sammen med Q. Ligesom det ekstra led i ligning (11) forsvinder leddet – som det skal – altid i de to velkendte specialtilfælde, hvor Q er et fast punkt i et inertialsystem, og hvor Q er CM. Men ellers er det jo ikke det samme, der er tilføjet i ligning (11) og ligning (14).

I forhold til vores rulleproblem kunne ligning (11) bruges til at retfærdiggøre den tredje måde at løse opgaven på, idet det ekstra led indses her at være nul. Ligning (14) tilbyder en fjerde løsningsmetode. Men her kan det ekstra led ikke smides væk. De tre led i ligning (14) anvendt på rulleproblemet får tværtimod ligningen til at have udseendet:

$$kMR^2 \frac{d\omega}{dt} = -RMg \sin\alpha - MR\frac{dv}{dt}. \tag{15}$$

Idet $R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt}$, ses ligningen som ved løsningsmetode 2 og 3 igen at føre til ligning (5).

Rulleopgaven kan altså løses på hele fire kvalitativt forskellige måder. Og heraf forudsætter altså de to af løsningsmetoderne mere end den enkle udgave af momentsætningen, at ændringen af impulsmomentet per tidsenhed er lig med kraftmomentet fra ikke-systemkræfter.

Jeg har uddybet emnet her yderligere i en artikel i European Journal of Physics med titlen “Rules for rolling as a rotation about the instantaneous point of contact” (*Eur. J. Phys.* **32** (2011) 389-397).

Breddeopgave 42 og 43. Vindmøller og helikoptere

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra den indledende samling træningsopgaver fra starten af kurset i 1976, nr. 42 i rækken her i KVANT, og fra sommereksamen 2010, nr. 43 i rækken her i KVANT):

Giv en øvre grænse for effekten af en vindmølle. Begrund svaret.

Hvilken effekt skal motoren i en helikopter yde for at holde helikopteren svævende? Begrund svaret.

Løsninger og kommentarer bringes i et kommende nummer.

Kommentar til breddeopgave om rulning

Bragt i Kvant juli 2011

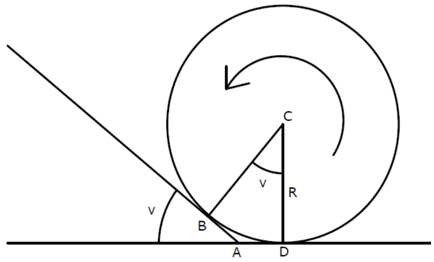
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Kommentarer til breddeopgaven om rulning

I min oprydning i forrige nummer af tanketorsken ved retfærdiggørelse af brugen af momentsætningen om røringspunktet ved rulning med henvisning til, at punktet er i øjeblikkelig hvile, havde jeg selv introduceret en tanketorsk. Hvis overgangen imellem det vandrette plan og skråplanet ikke er udjævnet med en krumningsradius større end kuglens vil der ved overgangen finde et stød med tilhørende energitab sted, som der ikke var taget højde for i regningerne. Hvis der omvendt var en udjævning af overgangen kan opgaven løses med en energibetragtning som gjort, men så er det ikke simpelt at integrere bevægelsesligningerne. Jeg er blevet gjort opmærksom på fejlen af E.H. Hauge, som sammen med J.S. Høye har gennemregnet stødproblemet, der både er kompliceret og lærerigt at undersøge. Beregningerne kan findes på webadressen: http://home.phys.ntnu.no/rulleproblem.

En anden læser, Carl-Erik Sølberg, har sendt en alternativ løsning af breddeopgave nr. 41 om rulning:

Lad os først bemærke, at den lodrette højdeforskel mellem C og B (på figuren nedenfor) er $R \cdot \cos v$. Hvor B er røringspunktet mellem skråplan og cylinder, og C er centret for den cirkulære cylinder.



Når vi skal bruge energisætningen

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = W^{\text{non}}_{\text{indre}} + W^{\text{non}}_{\text{ydre}} \tag{4}$$

skal vi først bemærke, at systemet, vi anvender den på, er cylinderen og dernæst, at de ikke-konservative kræfters arbejde (højresiden) er nul. De indre kræfters arbejde er nul, da legemet er stift og friktionens arbejde er nul, da angrebspunktets hastighed er nul. Cylinderen ruller nemlig uden at glide. De konservative tyngdekræfters arbejde indregnes i den potentielle energi.

Så længe cylinderen ruller på det vandrette underlag er dens kinetiske energi lig:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} \\ &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Når den er kommet op i det højeste punkt på skråplanen, da er massemidtpunktet løftet den lodrette højde:

$$x_{\text{top}} \cdot \sin v + R \cdot \cos v - R \tag{6}$$

Da B er løftet $x_{\text{top}} \cdot \sin v$, og udgangshøjden var R:

Dens potentielle energitilvækst er derfor:

$$\Delta E_{\text{pot}} = Mg(x_{\text{top}} \cdot \sin v + R \cdot \cos v - R) \tag{7}$$

Da den kinetiske energi er nul i toppunktet, er dens tilvækst:

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 \tag{8}$$

Vi finder altså, at

$$x_{\text{top}} = \frac{1+k}{2g \cdot \sin v} v_0^2 + \frac{R \cdot (1 - \cos v)}{\sin v} \tag{9}$$

Når dette resultat afviger fra Højgaards, skyldes det, at man skal anvende massemidtpunktets højdetilvækst og ikke røringspunktets. Når fejlen ikke opdages i forbindelse med de alternative løsningsmetoder, skyldes det, at massemidtpunktkoordinaten langs skråplanen sættes til nul, i det øjeblik cylinderen berører planen første gang. Altså, at Højgaard sætter x_0 til 0. Den bør rettelig sættes til AB, altså $x_0 = R \cdot (1 - \cos v)/\sin v$. Bevægelsesmængdesætningen skal anvendes på massemidtpunktspartiklen. Det er A, der har koordinaten nul!

Svar: Carl-Erik Sølberg har ret. Det er så tanketorsk nummer to i tilknytning til rulleopgaven (med den rigtige morale, at den normale retfærdiggørelsen af momenttagning om røringspunktet som om det var et fast punkt med henvisning til, at det momentant er i hvile, er en tanketorsk). For at undgå begge tanketorsk skulle opgaven have lydt: *En hul og en massiv cylinder ruller til en begyndelse med samme fart op ad et skråplan. Hvad er forholdet imellem, hvor langt de ruller yderligere op ad skråplanet? Begrund svaret.* Det er denne opgave beregningerne i KVANT-artiklen er løsningerne til.

Vindmøller og helikoptere – breddeopgave 42 og 43 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 42 og 43 i rækken her i KVANT):

Breddeopgaver 42 og 43. Vindmøller og helikoptere

42. Giv en øvre grænse for effekten af en vindmølle. Begrund svaret.

43. Hvilken effekt skal motoren i en helikopter yde for at holde helikopteren svævende? Begrund svaret.

Løsninger

42. Løsningen af vindmølleopgaven gives i form af en udfoldet version af den:
"En vindmølle omsætter bevægelsesenergi i vinden til f.eks. elektrisk energi. Vindhastigheden kaldes v og luftens massefylde ρ.
1. Hvor stor er vindens bevægelsesenergi pr. rumfangsenhed?
Møllevingernes overstrygningsareal kaldes A. Vingerne er stillet vinkelret på vindens retning.
2. Hvor stort et rumfang luft passerer A i et tidsrum Δt?
3. Hvor stor en mængde bevægelsesenergi når frem til overstrygningsarealet i et tidsrum Δt?
Møllen kan ikke levere større effekt (energi pr. tidsenhed) end bevægelsesenergien af den mængde luft, der når frem til overstrygningsarealet pr. tidsenhed (svarende til total opbremsning af luften ved møllen).
4. Hvad er formlen for denne øvre grænse for effekten af vindmøllen udtrykt ved A, v og ρ?".

Svarene er henholdsvis $\frac{1}{2}\rho v^2$, $Av\Delta t$, $\frac{1}{2}\rho Av^3\Delta t$ og endelig $\frac{1}{2}\rho Av^3$ som facit. Den øvre grænse for effekten af en vindmølle, $P_{\max}$, er altså:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\rho Av^3. \tag{1}$$

Den kan, bortset fra talfaktoren, også findes ved dimensionsanalyse.

43. Løsningen af helikopteropgaven ligger i en kombination af overslag over impuls- og energitilførslen per tidsenhed til luften. Antages virkningen af helikopterpropellen at være en lodret nedadgående luftstrøm med strømningshastigheden v og tværsnitsarealet A, vil impulstilførslen til luften per tidsenhed være $\rho Av \cdot v$, hvor ρ er luftens massefylde. Det er så ifølge Newtons anden lov lig med helikopterens kraftpåvirkning på luften og ifølge Newtons tredje lov også lig med luftens samlede kraftpåvirkning på helikopteren. Hvis helikopteren ikke bevæger sig i op- eller nedadgående retning, må det igen være lig med tyngdekraften, mg, på helikopteren, dvs.:

$$\rho Av^2 = mg \tag{2}$$

Energitilførslen til luften per tidsenhed er $\frac{1}{2}\rho Av \cdot v^2$. Indsættes v bestemt af ligning (2) heri, fås:

$$P_{\min} = \sqrt{\frac{m^3g^3}{4\rho A}} \tag{3}$$

for den minimale effekt helikopterens motor skal yde for at holde helikopteren svævende. Hvis luften af helikopterens propel sættes i bevægelse udover den nedadgående, er kravet til motoren større end $P_{\min}$. Da mg optræder som samlet størrelse i problemet her, kan også ligning (3), bortset fra talfaktoren, findes ved dimensionsanalyse. For at benytte ligningen overslagsmæssigt kan A identificeres med helikopterpropellens overstrygningsareal.

Kommentarer

1. Breddeopgaverne har indtil sommeren 2007 i første omgang været stillet som eksamensopgaver på det såkaldte Breddekursus på RUC. Breddekurset, som var på 18 ECTS point og lå på tredje studieår efter det toårige basisstudie på RUC, er siden ved opdelingen af studierne i adskilte bachelordele og kandidatdele blevet delt i de to kurser "Fysisk problemløsning I" på 7,5 ECTS point og "Fysisk problemløsning II" på 7,5 ECTS point. Herefter ligger Fysisk problemløsning I (modsvarende den første halvdel af det gamle Breddekursus) som en del af bachelorstudiet og kan enten følges på basisstudiets andet år eller på bacheloruddannelsens tredje år efter basisstudiet. Hvorimod Fysisk problemløsning II (modsvarende den anden halvdel af det gamle Breddekursus) modsat er tænkt som "kronen på værket" mod slutningen af kandidatstudiet, hvor både de studerendes større fysikfaglige modenhed og deres større teoretiske ballast kan komme i spil. Det primære formål med begge de to nye kurser er fortsat, som med det tidligere Breddekursus, populært sagt, at man skal trænes i at tænke som en fysiker. Sekundært skal kurserne styrke deltagernes viden om og forståelse af fysiske fænomener og teorier indenfor klassisk og moderne fysik i bredden.

På grund af den forskellige placering i fysikstudiet af de to halvdele af det tidligere Breddekursus adskiller eksamenerne efter de to kurser sig nu fra hinanden. Eksamen i Fysisk problemløsning I inddrager kun det halve pensum af eksamen i Fysisk problemløsning II. Og vi forsøger at gøre opgaverne til eksamen i Fysisk problemløsning I mindre krævende end opgaverne til Fysisk problemløsning II. Modstillingen af vindmølleopgaven og helikopteropgaven i artiklen her kan tjene som illustration af det sidste. De to opgaver ligger pensummæssigt tæt op af hinanden. Men den ene er mere krævende end den anden efter vores vurdering. Vindmølleopgaven kunne være stillet til en Fysisk problemløsning I eksamen, hvorimod helikopteropgaven blev stillet for nylig til eksamen i Fysisk problemløsning II.

2. I KVANT nr. 3, oktober 2000, i KVANT nr. 1, april 2001 og i KVANT nr. 2, juli 2008 blev løsningerne til tre breddeopgaver som her med vindmølleopgaven givet i form af udfoldninger af opgaverne. De fire udfoldede og formaliserede opgaver tilhører et sæt på 12, der modsvarer 12 breddeopgaver. Som tidligere nævnt i serien af breddeopgaveartikler har jeg lavet sættet som et af midlerne til for de fysikstuderende på RUC at tydeliggøre, hvad det er for en slags bolde, der gås efter i en undervisning byggende på de åbent formulerede opgaver. Selvom der er et spring i sværhedsgrad fra vindmølleopgaven til helikopteropgaven, er det erfaringsmæssigt ikke så grundlæggende som springet fra den udfoldede til den åbne version af vindmølleopgaven. Det er derfor vigtigt at gå i dialog med de studerende om både størrelsen og relevansen af udfordringerne i arbejdet med åbent stillede problemer frem for de opgavetyper, de oftest har oplevet og er vant til.

3. Ovenstående udregning af den øvre grænse for effekten af en vindmølle er ufysisk derved, at den går ud fra fuldstændig opbremsning af vinden ved møllen med en umulig ophobning af luftmasserne til følge. Tages der højde for den nødvendige bortstrømning af luften efter dens nedbremsning ved møllen kan der argumenteres for at sænke den fundne øvre grænse med faktoren 16/27 under antagelse af, at luftens fart ved vindmøllen er gennemsnittet af farten før og efter møllen i et pænt strømlinierør. Under alle omstændigheder er resultatet $\rho A v^3$ gange et ukendt tal, som allerede fremgår af en dimensionsanalyse, væsentligt uanset tallet. Det har selvfølgelig f.eks. afgørende betydning for overslagsmæssige vurderinger af energiudbyttet ved forskellige placeringer og vindmøllehøjder, at v indgår i formlen i potensen 3 og ikke i f.eks. potensen 2 eller 4.

For mig er dette et eksempel på en af måderne fysik vekselvirker med teknologi på, nemlig ved at levere søkort for teknologiudviklingssejladsen. Men et er skib at føre, et andet søkort at forstå. Og teknologiudvikling er noget mere og andet end anvendt fysik.

Vindmølleverdenen er også leveringsdygtig i eksempler, der viser en tæt sammenvævning af fysik-og teknologiudvikling. Det gælder f.eks. ved udregningen af optimale vingeprofiler som en sag for specialister i aerodynamik.

For mig er vindmøller et godt case til illustration af forskelligartede eksempler på vekselvirkning imellem fysik og teknologi.

Breddeopgave 44.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave (nr.44 i rækken her i KVANT):

Hvor knækker en væltende murstensskorsten under faldet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Skorstensknæk – breddeopgave 44 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

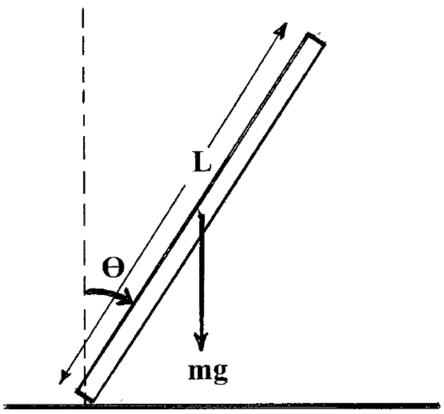
Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne opgave (nr. 44 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 44. Skorstensknæk

Hvor knækker en væltende murstensskorsten i faldet? Begrund svaret.

Figur 1. Faldende skorsten (billede fra "Physics in the Toy Room: Toppling Towers", www.physicscentral.com).



Figur 2. Faldende skorsten.

Løsning

Selvom svaret på opgaven er enkel, er løsningen det ikke.

Så længe skorstenen i sin helhed drejer om sit fodpunkt, fås med betegnelserne på figur 2:

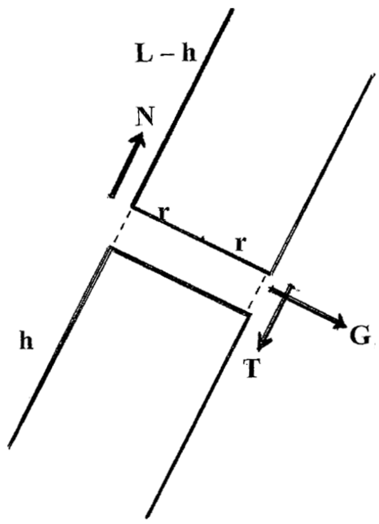
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta), \qquad (1)$$

som følge af energibevarelse. Og ifølge momentsætningen med momenter taget om fodpunktet har vi:

$$\frac{1}{3}\cdot mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = mg\frac{L}{2}\sin\theta, \qquad (2)$$

idet skorstenen er antaget overalt at have samme tværsnit, og vi i beregningen af inertimomentet $\frac{1}{3}\cdot mL^2$ i de to ligninger har set bort fra bredden af skorstenen.

Hvis skorstenen, som det ofte ses, knækker i to stykker i faldet, vil den øverste del falde bagover i forhold til den underste del. Af både ligning (1) og ligning (2) ses, at skorstenen falder langsommere jo større dens højde er. Før den knækker, er det derfor den nederste del af skorstenen, der trækker den øverste del med sig, medens den øverste del holder den nederste tilbage i faldet. Og derfor er det den nederste del, der løber fra den øverste, når skorstenen knækker. Når skorstenen er knækket, vil dens nederste del fortsætte sit fald med en øgende vinkelhastighed i overensstemmelse med ligning (2) med en justeret værdi af L. Medens dens øverste del vil dreje med konstant vinkelhastighed, da der da ikke er noget kraftmoment om delens massemidtpunkt.



Figur 3. Snit vilkårligt sted i faldende skorsten.

At svare på, ikke hvad der sker, når skorstenen er knækket, men hvor skorstenen knækker, hvis den knækker, er ikke så lige til. Et tilnærmet svar kan gives, hvis vi regner på en forenklet model af skorstenen. Vi tænker på skorstenen som en stabel skiver fæstnet til hinanden i de to yderpunkter i faldretningen som antydet på figur 3. Herefter må vi fx anvende momentsætningen om tyngdepunktet og tyngdepunktssætningen for en vilkårlig øvre del af skorstenen som den på figuren. Så længe de to dele hænger sammen som en helhed, vil den øverste del være påvirket af et kraftmoment omkring sit tyngdepunkt hidrørende fra berøringskræfterne fra den underste del svarende til vinkelaccelerationen givet ved ligning (2) og være påvirket af en resulterende kraft hidrørende fra tyngden og berøringskræfterne fra den underste del svarende til accelerationen af den øverste dels tyngdepunkt givet ved ligning (1) og ligning (2). På figur 3 er berøringskræfterne angivet som en samlet statisk gnidningskraft G, og svarende til at den øverste del tendentielt falder bagover i forhold til den nederste del, en trykkraft eller normalreaktion N, i det venstre kontaktpunkt og en trækkraft T i det højre kontaktpunkt.

Hvis $b = h/L$ (jf. figuren) betegner brøkdelen af skorstenen under snittet i forhold til hele skorstenen, har stykket over snittet længden $(1-b)L$, massen $(1-b)m$, inertimomentet om sit tyngdepunkt $\frac{1}{12}(1-b)m(1-b)^2L^2$ (hvis vi ser bort fra skorstenens bredde), og en radius for tyngdepunktets cirkelbevægelse på $(1+b)L/2$. Med betegnelser og orienteringer i figur 3 får vi da:

$$(T+N)r - G(1-b)\frac{L}{2} = \frac{1}{12}(1-b)^3mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3)$$

$$G + (1-b)mg\sin\theta = (1-b)m(1+b)\frac{L}{2}\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4)$$

$$T - N + (1-b)mg\cos\theta = (1-b)m(1+b)\frac{L}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (5)$$

Ved indsættelse af $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ fra ligning (2) i ligning (4) fås:

$$G = \frac{1}{4}(1-b)mg\sin\theta(3b-1), \quad (6)$$

som indsat sammen med $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ fra ligning (2) i ligning (3) giver:

$$T + N = \frac{1}{4}(1-b)mg\sin\theta(1-b)b\frac{L}{r} \quad (7)$$

Endelig giver indsættelse af $(d\theta/dt)^2$ fra ligning (1) i ligning (5):

$$T - N = \frac{1}{2}(1-b)mg(3(1+b) - (5+3b)\cos\theta) \quad (8)$$

Ligningerne (6) og (8) viser, at under faldet er både den samlede statiske gnidningskraft G og differencen $T-N$ mellem træk- og trykkraften i hver side af skorstenen af størrelsesordenen mg. Herimod er summen $T+N$ ifølge ligning (7) af størrelsesordenen mgL/r, hvor r er skorstenens radius eller halve bredde. Da L for skorstene er op til flere størrelsesordener større end r, er både den tangentielle statiske gnidningskraft G og differencen imellem de to normalkræfter T og N derfor ubetydelig i forhold til deres sum. Heraf kan to ting konkluderes. For det første betyder det, at det mere er skorstensmørtelens evne til at fæstne en overliggende og en underliggende mursten til hinanden i lodret retning, end det er mørtelens evne til at hindre murstenene i at skride sidelæns i forhold til hinanden, der er afgørende for skorstensknæk. For det andet betyder det, at vi kan springe løsning af ligningerne (7) og (8) med de to ubekendte T og N over, da de tilnærmelsesvis er lige store.

Skorstenen knækker der, hvor kravene til sammenklistringskraften T først overskrider, hvad mørtelen kan levere. Da højresiden af ligning (7) differentieret med hensyn til b er 0 for $b = 1/3$, ses svaret på opgaven at være, at en væltende skorsten, hvis den knækker i faldet, gør det i en tredjedels højde.

Mørtelens evne til at forhindre skridning imellem murstenslagene i skorstenen er som sagt ikke det størrelsesordensmæssigt afgørende i forhold til dens evne til at klistre lagene sammen, så de ikke vippes fra hinanden. Ifølge ligning (6) er der slet ikke nogen statisk gnidningskraft under faldet det sted i skorstenen, hvor knækket potentielt finder sted.

Kommentar

Litteraturen om skorstensknæk går mange år tilbage. I det mindste til 1905 (Routh, E.J.: Dynamics of a System of Rigid Bodies, Part 1, Dover, New York (1960), pp 124-125. Bogen er et genoptryk fra 1905.). Her og senere (f.eks. Reynolds, J. B.: Falling Chimney, *Am. J. Phys.*, **14**, p. 275 (1946) og Madsen, E. L.: Theory of the chimney breaking while falling, *Am. J. Phys.*, **45**, pp 182-184 (1977)) regnes skorstenen for at knække i det punkt, hvor kraftmomentudvekslingen imellem den øvre del og den nedre del er størst. Det svarer til at vi i ligning (7) finder maksimum for $(T+N)\cdot r$ som funktion af b. Og så er svaret, at den knækker i en tredjedels højde, alment gældende. Svaret afhænger ikke af opgavebesvarelsens indførte model med kun to kontaktpunkter mellem lagene i skorstenen. Det ses også, at vinkelafhængigheden i ligning (7) alment udgør en faktor for sig, således at knækstedet ikke afhænger af, hvornår i faldet skorstenen knækker. Men svaret en tredjedels højde afhænger af antagelsen om, at skorstenen har ens tværsnit hele vejen op. Med en anden skorstensform vil ligningerne i opgaveløsningen skulle justeres. I den justerede ligning (7) vil vinkelafhængigheden stadig være givet ved $\sin\theta$, men ganget med et andet polynomium i b. Knækpunktet vil være uafhængigt af, hvornår skorstenen knækker, men et andet end for skorstene med ens tværsnit fra top til bund.

Men måske er opgaveløsningens idealiserede model med maksimalt krav til T som knækpunktskriterium mere realistisk end idéen om, at skorstenen knækker, hvor kraftmomentudvekslingen imellem lagene er størst, uafhængigt af hvordan kræfterne imellem de to lag er fordelt. Som sagt i opgavebesvarelsen har ikke blot det samlede kraftmoment lagene imellem men også T maksimum for $b = 1/3$, forudsat at skorstenens bredde er forsvindende i forhold til dens højde. Hvis dette ikke er tilfældet skal T udledes ved kombination af ligningerne (7) og (8). Og så ses knækpunktet udover at fjerne sig fra $b = 1/3$ også at komme til at afhænge af, ved hvilken værdi af θ skorstenen knækker. I artiklerne (Bundy, F.P.: Stresses in Freely Falling Chimneys and Columns, *J. Appl. Phys.*, **11**, p 112 (1940) og Varieschi, G. and Kamiya, K.: Toy models for the falling chimney, *Am. J. Phys.*, **71**, pp. 1025-1031 (2003)) er der udført en del regninger desangående. Blandt andet har Bundy regnet på skorstenen på figur 1. Ved at tage højde for dens ikke forsvindende bredde og dens koniske form forklarer han, hvorfor skorstenen, som det ses på billedet, ved den forholdsvise lille vinkel, hvor knækket finder sted, nærmere knækker på midten end i en tredjedels højde. Forfatterne af den anden artikel har sammen med Jully, I.R. oprettet "The Falling Chimney Web Page"; http://myweb.lmu.edu/gvariescgi/chimney/chimney.html.

Så langt for regning på skorstensknækproblemet. Jeg har selv en del år spekuleret på dets løsning og egnethed som breddeopgave, fordi jeg erindrer at have set fænomenet både på gaden og på film. Men jeg har ikke på egen hånd kunnet finde ud af at takle problemet. Den præsenterede løsning af opgaven er i det væsentlige kopieret efter (David Morin: Introduction to Classical Mechanics, Cambridge University Press, pp 363-364, (2008)), hvor jeg tilfældigt første gang så den behandlet.

Opgaven har ikke været stillet som eksamensopgave ved Breddekurset på RUC. Den er for svær. Og det er ikke meningen med breddeopgaver, at lærerne herigennem skal kunne udfordre deres studerende med problemer, lærerne finder interessante uden selv at have hold på dem. Tværtimod skal de studerende under usikkerheden ved de ofte åbent og upræcist formulerede spørgsmål i breddeopgaverne kunne føle sig trygge ved, at i alle tilfælde læreren som opgavestiller har følt sig i stand til at fokusere spørgsmålene på en måde, der gør opgaverne løsbare.

Den skorstensknækopgave, der har været stillet (ved sommereksamen 2003 og uden figur 1) har denne ordlyd:

Når en høj skorsten bygget af mursten vælter, vil den i faldet ofte knække i to stykker (eller flere). Vil den øverste del falde forover eller bagover i forhold til den underste del. Begrund svaret.

Løsningen i artiklen her på problemet om, hvor skorstensknækket finder sted, startede med besvarelsen af denne mere overkommelige opgave.

I stedet for at være anvendelig som breddeopgave, er udfordringen at finde ud af, hvor skorstene knækker under fald, velegnet som udgangspunkt for et længerevarende projektarbejde, hvor det godt kan være en pointe, at læreren udfordres af projektets problem sammen med de studerende.

Breddeopgave 45 og 46. Afkølingstid

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra henholdsvis vintereksamen 2010 og vintereksamen 2005, nr. 45 og 46 i rækken her i KVANT):

Hvad er størrelsesordenen af tiden, det vil tage for varmen at fordele sig i en jernklump af Jordens størrelse med et opvarmet indre? I E. S. Johansens ældre lærebog i varmelære er der følgende data for jern: massefylde ved 18 °C: 7,86 g cm^{-3}, lineær udvidelseskoefficient mellem 0 °C og 100 °C: 0,0000125 $grad^{-1}$, varmefylde ved 18 °C: 0,111 cal $g^{-1} grad^{-1}$ og varmeledningsevne ved 18 °C: 0,20 cal $grad^{-1}$ cm^{-1} s^{-1}. Begrund svaret.

Når man sætter hånden på et stykke koldt metal mærkes en kraftig varmestrøm fra hånden ud i metallet. Hvordan ændrer varmestrømtætheden sig med tiden (til korte tider)? Begrund svaret ved en dimensionsanalyse.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Afkølingstid – breddeopgaver 45–46 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 45 og 46 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 45 og 46. Afkølingstid

Hvad er størrelsesordenen af tiden, det vil tage for varmen at fordele sig i en jernklump af Jordens størrelse med et opvarmet indre? I E. S. Johansens ældre lærebog i varmelære er der følgende data for jern: massefylde ved $18°\mathrm{C}$: 7.86 g cm^{-3}, *lineær udvidelseskoefficient mellem* $0°\mathrm{C}$ *og* $100°\mathrm{C}$: 0.0000125 grad^{-1}, *varmefylde ved* $18°\mathrm{C}$: 0.111 cal g^{-1} grad^{-1} *og varmeledningsevne ved* $18°\mathrm{C}$: 0.20 cal grad^{-1} cm^{-1} s^{-1}. *Begrund svaret.*

Når man sætter hånden på et stykke koldt metal mærkes en kraftig varmestrøm fra hånden ud i metallet. Hvordan ændrer varmestrømtætheden sig med tiden (til korte tider)? Begrund svaret ved en dimensionsanalyse.

Løsning

45. Opgaven kan løses ved dimensionsanalyse. Afkølingstiden, dvs. en karakteristisk tid indenfor hvilken varmen i jernklumpens indre fordeler sig, så temperaturen er den samme overalt, må alene afhænge af jernklumpens radius R, jernets varmefylde per volumen, c, og jernets varmeledningsevne k. Og måske af temperaturforskellen ΔT mellem centrum og overfladen af jernklumpen ved start. Hvis vi skulle løse opgaven mere eksakt ville vi nemlig stille en differentialligning op for temperaturen som funktion af afstand til centrum og tid ved at sætte forskellen mellem energistrømmen per tid ind og ud af to infinitesimalt adskilte kugleskaller lig med ophobningen af energi per tidsenhed i mellemrummet mellem kugleskallerne. Her er k bestemmende for størrelsen af energistrømmen og c bestemmende for energiophobningen. Herudover må løsningen til differentialligningen afhænge af temperaturvariationen karakteriseret ved ΔT som begyndelsesbetingelse og R på grund af randbetingelsen, at varmestrømtætheden i jernklumpens overflade skal være nul. Inputvariable, som afkølingstiden kan tænkes at afhænge af, er altså $k,\ c,\ \Delta T$ og R. Da dimensionen af k er givet ved [k] = M L T^{-3} K^{-1} og dimensionen af c ved [c] = M L^{-1} T^{-2} K^{-1}, kan en tid kun dannes ved en kombination af de fire inputvariable, hvis k og c indgår i kombinationen c/k, da dimensionen M ellers ikke udgår. Idet [c/k] = L $^{-2}$ T, fremgår det heraf, at den efterspurgte afkølingstid τ ikke kan afhænge af ΔT. Den eneste måde, hvorpå inputvariablene kan kombineres til en tid, er da:

$$\tau = aR^2\frac{c}{k}, \tag{1}$$

hvor a er et dimensionsløst tal. Indsættes materialeværdierne for jern fra opgaveteksten og $R = 6000$ km, fås $R^2\frac{c}{k}$ til at være $50 \cdot 10^9$ år.

46. Varmeledningsevnen af metallet er meget større end varmeledningsevnen af hånden. Derfor vil tempoet for varmeafgivelsen fra hånden til metallet være bestemt af varmestrømningen i hånden. Varmestrømtætheden af varmestrømmen fra hånden ud i metallet afhænger derfor tilsvarende til omstændighederne i opgave 45 af varmeledningsevnen k i hånden, og af håndens varmefylde per volumen, c. Men da hånden til korte tider fungerer som et uendeligt halvrum uden nogen karakteriserende længde, kan der i modsætning til i opgave 45 ikke findes nogen karakteristisk tid for fænomenet. Derimod kan vi godt ved dimensionsanalyse finde ud af, hvorledes varmestrømtætheden ved grænsefladen mellem hånd og metal, j, afhænger af $k,\ c$, temperaturforskellen ΔT mellem hånd og metal til en start, og tiden t, der er gået fra hånden blev sat på metallet. Idet dimensionen [j] = M T^{-3}, [k] = M L T^{-3} K^{-1}, [c] = M L^{-1} T^{-2} K^{-1}, [ΔT] = K og [t] = T, fås ved enkle regninger:

$$j(k, c, \Delta T, t) = b\Delta T\left(\frac{kc}{t}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

hvor b er et dimensionsløst tal. Varmestrømtætheden fra hånden ud i metallet ændrer sig altså med tiden som $t^{-\frac{1}{2}}$.

Kommentar

Uanset hvilken form man antager for temperaturfordelingen til t = 0, er det ikke nogen nem sag at besvare opgave 45 ved at løse varmeledningsligningen, dvs. finde temperaturen som funktion af tiden og afstanden til centrum. Jeg kunne i alle tilfælde ikke, før jeg fik hjælp til det af min kollega Tage Christensen. I første omgang kunne jeg dog hjulpet af min medlærer på Breddekurset, Poul Winther Andersen, uden at nå frem til det endelige resultat godt ud fra varmeledningsligningen og randbetingelsen, at varmestrømtætheden i overfladen skal være nul, uanset temperaturfordelingen til en start, argumentere for, at afkølingen finder sted med en henfaldstid af størrelsesordenen R^2c/k som fundet ved dimensionsanalysen. Ligeledes kan der generelt argumenteres for, at ΔT kun indgår som proportionalitetskonstant i udtrykkene for varmestrømtætheder og temperaturforskelle som funktioner af tid og sted i begge de to opgavesituationer. Det hænger sammen med, at varmeledningsligningen som differentialligning for $T(t, r)$ er lineær. Vi kunne derfor godt ved dimensionsanalyseløsningen af opgave 45 på forhånd have udeladt ΔT som inputvariabel.

Hvor tidsafhængigheden af varmestrømtætheden i opgave 45 kan beskrives ved hjælp af en karakteristisk henfaldstid, gælder det ikke for tidsafhængigheden af varmestrømtætheden, der er svar på opgave 46. Det er interessant, at det forhold, at løsningerne på de to opgaver nødvendigvis matematisk set må være kvalitativt forskellige, allerede fremgår af dimensionsovervejelser. Indgår der en karakteristisk længde i varmeledningsproblemet kan der dannes en karakteristisk tid. Det kan der derimod ikke, hvis der ikke indgår en karakteristisk længde i problemet.

I en tidligere artikel i KVANT har jeg i kommentarerne til breddeopgave 42 og 43 redegjort for, at det tidligere såkaldte Breddekursus på RUC siden 2007 har været niveaudelt i de to kurser “Fysisk problemløsning I” og “Fysisk problemløsning II” med hver sine tilhørende eksamener. Opgave 45 er en eksamensopgave fra eksamen i Fysisk problemløsning I. Den var derfor ment som en opgave, der skulle høre til i den nemmere ende af breddeopgavespektret. Og med det interessante resultat, at Jorden ikke er gammel nok til, at der har været tid til udjævning af temperaturforskelle, når der ses bort fra konvektion. Men opgaven viste sig både for svær og for nem.

Det var for nemt at få øje på, at besvarelsen lå gemt i en dimensionsanalyse. Af de lidt flere end 10, der var til eksamen, gik de fleste direkte i gang hermed. Men desværre på en ret så automatiseret måde. Således inddrog de fleste fejlagtigt den opgivne lineære udvidelseskoefficient i analysen. Den havde jeg opgivet i opgaveteksten, fordi den sammen med massefylden, varmefylden og varmeledningsevnen er netop de materialkonstanter for jern, der er data for i E. S. Johansens lærebog. Og fordi der skulle være lidt forhindring på vejen til dimensionsanalysen som rutineteknik, når nu relevante talværdier til at nå frem til resultatet $50 \cdot 10^9$ år var oplyst. Men rutinen lod sig altså ikke udfordre under eksamenspresset.

Under indtryk af de studerendes automatiserede måde at besvare opgave 45 til eksamen på har jeg i ovenstående løsning og kommentar til opgaven forsøgt at antyde, hvilken slags mere eller mindre eksplicitte overvejelser jeg selv oprindeligt må have lagt til grund, da jeg formulerede opgaven og fandt den overkommelig at besvare ved dimensionsanalyse. Og de ligger en del ud over, hvad der kan forventes af de studerende. På den vis var opgaven for svær. I modsætning til opgave 46 er den ikke en god breddeopgave. I opgave 46 (fra Tage Christensens hånd) inviteres der ikke på samme måde til rutineopførsel. På den anden side forudsætter opgave 46 ikke helt så megen kvalitativ erfaring med differentialligningsløsning som opgave 45.

Breddeopgave 47 og 48. Relativistisk bordtennis og neutronabsorption

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2010 og vintereksamen 2009, nr.47 og 48 i rækken her i KVANT):

Et bat bevæges imod en bordtennisbold kastet op til serv. Find ved en relativistisk beregning farten af bordtennisbolden umiddelbart efter at være blevet stødt til af battet. Begrund svaret.

En neutron med stor fart absorberes af en hvilende atomkerne. Med hvilken fart bevæger den nye atomkerne sig herefter? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Relativistisk bordtennis og neutronabsorption
– breddeopgaver 47 og 48 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 47 og 48 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 47 og 48. Relativistisk bordtennis og neutronabsorption

Et bat bevæges imod en bordtennisbold kastet op til serv. Find ved en relativistisk beregning farten af bordtennisbolden umiddelbart efter at være blevet stødt til af battet. Begrund svaret.

En neutron med stor fart absorberes af en hvilende atomkerne. Med hvilken fart bevæger den nye atomkerne sig herefter? Begrund svaret.

Løsninger

47. Lad os kalde farten battet bevæges med for v. Set fra battets system, der altså bevæger sig med farten v i forhold til bordtennisbordet, bevæger bordtennisbolden sig med den samme fart v i modsat retning før sammenstødet med battet. Idet battet regnes for tungt og vi regner stødet for elastisk, således at bordtennisbolden ikke mister energi ved stødet, bevæger bordtennisbolden efter stødet sig i forhold til battet med farten v i samme retning som battets bevægelse i forhold til bordtennisbordet. Farten af bordtennisbolden efter stødet i forhold til bordtennisbordet, w, fås herefter ved hastighedsaddition af battets fart i forhold til bordet med bordtennisboldens fart i forhold til battet:

$$w = \frac{v+v}{1+v\cdot v/c^2} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}, \tag{1}$$

hvor c er lysets hastighed.

48. Kaldes neutronens fart v, dens masse m, atomkernens masse før absorptionen af neutronen M, og den nye atomkernes masse og fart efter absorptionen af neutronen M^* og u, gælder på grund af henholdsvis impulsbevarelse og energibevarelse:

$$mv\gamma(v) = M^* u\gamma(u) \tag{2}$$

og

$$mc^2\gamma(v) + Mc^2 = M^* c^2\gamma(u), \tag{3}$$

hvor c er lysets hastighed og f.eks. $\gamma(v) = (\sqrt{1-v^2/c^2})^{-1}$ som sædvanlig. Herefter fås ved indsætning af $M^*\gamma(u) = m\gamma(v) + M$ fra ligning (3) i ligning (2):

$$u = \frac{mv\gamma(v)}{m\gamma(v)+M} = \frac{mv}{m+M\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{4}$$

som svar på opgaven. Grænsetilfældet $u = mv/(m+M)$ for $v^2/c^2 \to 0$ ses at stemme overens med den klassisk mekaniske beregning alene ud fra impulsbevarelse.

Kommentar

De studerende klarede opgave 47 forholdsvis godt til eksamenen. Men det hører med til billedet, at de forud i undervisningen havde været udsat for den urelativistiske variant af opgaven: set fra battet er der tale om, at bolden før stødet bevæger sig imod det med farten v og efter stødet bort fra det med farten v. Bordtennisboldens fart i forhold til bordet efter stødet er da summen af battets fart i forhold til bordet v og boldens fart i forhold til battet efter stødet v, dvs. $2v$, der også ses som grænsetilfældet for $v/c \to 0$ i ligning (1).

Opgaven kan også løses ved regning i bordtennisbordets system: Det tunge bat med massen M og farten v støder elastisk ind i den hvilende bordtennisbold med den lille masse m. Efter stødet har henholdsvis battet og bolden de to ukendte hastigheder y og w. Impulsbevarelsen og energibevarelsen giver så de to ligninger til bestemmelsen af de to ubekendte. Klassisk fås bordtennisboldens hastighed efter stødet via få mellemregninger at være:

$$w = \frac{2v}{1+m/M} \tag{5}$$

i overensstemmelse med $w = 2v$ i grænsen $m/M \to 0$.

Relativistisk fås bordtennisboldens hastighed efter stødet via ganske omfattende mellemregninger at være:

$$w = \frac{2v\gamma(v)(\gamma(v)+m/M)}{(\gamma(v)+m/M)^2+\gamma(v)^2v^2/c^2} \tag{6}$$

i overensstemmelse med ligning (5) for $v/c \to 0$ og ligning (1) for $m/M \to 0$.

Det er svært at forestille sig ret mange under eksamensforhold nå frem til ligning (1) som grænsetilfælde via ligning (6) og alle dens forudgående mellemregninger. Når de studerende klarede opgave 47 forholdsvis godt til eksamen var det derfor fordi de undlod det umiddelbart nærliggende, nemlig at regne i bordtennisbordets system. I stedet ræsonnerede de i battets system, som de i forvejen kendte fidusen ved i det klassiske tilfælde. Herved kom den relativistiske udvidelse af opgaven alene til at dreje sig om en ændret hastighedsaddition. Uden gennemgangen på kurset forud for eksamen af den klassiske version af opgaven havde de studerende formentlig haft meget svært ved opgave 47.

I modsætning til de studerende, der fik stillet opgave 47, klarede de studerende, der blev konfronteret med opgave 48 til eksamen, ikke opgaven særlig godt. Kun få af dem var klar over, at opgaven skulle løses ved at kombinere impulsbevarelse med energibevarelse uden at antage massebevarelse. Tværtimod analogiserede de fleste fejlagtigt med deres erfaringer med uelastiske klassiske stødprocesser, hvor impulsbevarelsen kombineres med massebevarelse og hvor mekanisk energibevarelse ikke kan gøres gældende. Formentlig i mangel på erfaring med at regne relativistisk på stødprocesser i den begrænsede tid, der er levnet til relativitetsteori på breddekurset (4 gange 3 timer). De studerende er blevet introduceret til masse-energi-ækvivalensen. Men de færreste har kunnet kombinere dette med deres klassiske viden om udviklingen af indre energi ved uelastiske stød.

Da min medlærer på breddekurset Poul Winther Andersen, der på det sidste har stået for relativitetsteoridelen af kurset, foreslog opgave 48 som eksamensopgave, vurderede jeg den til at være en regulær standardopgave. I modsætning til de studerende. Derimod var jeg betænkelig ved forslaget om opgave 47 som eksamensopgave, idet en overkommelig løsning af den jo som demonstreret helt hænger på, at man får ideen at analysere stødet i battets system. Men ifølge PWA ville det ikke falde de studerende svært at få den ide, da de under kurset havde gennemregnet det urelativistiske specialtilfælde. Og det fik han jo ret i.

Min pointe med at modstille de to opgaver i artiklen her er at eksemplificere, at hvad der er svært og hvad der er nemt, selvfølgelig afhænger af, hvad der er gået forud. Ved træning i løsning af en række opgaver, som alle er variationer over det samme tema, kan studerende manuduceres til at løse selv tilsyneladende meget vanskelige opgaver, hvis de er variationer tæt på det allerede indøvede. Opgave 47 er her ment som eksempel herpå. Omvendt vil studerende have svært ved selv tilsyneladende nemme opgaver, hvis det kræves, at de kombinerer viden på nye måder. Opgave 48 er her ment som et eksempel herpå.

Formålet med breddekurset er at lære de studerende "at tænke som en fysiker"i højere grad end at træne dem i et antal standardprocedurer. Samtidig er samlingen af hidtidige eksamensopgaver det definerende for kurset. Derfor skal opgaverne for de studerende udgøre udfordringer i at udbygge deres viden ved at kombinere den på nye måder. Og derfor prøver vi bevidst at undgå udvikling af typeopgaver ved at det samme tema gentages i for mange nærliggende variationer. Set i sammenhængen synes jeg derfor, at opgave 48 er en bedre breddeopgave end opgave 47.

Breddeopgave 49. Kapillarbølger

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2011, nr. 49 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 49. Kapillarbølger For korte bølgelængder er det overfladespændingen mere end tyngdekraften, der er bestemmende for overfladebølgers opførsel. Hvordan afhænger udbredelsesfarten af disse såkaldte kapillarbølger af deres bølgelængde? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kapillarbølger – breddeopgave 49 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 49 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 49. Kapillarbølger

For korte bølgelængder er det overfladespændingen mere end tyngdekraften, der er bestemmende for overfladebølgers opførsel. Hvordan afhænger udbredelsesfarten af disse såkaldte kapillarbølger af deres bølgelængde? Begrund svaret.

Løsning

Overfladebølger er et bevægelsesfænomen, der grundlæggende er styret af Newtons anden lov. Opskrivning af masse gange acceleration må nødvendigvis inddrage væskens massefylde ρ. Og i tilfældet kapillarbølger må kraftsiden af loven afhænge af væskens overfladespænding γ. Udover ρ og γ som inputvariable kan kapillarbølgernes udbredelsesfart tænkes at afhænge af deres amplitude (en længde) og af deres bølgelængde λ. Grænsetilfældet, hvor amplituderne er små i forhold til bølgelængderne, kan derfor udregnes ved dimensionsanalyse med ρ, γ og λ som inputvariable. Idet $[\rho] = \mathrm{M{\cdot}L^{-3}}$, $[\gamma] = \mathrm{M{\cdot}T^{-2}}$ og $[\lambda] = \mathrm{L}$ ses det, at

$$v = \mathrm{tal} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\rho\lambda}} \qquad (1)$$

er den eneste mulige kombination af ρ, γ og λ til en størrelse med dimensionen fart. Svaret på opgaven er altså, at udbredelsesfarten af kapillarbølger er omvendt proportional med kvadratroden af deres bølgelængder.

Kommentar

Hvor kraftsiden af Newtons anden lov for kapillarbølger afhænger af γ, afhænger den for tyngdebølger af tyngdefeltstyrken g. Herudover skulle man umiddelbart for tyngdebølger på dybt vand på samme måde som for kapillarbølger forvente, at deres fart afhænger af ρ, λ og deres amplitude. For grænsetilfældet, hvor amplituderne er små i forhold til bølgelængderne, giver dimensionsanalysen så:

$$v = \mathrm{tal} \cdot \sqrt{g\lambda}. \qquad (2)$$

For tyngdebølger er farten således alligevel uafhængig af ρ. Denne uafhængighed er generel for fænomener styret af specielt tyngdekræfter på kraftsiden af Newtons anden lov, fordi indgående masser netop da forkortes væk på de to sider af loven.

Vi har kunnet stille eksamensopgaven om kapillarbølger, fordi vi som noget nyt har indlagt en kursusgang i den forudgående undervisning om overfladespænding. Da overfladespænding spiller en vigtig rolle i både biofysiske og nanoteknologiske sammenhænge, har vi syntes at emnet hører med til en bred introduktion til fysik, den stigende fokus på biofysik og nanoteknologi taget i betragtning. Breddekurset (nu = Fysisk problemløsning I + Fysisk problemløsning II) på RUC er således udover at være rettet mod kompetencen fysisk problemløsning også pensumtænkt.

Helt fra starten og ved den første eksamen i breddekurset sommeren 1976 har opgaverne så vidt muligt været formuleret i dagligdags sprog ud fra den opfattelse, at det væsentligste udbytte af fysikundervisning først opnås gennem opøvelsen af evnen til aktiv anvendelse af tillærte begreber og forståelsesmåder på ikke i forvejen velkendte eller tilrettelagte problemer. Forestillingen har været, at denne evne til aktiv begrebsanvendelse er af overgribende karakter i forhold til de enkelte fysikemner. Senere har breddekursets formål således været annonceret som et tilbud om at lære de studerende at tænke som fysikere, hvor indfrielsen af formålet ikke er bundet op på pensummet, men på måden der arbejdes med pensummet på. Med den seneste omdøbning af Breddekurset til Fysisk problemløsning (I og II) er det kompetencerettede i kurset yderligere understreget.

Men som opgaven her illustrerer, har og har kurset altid haft også en pensuminddækningsopgave. Kurset er det af kurserne på fysikuddannelsen på RUC, hvor der udover mekanik, termodynamik og statistisk mekanik, elektrodynamik og kvantemekanik dyrket i dybden i de øvrige kurser også bliver orienteret lidt om f.eks. relativitetsteori, hydrodynamik, geometrisk optik, astrofysik og kernefysik blandt andre emner, der ikke tages op i de øvrige kurser, men af os regnes som noget en fysiker bør være orienteret i det mindste en smule om. Navnet “Breddekursus” refererede til denne funktion. Og nu har vi altså bredt os ud til også at inddrage overfladespænding i pensummet.

Jeg nævner disse RUC specifikke forhold som illustration til diskussionen om kompetence- versus pensumtænkning ved undervisningstilrettelæggelse. Forveksler man pensum med faglighed, og tror man, at tilrettelæggelse af undervisning er det samme som at fastlægge et pensum – så viser man efter min vurdering symptomer på pensumitis (jævnfør Jens Højgaard Jensen, Faglighed og pensumitis, Undervisningsministeriets tidsskrift Uddannelse, november 1995). Men at enøjet pensumdyrkelse er en sygdom betyder ikke, at pensum som sådant er noget sygt. Der er naturligvis ikke nogen modsætning imellem pensum som sådant og kompetenceorientering som sådan. Det ville – med et lån fra min kollega Mogens Niss – være som at modstille ordforråd og sprogbeherskelse. Uden ordforråd ingen sprogbeherskelse. Men sprogbeherskelse er meget mere end ordforråd. Den egentlige pædagogiske konflikt er derfor nærmere om ordforrådet tænkes udbygget forud for sprogtræningen eller det forsøges erhvervet integreret i den. I Breddekurset inddrages nyt pensum i høj grad gennem nye kompetenceorienterede opgaver.

Breddeopgave 50 og 51. Mikroelektronik

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 1978 og sygeeksamen september 1987, nr. 50 og 51 i rækken her i KVANT):

Ved fremstillingen af integrerede kredsløb i elektronikindustrien nedprojiceres ønskede mønstre fra en stor skabelon på kredsløbsmatrixen (areal ca. $1\,\mathrm{mm}^2$*) via brug af lysfølsom lak på denne. Vurder en mindste tykkelse af ledningerne i integrerede kredsløb. Begrund vurderingen.*

For at fremstille integrerede mikroelektronikkredse benyttes nu ofte elektronstråler, fordi man var nået til en nedre grænse for komponenternes størrelse ved brug af lys ved nedprojiceringen af kredsløbsmønstrene. Hvor stor en bevægelsesenergi har elektronerne mindst? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Mikroelektronik – breddeopgave 50 og 51 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 50 og 51 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 50 og 51. Mikroelektronik

Ved fremstillingen af integrerede kredsløb i elektronikindustrien nedprojiceres ønskede mønstre fra en stor skabelon på kredsløbsmatrixen (areal ca. 1 mm^2*) via brug af lysfølsom lak på denne. Vurder en mindste tykkelse af ledningerne i integrerede kredsløb. Begrund vurderingen.*

For at fremstille integrerede mikroelektronikkredse benyttes nu ofte elektronstråler, fordi man var nået til en nedre grænse for komponenternes størrelse ved brug af lys ved nedprojiceringen af kredsløbsmønstrene. Hvor stor en bevægelsesenergi har elektronerne mindst? Begrund svaret.

Løsninger

50. En ledning i det integrerede kredsløb modsvares af en spalte i skabelonen. (Den lysfølsomme lak på kredsløbsmatrixen ætses for pådampning af metal der, hvor lyset fra spalten rammer kredsløbsmatrixen.) Nedprojiceringen sker ved hjælp af en linse. Ved lysets gennemgang af både spalte og linseåbning sker der diffraktion af lyset. Den detaljerede konsekvens heraf for fokuseringen af belysningen af kredsløbsmatrixen afhænger af detaljerne i nedprojiceringsopstillingen. Kaldes lysets bølgelængde λ og linseåbningens diameter d medfører linseåbningens begrænsede udstrækning alene en diffraktionsspredning af lysets retning af størrelsesordenen λ/d. Hvis afstanden mellem linsen og matrixen er L vil der derfor ikke kunne afbildes linjer tyndere end $L\lambda/d$ på kredsløbsmatrixen. Da linser har brændvidder af størrelsesordenen radius af deres indgående kugleoverflader, og det derfor er svært at tænke sig L mindre end d, er den mindste tykkelse af ledningerne således størrelsesordensmæssigt lig med lysets bølgelængde λ.

51. Elektronstråler udviser diffraktion på samme måde som lys ved nedprojiceringen af kredsløbsmønstrene. Hvis brugen af dem skal være en forbedring i forhold til at bruge lys, skal elektronernes de Broglie bølgelængde $\lambda_e = h/p$ (h er Plancks konstant, p elektronernes impuls) derfor være mindre end lysets bølgelængde λ_{lys}. Det betyder, at elektronernes bevægelsesenergi mindst skal være:

$$E_{\min} = \frac{h^2}{2m_e\lambda_{\text{lys}}^2}, \tag{1}$$

hvor m_e er elektronens masse. Indsættes værdierne for h og m_e sammen med $\lambda_{\text{lys}} = 500$ nm fås $E_{\min} = 6 \cdot 10^{-6}$ eV. Det er mange størrelsesordener under fx elektronernes termiske energier ved stuetemperatur. Det er således ikke kravet til elektronernes bevægelsesenergi, der sætter grænser for denne teknologi.

Kommentar

Breddeopgave 50 om fremstilling af integrerede kredsløb ved nedprojicering af en skabelon ved hjælp af lys er fra vintereksamen 1978. Det var dengang mikroelektronik var i sin vorden og hvor f.eks. DTU havde det særskilte "Laboratoriet for elektroniske Halvlederkomponenter", hvor man arbejdede med den teknik. Breddeopgave 51 er fra sygeeksamen september 1987, hvor den optiske teknik allerede de små ti år efter er blevet erstattet af at benytte elektronstråler. Både 1978 og 1987 er før mikroelektronikudviklingen samfundsmæssigt rigtig tog fart med personlige computere, e-mails og internet.

Der er således langt fra de teknologiske kontekster, som de to breddeopgaver blev formuleret i, til dagens mikroelektroniske virkelighed. Men det, at opgaverne derfor er en slags historiske levn, gør dem ikke dårlige at bruge på breddekurset. De afgørende fysikforståelser – i dette tilfælde angående diffraktion og elektroners bølgeegenskaber – er jo anderledes stabile end de teknologiske anvendelser af forståelserne. Tværtimod at være en ulempe anser jeg opgavernes manglende teknologiske aktualitet for at være en fordel af to grunde.

For det første har teknologihistorisk viden på linje med historisk viden i det hele taget værdi ved belysning af mange slags sammenhænge. Herunder sammenhænge imellem fysikudviklinger og teknologiudviklinger. Mikroelektronikeksemplet her viser, hvor forskellige udviklingstempiene for fysik og teknologi kan være.

For det andet bidrager opgavernes karakter af historiske levn til deres autencitet.

Hele samlingen af breddeopgaver (kan findes på nettet som IMFUFA tekst nr. 482) består, bortset fra en mindre samling af 68 træningsopgaver fra starten af det såkaldte “Breddekursus” på RUC i 1976, af de 597 opgaver, der har været stillet til eksamen siden. Undervisningen tidligere i Breddekurset og nu i dets afløsere Fysisk problemløsning I og Fysisk problemløsning II byggede og bygger først og fremmest på denne opgavesamling. Det gør det pædagogiske plot enkelt. Som i svømmeundervisning, hvor formålet med undervisningen er klart for alle involverede parter, nemlig at eleverne skal lære at svømme. På tilsvarende måde skal de studerende ved at løse breddeopgaverne lære at “tænke som fysikere”. Og at tænke som fysikere identificeres så med at være i stand til at løse den slags uformaliserede opgaver, som de har været stillet til deres forgængeres eksaminer. Ved udformningen af opgaverne er det tilstræbt, at beståkriterierne bliver sammenfaldende med formålet med undervisningen. Det er heri enkeltheden i det pædagogiske plot ligger. Vanskeligheden er så naturligvis at udforme eksamensopgaver, der kan leve op til denne dagsorden.

I betragtning af, at de tidligere eksamensopgaver således er undervisningens centrale orienteringspunkt fra start til slut, er det vigtigt, at de vedrører virkelige, ikke tænkte, problemstillinger, og derved opleves autentiske og motiverende. Autenciteten af breddeopgaverne 50 og 51 ligger dels i, at de faktisk har været brugt som eksamensopgaver, dels i, at de vedrører en mikroelektronikudvikling, der faktisk har fundet sted. Breddeopgavesamlingen er i det hele taget et historisk dokument både vedrørende fysikeksaminerne og tiden de har fundet sted i.

Breddeopgave 52. Kræftvækst

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2008, nr. 52 i rækken her i KVANT):

52. *Tilvæksten af kræftceller per tid er for en kræftsvulst proportional med kræftsvulstens overflade. Hvordan vokser kræftsvulsten med tiden? Begrund svaret..*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kræftvækst – breddeopgave 52 med didaktisk kommentar

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 52 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 52. Kræftvækst

Tilvæksten af kræftceller per tid er for en kræftsvulst proportional med kræftsvulstens overflade. Hvordan vokser kræftsvulsten med tiden? Begrund svaret.

Løsning

Vi antager ens form af kræftsvulsten, når den er stor og lille. Så vil dens overflade være proportional med $V^{\frac{2}{3}}$, hvis V er dens volumen. Altså gælder:

$$\frac{dV}{dt} = K_1 \cdot V^{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

eller $V^{-\frac{2}{3}} dV = K_1 \cdot dt$, som ved integration giver:

$$V = K_2 \cdot t^3, \tag{2}$$

hvis t regnes fra det tidspunkt, da svulsten var forsvindende lille (Hvad værdierne af konstanterne K_1 og $K_2 = (K_1/3)^3$ er, er et medicinsk problem).

Kommentar

I min undervisning introducerer jeg blandt andet kurserne, som er bygget op omkring breddeopgaverne, ved hjælp af følgende karakteristik af den ikke eksperimentelle side af fysik:

Fysik kan karakteriseres ved fagets begrænsede række af matematisk formulerede teoribygninger. Mekanik, speciel og generel relativitetsteori, hydrodynamik og elasticitetsteori, termodynamik og statistisk mekanik, elektrodynamik, kvantemekanik og kvanteelektrodynamik. I modsætning hertil er matematik ifølge min matematikkollega Mogens Niss som et selvgenererende svampemycelium uden en endelig afgrænsning. Hvorimod fysik altså har en endelig kanon af teoribygninger. Og denne kanon udgør en fælles referenceramme for fysikere opbygget gennem deres uddannelse. Kanonen kan aflæses af lærebøgerne.

Fysik kan også karakteriseres ved de emner fysikere forsker i. Elementarpartikelfysik, kernefysik, atom- og molekylfysik, kondenseret stofs fysik, geofysik, astrofysik, biofysik. Det er en karakterisering vinkelret på teoribygningskarakteriseringen. Der forskes ikke i særlig høj grad i udviklingen af teoribygningerne. Der er mere tale om, at de forskellige emner studeres med varierende afsæt i den allerede eksisterende kanon. Normalt oplever fysikstuderende denne dimension af fysik i deres specialearbejde. Der oplever de også, at fysikere samtidigt på den ene side har meget til fælles i kraft af deres fælles teoribygningskanon og på den anden side er meget opsplittede og specialiserede i forhold til deres forskningsemner. Rækken af fysikforskningsemner kan fx aflæses af indholdsfortegnelsen til Physics Abstracts.

Endelig kan fysik karakteriseres ved den måde fysikere tænker på. Start enkelt. Vælg den simplest mulige model og regn først på den. Fanger den essensen? Hvis ikke så komplicer gradvist indtil essensen er fanget. Men komplicer ikke mere end nødvendigt. Det er den typiske måde for fysikere at nærme sig et problem på. Og tænkemåden kan få os fysikere til på andre at virke som nogen der bilder sig ind, at de i princippet forstår alle mulige ting, som de ikke i praksis har fod på. Men faktisk har fysikeres måde gennem matematisk modellering at nærme sig problemer på undertiden vist sig produktiv i både kemi, datalogi, molekylærbiologi, geologi, geografi, økonomi, finansiering, trafikregulering og mange slags ingeniørfag. Og tænkemåden har jo rødder langt tilbage i historien. I fx Platons hulemetafor er pointen den samme som i fysikertænkning. Stands ikke op ved at iagttage skyggerne af personerne på væggen modsat huleåbningen, som du sidder med ryggen til. Skyggerne er blot fremtrædelser. Essensen er personerne. Og det er personerne du skal nå frem til en erkendelse af gennem dine iagttagelser af skyggerne. At fysik i nyere tid er kommet til at stå som faget, der i udpræget grad inkarnerer essensorienteringen ses fx af Karl Marx's forord til hans hovedværk Kapitalen. Han siger blandt andet heri, at nogen har fremført, at hans analyse af det kapitalistiske samfund ikke rækker til at beskrive datidens Tyskland og alene er en beskrivelse af datidens England. Og til dem siger han, at han opererer som fysikeren (Galilei), der undersøger det frie fald ved at måle på faldet af en sten og ikke et blad. Og herved finder frem til essensen i det frie fald, som også er styrende for bladets fald uanset luftmodstandens modifikationer. På samme måde er studiet af datidens

England det, der kan føre frem til forståelsen af de drivende kræfter bag også Tysklands udviklinger.

Den ikke eksperimentelle side af fysik kan altså både karakteriseres ved fysikkens række af teoribygninger, fysikforskningens emneområder og fysikeres måde at tænke på. Da kurserne bygget op omkring breddeopgaverne på RUC primært har til formål at lære de studerende at tænke som fysikere, sekundært at lære dem noget fysik, giver det mening ind imellem at stille eksamensopgaver i matematisk modellering, som opgaven om kræftvækst her. Det er en fysikeropgave, selvom det ikke er en fysikopgave.

Breddeopgave 53. Kulde og temperatur

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2011, nr. 53 i rækken her i KVANT):

Når det blæser, fryser man mere i kulden, end når det er vindstille. Hvorfor påvirker blæsten ikke udendørstermometerets visning? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kulde og temperatur – breddeopgave 53 med didaktisk kommentar

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret og dels udvælges de med henblik på didaktiske overvejelser af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning, men der kan måske trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra KVANT nr. 4, 2012, samt en ny opgave. Opgaven var denne breddeopgave (nr. 53 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 53. Kulde og temperatur

Når det blæser, fryser man mere i kulden, end når det er vindstille. Hvorfor påvirker blæsten ikke udendørstermometerets visning? Begrund svaret.

Løsning

Et termometer måler temperaturen, som ikke afhænger af om det blæser eller ej, medmindre termometeret er fugtigt. Helt anderledes er det med spørgsmålet om at fryse eller ej. Det afhænger af varmestrømmen bort fra ens krop. Hvis den omgivende luft har samme temperatur som ens krop er varmestrømmen nul. Så varmestrømmen afhænger af, hvor koldt det er. Men varmestrømmen afhænger også af, hvor hurtigt den opvarmede luft i nærheden af ens krop ombyttes med kold luft, altså af hvor meget det blæser. For et tørt termometer er der ingen varmestrøm mellem det og den omgivende luft, da termometeret og luften har samme temperatur.

Kommentar

Den forrige artikel i rækken her handlede om en breddeopgave om kræftvækst. I den sammenhæng pointerede jeg, at den ikke eksperimentelle fysik udover at kunne karakteriseres ved fysikkens række af teoribygninger og fysikforskningens emneområder også kan karakteriseres ved fysikeres måde at tænke og løse problemer på. Og at opgaven om kræftvækst derfor er relevant som fysikeropgave, selvom det ikke er en fysikopgave.

Fysikeres træning i at modellere fænomener ved at indfange deres væsenstræk i så enkel matematik som muligt, giver dem en kompetence, som er anvendelig udover i fysikken selv. Det er oftest denne kompetence, mere end specifikke fysikforståelser, der gør fysikere anvendelige i andre faglige sammenhænge end fysik. Kurserne på RUC, der er bygget op omkring breddeopgaverne, sigter i høj grad på at udvikle fysikeres karakteristiske matematiske modelleringskompetence hos de studerende. Man kan så spørge, om kurserne overhovedet behøver at inddrage fysik, hvis modelleringskompetencen er deres afgørende formål? Kunne de ikke lige så godt basere sig på opgaver tilsvarende den om kræftvækst?

Min pointe med at bringe opgaven om kulde og temperatur i artiklen her som modsætning til opgaven om kræftvækst er at tydeliggøre, at kurserne trods alt er en del af en fysikuddannelse, og at fysik selvfølgelig har potentialer udover at være øvelsesterræn for matematisk modellering. Opgaven om kulde og temperatur er således renset for matematisk modellering. Den handler alene om at udrede begreberne temperatur og varmetransport fra hinanden. Altså noget grundlæggende fysisk begrebsforståelse.

Til min lettelse havde de studerende styr på begreberne ved eksamen. Men det var jeg ikke sikker på på forhånd. Hos ikke fysikere hersker der oftest begrebsforvirring angående temperatur og varmestrøm. Det oplevede jeg f.eks., da vi i min ejerlejlighedsforening fik lovpligtige varmemålere på vores radiatorer. Min og min kones varmeregning var pludselig meget højere end varmeregningerne for både de, der boede over os, og de, der boede under os, i lejligheder magen til vores og med samme ydermursisoleringer. Hvis den højere varmeregning skulle være retvisende måtte vi være nogle større varmesvin, end vi kunne forestille os. I de lag af varmemålerfirmaerne, som jeg var i stand til at komme i forbindelse med, og hvor der ikke skelnedes imellem begreberne varme og temperatur, var der ikke nogen hjælp at hente til en forklaring. Den forklaring på vores "overforbrug", jeg selv kunne nå frem til var, at det der måles og det man betaler for ikke er varme tappet af radiatorerne, men en temperaturforskel gange tid gange radiatorareal. I vores lejlighed sidder radiatorerne i mindre grad under vinduerne og var i højere grad dækket af marmorplader og indhegnet af trærammer end i lejlighederne ovenover og nedenunder os. Det førte til høj radiatortemperatur uden tilsvarende varmeforsyning. Efter af have frilagt radiatorerne, således at der af sig selv cirkulerer mere luft omkring dem, faldt vores varmeregning. Formentlig vil man med de nuværende "varmemålere"spare penge ved at sætte blæsere på radiatorerne. Formentlig fungerer lovgivningen om obligatoriske "varmemålere"som energibesparelses incitament i kraft af den manglende skelnen mellem temperatur og varme hos de fleste.

Fysisk begrebsforståelse (eller manglende begrebsforståelse) kan således have praktisk betydning uden at være koblet til matematisk modellering. Men det ændrer ikke ved, at fysik som øvelsesterræn for modelleringskompetence kan tillægges afgørende betydning i forhold til samfundsanvendeligheden af fysikuddannelser. Kunne øvelsesterrænet ikke lige så godt findes i andre fag? Jo i den udstrækning deres udøvere har kompetencen. F.eks. er det på HTX i høj grad ingeniører, der leverer varen. Men i det almene gymnasium er det først og fremmest fysiklærerne, der inkarnerer modelleringskulturen.

Breddeopgave 54. Rekyl

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sygeeksamen september 1987, 2011, nr. 54 i rækken her i KVANT):

Rekylvirkningen på de anslåede atomer i en lysende gas ved lysudsendelse medfører en svag afvigelse af frekvensen af det udsendte lys i forhold til den frekvens, der svarer til forskellen mellem atomernes hvileenergi før og efter lysudsendelse. Hvor stor en afvigelse er der tale om? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Rekyl – breddeopgave 54 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 54 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 54. Rekyl

Rekylvirkningen på de anslåede atomer i en lysende gas ved lysudsendelse medfører en svag afvigelse af frekvensen af det udsendte lys i forhold til den frekvens, der svarer til forskellen mellem atomernes hvileenergi før og efter lysudsendelse. Hvor stor en afvigelse er der tale om? Begrund svaret.

Løsning

Vi kalder forskellen mellem atomernes hvileenergi før og efter lysudsendelse for ΔE og deres hvilemasse i grundtilstanden M. For et atom i hvile før lysudsendelse vil atomets hastighed v efter lysudsendelse på grund af impulsbevarelsen under lysudsendelse være givet ved $Mv = h\nu/c$, hvis vi regner urelativistisk. Her er h Plancks konstant, ν frekvensen af det udsendte lys og c lyshastigheden. Da afvigelsen af ν fra $\nu_0 = \Delta E/h$ er svag gælder $Mv \approx \Delta E/c$. Størrelsen af den kinetiske energi af det rekylerende atom er derfor tilnærmelsesvis:

$$R = \frac{1}{2}Mv^2 \approx \frac{\Delta E^2}{2Mc^2}. \tag{1}$$

For frekvensafvigelsen har vi tilsvarende:

$$\nu_0 - \nu = \frac{R}{h} \approx \frac{\Delta E^2}{2Mhc^2}. \tag{2}$$

Kommentar

Min far, Henning Højgaard Jensen, holdt i perioden 1952-1960 første års forelæsningerne i fysik på Polyteknisk Læreanstalt (nuværende DTU). Da der var ca. 500 tilhørere per årgang, har omkring 4000 studerende hørt disse forelæsninger. Det store antal gør, at jeg har haft fornøjelsen af tilfældigt at træffe enkelte af dem ind imellem. Jeg får så typisk fortalt to anekdoter fra min fars forelæsninger. Den ene er en typisk professor anekdote: Det hændte, når min far stak sin tændte pibe i jakkelommen for at begynde forelæsningen, at der gik ild i lommen. Denne anekdote har ikke noget med breddeopgaven her at gøre. Men det har den anden: Min far skulle efter sigende have rådet til, at “tilnærmelser skal gøres på så sent et stadium som muligt”. Og efter sigende have været uforstående overfor, at det skulle kunne opfattes morsomt af en forsamling unge studerende. Senere, når han blev mindet om sin tilnærmelses grundsætning, forstod han jo nok tvetydigheden i den. Ved løsningen af opgaven her er der gjort tilnærmelser på et tidligt stadium. Dels er der regnet urelativistisk, hvilket jo er en tilnærmelse, der kræver en begrundelse. Dels er impulsen af det udsendte lys som tilnærmelse sat til $\Delta E/c (= h\nu_0/c)$ i stedet for $h\nu/c$.

Lad os prøve at følge min fars anbefaling ved først at droppe impulstilnærmelsen, dernæst regne relativistisk. Og så gøre tilnærmelser slutteligt.

Urelativistisk uden tilnærmelser herudover har vi, at impulsbevarelsen $Mv = h\nu/c$ indsat i energibevarelsen $\Delta E = h\nu + \frac{1}{2}Mv^2$ giver:

$$\left(\frac{h\nu}{Mc^2}\right)^2 + \frac{2h\nu}{Mc^2} - \frac{2\Delta E}{Mc^2} = 0 \tag{3}$$

til bestemmelse af ν og afvigelsen af ν fra ν_0. Med forkortelserne $y = h\nu/Mc^2$ og $x = \Delta E/Mc^2$ er løsningen til denne andengradsligning (idet kun denne rod giver fysisk mening):

$$y(x) = -1 + \sqrt{1 + 2x}. \tag{4}$$

Til bedømmelse af afvigelsen imellem y og x, som opgaven nu går ud på at finde, rækkeudvikles ligningen:

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 - .... \tag{5}$$

Relativistisk har vi $Mv\gamma(v) = h\nu/c$ og $Mc^2 + \Delta E = h\nu + Mc^2\gamma(v)$ til erstatning af de klassiske udgaver af bevarelsessætningerne. $\gamma(v)$ er som sædvanlig en forkortelse for $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Efter nogen regning fås heraf med de samme betydninger af y og x som i det klassiske tilfælde:

$$y(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \tag{6}$$

med rækkeudviklingen:

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5 - .... \quad (7)$$

At nøjes med at medtage det første led i rækkeudviklingerne (5) og (7) ses at svare til at se bort fra rekyl. At nøjes med at medtage de to første led i rækkeudviklingerne ses at svare til den tilnærmelsesvise bestemmelse af rekylen i ligning (1). Det ses også, at en forbedret rekylbestemmelse, svarende til at medtage det tredje led i rækkeudviklingerne, giver samme resultat relativistisk og urelativistisk. Først hvis vi medtager det fjerde led i rækkeudviklingerne er der forskel imellem at regne relativistisk og urelativistisk. Den tilnærmelse, der lå i at sætte impulsen af det udsendte lyskvant til at være $h\nu_0/c$, er altså større end den, der ligger i at regne urelativistisk frem for relativistisk.

Nu må stadiet, hvor vi kan overskue berettigelsen af varierende grad af tilnærmelser, være nået.

Da hvileenergien af en nukleon er ca. 1000 MeV, ligger Mc^2 for et atom med fra 1 til 100 gange massen af en nukleon i størrelsesordens intervallet 10^9 eV til 10^{11} eV. Den typiske energi for et lyskvant og værdien af ΔE er af størrelsesordenen 1 eV. Derfor er $x = \Delta E/Mc^2$ et tal i størrelsesordensintervallet $10^{-9} - 10^{-11}$. Rekylenergien R er altså størrelsesordensmæssigt 10^{-9} til 10^{-11} gange ΔE. Tilsvarende er den relative tilnærmelsesfejl i udtrykkene (1) og (2) af størrelsesordenen 10^{-9} til 10^{-11}. Medens forbedringerne af udtrykkene (1) og (2) ved at regne relativistisk frem for urelativistisk ses at ligge på et sted mellem 18ende og 22ende betydende ciffer.

Tilnærmelserne gjort i begyndelsen af opgavebesvarelsen oven for er altså i høj grad berettigede. Det vil de endda være ved emission af gammastråling i forbindelse med kerneovergange. Energien af den ofte benyttede anslåede tilstand af Fe-57 til Mössbauer-effekt studier er f.eks. 14,4 keV og x tilsvarende da et tal i størrelsesordensintervallet 10^{-5} til 10^{-7}. Altså stadig et meget lille tal.

Den trænede i fysisk problemløsning vil nok starte med at vurdere størrelsen af x og så i opgaven her med det samme foretage tilnærmelserne som gjort. Og ikke på et så sent stadium som muligt, som anbefalet af min far. Men for den utrænede tror jeg hans anbefaling er rigtig. Et resultat er ikke meget værd, hvis ikke usikkerheden på det kendes. Derfor er bevidste vurderinger af fejlene, der indføres ved idealiseringer og tilnærmelser vigtige. Og min fars anbefaling bidrager til, at vurderingsevnen af rimeligheden af tilnærmelser trænes.

På kurserne i fysisk problemløsning på RUC har jeg i sammenhæng med rekylopgaven også tematiseret rækkeudviklingerne ovenfor som eksempel på, hvordan den matematiske teknik “rækkeudvikling” tages i brug i fysik. I det hele taget er der behov for undertiden at adressere forskellige slags matematiske standardværktøjer. En ting er at være matematisk introduceret til udvikling af funktioner i en Taylorrække. En anden ting er at blive en rutineret anvender af rækkeudvikling.

Breddeopgave 55. Stigefald

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 2011, nr. 55 i rækken her i KVANT):

En person befinder sig i toppen af en næsten lodret stående stige. Stigen begynder at vælte. Slår personen sig mindst i faldet ved at holde fast i stigen under faldet, eller ved at give slip på stigen? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Stigefald – breddeopgave 55 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 55 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 55. Stigefald

En person befinder sig i toppen af en næsten lodret stående stige. Stigen begynder at vælte. Slår personen sig mindst i faldet ved at holde fast i stigen under faldet, eller ved at give slip på stigen? Begrund svaret.

Løsning

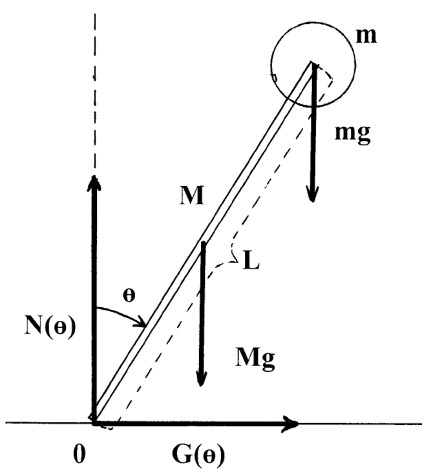
Farten $v_{\text{spids,slut}}$, hvormed personen rammer jorden, når hun/han holder fast i stigen under faldet, kan udregnes ud fra energibevarelsen under faldet. Hvis I_0 betegner inertimomentet omkring stigens fodpunkt, ω_{slut} vinkelfrekvensen af stigen, når den rammer jorden, m massen af personen, M massen af stigen, g tyngdefeltstyrken, og L længden af stigen, har vi:

$$\frac{1}{2}I_0\omega_{\text{slut}}^2 = mgL + \frac{1}{2}MgL, \qquad (1)$$

eller

$$\frac{1}{2}(m + \frac{1}{3}M)v_{\text{spids,slut}}^2 = (m + \frac{1}{2}M)gL, \qquad (2)$$

idet $I_0 = mL^2 + \frac{1}{3}ML^2$ og $\omega_{\text{slut}}L = v_{\text{spids,slut}}$.



Af ligning (2) fås:

$$v_{\text{spids,slut}} = \sqrt{\frac{(m + \frac{1}{2}M)}{(m + \frac{1}{3}M)}}\sqrt{2gL}. \qquad (3)$$

Den anden faktor i dette udtryk for $v_{\text{spids,slut}}$ er personens hastighed ved et frit fald, når jorden rammes. Da den første faktor er større end 1 ses det, at personen slår sig mere ved at holde fast i stigen under faldet end ved at give slip på stigen og falde frit.

Kommentar

Den anførte løsning var, hvad vi havde i tankerne, da vi stillede opgaven til vintereksamen 2011. Desværre er løsningen forkert. Den ville være rigtig, hvis stigen var fæstnet til et hængsel i fodpunktet. Men normalt står stiger jo frit på jorden. Og så flytter fodpunktet sig typisk langs jorden ved slutningen af faldet. Det ses f.eks. ved faldet af en lineal stillet på højkant. På mit glatte skrivebord flytter fodpunktet sig imod faldretningen, når jeg stiller linealen på bordet før jeg lader den falde. Hvis jeg stiller den på et mindre glat stykke papir ender den derimod med at flytte fodpunktet i faldretningen. I ingen af tilfældene er fodpunktet et fast punkt under hele faldet. Til at begynde med roterer linealen om sit fodpunkt. Men mod slutningen af faldet skrider fodpunktet. Tilsvarende sker med den faldende stige.

Det kan forstås ved at udregne størrelserne af normalreaktionen $N(\Theta)$ og gnidningskraften $G(\Theta)$ under faldet så længe stigen roterer om sit fodpunkt, mens dens vinkel med lodlinien, Θ, forøges fra 0 til højst 90°. Den samlede masse gange accelerationen af det fælles tyngdepunkt for person og stige er lig med summen af kræfterne på systemet bestående af person og stige. Så længe stigen ikke skrider fås derfor:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= (m + M)\frac{d}{dt}[L_{\text{CM}}\dot{\Theta}\cos(\Theta)] \\ &= (m + M)L_{\text{CM}}[\ddot{\Theta}\cos(\Theta) - \dot{\Theta}^2\sin(\Theta)], \end{aligned} \qquad (4)$$

og

$$\begin{aligned} (m + M)g - N(\theta) &= (m + M)\frac{d}{dt}[L_{\text{CM}}\dot{\Theta}\sin(\Theta)] \\ &= (m + M)L_{\text{CM}}[\ddot{\Theta}\sin(\Theta) + \dot{\Theta}^2\cos(\Theta)], \end{aligned} \qquad (5)$$

hvor g er tyngdefeltstyrken og L_{CM} er afstanden fra fodpunktet til det fælles tyngdepunkt for stige og person: $L_{\mathrm{CM}} = L(m + \frac{1}{2}M)/(m + M)$. $\dot{\Theta}$ ($\ddot{\Theta}$) er den første (anden) tidsafledede af vinklen Θ, dvs. den øjeblikkelige vinkelhastighed (vinkelacceleration).

Energibevarelsen under rotationen om fodpunktet kan så bruges til at udregne $\dot{\Theta}^2$ og $\ddot{\Theta}$. Af

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2 = (m+M)gL_{\mathrm{CM}}[1-\cos(\Theta)] \qquad (6)$$

fås, idet $I_0 = (m + \frac{1}{3}M)L^2$:

$$\dot{\Theta}^2 = \frac{2g}{L}\frac{(m+\frac{1}{2}M)}{(m+\frac{1}{3}M)}[1-\cos(\Theta)]. \qquad (7)$$

Differentiation heraf giver:

$$\ddot{\Theta} = \frac{g}{L}\frac{(m+\frac{1}{2}M)}{(m+\frac{1}{3}M)}\sin(\Theta). \qquad (8)$$

Ved at indsætte disse udtryk for $\dot{\Theta}^2$ og $\ddot{\Theta}$ i ligningerne (4) og (5) fås:

$$G(\Theta) = g\frac{(m+\frac{1}{2}M)^2}{m+\frac{1}{3}M}\sin(\Theta)(3\cos(\Theta)-2) \qquad (9)$$

og $N(\Theta) =$

$$g(m+M)\left[1-\frac{(m+\frac{1}{2}M)^2}{(m+M)(m+\frac{1}{3}M)}f(\Theta)\right], \qquad (10)$$

hvor $f(\Theta) = 1 + 2\cos(\Theta) - 3\cos^2(\Theta)$.

Gnidningskraften $G(\Theta)$ vokser fra at være nul i lodret stilling til et maksimum, når $\cos(\Theta) = (1+\sqrt{19})/6$ og $\Theta = 26{,}7°$. Det ses ved differentiation af ligning (9). Siden ses den at skifte fortegn, når $\cos(\Theta)$ er faldet til 2/3 og $\Theta = 48{,}2°$.

Normalreaktionen $N(\Theta)$ ses ved differentiation af ligning (10) at have minimum for $\cos(\Theta) = 1/3$ og $\Theta = 70{,}5°$. Hvis $m = 0$ er minimumsværdien nul. Hvis $M = 0$ er minimumsværdien $-\frac{1}{3}mg$ og $N(\Theta)$ nul for $\cos(\Theta) = \frac{2}{3}$ og $\Theta = 48{,}2°$. Imellem disse yderpunkter for forholdet mellem m og M er $N(\Theta)$ nul og skifter fortegn ved en vinkel imellem 48,2° og 70,5° svarende til, at $\cos(\Theta)$ ligger imellem 2/3 og 1/3.

Det hele er ret indviklet!

For linealen, dvs. tilfældet $m = 0$, har $G(\Theta)/N(\Theta)$ et maksimum på 0,371 for $\Theta = 35{,}1°$. Hvis $\mu_s < 0{,}371$ – linealen på mit skrivebord – vil $G(\Theta)/N(\Theta)$ derfor overstige μ_s inden denne vinkel nås og da begynde at skride baglæns. Hvis derimod $\mu_s > 0{,}371$ – linealen på papir – er kravet $G(\Theta) < \mu_s N(\Theta)$ opfyldt så længe $G(\Theta)$ er positiv, altså for $\Theta < 48{,}2°$. Men for $\Theta > 48{,}2°$ vil kravet til gnidningskoefficienten på et tidspunkt blive uopfyldeligt. Den numeriske værdi af den nu negative, altså modsatrettede, gnidningskraft vil nødvendigvis overstige $\mu_s N(\Theta)$ på vejen imod $N(\Theta) = 0$ for $\Theta = 70{,}5°$. Fra da af skrider linealen så forlæns.

For $m \neq 0$ flytter maksimum for $G(\Theta)/N(\Theta)$ sig til større værdier end 0,371 og større vinkler end 35,1°, når værdien af m/M øges. For $m/M \to \infty$ går maksimumsvinklen imod 48,2° og $cos(\Theta) = 2/3$. Mønsteret er det samme for $m \neq 0$ som for $m = 0$, bortset fra, at den statiske gnidningskoefficient, der skal til for at opnå skridning fremad, er større. Hvor meget større afhænger af m/M. Da $G(\Theta)/N(\Theta) \to \tan(\Theta)$ for $m/M \to \infty$ så længe $\cos(\Theta) > 2/3$, vil stigen under alle omstændigheder skride fremad, hvis $\mu_s > \tan(48{,}2°) = 1{,}12$.

Beregninger af den fortsatte bevægelse af den faldende stige med person på, efter at den er begyndt at skride, kan gennemføres ved brug af momentsætningen omkring tyngdepunktet, ligning (5) og $|G| = \mu_d N$, hvor μ_d er den dynamiske gnidningskoefficient. Men bevægelsen og beregningerne er indviklede og afhængige af værdierne af μ_s, μ_d og m/M. Jeg har derfor for nuværende opgivet at besvare breddeopgave 55. I praksis ville jeg nok under alle omstændigheder vælge at slippe stigen for ikke at blive viklet ind i den ved faldet. Den interesserede læser, der vil regne videre, henvises til R. Cross, "The fall and bounce of pencils and other elongated objects", *Am. J. Phys.* **74** (1), January 2006.

Det er en didaktisk pointe, at der fra de studerendes side ikke blev klaget over eksamensopgaven, selvom den i praksis var uløselig for dem. Den didaktiske kontrakt mellem lærere og studerende ved kurserne i fysisk problemløsning er ikke, at de til eksamen skal bedømmes på andelen af rigtigt besvarede opgaver. Kontrakten er, at de skal bedømmes på deres demonstrerede grad af tænkning som fysikere. De studerendes besvarelser var i større eller mindre grad, som vi i farten havde forestillet os besvarelsen. Altså svarende til at stigen er hængslet i fodpunktet. En besvarelse som vores ovenstående gav maksimum point.

Senere har vi kunnet benytte opgaven i undervisningen som illustration af, at problemer kan være mere komplekse end umiddelbart antaget.

Breddeopgave 56 og 57. Raketligningen og Keplers anden lov

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra vintereksamen 1977 og sommereksamen 2001, nr. 56 og 57 i rækken her i KVANT):

Forklar virkningen af en raketmotor i det lufttomme rum.

Ifølge Keplers anden lov overstryger forbindelseslinjen fra solen til en planet lige store arealer i lige store tidsrum. Forklar loven.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Om fysikopgaver – kommentar til breddeopgave om Stigefald

Af Per-Anker Lindgård

Fysikopgaver kan være farlige, endda livsfarlige! Det gælder især, hvis der bedes om svar på et realistisk problem, som der typisk tilstræbes i breddeopgaverne fra RUC. Der kan være gode pædagogiske grunde til på denne måde at gøre en opgave nærværende og interessant. Formålet er imidlertid egentlig blot, at der skal findes og løses en simplificeret matematisk model (rationel mekanik hed det engang). Her er det så vigtigt, at man knivskarpt forstår de ofte skjulte præmisser. En løsning til den simplificerede model kan være korrekt, men den nærliggende konklusion om det reelle problem kan være fatalt forkert. Et eksempel på dette har vi i breddeopgave 55, som er diskuteret i Kvant nr. 2 og 3 i 2013.

Indledning

Den givne løsning var, at en person på toppen af en faldende stige optimalt straks bør give slip for at slå sig mindst muligt. I den efterfølgende kommentar diskuteres det ikke, om dette kan være korrekt, hvis en person faktisk står i den situation. Derimod diskuteres stigens ret komplicerede fald indgående. Det er imidlertid ikke relevant i forhold til den stillede opgave. Generelt, er det ikke særlig fordelagtigt at holde fast i toppen af en faldende stige, der også skrider. I kommentaren anbefales det igen straks at slippe. Men det er forkert.

Lad mig formulere opgaven så man bedre fornemmer situationen: En nybagt kandidat i fysik er kravlet helt til tops af en meget høj, næsten lodretstående, og uforsvarligt forankret stige (burde han ikke have tænkt sig lidt om inden, en kvindelig ditto ville nok klogeligt ikke have turdet kravle op, per intuition). Da stigen så begynder at vælte, slipper han straks taget; og i det frie fald når han lige at sige: "Ha! Jeg har beregnet, at nu slår jeg mig mindre ihjel, end hvis jeg havde holdt fast i stigen". En person i samme situation, men uden fysikkundskaber, ville nok instinktivt føle, jeg må prøve at udnytte stigen – ihvertfald ikke bare give slip. I et splitsekund tænker han:

a) hvis jeg sejler på stigen til jeg får stor fart fremad, kan jeg springe ned og løbe derfra.
b) jeg kunne kure ned og så springe.
c) jeg kunne skynde mig at tage nogle trin ned og så måske kure resten af vejen osv.

Heldigvis, uanset hvad han vælger, vil han ved at udnytte stigen som redningsplanke, kunne afbøde faldet i forhold til det direkte spring i døden (man kan ret nemt beregne de forskellige scenarier, se nedenfor). En stuntman (eller en abe) ville med sin trænede fysiske intuition, umiddelbart vælge den optimale løsning under de givne forhold og sikkert slippe helskindet derfra (og der er mange forhold at vurdere: stigens højde, underlagets beskaffenhed, han har både arme og ben, han kan hoppe, springe, løbe og rulle, står stigen op ad en mur eller en gren, osv.)

Morale

Breddeopgaverne afsluttes gerne med et: Begrund svaret. Det burde snarere være: Diskuter svaret. Man bør opmuntre studenterne til efter en løst opgave, at gå lidt på afstand og vurdere det fremkomne svar. Passer det med min intuition? Hvis ikke, hvad kan være galt? Har svaret relevans for den egentlig stillede opgave? Hvis svaret er nej; kan en acceptabel kommentar være: kræver nøjere analyse, jeg har kun løst et simpelt scenarie. Eller, opgaven er ikke tilstrækkeligt defineret, så jeg har selv specificeret den til følgende..., osv.

Det er absolut en fordel, at studenterne lærer at opstille og beregne forskellige simplificerede scenarier, men det skulle helst ikke gå ud over deres medfødte evne til at løse fysiske problemer, instinktivt – eller intuitivt. Der er selvfølgelig mange andre slags fysiske opgaver, hvor det menneskelige instinkt ikke hjælper, men intuition er nu alligevel ikke at foragte.

Alternative løsninger på Stigefald

Tilfældene kan groft beregnes ved energibetragtninger af følgende simplificerede scenarier:

a) Antag situationen kan beskrives som et punkt med massen m, for enden af en (på en vandret flade) lodretstående, stiv og uniform stang med massen M og længden L. Ved et frit fald af m fra højden L, vil den kinetiske energi ved jorden være $E_0 = \frac{1}{2}m(2gL)$ og faldtiden $t_0 = \sqrt{2L/g}$, hvor $g = 9{,}8$ m/s^2.

Det antages at det er den lodrette kinetiske energi, der giver slaget ved faldet. Når stangen vælter, vil bevægelsen af m være bundet til en cirkel. Hvis den tangentielle hastighed, ved et vælt på vinklen θ fra lodret, er v, så er den vandrette hastighed $v{\cdot}\cos(\theta)$ og den lodrette hastighed $v{\cdot}\sin(\theta)$; der er da faldet stykket $L(1-\cos(\theta))$ og der resterer højden $L{\cdot}\cos(\theta)$ at falde.

Lad os kalde $\cos(\theta)$ for x. Den vandrette kinetiske energi er nu $E_0{\cdot}f{\cdot}x^2(1-x)$, hvor $f=\frac{m+M/2}{m+M/3}$ er en faktor, der tager højde for stangens masse og inertimoment (som udregnet i besvarelsen af opgave 55). Den maksimale vandrette kinetiske energi fås ved differentiering mht. x og giver $x = \frac{2}{3}$, dvs. når der resterer $\frac{2}{3}$ af faldhøjden. Måske skulle man slippe der?

Men det er den lodrette kinetiske energi, der er mest interessant. Den er givet ved $E{=}E_0(f{\cdot}(1-x^2)(1-x)+x)$, hvor sidste led repræsenterer et frit fald det sidste stykke. Minimum findes nu ved ligningen: $3x^2-2x-(1-1/f){=}0$, med løsningen

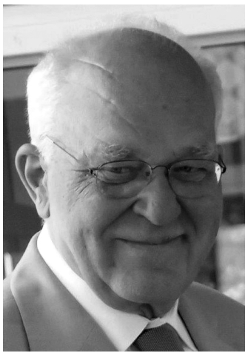
$x=1/3+\sqrt{1/9+(1-1/f)/3}$.

For $M \ll m$, $f=1$, fås igen $x=\frac{2}{3}$, hvilket svarer til $\theta=48°$ og $E=0{,}85E_0$, altså en reduktion med 15 % i forhold til det frie fald. For $M \gg m$, $f=3/2$, fås $\theta=36°$ og $E=0{,}91E_0$, igen en reduktion, dog kun på 9 %. Denne simple lille ekstra betragtning viser, at man ikke skal slippe straks (som konkluderet i opgavebesvarelsen), men at det derimod kan svare sig at holde fast og først slippe taget undervejs. Hvis stangen skulle begynde at skride, inden den optimale vinkel er opnået, er det klart bedst at slippe straks skridningen begynder – og ikke før (kan også beregnes). Det er selvfølgelig ikke meget man opnår.

Så lad os se på b) "at kure ned". Nu er bevægelsen af m bundet til stangens retning. Den lodrette hastighed er da $v \cdot \cos(\theta)$. For $M \ll m$ er den lodrette kinetiske energi givet ved $E=E_0(x^2(1-x))$. Den er 0 for $x=0$, dvs. hele den potientielle energi er omsat til vandret kinetisk energi. Man bør slippe, hvis stangen begynder at skride.

I tilfælde c) tager man hensyn til at det faktisk er en stige. Og man kan derfor ved hastigt at tage nogle trin nedad stigen reducere den potientielle energi uden at veksle den til kinetisk energi. Altså kan man først reducere noget af den totale energi af problemet.

Ovenstående er gennemgået nogle simple scenarier. De bør ikke betragtes som løsninger på den oprindelige opgave. For en realistisk, optimal løsning af denne, bør man foretage en nærmere analyse af de givne forhold, og beregne udfaldet for det mest lovende scenarie. Man kan dog med sikkerhed konkludere, at man under ingen omstændigheder straks bør give slip på stigen!



Per-Anker Lindgård, dr. scient., har været seniorforsker i fysikafdelingen på det daværende forskningscenter Risø med speciale i faste stoffers fysik. Derudover har han været adjungeret professor i biologisk fysik ved DTU. Har været formand for faststofsektionen i DFS, senere aktiv i bestyrelsen af EPS og stifter og formand for Division of Biological Physics i EPS.

Svar fra opgavestilleren

Det er prisværdigt, at Per-Anker Lindgård inviterer til didaktisk diskussion af fysikopgaver. Det er der ikke for meget af. Især ikke vedrørende fysikopgaver på universitetsniveau. Som svar på indlægget vil jeg kommentere to udfordringer ved formuleringen af breddeopgaver. Den ene udfordring drejer sig om deres sværhedsgrad. Den anden udfordring knytter sig til deres anknytning til realistiske problemer.

Breddeopgavernes åbne formuleringer, hvor selve formaliseringen af problemet som led i dets løsning er en vigtig del af besvarelsen, gør dem umiddelbart svære. Når vi alligevel fastholder opgaveformen på RUC er det, fordi vi finder evnen til at identificere og formalisere et problem som et fysikproblem som vigtig for en fysiker. Og fordi den evne ikke trænes ved mere fortyggede opgaver. Vi er således, som jeg læser Per-Anker Lindgårds kommentar, helt på linje med ham, hvad angår ambitionen. Med "Begrund svaret" menes både forklar svaret og diskuter svaret. Men, hvor problemerne angående stigefaldet, som han ønsker det analyseret, egner sig godt til et projektarbejde på RUC over et semester, overstiger det, hvad der kan forventes af en bachelor studerende på den time, der er afsat per breddeopgave ved eksamen. Det er en løbende udfordring ved formuleringen af breddeopgaverne at finde balancen imellem at udfordre de studerende og at give dem tilstrækkeligt med succesoplevelser.

Når vi tilstræber, at breddeopgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger, er det dels, som Per-Anker Lindgård anfører, for at gøre opgaverne nærværende og interessante. Men mere afgørende er det for at kunne formulere opgaverne i dagligdags sprog, således at den nøjere præcisering af problemerne i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen. Behandlingen af de virkelige problemer er ikke målet. Det kan det i højere grad være i et projektarbejde. De virkelige problemer er et middel til at lære de studerende at tænke som fysikere: Start enkelt. Vælg den simplest mulige model, og regn først på *den*. Fanger den essensen? Hvis ikke, så komplicer gradvist, indtil essensen er fanget. Men komplicer ikke mere end nødvendigt. I projekterne på RUC er der mere plads til ingeniør tilgangen forpligtet på det konkrete og komplekse som mål og udfordring.

Stigefaldsopgaven havde den rigtige sværhedsgrad, og var ikke i den simple opfattelse af den udtryk for afprøvning af rutiner hos de studerende mekanisk. Men den var sjusket formuleret. Som gennemgået i min kommentar til opgaven skrider stigen under alle omstændigheder, hvis ikke dens fodpunkt er hængslet. Og Per-Anker Lindgårds udregning af, hvordan det betaler sig at sejle med stigen et stykke vej fremfor at slippe ved starten af faldet, kan jeg helt tilslutte mig. Så opgaven skulle have handlet om "en hængslet stige" fremfor "en stige", og "give slip med det samme" fremfor "give slip". Heldigvis er – som nævnt i min kommentar til opgaven – den didaktiske kontrakt mellem lærere og studerende ved kurserne i fysisk problemløsning ikke, at de til eksamen skal bedømmes på andelen af rigtigt besvarede opgaver. Kontrakten er, at de skal bedømmes på, om de udviser tænkning af den slags, som Per-Anker Lindgård efterlyser. Derfor har sjusket heller ikke udgjort noget problem.

Jens Højgaard Jensen

Raketligningen og Keplers anden lov
– breddeopgave 56 og 57 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 56 og 57 i rækken her i KVANT):

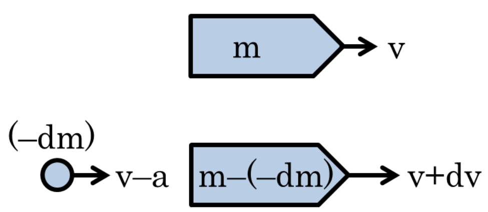
Breddeopgave 56 og 57. Raketligningen og Keplers 2. lov

Forklar virkningen af en raketmotor i det lufttomme rum.

Ifølge Keplers anden lov overstryger forbindelseslinjen fra Solen til en planet lige store arealer i lige store tidsrum. Forklar loven.

Løsning

56. En raketmotor virker ved, at der løbende sparkes materiale bagud. På figur 1 (øverst) har vi raketten med hastigheden v, i forhold til fx Jorden, og massen m, til tiden t. På figur 1 (nederst) har vi den samme masseansamling som på den foregående figur, men til tiden $t + dt$. I mellemtiden er massedelen $-dm$ (raketmassens tilvækst er negativ) fyret baglæns ud af raketten med udstødningsfarten a i forhold til raketten, og farten $v - a$ i forhold til Jorden. Raketten har nu massen $m - (-dm)$ og hastigheden $v + dv$ i forhold til Jorden.



Figur 1. Øverst: Raket med brændstof til tiden t. Nederst: Samme masseansamling til tiden $t + dt$.

Da den betragtede masseansamling er et isoleret system, er den samlede impuls den samme til tiden t og til tiden $t+dt$:

$$mv = (-dm)(v - a) + (m - (-dm))(v + dv). \quad (1)$$

Idet der kan ses bort fra leddet $dm\, dv$ i grænsen for små tilvækster, fås heraf $dv = -a\; dm/m$, og ved integration:

$$v_{\text{slut}} - v_{\text{start}} = a \ln \frac{m_{\text{start}}}{m_{\text{slut}}}. \quad (2)$$

Ligningen viser, hvordan øgningen af rakettens hastighed afhænger af udstødningshastigheden fra raketmotoren og mængden af materiale sparket bagud. Med $v_{\text{start}} = 0$ kan ligningen omskrives til:

$$m_{\text{start}} = m_{\text{slut}} \exp\left(\frac{v_{\text{slut}}}{a}\right), \quad (3)$$

der viser, hvor stor en startmasse der skal til, for at tildele en given slutmasse hastigheden v_{slut}.

57. Hvis $A(t)$ er arealet, som forbindelseslinien fra Solen til en planet har overstrøget i dens elipsebane siden $t = 0$, er $dA(t)/dt$ givet som afstanden $r(t)$ fra Solen til planeten gange en halv gange hastighedskomposanten vinkelret på forbindelseslinjen. Derfor har vi:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} r(t)\, r(t) \frac{d\Theta(t)}{dt}, \quad (4)$$

hvor $\Theta(t)$ er ændringen af retningen til planeten set fra Solen siden $t = 0$.

Højresiden af ligning (4) er, bortset fra den manglende massefaktor, også det halve af planetens impulsmoment omkring Solen. Da gravitationskraften fra Solen på planeten er i retning af forbindelseslinjen, giver den ikke anledning til noget kraftmoment omkring Solen. Følgelig er impulsmomentet og højresiden af ligning (4) konstant. Derfor har vi:

$$A(t) = \text{konstant} \cdot t, \quad (5)$$

hvilket jo indebærer, at lige store arealer overstryges i lige store tidsrum.

Kommentar

1. En af mine yndlingsreferencer er et citat fra den russiske anarkist og geograf P. Krapotkin's “Haandens og Hjærnens Arbejde”, skrevet i 1898 (side 198 i den danske udgave fra 1904):

“Set i dette Lys er de Resultater, man har naaet i Moskva-Skolen, aldeles ikke forbavsende, og man kunde rimeligvis naa endnu videre, hvis man allerede i de første Undervisningsaar begyndte at anvende disse Principper for Opdragelsen. Vort nuværende Undervisningssystem udmærker sig især ved, at *Tiden bortødsles* paa rent uforsvarlig Maade. Ikke alene lærer vi en Mængde overflødige Ting, men det, der ikke er overflødigt, bliver bibragt os paa en Maade, saa at vi spilder saa megen Tid som vel muligt derved.

Vore nuværende Undervisningsmetoder stammer fra en Tid, da de Fordringer, der stilledes til et Menneskes Dannelse, var yderst beskedne, og vi er blevne staaende ved dem til Trods for, at Fordringerne til Kundskab er stegne uhyre, efter at Videnskaben saa stærkt har udviklet sit før meget begrænsede Felt. Deraf følger, at *Eleverne overlæsses*. Det bliver imidlertid tvingende nødvendigt at underkaste baade Undervisningsstoffet og Undervisningsmaaden en alvorlig Revision, der svarer til de nye Fordringer og til de Eksempler, som allerede nogle Skoler og enkelte Lærere har givet os." (mine fremhævelser)

Som efterlignelsesværdigt eksempel omtaler Krapotkin først og fremmest den nævnte Moskvaskole, som er en teknisk skole i Moskva. Her bliver i fx geometriundervisningen "hver Sætning stillet som en Opgave, Beviset gives ikke paa Forhaand, Eleven bliver nødt til selv at finde det." I modsætning til den normale geometriundervisning. Her "spildes Tiden ganske taabeligt ved at anvende en Metode, der nærmest lægger Vægt paa Udenadslæren. I de fleste Tilfælde læser Eleven Beviset for en Læresætning om og om igen, indtil det rent mekanisk fæster sig i hans Hukommelse."

Den opmærksomme læser kan måske gætte, at jeg, siden jeg holder af citatet, regner Breddekurset på RUC for at være et sidestykke til Krapotkint's Moskvaskole, hvor tiden ikke bortødsles og eleverne ikke overlæsses. Svarene på de to opgaver i artiklen her er ofte lærebogsstof i introducerende fysikundervisning på universitetsniveau. På breddekurset har der ikke været undervist i de to problemer forud for de eksamener, hvor de blev stillet som eksamensopgaver. Sidenhen har de to problemer indgået i samlingen af tidligere eksamensopgaver, der er det afgørende udgangspunkt for undervisningen. Lærebogen er supplerende læsning i forhold til opgavesamlingen. For ikke at være udelukket fra at stille opgaver, som de to her, må der ikke medbringes bøger m.m. til eksamen.

Udover, at Krapotkin-citatet kan bruges til at fremføre egne synspunkter, er det også nyttigt til at vise, at brydningen mellem deduktivt, docerende og induktivt, aktiverende undervisningsstrategier, ikke er af ny dato. Citatet er ikke uaktuelt nu mere end hundrede år senere. Moskvaskolens og Breddekursets undervisningspraksis er eksempler på kompetencestyret frem for pensumstyret undervisning. Det tales der meget om i disse år. Men det praktiseres i meget begrænset omfang.

2. Min far, Henning Højgaard Jensen, gjorde mig engang opmærksom på en artikel (J. W. Campbell, "Rocket Flight to the Moon", *Philosophical Magazine*, 1941 I, p. 24-34.) med anknytning til besvarelsen af opgave 56.

I artiklen argumenteres der for, at det aldrig vil lykkes at bringe mennesker til Månen og tilbage igen, fordi værdien af eksponentialfunktionen i ligning (3) er for stor. Hvis raketten brænder al sit brændstof af nær Jorden, skal den, for at nå til Månen, herved ca. opnå løsrivelseshastigheden fra Jordens tyngdefelt, $v_{\text{slut}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} = 11{,}2$ km/s. Til sammenligning hermed er de opnåelige udstødelseshastigheder ved brug af kemisk brændstof ca. $a = 2{,}5$ km/s, når der tages højde for hvor høje temperaturer raketmotorens materialer kan tåle, og hvor små udstødningspartikler, der kan produceres. Og det giver ifølge ligning (3) en faktor 88 for forholdet mellem startmassen og slutmassen. For at få en nyttelast svarende til en bil sendt til Månen skal der altså sendes en masse svarende til et rådhustårn af sted til en start.

Der er ikke her taget højde for massen af brændstofbeholderen og benyttelsen af flertrinsraketter for at skaffe sig af med tømte brændstofbeholdere. Der er heller ikke taget højde for den varierende styrke af tyngdefeltet og luftmodstanden under opsendelsen. Disse forhold medfører mindre korrektioner. Det afgørende er eksponentialfunktionen i ligning (3). Og det afgørende for Campbells fejlagtige forudsigelse er, at han opløfter den til anden potens, fordi han forestiller sig, at nedbremsningen ved tilbageturen fra Månen skal foregå ved brug af brændsel tilsvarende brugen ved udturen. Han når herved frem til, at en sådan raketfærd vil kræve en raket, hvis masse til en start var som massen af Mt. Everest! For at bringe en nyttelast svarende til en bil tilbage til Jorden fra Månen må en raket som et rådhustårn sendes til Månen, og for at gøre det må der altså startes ud med en raket af størrelse som Mt. Everest. Og det vil rent praktisk aldrig ske.

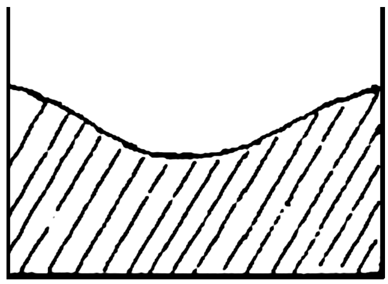
Historien er efter min mening en god illustration af, hvad der kan gøre videnskab dårlig. Videnskab er dårlig, hvis: a) for meget er overset; b) der ikke er set bort fra tilstrækkelig meget. I tilfældet Campbell overser han muligheden af at nedbremse raketten ved hjælp af luftmodstanden i atmosfæren. Til gengæld er hans regnestykker ganske omfattende med mange detaljeovervejelser sammenlignet med den lige vej til ligning (3). I en senere dansk artikel (E. Buch Andersen, "Rumfartsproblemet", *Fysisk Tidsskrift*, **45**, 1947, p. 105-113.) når Andersen på samme måde som Campbell frem til, at en månefærd baseret på nedbremsning ved udstødning af forbrændingsprodukter i fartretningen er teknisk uigennemførlig. Men i modsætning til Campbell overser han ikke nedbremsning i kraft af luftmodstanden i atmosfæren som den fremtidige mulighed.

Breddeopgave 58 og 59. Centrifuge og tehvirvel

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra samlingen af breddeopgaver fra opstarten af breddekurset i 1976 og fra vintereksamen 2008, nr. 58 og 59 her i rækken i KVANT):

Hvilken form har overfladen af en væske i en centrifuge? Begrund svaret.

Når der røres rundt i en kop te eller et glas vand, stiller overfladen sig typisk som antydet på figuren:



Hvad viser det om væskebevægelserne? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Centrifuge og tehvirvel – breddeopgave 58 og 59 med didaktisk kommentar

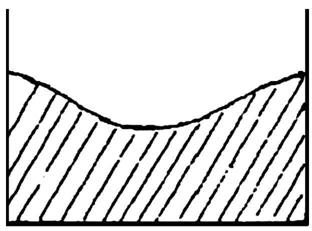
Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 58 og 59 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 58 og 59. Centrifuge og tehvirvel

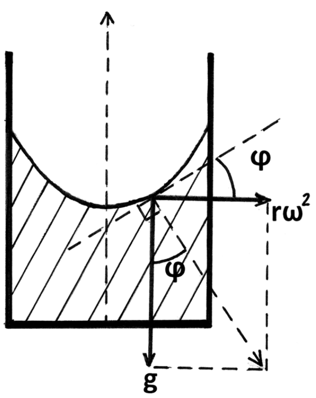
Hvilken form har overfladen af en væske i en centrifuge? Begrund svaret.
Når der røres rundt i en kop te eller et glas vand, stiller overfladen sig typisk som antydet på figuren:



Hvad viser det om væskebevægelserne? Begrund svaret.

Løsning

58. Vi anskuer problemet fra et koordinatsystem, der følger med centrifugen i dens rotation. I forhold hertil står væsken stille med en overflade vinkelret på det resulterende kraftfelt i det roterende system. Idet centrifugen antages at rotere om en lodret akse, er det resulterende kraftfelt sammensat af det homogene tyngdefelt g, rettet nedad, og centrifugalfeltet $r\omega^2$, rettet udad, som det er vist på figur 1 (ω er vinkelhastigheden af centrifugen, r afstanden fra centrifugeaksen).



Figur 1. Centrifuge analyseret i det medroterende system.

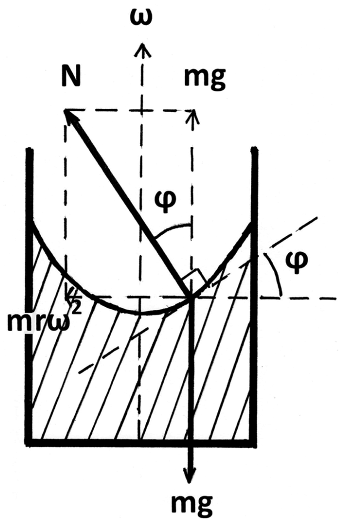
Af figur 1 fremgår det, at tangens til vinklen φ både er lig med $r\omega^2/g$ og hældningskoefficienten af væskeoverfladen i afstanden r fra aksen. Kaldes højden af væskeoverfladen som funktion af r for $h(r)$ har vi derfor:

$$\frac{dh(r)}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}, \tag{1}$$

som ved integration giver:

$$h(r) = h(0) + \frac{r^2\omega^2}{2g}. \tag{2}$$

Tværsnittet af væskeoverfladen er altså en parabel. Overfladen af en væske i en centrifuge har således form som en omdrejningsparaboloide.



Figur 2. Centrifuge analyseret i inertialsystemet.

59. Opgave 58 kunne også være løst i inertialsystemet. En massedel m af væskeoverfladen bevæger sig anskuet herfra i en jævn cirkelbevægelse rundt om centrifugeaksen med vinkelhastigheden ω. På massedelen virker tyngdekraften mg, rettet nedad, og normalreaktionen N fra de omgivende væskedele. N er vinkelret på væskeoverfladen. I modsat fald har overfladen ikke stabiliseret sig endnu, hvilket vi antager den har. Ifølge Newtons II lov skal vektorsummen af tyngdekraften og normalreaktionen være lig med massen m gange accelerationen $r\omega^2$, rettet imod aksen, i den jævne cirkelbevægelse for massedelen m i afstanden r fra aksen. Som vist på figur 2 betyder det, at den lodrette komposant af N har størrelsen mg, medens den vandrette komposant af N har størrelsen $mr\omega^2$. Herefter kan ligning (1) igen aflæses af figuren og opgave 58 løses som gjort ved brug af figur 1.

Opgave 59 lader sig også besvare ved hjælp af figur 2. Af figuren kan vi aflæse sammenhængen imellem hældningen af overfladen og vinkelfrekvensen for rotationen i afstanden r til at være givet ved:

$$\tan\varphi = r\omega^2/g. \quad (3)$$

Tegningen af overfladen i tekoppen viser et udseende i retning af centrifugens paraboloide i midten af koppen. Ved kanten af koppen er overfladen derimod vandret. Opgavefiguren tyder således ifølge ligning (3) på, at teen roterer med den frekvens den blev omrørt med i midten af koppen, medens den er i hvile ved koppens overflade på grund af gnidningen imod overfladen.

Kommentar

Hvis der er blade i teen, når der røres rundt i den, vil de ende med at samle sig på bunden midt i koppen. Man kan spørge, hvorfor de ikke centrifugeres udad til kanten af koppen i betragtning af deres større massefylde end teens? Forklaringen er først givet af A. Einstein i 1926. Det er igen gnidningen der er i spil. Men nu imod koppens bund. På grund af gnidningen deltager væskelaget umiddelbart over bunden ikke i rotationen. Derfor vil det på grund af den imod centrum aftagende tyngde af den overliggende væske blive drevet imod centrum. Der opstår en lodret hvirvel, som i en skypumpe, med opstigende væske i centrum og nedadstrømmende væske længere ude i koppen. Og det er denne hvirvel, der samler tebladene i midten. (Ref.: H.H. Jensen, Deformerbare Stoffers Dynamik, Gjellerup 1968, side 74. Sagen har også været genstand for diskussion i *Gamma* nr. 90, 97, 101 og 104 (1992-1996).).

Jeg har modstillet centrifugeopgaven og tehvirvelopgaven som illustration af vigtigheden af at kunne vælge beskrivelsessystem efter, hvad der i sammenhængen er hensigtsmæssigt. Centrifugen lader sig nemmest forstå i det medroterende system, selvom det, som gjort, også kan lade sig gøre i inertialsystemet. Omvendt er tehvirvlens overfladeform nemmere at forklare i inertialsystemet, som gjort, selvom tolkningen også kan gives ved henvisning til varierende medroterende systemer lokalt ud igennem koppen. Endelig er Einsteins forklaring på samlingen af tebladene bundet til koppens system.

De to opgaver giver mig også anledning til at kommentere ordvalgene "fiktive kræfter", "centripetalkraft" og "tyngdeacceleration" i lærebogslitteraturen i fysik.

Ved den skriftlige eksamen ved breddekurset i sommeren 2007 var en af opgaverne:

Fysikeren Jens Martin Knudsen lod engang så karse på en stor roterende skive for overfor de studerende at demonstrere, at de såkaldte fiktive kræfter ikke er så fiktive endda. Hvordan groede karsen i de 14 dage skiven roterede? Begrund svaret.

Demonstrationsforsøget viste, at karsen gror imod det resulterende kraftfelt i det medroterende system. For karsen er centrifugalkraften som følge af rotationen af underlaget, den gror på, og tyngdekraften fra Jorden lige reelle og lige lidt fiktive. På samme måde som det er tilfældet for væskedelene i centrifugen. Ordet "fiktiv" om centrifugalkraften er derfor uheldig valgt. I min undervisning i elementær mekanik bruger jeg ordene *naturkræfter* om kræfter, hvor der henvises til et naturfænomen som kilde, og *systemkræfter*, når kilden til kræfterne er accelerationen af koordinatsystemet, hvori bevægelsen beskrives.

Ifølge min erfaring er det vigtigt i introducerende mekanikundervisning at fastholde den begrebslige forskellighed imellem de to sider af Newtons II lov. På den ene side af ligningen står det, der kan måles ved f.eks. at indskyde fjedre, kræfterne. På den anden side står en beskrivelse af bevægelse, der kan måles ved hjælp af ure og meterstokke. Bevægelsen er naturligvis bevægelse i forhold til noget med deraf afledte konsekvenser for, hvilke kræfter der skal medtænkes. Men uanset, hvad bevægelsen beskrives i forhold til, giver det mindst forvirring at tænke på Newtons II lov, ikke som en matematisk identitet, men som en erfaringslov.

Centrifugalkraften hører til på kraftsiden af Newtons II lov. Anderledes forholder det sig med *centripetalkraften*. Formelt set er det den resulterende kraft, uanset hvad den skyldes, der forårsager en jævn cirkelbevægelse. Så langt så godt. Men når centripetalkraften herefter identificeres med $mr\omega^2$, giver det efter min erfaring anledning til begrebsforvirring hos de studerende tenderende til, at der på figur 2 skal indtegnes tre kræfter på væskedelene (Som der, i modsætning hertil, godt kunne være gjort på figur 1). Størrelsen $mr\omega^2$ på figur 2 er ikke en kraft. Den er en matematisk følge af beskrivelsen af bevægelsen som en jævn cirkelbevægelse. Ifølge erfaringsloven er størrelsen lig med den resulterende kraft. Hvis den derimod identificeres med den resulterende kraft er Newtons II lov gjort til en definitionsligning og ikke en erfaringslov. Uanset den eventuelle justering af statussen af Newtons II lov senere i deres fysikstudier er det efter min erfaring et dårligt udgangspunkt for studerende til at lære Newtons mekanik. I min undervisning forsøger jeg helt at undgå at bruge udtrykket centripetalkraft.

Tilsvarende er "tyngdeaccelerationen" et uheldigt ordvalg for tyngdefeltstyrken. Ved brug af Newtons II lov kan det udregnes, at accelerationen ved et frit fald i tyngdefeltet er lig med tyngdefeltstyrken. Det er imidlertid forstyrrende for forståelsen af Newtons II lov, at ordet tyngdeacceleration bruges som betegnelse for tyngdefeltstyrke.

Breddeopgave 60. Fisk

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 2009, nr. 60 i rækken her i KVANT):

Som tommelfinger regel svømmer store fisk hurtigere end ligedannede små fisk. Forklar hvorfor.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Fisk – breddeopgave 60 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 60 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 60. Fisk

Som tommelfingerregel svømmer store fisk hurtigere end ligedannede små fisk. Forklar hvorfor.

Løsning

Hvis vi kalder den maksimale effekt en fisk kan levere til at bevæge sig med for P, modstanden imod fiskens bevægelse i vandet for D, og fiskens maksimalt opnåelige fart for v, gælder

$$P = D \cdot v \tag{1}$$

Hele effekten går til at overvinde bevægelsesmodstanden, når fisken har opnået sin maksimale fart og ikke mere bruger energi på at accelerere. Ligningen udtrykker, at energien per tid, P, leveret af fiskens muskler, via fiskens vekselvirkning med vandet omsættes til energitilførslen per tid, $D \cdot v$, til vandet.

En nærliggende antagelse om den maksimale effekt er, at den er proportional med fiskens muskelmasse. Så gælder $P \propto r^3$ for ligedannede fisk med r som en karakteriserende længde for den enkelte fisk.

Bevægelsesmodstandens afhængighed af r og v udover af fiskens form er i almindelighed indviklet, med ydergrænserne $D \propto \eta \cdot r \cdot v$ (ved laminar strømning af vandet omkring fisken) og $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$ (ved fuldt udviklet turbulent kølvand bag fisken) for v henholdsvis meget lille og v meget stor. Her er η vandets viskositet og ρ dets vægtfylde.

Indsættes $P \propto r^3$ sammenholdt med $D \propto r \cdot v$ i ligning (1) fås $v \propto r$. Indsættes $P \propto r^3$ sammenholdt med $D \propto r^2 \cdot v^2$ i ligning (1) fås $v \propto r^{\frac{1}{3}}$. I begge tilfælde stiger v med r. Uanset om vi befinder os i den laminare grænse eller den fuldt udviklede turbulente grænse ses den maksimale svømmefart at stige med størrelsen, alt andet lige. Det er derfor nærliggende at antage, at det også – som tommelfingerregel – gælder i almindelighed.

Kommentar

I KVANT nummeret fra marts 2008 løste og kommenterede jeg følgende breddeopgave om luftmodstand:

Børn og voksne kommer i reglen ikke lige hurtigt ned ad bakke på cykel. Hvem kommer hurtigst ned? Begrund svaret.

Jeg fortalte om, hvordan der i breddekurset under fysikstudiet på RUC undervises i hydrodynamik ved hjælp af dimensionsanalyse. Herunder om, hvordan der kan argumenteres for formlerne $D \propto \eta \cdot r \cdot v$ og $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$ for modstanden imod bevægelsen af en genstand i væske eller luft i henholdsvis den laminare og den fuldt udviklede turbulente grænse, alene ved dimensionsanalyse kombineret med grundlæggende fysiske overvejelser. I artiklen: J. H. Jensen, Introducing fluid dynamics using dimensional analysis, *Am. J. Phys.* **81** (9), 688-694 (2013), har jeg udvidet og uddybet KVANT-artiklens betragtninger.

Her vil jeg sammenholde de to breddeopgaver om henholdsvis fisks svømning og børn og voksnes cykling.

Det er kun, hvis η, ρ og r er holdt konstante, at størrelsen af v alene er afgørende for, hvornår vi kan forvente laminar strømning, turbulent kølvand eller noget midt imellem. I almindelighed er det den dimensionsløse kombination af η, ρ, r og v, Reynolds tal, $R_e = \rho \cdot r \cdot v/\eta$, der er afgørende. Det er derfor interessant at lave overslag over størrelsen af Reynolds tal for henholdsvis cykling og fisks svømning.

For luft ved stuetemperatur er $\eta/\rho = 15 \cdot 10^{-6}$ m^2/s. Udstrækningen $r = 1{,}5$ m og farten $v = 36$ km/time = 10 m/s giver så 10^6 for Reynolds tal. I betragtning af, at hverken voksne eller børn tilsammen med deres cykler udgør særligt strømlinjede genstande, må der med så stort et typisk Reynolds tal for cykling regnes med, at vi har fuldt udviklet turbulent kølvand efter cyklerne og tilsvarende hastighedskvadratisk bevægelsesmodstand, $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$. I frigear på cykel ned ad bakke vil farten vokse indtil den når den konstante frigearsfart, der får den modsatrettede luftmodstand til at være lige så stor som komposanten af tyngdekraften langs med vejen, K_{gp}:

$$K_{gp} = D. \tag{2}$$

Da K_{gp} er proportional med massen af person plus cykel og dermed proportional med r^3, medfører ligning (2), sammenholdt med $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$, $v \propto \sqrt{r}$ for den konstante frigearsfart. Så svaret på cykelopgaven er, at den voksne kommer hurtigst ned ad bakken.

For vand ved stuetemperatur er $\eta/\rho = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m^2/s. En fisk med en fart og en størrelse som en cyklist vil derfor give anledning til et Reynolds tal på $15 \cdot 10^6$, altså 15 gange så stort som cyklistens. Det stiller overordentlig store krav til, hvor strømlinjet fisken er, hvis ikke den skal miste megen energi til et turbulent kølvand. For meget små fisk forholder det sig helt anderledes. Fx giver $r = 10^{-3}$ m og $v = 10^{-3}$ m/s et Reynolds tal på 1, hvor man skal forvente laminar strømning omkring fisken uanset dens form. I den grænse har vi $D \propto r \cdot v$ med sikkerhed og følgelig, at fiskens maksimale svømmehastighed er proportional med dens udstrækning, $v \propto r$. Det er i denne grænse, at det mest udpræget gælder, at større fisk kan indhente og æde mindre fisk.

Fiskeopgaven og cykelopgaven minder om hinanden. Det er først og fremmest forskellen imellem formlen i ligning (1) og formlen i ligning (2), der adskiller de to opgaver. I breddekurset på RUC bestræber vi os på ikke at stille opgaver, der med små modifikationer er gentagelser af allerede stillede og øvede opgaver i opgavesamlingen. De studerende skal trænes i fysisk problemløsning ved selv at skulle præcisere for dem nye problemer, fremfor at kunne reproducere kendte problemløsninger.

Men hvad menes der med et nyt problem fremfor et, hvor løsningsstrategien i forvejen er kendt? De to opgaver er modstillet her som illustration af, hvad vi i praksis anser for en tilstrækkelig stor forskel til, at den nye opgave udfordrer de studerende til mere end reproduktion af den gamle. Når og/eller hvis de studerende når frem til at se de to opgaver som variationer over samme tema, er meget af målet med undervisningen nået.

Breddeopgave 61 og 62. Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1977 og sommereksamen 2013, nr. 61 og 62 i rækken her i KVANT):

En foton spredes elastisk på et atom (atomet er i sin grundtilstand før og efter spredningen), således at fotonens bevægelsesretning efter spredningen danner en vinkel med den oprindelige. Hvordan afhænger forskellen mellem fotonens bølgelængde før og efter spredningen af spredningsvinklen? Begrund svaret.

En ishockey puck i fart på isen støder ind i en hvilende puck magen til. Puckerne kan være roterende før og efter sammenstødet, og der kan både ske ændringer af deres rotationsenergier og udvikles varme og indre svingninger i de to pucker. Hvordan afhænger vinklen imellem bevægelsesretningerne af de to pucker efter sammenstødet af, om den samlede translatoriske kinetiske energi er øget, uændret eller formindsket ved stødet? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner - breddeopgave 61 og 62 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 61 og 62 i rækken her i KVANT):

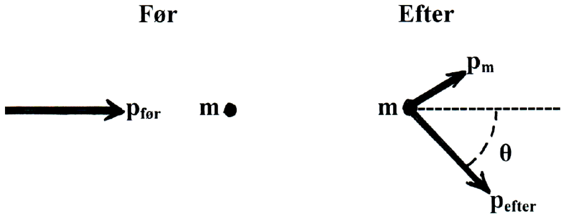
Breddeopgave 61 og 62. Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner

En foton spredes elastisk på et atom (atomet er i sin grundtilstand før og efter spredningen), således at fotonens bevægelsesretning efter spredningen danner en vinkel med den oprindelige. Hvordan afhænger forskellen mellem fotonens bølgelængde før og efter spredningen af spredningsvinklen? Begrund svaret.

En ishockey puck i fart på isen støder ind i en hvilende puck magen til. Puckerne kan være roterende før og efter sammenstødet, og der kan både ske ændringer af deres rotationsenergier og udvikles varme og indre svingninger i de to pucker. Hvordan afhænger vinklen imellem bevægelsesretningerne af de to pucker efter sammenstødet af, om den samlede translatoriske kinetiske energi er øget, uændret eller formindsket ved stødet? Begrund svaret.

Løsninger

61. Vi kalder impulsen (eller "bevægelsesmængden") af fotonen før spredningen med bølgelængden $\lambda_{\text{før}}$ for $\mathbf{p}_{\text{før}}$, impulsen af fotonen efter spredningen med bølgelængden λ_{efter} for $\mathbf{p}_{\text{efter}}$ og impulsen efter spredningen af atomet med massen m for $\mathbf{p}_m$. Spredningsvinklen kaldes Θ. Altså:



Figur 1. Elastisk spredning af en foton på et atom.

Den samlede impuls er bevaret under spredningsprocessen:

$$\boldsymbol{p}_{\text{før}} = \boldsymbol{p}_{\text{efter}} + \boldsymbol{p}_m \tag{1}$$

Altså har vi (hvor $\bullet$ betyder skalarprodukt)

$$p_m^2 = (\boldsymbol{p}_{\text{før}} - \boldsymbol{p}_{\text{efter}})^2 = p_{\text{før}}^2 + p_{\text{efter}}^2 - 2\boldsymbol{p}_{\text{før}} \bullet \boldsymbol{p}_{\text{efter}} \tag{2}$$

Da spredningen forudsættes at ske elastisk, medfører energibevarelsen, idet der regnes relativistisk:

$$p_{\text{før}} \cdot c + mc^2 = p_{\text{efter}} \cdot c + (p_m^2 \cdot c^2 + m^2c^4)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Ved rokering og kvadrering fås heraf:

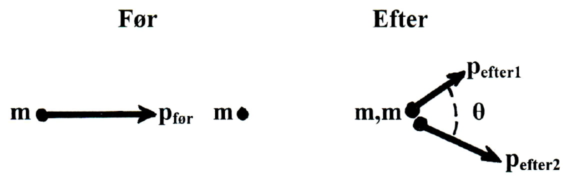
$$p_m^2 = p_{\text{før}}^2 + p_{\text{efter}}^2 - 2p_{\text{før}}p_{\text{efter}} + 2mc(p_{\text{før}} - p_{\text{efter}}) \tag{4}$$

Idet $\boldsymbol{p}_{\text{før}} \bullet \boldsymbol{p}_{\text{efter}} = p_{\text{før}} \cdot p_{\text{efter}} \cos\Theta$, giver sammenholdningen af ligning (2) med ligning (4) herefter: $p_{\text{før}} \cdot p_{\text{efter}}(1 - \cos\Theta) = mc(p_{\text{før}} - p_{\text{efter}})$, dvs. $1 - \cos\Theta = mc(p_{\text{før}}^{-1} - p_{\text{efter}}^{-1})$. Idet $\lambda_{\text{før}} = h/p_{\text{før}}$ og $\lambda_{\text{efter}} = h/p_{\text{efter}}$, hvor h er Plancks konstant, fås nu

$$\lambda_{\text{efter}} - \lambda_{\text{før}} = h(1 - \cos\Theta)/(mc) \tag{5}$$

som svar på opgaven.

62. Vi kalder impulsen af pucken i bevægelse før stødet for $\mathbf{p}_{\text{før}}$ og impulserne af de to pucker efter stødet for henholdsvis $\mathbf{p}_{\text{efter1}}$ og $\mathbf{p}_{\text{efter2}}$. Altså:



Figur 2. Uelastisk spredning af en puck på en anden puck.

Θ er vinklen imellem bevægelsesretningerne af de to pucker efter stødet.

Da den samlede impuls er bevaret under stødet, altså:

$$\boldsymbol{p}_{\text{før}} = \boldsymbol{p}_{\text{efter1}} + \boldsymbol{p}_{\text{efter2}}, \tag{6}$$

har vi ved kvadrering

$$p_{\text{før}}^2 = p_{\text{efter1}}^2 + p_{\text{efter2}}^2 + 2p_{\text{efter1}}p_{\text{efter2}}\cos\Theta. \tag{7}$$

idet $\boldsymbol{p}_{\text{efter1}} \bullet \boldsymbol{p}_{\text{efter2}} = p_{\text{efter1}} \cdot p_{\text{efter2}} \cos\Theta$.

Ikke relativistisk er den samlede translatoriske energi før stødet $p_{\text{før}}^2/2m$ og efter stødet $p_{\text{efter1}}^2/2m + p_{\text{efter2}}^2/2m$, hvor m er massen af en enkelt puck. Ligning (7) viser derfor, at vinklen Θ er henholdsvis stump, 90 grader og spids, når den samlede translatoriske energi er henholdsvis øget, uændret og formindsket ved stødet.

Kommentar

I nummeret af KVANT fra maj 2005 illustrerede jeg ved eksempler forskellen på, hvad jeg kaldte *nomologiske* begrundelser og *kausale* begrundelser, ved fysisk problemløsning. De to opgaver her og deres besvarelser af mig her og af de studerende til eksamen kan tjene som yderligere eksempler.

Ved en nomologisk begrundelse (ordet nomos er fra græsk og betyder regel eller lov) af et svar på et problem består begrundelsen i at redegøre for, hvordan svaret på problemet er udtryk for gennemsætningen af et overordnet mønster eller en overordnet lovmæssighed under de foreliggende omstændigheder. Ved en kausal begrundelse (ordet kausal er fra latin og betyder årsagsbestemt) af et svar består begrundelsen i at udpege de dele af de foreliggende omstændigheder, der forårsager det, der skal forklares. For fysikunderviseren er nomologiske forklaringer essensen i fysik og målet for fysikundervisningen. Hvorimod fysikeleven ved problemløsning så langt som muligt vil forsøge at klare sig ved hjælp af kausale forklaringer. Kausale forklaringer er mindre abstrakte end nomologiske forklaringer. Kausale forklaringer er også en bedre kendt forklaringstype, både fra dagligdagen og de fleste andre fag, end nomologiske forklaringer.

Svaret ovenfor på opgave 61 er i udpræget grad begrundet nomologisk. Opgaven løses alene ved brug af bevarelsessætningerne for impuls og energi som overordnede lovmæssigheder. Derfor er resultatet i ligning (5) jo også identisk med formlen for Compton spredning af lys på elektroner, bortset fra at elektronmassen er udskiftet med atomets masse. Den trænede fysiker vil med det samme besvare opgaven ved henvisning til formlen for Compton spredning. Det er derimod ikke oplagt, at fysikstuderende vil gøre det med samme selvfølgelighed. Det kræver, at man ikke hæfter sig ved forskellene imellem elektroner og atomer, men ved at der er tale om elastisk spredning i begge tilfælde.

Ved eksamen var der ingen af de få studerende, der deltog, som besvarede opgave 62 tilfredsstillende ved brug af impulsbevarelse, som gjort ovenstående. I den bedste af besvarelserne blev der gjort forsøg på at analysere, hvordan vekselvirkningskræfter imellem de to pucks under stødet fx kunne overføre rotationsenergi fra den ene puck til translationsenergi til den anden. Sådanne regnestykker kan godt lade sig gøre (se E.H. Hauge, "Puck collisions", *Eur. J. Phys.* **33** (2012) p.1333). Men de er teknisk komplicerede. Og den studerende kom ikke langt med analysen. I sammenhængen her er det, der er værd at hæfte sig ved, at den valgte løsningsstrategi var af kausal art. Hvordan påvirker de to sten hinanden via vekselvirkningskræfter under stødet? Hvorimod den teknisk nemme, men til gengæld abstrakte, nomologiske vej via impulsbevarelsen for stødet som helhed, ikke blev valgt.

Konklusionen på de fysikstuderendes større vanskeligheder med nomologiske forklaringer end med kausale forklaringer er ikke, at nomologiske forklaringer så vidt muligt bør erstattes med kausale forklaringer ved universitetsundervisning i fysik. Tværtimod er demonstrationen af nomologiske forklaringer et tilbud, som specielt faget fysik bør være forpligtiget til at levere. Det er fremfor andre fag, udover matematik, først og fremmest i fysik, at der kan sættes fokus på, at det at forstå ikke kun er et spørgsmål om at kende til mekanismer, men også at indse lovbundetheder. Den indsigt er ikke kun af betydning for de studerendes uddannelse til at blive fysikere. Den har også betydning for deres omverdensforståelse og deres selvforståelse.

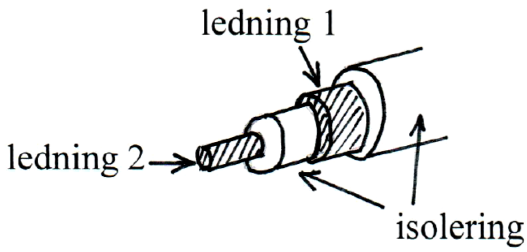
Men det er vigtigt, at såvel underviserne som deres studerende er opmærksomme på, at det måske netop er de nomologiske forklaringer, der gør fysik til et svært fag.

Breddeopgave 63 og 64. Bræt imod væg og selvinduktion i koaksialkabel

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen september 1987 og sommereksamen 2007, nr. 63 og 64 i rækken her i KVANT):

Ved hvilken hældning skrider et bræt, der er stillet skråt op af en forholdsvis glat væg? Begrund svaret.

I et elektrisk kredsløb indgår et stykke koaksialkabel (jf. figuren), hvor strømmene i dets to ledninger er lige store og modsat rettede.



Hvor meget bidrager kablet med til kredsløbets selvinduktionskoefficient (induktans)?

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.

Bræt imod væg og selvinduktion i koaksialkabel – breddeopgave 63 og 64 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

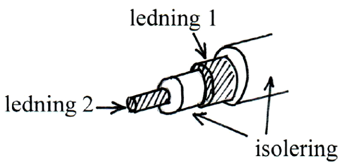
Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 63 og 64 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 63 og 64. Bræt imod væg og selvinduktion i koaksialkabel.

Ved hvilken hældning skrider et bræt, der er stillet skråt op af en forholdsvis glat væg? Begrund svaret.

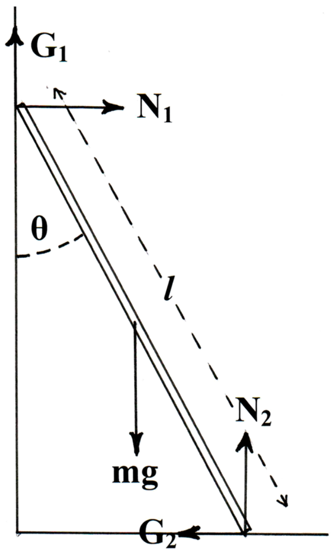
I et elektrisk kredsløb indgår et stykke koaksialkabel (jf. figuren), hvor strømmene i dets to ledninger er lige store og modsat rettede.



Hvor meget bidrager kablet til kredsløbets selvinduktionskoefficient (induktans)?

Løsninger

63. På skitsen af brættet skråtstillet mod væggen er indtegnet normalreaktionerne $\boldsymbol{N_1}$ og $\boldsymbol{N_2}$ på brættet fra henholdsvis væggen og gulvet og de statiske gnidningskræfter $\boldsymbol{G_1}$ og $\boldsymbol{G_2}$, ligeledes fra henholdsvis væg og gulv.



Figur 1. Bræt skråtstillet imod væg.

Brættets længde kaldes l og det antages at have en ligelig massefordeling med tyngdepunkt i midten. Brættets masse kaldes m, så tyngdekraften på det er $m\boldsymbol{g}$. Brættets vinkel med lodret kaldes Θ.

I opgaven antages G_1 tilnærmelsesvis lig nul. Så længe brættet ikke skrider, gælder da for summen af de vandrette kræfter:

$$N_1 - G_2 = 0, \qquad (1)$$

for summen af de lodrette kræfter:

$$N_2 - mg = 0, \qquad (2)$$

og for summen af kraftmomenterne om tyngdepunktet:

$$N_1 \frac{l}{2} \cos\Theta + G_2 \frac{l}{2} \cos\Theta - N_2 \frac{l}{2} \sin\Theta = 0. \qquad (3)$$

De tre ligninger fastlægger entydigt N_1, N_2 og G_2 som funktioner af Θ og mg til at være:

$$N_2 = mg; N_1 = \frac{mg}{2} \tan\Theta; G_2 = \frac{mg}{2} \tan\Theta. \qquad (4)$$

Gnidningskraften G_2 kan ikke blive større end $\mu_2 N_2$, hvor μ_2 er den statiske gnidningskoefficient imellem bræt og gulv. Dette indtræffer, når

$$\tan\Theta = 2\mu_2, \qquad (5)$$

og så skrider brættet.

64. Opbygningen af en strøm I i et elektrisk kredsløb med selvinduktionskoefficienten L kræver arbejdet $\frac{1}{2}LI^2$. Opgaven kan besvares ved at identificere dette med energiindholdet af det magnetiske felt i koaksialkablet. Energitætheden af et magnetfelt er $\frac{1}{2\mu_0}B^2$, hvor B er styrken af magnetfeltet og μ_0 er permeabilitetskonstanten i vakuum. Ifølge Amperes lov er B i mellemrummet imellem koaksialkablets to ledninger givet ved:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \qquad (6)$$

i afstanden r fra kablets midte. Den samlede opmagasinerede energi E i mellemrummet i et koaksialkabel med længden l er derfor:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu_0}\int_{r_1}^{r_2} B(r)^2 l 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

hvor r_1 er radius af den indre ledning, og r_2 er den indre radius af den ydre ledning. Uden for den ydre ledning er magnetfeltet nul, fordi den samlede strøm igennem en flade med rand uden om den ydre ledning er nul. Der er også magnetfelter og opmagasineret energi i de to ledninger. Hvis tykkelsen af dem er lille i forhold til mellemrummets tykkelse kan vi se bort herfra. Ved at sammenholde ligning (7) med, at den opmagasinerede energi er lig med det arbejde, det har krævet at opmagasinere den, $E = \frac{1}{2}LI^2$, fås i denne grænse:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{8}$$

som svar på opgaven.

Kommentar

Skridningen af det hældende bræt imod en glat væg er et hyppigt valgt eksempel på en statisk beregning i introducerende fysiklærebøger på universitetsniveau. Men hvad nu, hvis væggen ikke er glat? Hvorfor forekommer dette eksempel ikke i lærebøgerne?

Hvis $G_1 \neq 0$ skal ligningssystemet (1), (2) og (3) ændres til:

$$N_1 - G_2 = 0, \tag{9}$$

$$G_1 + N_2 - mg = 0, \tag{10}$$

og

$$G_1 \frac{l}{2} \sin\Theta + N_1 \frac{l}{2} \cos\Theta + G_2 \frac{l}{2} \cos\Theta - N_2 \frac{l}{2} \sin\Theta = 0. \tag{11}$$

Vi har da stadig kun tre ligninger til at bestemme de nu fire ubekendte N_1, N_2, G_1 og G_2 som funktioner af Θ og mg i den statiske situation. Det lader sig jo ikke gøre entydigt. Der er mange forskellige måder, kræfterne N_1, N_2, G_1 og G_2 kan kombineres på, som opfylder ligningerne (9), (10) og (11). Når et bræt står lænet op af en væg, kan man altså ikke alene ud fra iagttagelse af det beregne kræfterne imellem bræt og væg og bræt og gulv, medmindre væggen antages glat. Det er nok derfor eksemplet ikke forekommer i lærebøgerne, selvom ru vægge forekommer hyppigere end glatte vægge i praksis. Det er ligesom i Storm P-tegningen af manden, der leder efter sin gadedørsnøgle under gadelygten, selvom han tabte den i mørket, fordi det kun er under lygten, der er lys til at finde noget. Måske er det sådan, at vi i fysik løser de problemer, fysik kan kaste lys på, og lader resten ligge.

Er hældningen, hvor brættet skrider, også ubestemt, når væggen er ru? Nej, brættet skrider ved en bestemt hældningsvinkel. Der er to grænser for de statiske gnidningskræfter, $G_1 \leq \mu_1 N_1$ og $G_2 \leq \mu_2 N_2$, hvor μ_1 er den statiske gnidningskoefficient imellem bræt og væg. Så længe disse to uligheder kan opfyldes, står brættet fast. Hvis grænsen for den ene af ulighederne nås, fx $G_1 = \mu_1 N_1$, fastlægger denne ligning, sammen med ligningerne (9), (10) og (11), entydigt N_1, N_2, G_1 og G_2 som funktioner af Θ og mg. Skrider brættet da? Nej, der er stadig en krog i det. Det skrider først, når det løfter sig af begge kroge: $G_1 = \mu_1 N_1$ og $G_2 = \mu_2 N_2$. Skridningen er derfor fastlagt ved disse to ligninger sammen med ligningerne (9), (10) og (11). Skridningen finder sted ved den vinkel, der kan findes ved løsning af de fem ligninger med de fem ubekendte N_1, N_2, G_1, G_2 og fx $\tan\Theta$. For skridningsvinklen findes herved:

$$\tan\Theta = \frac{2\mu_2}{1 - \mu_1\mu_2} \tag{12}$$

Resultatet ses at stemme overens med ligning (5) for $\mu_1 = 0$. Resultatet er eftervist eksperimentelt (se J. Bennett and A. Mauney, “The Static Ladder Problem with Two Sources of Friction”, *THE PHYSICS TEACHER* **49**, 567-569 (2011)).

Også koaksialkabelopgaven er et eksempel på, at fysik, mere end så mange andre fag, er et fag efter devisen: Svar haves, spørgsmål søges.

Spørgsmålet i koaksialkabelopgaven er velvalgt i forhold til svaret, at energien i det opbyggede magnetfelt ved selvinduktion kan identificeres med $\frac{1}{2}LI^2$. Men hvad hvis der blev spurgt om selvinduktionsbidraget fra en almindelig ledning? Så kommer vi umiddelbart i vanskeligheder. Regningerne tilsvarende løsningen af koaksialkabelopgaven fører til ligning (8) med $r_2 = \infty$, dvs. en uendelig selvinduktionskoefficient. I dette mere almindelige tilfælde er vi ved brugen af Amperes lov derfor nødt til at tage højde for, at strømmen i ledningen forudsætter et kredsløb, og at strømmen igennem et plan vinkelret på netop et kredsløb løber begge veje igennem planet. Magnetfelterne fra de to gennemløb ophæver da tilnærmelsesvis hinanden i afstande fra kredsløbet, der er store i forhold til kredsløbets udstrækning d. En tilnærmelse til kredsløbets selvinduktionskoefficient er så ligning (8) med d indsat i stedet for r_2.

Både i tilfældet brættet imod den glatte væg og i tilfældet selvinduktionskoefficientsbidraget fra koaksialkablet er der spurgt til specialtilfælde, som teknisk set ikke er repræsentative, men som til gengæld lader sig belyse med de umiddelbart tilgængelige fysiklamper. Sådan er det ofte i fysikundervisning, fordi den mere orienterer sig imod læring af tankegange end imod tilegnelse af fænomenviden. Ifølge den fysikuddannede videnskabsteoretiker Thomas Kuhn er det også typisk sådan i fysikforskning. I efterskriftet fra 1969 til hans meget refererede bog “Videnskabens Revolutioner” karakteriserer han fag ved deres såkaldte “faglige matrix” (i første omgang brugte han begrebet “paradigme” til også at karakterisere fag). En afgørende ingrediens i et fags matrix er en række “eksemplarer”, konkrete problemløsninger, som fagets udøvere via deres uddannelse er fælles om, og som kan tjene som forbilleder på en større klasse af problemstillinger. Eksemplarerne er svarene, hvis anvendelighed i forhold til en udvidet klasse spørgsmål undersøges.

Fysikere behøver ikke at være flove over at praktisere og uddanne studerende til devisen: Svar haves, spørgsmål søges. Det er karakteristisk for teoretisk orienteret normalvidenskab. Hvorimod praktisk orienteret videnskab opererer efter den nemmere forståelige devise: Spørgsmål haves, svar søges. Derfor er praktisk orienteret videnskab mere end anvendt teoretisk videnskab. Og derfor kan fx ingeniørvidenskab ikke reduceres til anvendt fysik.

Breddeopgave 65. Temperaturbølger

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen september 1987, nr. 65 i rækken her i KVANT):

Temperaturændringerne på Jordens overflade i løbet af døgnet, i løbet af året og fra istid til istid afspejler sig hver for sig i dæmpede temperaturbølger ned gennem undergrunden. Hvordan afhænger bølgelængden af svingningstiden og undergrundens egenskaber? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Temperaturbølger – breddeopgave 65 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 65 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 65. Temperaturbølger

Temperaturændringerne på Jordens overflade i løbet af døgnet, i løbet af året og fra istid til istid afspejler sig hver for sig i dæmpede temperaturbølger ned gennem undergrunden. Hvordan afhænger bølgelængden af svingningstiden og undergrundens egenskaber? Begrund svaret.

Løsning

Der er to af undergrundens egenskaber, der er bestemmende for temperaturbølgerne. Den ene er undergrundens varmeledningsevne, κ. Den anden er varmefylden per volumen af undergrunden, c_v. Hvis vi skulle opstille differentialligningen, hvis løsning kunne give os udseendet af temperaturbølgerne, ville vi nemlig til en start se på et jordlag af infinitesimal tykkelse og kræve, at forskellen mellem varmeledningen ind i og ud af laget er lig med energiophobningen per tid i laget, hvor varmeledningen er proportional med κ og energiophobningen per tid er proportional med c_v.

Men lad os til en start her nøjes med at lave dimensionsanalyse. Vi kalder grunddimensionerne masse, længde, tid og temperatur for henholdsvis M, L, T og Θ. Da κ er proportionalitetskonstanten imellem varmestrømtæthed (med dimensionen M L^2 T^{-2} T^{-1} L^{-2} = M T^{-3}) og temperaturgradient (med dimensionen Θ L^{-1}), har κ den afledte dimension M T^{-3} L Θ^{-1}. Da c_v er proportionalitetskonstanten imellem energiophobning per volumen (med dimensionen M L^2 T^{-2} L^{-3}) og temperaturforøgelse (med dimensionen Θ), har c_v den afledte dimension M L^{-1} T^{-2} Θ^{-1}. Vi kalder temperaturbølgernes bølgelængde λ (med dimensionen L) og svingningstiden for temperaturændringerne ved Jordens overflade for τ (med dimensionen T). De mulige udtryk for bølgelængden som funktion af varmeledningsevnen, varmefylden per volumen og svingningstiden, $\lambda(\kappa, c_v, \tau)$, skal da søges blandt

$$\lambda(\kappa, c_v, \tau) = A\kappa^\alpha c_v^\beta \tau^\gamma, \tag{1}$$

hvor A er et rent (dimensionsløst) tal, og α, β og γ skal vælges, så begge sider af ligningen får samme dimension. Vi må derfor kræve, at

$$\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0 = (\mathrm{MT}^{-3}\mathrm{L}\Theta^{-1})^\alpha \cdot (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}\Theta^{-1})^\beta \cdot \mathrm{T}^\gamma. \tag{2}$$

Det betyder, at α, β og γ skal opfylde ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \quad (\mathrm{M}) \\ 1 &= \alpha - \beta \quad (\mathrm{L}) \\ 0 &= -3\alpha - 2\beta + \gamma \quad (\mathrm{T}) \\ 0 &= -\alpha - \beta \quad (\Theta), \end{aligned} \tag{3}$$

da grunddimensionerne ikke kan afledes fra hinanden, og eksponenten af hver grunddimension derfor må være den samme på hver side af ligning (2). Ligningssystemet har én og kun én løsning, nemlig $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ og $\gamma = \frac{1}{2}$.

Som svar på opgaven har vi derfor ved hjælp af dimensionsanalyse entydigt fundet

$$\lambda(\kappa, c_v, \tau) = A\sqrt{\kappa\tau/c_v}. \tag{4}$$

Principielt behøvede vi ikke forudsætte, at præfaktoren A er et rent dimensionsløst tal. Kravet om ens dimension på begge sider af ligning (1) kunne også tænkes opfyldt af ligning (4), hvis A var en dimensionsløs funktion af dimensionsløse produkter af potenser af κ, c_v og τ. Imidlertid eksisterer der ikke sådanne produkter. Det ses af ligningssystemet (3) med den anden ligning erstattet med $0 = \alpha - \beta$, svarende til, at vi erstatter $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0$, på venstre side af ligning (2), med $\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0\mathrm{T}^0$. Ligningssystemet har da alene løsningen $\alpha = 0, \beta = 0$ og $\gamma = 0$. Derfor er A nødvendigvis et rent dimensionsløst tal.

Kommentar

Resultatet (4) kan også findes ved at indsætte den dæmpede temperaturbølge

$$\Delta T(x,t) = \Delta T_0 \exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{\tau}\right) \tag{5}$$

i varmediffusionsligningen

$$\kappa\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} = c_v\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}. \tag{6}$$

(5) er løsning til (6), hvis og kun hvis der for dæmpningslængden x_0 og bølgelængden λ gælder $x_0 = \lambda/2\pi$ og $2\kappa\tau/c_v = \lambda x_0$. For λ finder vi derfor

$$\lambda = \sqrt{4\pi\kappa\tau/c_v}. \tag{7}$$

I forhold til dimensionsanalysen og resultatet i ligning (4) har vi fået præciseret talkonstanten til $\sqrt{4\pi}$. For x_0 finder vi

$$x_0 = \sqrt{\kappa\tau/\pi c_v}. \tag{8}$$

Bortset fra talfaktoren $\sqrt{1/\pi}$ var det også, hvad vi fandt ved dimensionsanalysen. Den viste, at der bortset fra talfaktorer, kun kan dannes én karakteristisk længde ved kombination af varmeledningsevne, varmefylde per volumen og svingningstid. Dimensionsanalysen viste derfor umiddelbart, at dæmpningslængden og bølgelængden for den dæmpede temperaturbølge kun kunne adskille sig fra hinanden med en talfaktor, som fundet i ligning (7) og (8).

Erfaringsmæssigt er der frostfrit ca. en meter nede i jorden. For $\tau = 1$ år har x_0 således størrelsesordenen 1 m. Formel (4) og (8) viser da umiddelbart, at de daglige temperatursvingninger med en svingningstid, der er ca. 400 gange så lille som de årlige, trænger ca. $\sqrt{400} = 20$ gange så lidt ned som de årlige, dvs. ca. 5 cm. Omvendt er nedtrængningsdybden for temperatursvingningerne med $\tau \approx 10000$ år fra istid til istid $\sqrt{10000} = 100$ gange så stor som den årlige, dvs ca. 100 m. Jeg har for mange år siden været vejleder for en projektgruppe på RUC, der ret overbevisende målte temperaturprofilen i et borehul, og således kortlagde et minde om sidste istid.

Breddeopgave 66. Lineal på pegefingre

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen august 2012, nummer 66 i rækken her i KVANT):

En stok, lineal eller lignende ligger på en persons to udstrakte pegefingre. Når pegefingrene bevæges imod hinanden glider stokken/linealen først kun på den ene pegefinger, så kun på den anden, så igen kun på den første, så igen kun på den anden osv. Forklar hvordan og hvorfor.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Lineal på pegefingre
– breddeopgave 66 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

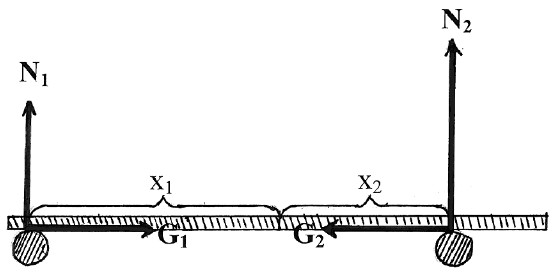
Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 66 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 66. Lineal på pegefingre.

En stok, lineal eller lignende ligger på en persons to udstrakte pegefingre. Når pegefingrene bevæges imod hinanden glider stokken/linealen først kun på den ene pegefinger, så kun på den anden, så igen kun på den første, så igen kun på den anden osv. Forklar hvordan og hvorfor.

Løsning

På figuren er indtegnet normalreaktionerne $\boldsymbol{N_1}$ og $\boldsymbol{N_2}$ på linealen fra de to pegefingre i situationen, hvor pegefingrene har henholdsvis afstanden x_1 og afstanden x_2 til linealens midtpunkt. Samtidig er gnidningskræfterne $\boldsymbol{G_1}$ og $\boldsymbol{G_2}$ indtegnet svarende til, at pegefingrene bevæges imod hinanden på en rolig måde, så linealen ikke accelereres.



Ved brug af den sædvanlige model for gnidning imellem faste stoffer, og under antagelse af at linealen har samme tværsnit i hele sin længde, gælder:

1) $N_1 x_1 = N_2\, x_2$, idet det samlede kraftmoment omkring linealens midtpunkt må være nul, da stangen ikke roterer.

2) $G_1 = G_2$, idet den samlede kraft i vandret retning må være nul, da linealen antages ikke at blive accelereret.

3) $G = \mu_d N$, ved en pegefinger som glider under linealen. μ_d er den dynamiske gnidningskoefficient.

4) $G \leq \mu_s N$, ved en pegefinger som er i ro i forhold til linealen. μ_s er den statiske gnidningskoefficient.

Linealens glid over de to pegefingre på skift, når pegefingrene bevæges imod hinanden, hænger sammen med, at μ_d erfaringsmæssigt er mindre end μ_s. Til en start er linealen i ro på pegefingrene medens vi forsøger at bevæge dem imod hinanden uden at kunne det, da fingrene holdes fast af de statiske gnidninger imod linealen. Når vi så øger presset vil linealen begynde at glide i forhold til den pegefinger, hvor vores påtrykte G først overskrider $\mu_s N$. Hvis det drejer sig om pegefinger nummer 2 vil denne pegefinger herefter et stykke tid glide under linealen og påvirke den med gnidningskraften $G_2 = \mu_d N_2$. Da $\mu_d < \mu_s$, er G_2 (og G_1, som hele tiden er lig med G_2) til at begynde med mindre end lige før pegefingeren begyndte at glide under linealen. Men i takt med at x_2 mindskes, vil G_2 blive større, fordi N_2 bliver større, når x_2 bliver mindre. Jo mindre x_2 bliver i forhold til x_1, jo større en andel af stangens vægt skal modvirkes af N_2. Samtidigt betyder N_1's tilsvarende mindre andel af stangens vægt, at grænsen for, hvor stor en statisk gnidningskraft pegefinger nummer 1 kan levere, bliver gradvist mindre. På et tidspunkt vil $G_2 = G_1 = \mu_d N_2$ derfor nå grænsen $\mu_s N_1$. Pegefinger 1 vil da begynde at glide under linealen. Herefter vil de to pegefingre kunne bevæges imod hinanden et stykke tid, ved at pegefinger nummer 1 glider medens pegefinger nummer 2 er i ro i forhold til linealen, indtil kravet til den statiske gnidningskraft fra pegefinger 2 når grænsen $\mu_s N_2$. Så bytter pegefingrene igen roller. Og sådan fortsætter det indtil pegefingrene mødes på midten af linealen.

Overgangen fra, at pegefinger 2 glider og pegefinger 1 er i ro, til, at pegefinger 1 glider og pegefinger 2 er i ro, sker som sagt, når $\mu_d N_2 = \mu_s N_1$. Da $N_1\, x_1 = N_2\, x_2$, ses heraf, at skiftet sker, når x_2, i forhold til den fastholdte værdi af x_1, når til værdien givet ved

$$x_2/x_1 = \mu_d/\mu_s. \tag{1}$$

Tilsvarende sker det næste skift, når x_1, med x_2 givet ved ligning (1), når til værdien givet ved $x_1/x_2 = \mu_d/\mu_s$. Og så fremdeles.

Kommentar

Et usikkert pilotforsøg med min 40 cm plastiklineal giver ved hjælp af ligning (1) resultatet $\mu_d/\mu_s \approx \frac{1}{2}$ for gnidningskoefficienterne imellem plastiklinealen og mine pegefingre.

Opgaven er ikke en af dem vi på RUC selv har fået ideen til. Den blev brugt ved eksamen i august

2012, fordi jeg af anden årsag forud var blevet mindet om den ved gennembladning af mekaniknoter fra min egen studietid (Mekanik III, Partikelsystemer og stive legemer, Forelæsninger ved Københavns Universitet, efterår 1959, 2. udg.). I noterne, som er velskrevne uden forfatterangivelse, optræder opgaven som et gennemregnet eksempel.

I almindelighed kommer ideerne til nye breddeeksamensopgaver løbende og ikke ved fx søgning i opgavesamlinger, lærebøger m.m. ved udarbejdelsen af opgavesæt umiddelbart forud for eksamen. De ca. 700 indtil nu formulerede breddeeksamensopgaver er en blanding af velkendte, omformulerede velkendte og nyopfundne opgaver. Der er ikke copyright på opgaver, og for os har det ikke første prioritet at være originale. Det afgørende er, at opgaverne ikke er for tæt på at være kloner af allerede eksisterende opgaver i samlingen, og at de så vidt muligt lever op til følgende 7 hensyn:

1. Rimelig behandling af de antydede problemer, skal forudsætte fysisk forståelse.
2. Opgaverne skal vedrøre de centrale begrebsdannelser og forståelsesmåder i fysikken.
3. Opgaverne skal tilsammen udspænde pensum.
4. Løsning af opgaverne skal kunne ske ved simple regninger.
5. Problemstillingerne skal kunne formuleres i dagligdags sprog, således at den nøjere præcisering af problemerne i fysiske termer bliver et centralt punkt ved opgaveløsningen.
6. Opgaverne skal have en rimelig sværhedsgrad.
7. Opgaverne skal vedrøre virkelige, ikke tænkte, problemstillinger.

I introduktionen til artikelserien om breddeopgaver i KVANT, marts 2000, er der givet lidt begrundelse for de 7 hensyn.

Pointen med at opliste de 7 hensyn her er at tydeliggøre, at det ikke i almindelighed lader sig gøre at kopiere efter traditionelle opgavesamlinger, hvis der skal leves op til hensynene. Nogle gange lader det sig gøre at kopiere direkte. Flere gange får vi inspiration fra opgavesamlinger eller lærebøger til opgaver, der i kraft af justerede formuleringer lever op til breddeopgavegenren. Oftest kommer ideerne imidlertid fra alle mulige andre kilder. Vores studerende, vores yngre kandidater, vores kolleger, konferencer, foredrag, tidsskriftartikler, avisartikler, vores hverdage, vores ferier, museumsbesøg, fjernsynet, venner og bekendte, samt vores undervisning og forberedelserne til den. Uanset arten af kilde til opgaveideer er den afgørende overvejelse, om ideen kan udvikles, så den lever rimeligt op til de 7 hensyn, og ikke ligger for tæt op af allerede stillede opgaver.

Den første censor på Breddekurset på RUC i 1976, Ove Nathan, støttede os i udviklingen af kurset. Men han var bekymret for, at vi inden for en overskuelig tid ville udtømme opgavemulighederne, der kunne leve op til de skitserede hensyn. For mig har måden at undgå det på været løbende året rundt og igennem årene at oparbejde en samling af stikord til opgaveideer ved, fra en ides undfangelse at notere ideen (senest 10 minutter efter, for ikke at glemme den igen) på en lap papir i min tegnebog. Når jeg så siden skal udarbejde eksamensopgaver, kigger jeg til en start bunken af stikord igennem. Og indtil videre er bunken mere vokset end svundet ind.

Uden en sådan idebunke er det erfaringsmæssigt svært at udarbejde et breddeeksamensopgavesæt. Hvis man uden idebunken sætter sig for at udarbejde sættet to uger før eksamen får man problemer. Det er svært at få ideer under tidspres og på kommando. I min idebunke forud for udarbejdelsen af eksamensopgavesættet fra august 2012 var der et stikord, der henviste til eksemplet "lineal på pegefingre" i mine gamle mekaniknoter.

Breddeopgave 67. Atlanterhavsbølger

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra samlingen af træningsopgaver ved opstarten af "Breddekursus", nummer 67 i rækken her i KVANT):

Hvordan er sammenhængen mellem bølgehastighed og bølgelængde for bølgerne på Atlanterhavet? Begrund svaret ud fra en dimensionsbetragtning.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Atlanterhavsbølger
– breddeopgave 67 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 67 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 67. Atlanterhavsbølger

Hvordan er sammenhængen mellem bølgehastighed og bølgelængde for bølgerne på Atlanterhavet? Begrund svaret ud fra en dimensionsanalyse.

Løsning

I atlanterhavsbølger bevæger vandmasserne sig i tyngdefeltet. Tyngdefeltstyrken g må derfor være bestemmende for bølgernes hastighed. Hvis der var vand på Månen, ville tilsvarende tyngdebølger dér bevæge sig med en anden hastighed end på Jorden. Vi må også antage, at bølgehastigheden varierer med bølgelængden λ. Det kan også tænkes, at bølgehastigheden afhænger af bølgehøjden a. Men den eventuelle afhængighed kan vi se bort fra, når a er lille i forhold til λ, da vi ved, at bølgehastigheden ikke går mod nul for a/λ gående imod nul. Derfor kan vi se bort fra a som bestemmende størrelse, når vi begrænser os til at udtale os om ikke for skrappe bølger. Havdybden ser vi bort fra som noget, der har indflydelse på bølgerne, i betragtning af den store afstand til bunden af Atlanterhavet sammenlignet med størrelsesordenen af de bølgelængder, vi vil finde bølgehastigheder for. Endelig kunne vi måske også umiddelbart tænke os, at vandets massefylde ϱ har indflydelse på vandbevægelserne. Altså, at bølgehastigheden for bølger i et kviksølvhav ville have andre bølgehastigheder end tilsvarende bølger i Atlanterhavet.

Med disse udgangspunkter er bølgehastigheden af bølgerne på Atlanterhavet, v, en funktion alene af g, λ og ϱ, $v(g, \lambda, \varrho)$. Da g, λ og ϱ ikke kan kombineres til en dimensionsløs størrelse og kun kombinationen $\sqrt{g\lambda}$ af g, λ og ϱ, har dimensionen hastighed har vi følgelig med nødvendighed:

$$v(g, \lambda, \varrho) = b\sqrt{g\lambda}, \tag{1}$$

hvor b er et dimensionsløst tal. Hastigheden af bølgerne på Atlanterhavet er derfor proportional med kvadratroden af deres bølgelængder, og den er uafhængig af ϱ i overensstemmelse med, at alle legemer falder lige hurtigt.

Kommentar

Dimensionsanalyse med det formål at udtrykke en fysisk størrelse Q_1 som funktion af en række andre bestemmende fysiske størrelser, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, altså at finde en formel for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$, består i almindelighed af to skridt.

Fysiske størrelser med forskellig dimension, f.eks. en længde og en masse, kan ikke meningsfuldt lægges sammen. Derimod kan de ganges sammen og divideres med hinanden til en ny størrelse med en ny dimension, f.eks. massefylde med dimensionen masse divideret med længde i tredje potens. Derfor skal de dimensionsmæssigt mulige formler søges blandt:

$$Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...) = p\, Q_2^{\alpha}\, Q_3^{\beta}\, Q_4^{\gamma} ..., \tag{2}$$

hvor p er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse bestemmende fysiske størrelser eller dimensionsløse kombinationer af bestemmende fysiske størrelser.

Det andet skridt i dimensionsanalyse består derfor i, dels at finde ud af hvilke værdier af α, β, γ..., der giver ligning (2) samme dimension på begge sider af lighedstegnet, dels at finde ud af om der findes dimensionsløse kombinationer af Q_2, Q_3, Q_4, ..., og i givet fald hvilke, som p da kan afhænge af. I den næste artikel i rækken vil jeg uddybe dette. Her vil jeg kommentere det første skridt.

Det første skridt i dimensionsanalyse er valget af de bestemmende fysiske størrelser, Q_2, Q_3, Q_4, ..., for den størrelse Q_1, der ønskes udviklet en formel for. Oftest er det dette skridt, der volder mine studerende størst vanskeligheder. Til en start vil de typisk mene, at man kun kan vælge de bestemmende fysiske størrelser, hvis man ad anden vej kender det resultat, man vil udlede. Så hvilke fysiske størrelser kan en utrænet, uden at kende svaret på forhånd, tænke, at bølgehastigheden af bølgerne i Atlanterhavet afhænger af?

Alt inkluderet, har jeg oplevet følgende anførte forslag til bestemmende fysiske størrelser for bølgehastigheden:

$$v = v(g, \lambda, \varrho, \eta, \gamma, a, h, f, x, y, t) \tag{3}$$

Her står g for tyngdefeltstyrke, λ for bølgelængde, ϱ for massefylde, η for viskositet, γ for overfladespænding, a for bølgeamplitude, h for havdybde, f for bølgefrekvens, x og y for rumkoordinater, t for tid. Hvilke er da argumenterne for blandt disse fysiske størrelser at nøjes med g, λ og ϱ, som gjort ved løsningen af opgaven?

Argument 1. Resultatet af en modelberegning afhænger af modellens parametre, ikke af dens variable. Dimensionsanalyse er en metaanalyse af, hvilken art resultater forestillede modelberegninger er begrænset til at kunne føre til, uden at foretage beregningerne, afhængig af de antagelser, som modellerne er baserede på. De fysiske størrelser x, y og t indgår i modelberegning af bølger. Men de indgår ikke i det resultat vi efterspørger. Det er givet ved modellens parametre og ikke dens variable x, y, og t. På samme måde som, hvis vi skulle modellere en bygningskonstruktion ved hjælp af en ret linje, $y = ax$, og en cirkel, $x^2 + y^2 = r^2$, for at finde højden h af deres skæringspunkt. Her har a og r rolle af parameter, x og y rolle af variable i modellen. Resultatet, $h = ar/\sqrt{a^2+1}$, afhænger af parametrene a og r, ikke af variablene x og y. Tilsvarende er det misforstået (og meningsløst) at medtage x, y og t som bestemmende for v.

Argument 2. De bestemmende fysiske størrelser skal repræsentere indbyrdes uafhængige fysiske forhold. For frekvensen f gælder det, at den matematisk er bundet sammen med v og λ, idet $v = f\lambda$. Vi kan derfor ikke vælge f og λ uafhængigt af hinanden som bestemmende for v. Indsættes $\lambda = v/f$ i ligning (1), fås

$$v(g, f, \varrho) = b^2 g/f \tag{4}$$

Ligningerne (1) og (4) er begge fysiske ligninger. De viser en sammenhæng i naturen. Derimod er $v = f\lambda$ en matematisk ligning. Den viser en logisk konsekvens af, at vi taler om periodiske bølger. Fysisk set fortæller ligningerne (1) og (4) det samme. Forskellen imellem dem har alene med en matematisk reformulering at gøre. Ved dimensionsanalysen kan vi vælge at regne f for bestemmende input parameter. I så fald vil vi nå frem til ligning (4), hvis vi undlader at regne med λ som bestemmende input parameter samtidigt. Vi kan ikke regne både f og λ for bestemmende uafhængigt af hinanden.

Argument 3. Valget af bestemmende fysiske størrelser afhænger af rækkevidden af den ønskede formel. Vi kan nøjes med at interessere os for bølger med bølgelængder, der er små i forhold til havdybden. Så afhænger v ikke af h. Tilsvarende afhænger v ikke af bølgehøjden a, hvis vi nøjes med at interessere os for bølger, hvor bølgehøjden er lille i forhold til bølgelængden. Endelig kan vi se bort fra overfladespændingen γ som bestemmende, ved at forudsætte bølgelængden stor nok til, at tyngdekræfter dominerer over overfladespændingskræfter.

Argument 4. Kun relevante fysiske størrelser skal tages i betragtning. Vandets viskositet η er en egenskab ved vandet, der fysisk set er uafhængig af f.eks. vandets massefylde ϱ. Men den er umiddelbart irrelevant for bestemmelsen af v. Viskositeten har først og fremmest betydning for dæmpningen af bølgerne ved, at deres mekaniske energi i det lange løb bliver til termisk energi, ikke for bølgernes hastighed. Derimod er der forskelligt indhold af mekanisk energi i ens bølger i væsker med forskellig massefylde. Derfor er det også umiddelbart relevant at antage, at v afhænger af ϱ. Det er da også tilfældet for kappilarbølger. For Atlanterhavets tyngdebølger – som er det, vi har udviklet formler for – udgik derimod ifølge dimensionsanalysen også ϱ som bestemmende for v. For mange mekaniske fænomener drevet af netop tyngdekræfter udgår størrelsen af involverede masser af beregningerne, da de optræder ens på begge sider af lighedstegnet i Newtons II lov.

Af de to skridt, som dimensionsanalyse består af, er det valget af inputstørrelser gennem overvejelser som de her antydede, der er det svære skridt. Det kræver forståelse af den begrebslige forskel imellem modellers parametre og variable, forståelse af forskellen imellem matematiske lighedstegn (udsagn om logisk sammenhæng) og fysiske lighedstegn (udsagn om empirisk sammenhæng), sans for modellering ved hjælp af idealiseringer, og overblik over, hvilke fysiske størrelser, der er relevante for givne fænomener. Når først Q_2, Q_3, Q_4, ... er valgt, er det i forhold hertil en ret formel og overkommelig sag at gennemføre analysen ved hjælp af ligning (2).

Når den (fejlagtige) opfattelse findes, at dimensionsanalyse kun kan benyttes til at finde resultater, som er fundet på anden måde i forvejen, hænger det sammen med vanskelighederne ved valget af inputstørrelser. Det er måske disse vanskeligheder, der er grunden til, at dimensionsanalyse ikke er ret hyppigt forekommende i indledende universitetsundervisning i fysik? Det antages måske, at man, for at dimensionsanalysen skal give mening, først må forberedes fysikmæssigt ad anden vej.

Imidlertid er det en overvejelse værd, om vanskelighederne ved valg af inputstørrelser ved en dimensionsanalyse ikke modsvarer nogle af de afgørende vanskeligheder på vejen til at lære at tænke, som fysikere gør, i det hele taget. I så fald er dimensionsanalysen måske den oplagte indgang til at lære fysik, forud for, at der udbygges med matematik.

Forståelsen af forskellen imellem parametre og variable i en model, forståelsen af forskellen imellem matematiske og fysiske lighedstegn, og forståelsen af forskellen imellem at overse og at se bort fra, er alle afgørende ved modellering og fysisk problemløsning. I stedet for at forudsætte disse forståelser for at give sig i kast med dimensionsanalyse, kan man spørge om sagen ikke kan vendes på hovedet: Måske er arbejde med dimensionsanalyse en af de mere direkte veje til at træne disse forståelser? Samtidig kan dimensionsanalysen undervisningsmæssigt bruges til at introducere mange dele af fysikken forud for, at der senere udbygges med den matematik, der for tidligt indført kan komme til at overskygge fysikindholdet.

Breddeopgave 68. Bohrs atommodel

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt træne dimensionsanalyse ved løsningen af denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2009, nummer 68 i rækken her i KVANT):

Niels Bohr blev i 1913 ført på sporet af sin model for brintatomet ved at bemærke, at det ikke er muligt at danne en karakteristisk længde svarende til atomets størrelse fra naturkonstanterne m_e, elektronens masse, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$, konstanten i Coulombs lov, der er de naturkonstanter, der kan indgå i resultatet af en klassisk beregning. Hvis derimod h, Plancks konstant, inddrages, fremgår der herved en karakteristisk længde af den rigtige størrelsesorden. Hvordan er Bohrradius givet ved m_e, h, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Bohrs atommodel – breddeopgave 68 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 68 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 68. Bohrs atommodel

Niels Bohr blev i 1913 ført på sporet af sin model for brintatomet ved at bemærke, at det ikke er muligt at danne en karakteristisk længde svarende til atomets størrelse fra naturkonstanterne m_e, elektronens masse, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$, konstanten i Coulombs lov, der er de naturkonstanter, der kan indgå i resultatet af en klassisk beregning. Hvis derimod h, Plancks konstant, inddrages, fremgår der herved en karakteristisk længde af den rigtige størrelsesorden. Hvordan er Bohrradius givet ved m_e, h, og $e^2/4\pi\varepsilon_0$? Begrund svaret.

Løsning

Dimensionen af m_e er masse, M. Dimensionen af $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ er ifølge Coulombs lov kraft gange længde i anden potens, M L^3 T^{-2}. Det ses, at dimensionen af ethvert produkt af en potens af m_e og en potens af $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ indeholder basisdimensionen tid i en eller anden potens. Det er derfor ikke muligt at lave et potensprodukt af de to naturkonstanter med alene dimensionen længde. Men billedet skifter, hvis vi yderligere inddrager Plancks konstant, der har dimensionen energi gange tid, M L^2 T^{-1}. Så giver kombinationen

$$b\frac{h^2}{m_e e^2/(4\pi\varepsilon_0)} = b\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{m_e e^2} \tag{1}$$

hvor b er en dimensionsløs talfaktor, en fysisk størrelse med dimensionen længde. Vælges talfaktoren til at være $b = (2\pi)^{-2}$, er dette radius af brintatomet i grundtilstanden ifølge Bohrs atommodel, altså Bohrradius. Bortset fra den ukendte talfaktor tillader dimensionsanalysen ikke andre mulige svar på opgaven. Enhver model eller teori, der benytter h, m_e og $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ som inputparametre, vil nødvendigvis levere svaret (1). Derfor er det heller ikke overraskende, at den kvantemekaniske udregning ud fra Schrödingerligningen, som har de samme inputparametre, fører til samme resultat som Bohrs atommodel.

Kommentar

At Niels Bohr var hjulpet af dimensionsovervejelser på vej til sin atommodel fremgår bl.a. af følgende citat fra "Om Brintspektret", *Fysisk Tidsskrift*, vol. **12**, 1913:

"At man ikke kan komme nogen Vegne med et saa simpelt System, som det vi betragter, kunde man have forudsagt allerede udfra en Dimensionsbetragtning; man kan nemlig ikke ved Hjælp af e og m alene bestemme en Størrelse, der kan tydes som en Diameter af et Atom ..." (Her står m for elektronens masse og e for $e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, da Bohr anvender det Gaussiske system.)

I indledningen i "On the Constitution of Atoms and Molecules", Philosophical Magazine, vol. 26, 1913, findes bl.a. denne dimensionsovervejelse:

"Whatever the alteration in the laws of motion of electrons may be, it seems necessary to introduce in the laws in question a quantity foreign to the classical electrodynamics, i.e. Planck's constant, or as it often is called the elementary quantum of action. By the introduction of this quantity the question of the stable configuration of the electrons in the atoms is essentially changed, as this constant is of such dimensions and magnitude that it, together with the mass and charge of the particles, can determine a length of the order of magnitude required."

I øvrigt vil kommentaren her, som annonceret i min forrige artikel i KVANT, dreje sig om dimensionsanalyse mere generelt.

Dimensionsanalyse med det formål at udtrykke en fysisk størrelse Q_1 som funktion af en række andre bestemmende fysiske størrelser, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, altså at finde en formel for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$, består i almindelighed af to skridt. Det første - og sværeste - skridt består i at udvælge de inputparametre, $Q_2, Q_3, Q_4, ...$, der er relevante for Q_1. Dette skridt kommenterede jeg i min forrige artikel. Når inputparametrene er valgt består det andet skridt i at søge den efterspurgte formel blandt de dimensionsmæssigt tilladte.

Da fysiske størrelser med forskellig dimension, fx en længde og en masse, ikke meningsfuldt kan lægges sammen, hvorimod de kan ganges og divideres med hinanden til nye størrelser med nye dimensioner, fx massefylde med dimensionen masse divideret med længde i tredje potens, skal de dimensionsmæssigt tilladte formler søges blandt:

$$Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...) = g\, Q_2^{\alpha}\, Q_3^{\beta}\, Q_4^{\gamma} ... \qquad (2)$$

ved at vælge α, β, γ, ... således, at højre og venstre side får samme dimension, og hvor g er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse bestemmende fysiske størrelser eller dimensionsløse kombinationer af bestemmende fysiske størrelser.

Det kan tænkes, at der er flere måder at vælge α, β, γ, ... på, som tilfredsstiller kravet om ens dimension på de to sider af ligning (2), resulterende i forskellige fysiske størrelser A, B, ... , der alle har dimension som Q_1, hvorved Q_1 kan fremstilles som en linearkombination af A, B, ... Men da $aA + bB + ... = A(a + bB/A + ...)$, kan vi i det tilfælde genetablere ligning (2)'s måde at udtrykke $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$ på ved at inkludere den dimensionsløse parentes i g faktoren. Som en konsekvens af, at fysiske størrelser med forskellig dimension alene kan multipliceres og ikke adderes, repræsenterer ligning (2) derfor alle tænkelige formler for $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4, ...)$.

I litteraturen skelnes der mellem en intuitiv tilgang til dimensionsanalyse og dimensionsanalyse gennemført i kraft af det såkaldte Buckinghams Π-teorem. (Se fx T. Misic, M. Najdanovic-Lukic, and L. Nesic, "Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem," *Eur. J. Phys.* **31**, 893-906 (2010).) Efter min vurdering er der ikke tale om to væsensforskellige tilgange til dimensionsanalysen, hvorfor jeg har sammenfattet dem i ligning (2).

Den intuitive tilgang er den, hvor faktoren g i ligningen er enkel at overskue. Lad os illustrere den intuitive tilgang ved den formelle brug af ligning (2) på Bohrradius-eksemplet. Her har ligning (2), med a_0 som Bohrradius, udseendet

$$a_0(h, m_e, e^2/(4\pi\varepsilon_0)) = g h^{\alpha} m_e^{\beta} (e^2/(4\pi\varepsilon_0))^{\gamma}. \qquad (3)$$

Da g er dimensionsløs, følger heraf

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^0\mathrm{L}^1\mathrm{T}^0 &= \mathrm{L} = [a_0] = [h^{\alpha} m_e^{\beta} (e^2/(4\pi\varepsilon_0))^{\gamma}] && (4)\\ &= (\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-1})^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}(\mathrm{ML}^3\mathrm{T}^{-2})^{\gamma} && (5)\\ &= \mathrm{M}^{\alpha+\beta+\gamma}\mathrm{L}^{2\alpha+3\gamma}\mathrm{T}^{-\alpha-2\gamma}, && (6) \end{aligned}$$

hvor fx $[a_0]$ skal læses som dimensionen af a_0. Da M, L og T som valgte basisdimensioner ikke kan reduceres til hinanden, skal deres potenser i ligning (4) stemme overens hver for sig. Det giver ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 0 = \alpha + \beta + \gamma && (7)\\ \mathrm{L}: &\quad 1 = 2\alpha + 3\gamma && (8)\\ \mathrm{T}: &\quad 0 = -\alpha - 2\gamma && (9) \end{aligned}$$

med den entydige løsning $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. Indsat i ligning (3) fås herefter vores resultat fra ligning (1) igen. Hvad med faktoren g i ligning (3)? Den er et rent tal, da der ikke indgår dimensionsløse fysiske inputstørrelser i problemet, og da h, m_e og $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$ ikke kan kombineres til en dimensionsløs størrelse. Det fremgår af, at hvis ligningssystemet (7)-(9) havde lutter nuller på venstresiderne, ville det have den entydige løsning $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Når g blot er et tal, drejer dimensionsanalyse sig alene om at finde de rigtige potenser på inputparametrene.

Dimensionsanalyse ved hjælp af Buckinghams Π-teorem svarer til ligning (2), hvor faktoren g er kompleks og sværere at overskue. Lad os illustrere ved eksemplet den hydrodynamiske tværkraft, Magnus-kraften, på et roterende kugleformet legeme i bevægelse gennem et medie. Eksemplet viser også det usædvanlige, at implicitte videnskabsteoretiske fortolkninger af fysik kan have kontante fysikfaglige konsekvenser.

Magnus-kraften må afhænge af radius r, størrelsen af translationshastigheden v, og størrelsen af vinkelhastigheden ω af det kugleformede legeme.

Størrelsen af Magnus-kraften må også afhænge af vinklen mellem translationshastigheden og rotationshastigheden, θ. Endelig må den afhænge af massefylden ρ og viskositeten η af mediet. Hvis vi antager mediet for at være usammentrykkeligt, er det svært for den trænede fysiker at tænke på inputvariable herudover. Vi vil derfor spørge om, hvordan størrelsen af Magnus kraften F afhænger af de nævnte parametre. Hvordan ser funktionen $F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta)$ ud?

Svarende til ligning (2) skal funktionen søges blandt:

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = g r^{\alpha} v^{\beta} \omega^{\gamma} \theta^{\delta} \rho^{\epsilon} \eta^{\zeta} \qquad (10)$$

Da g og θ er dimensionsløse, følger heraf

$$\begin{aligned} \mathrm{MLT}^{-2} &= [\mathrm{F}] = [r^{\alpha} v^{\beta} \omega^{\gamma} \theta^{\delta} \rho^{\epsilon} \eta^{\zeta}] && (11)\\ &= \mathrm{L}^{\alpha}(\mathrm{LT}^{-1})^{\beta}(\mathrm{T}^{-1})^{\gamma}(\mathrm{ML}^{-3})^{\epsilon}(\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^{\zeta} && (12)\\ &= \mathrm{M}^{\epsilon+\zeta}\mathrm{L}^{\alpha+\beta-3\epsilon-\zeta}\mathrm{T}^{-\beta-\gamma-\zeta}. && (13) \end{aligned}$$

Kravet om ens potenser af basisdimensionerne giver os derfor ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: &\quad 1 = \epsilon + \zeta && (14)\\ \mathrm{L}: &\quad 1 = \alpha + \beta - 3\epsilon - \zeta && (15)\\ \mathrm{T}: &\quad -2 = -\beta - \gamma - \zeta. && (16) \end{aligned}$$

I ligningssystemet (7)-(9) var der tre ligninger med tre ubekendte. Nu har vi tre ligninger med fem ubekendte, og derfor ikke én men en uendelighed af løsninger. Men vi kan dog benytte ligningssystemet til at reducere graden af uendelighed ved ud fra ligningerne fx at finde α, β og ϵ udtrykt ved γ og ζ. Af ligningssystemet (14)-(16) findes $\alpha = 2 + \gamma - \zeta$, $\beta = 2 - \gamma - \zeta$, og $\epsilon = 1 - \zeta$. Indsættes dette i ligning (10) fås:

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = g \rho r^2 v^2 (r\omega/v)^{\gamma} \theta^{\delta} (\eta/\rho r v)^{\zeta}. \qquad (17)$$

Dette er en mulig repræsentation af de af funktionerne givet ved ligning (10), der opfylder kravet om ens dimension på begge sider af ligningen. Eksponenterne γ, δ, og ζ for de indbyrdes fysisk uafhængige dimensionsløse størrelser $r\omega/v$, θ og $\eta/(\rho r v)$ kan vælges vilkårligt. Vi kan derfor ikke umiddelbart vide noget om, hvordan F afhænger af de tre dimensionsløse størrelser. Men g må kunne beskrives som en ukendt funktion alene af disse tre størrelser. Det fremgår både af ligning (17) og af ligningssystemet (14)-(16) med bare nuller på venstresiderne, at andre dimensionsløse potensprodukter af $r, v, \omega, \theta, \rho$, og η end $r\omega/v$, θ og $\eta/(\rho r v)$ alene er indbyrdes potensprodukter af disse tre. Da $\rho r v \eta / = R_e$, det såkaldte Reynoldstal, kan ligning (17) derfor omformuleres til

$$F(r, v, \omega, \theta, \rho, \eta) = C_L(r\omega/v, \theta, R_e)\rho r^2 v^2, \qquad (18)$$

hvor den ukendte dimensionsløse funktion af de dimensionsløse argumenter $r\omega/v$, θ og R_e er kaldt C_L (lift coefficient) i overensstemmelse med sædvanen. Ved hjælp af dimensionsanalysen har vi altså fået indsnævret parameterrummet for empirisk kortlægning fra at være 6-dimensionalt til at være 3-dimensionalt. Som sagt svarer analysen her til at anvende Buckinghams Π-teorem.

I 2013 har G. Robinson og I. Robinson skrevet en artikel med titlen “The motion of an arbitrarily rotating spherical projectile and its application to ball games” (*Phys. Scr.* **88**, 018101), hvor de modellerer C_L ved at antage den uafhængig af R_e og v og samtidig afhængig af ω svarende til rapporterede måledata. I en kommentar hertil (*Phys. Scr.* **89**, 067001) gjorde jeg med henvisning til ligning (18) opmærksom på, at Robinsons og Robinsons antagelser ikke lader sig gøre af dimensionsanalytiske grunde. Hvis C_L er uafhængig af R_e, afhænger den udover af θ alene af $r\omega/v$ ifølge ligning (18). Det betyder, at ω-afhængigheden sker via argumentet $r\omega/v$. Derfor kan C_L ikke samtidigt antages uafhængig af v, da argumentet jo afhænger af v.

Svaret fra Robinson og Robinson hertil (*Phys. Scr.* **89**, 067002) er interessant i sammenhæng med dimensionsanalyse i det hele taget. I det væsentlige svarede de, at deres beregninger var dimensionsmæssigt rigtige, idet enhederne i beregningerne var korrekt afstemte. Hvilket ikke var anfægtet af mig.

For Robinson og Robinson forstås fysiske formler tilsyneladende som sammenfatninger af måledata. I modsætning hertil opfattes fysiske formler ved dimensionsanalyse som teoretiske udsagn om sammenhænge imellem fysiske størrelser, hvor dimensionsanalysen da er en metaanalyse af de teoretiske konsekvenser af teoretiske og modelleringsmæssige antagelser. Robinsons og Robinsons forståelse af fysiske formler svarer til en induktiv opfattelse af fysik på linje med fx de logiske positivisters. I modsætning hertil svarer dimensionsanalysens abstrakte konsekvensundersøgelser af hypoteser om, hvilke inputparametre, der kan være afgørende for givne problemstillinger, snarere til Poppers hypotetisk-deduktive opfattelse af et fag som fysik.

Undervejs i beslutningsprocessen angående SI systemet viste sig den samme dobbelthed i forståelsen af, hvad fysiske formler drejer sig om. I artiklen “On the history of quantity calculus and the international system” (*Metrologia* **31** 405-29) fra 1995 skriver J. de Boer således: “...: it appears to be extremely important to keep in mind that scientists may attach different meanings to terms and the symbols used in the mathematical representation of the facts of physics.”

Det er for mig overraskende, at den videnskabsteoretiske fortolkning af fysik kan have så kontante fysikfaglige konsekvenser, som Magnuskraft-eksemplet viser.

Breddeopgave 69. Tøndefald

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2015, nr. 69 i rækken her i KVANT):

På ladet af en bil, der holder stille, er en cylinderformet tønde blevet glemt. Den ligger op ad forhuset med aksen vinkelret på køreretningen. Lastbilen speeder op for at køre. Hvor langt når den at køre før tønden ruller ud over den åbne bagende af ladet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Tøndefald – breddeopgave 69 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 69 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 69. Tøndefald

På ladet af en bil, der holder stille, er en cylinderformet tønde blevet glemt. Den ligger op ad forhuset med aksen vinkelret på køreretningen. Lastbilen speeder op for at køre. Hvor langt når den at køre før tønden ruller ud over den åbne bagende af ladet? Begrund svaret.

Løsning

Vi vil først antage, at tønden kan betragtes som et stift legeme med omdrejningssymmetrisk massefordeling. Hvis der f.eks. i tønden er væske, der kan skvulpe, er opgaven svær at besvare. Vi vil dernæst finde ud af, hvor lang tid det tager for tønden at rulle fra forhuset til bagenden af ladet ved at regne i lastbilens koordinatsystem.

Hvis lastbilen antages at have accelerationen a, og tønden massen m, er tønden i lastbilens system påvirket af kraften ma, rettet bagud og angribende i tøndens tyngdepunkt. Herudover er tønden påvirket af en modsat rettet gnidningskraft, G, angribende i tøndens berøring med ladet. Hvis vi betegner tøndens afstand fra forhuset x, er tøndens bevægelse relativt til ladet da givet ved:

$$m\ddot{x} = ma - G \tag{1}$$

Så længe tønden ruller, er G bestemt af momentsætningen omkring tøndens midterakse kombineret med rulningsbetingelsen. Kaldes tøndens radius r, dens inertimoment kmr^2 og dens vinkelhastighed i rotationen omkring midteraksen ω, udtrykker $rG = kmr^2\dot{\omega}$ momentsætningen og $r\omega = \dot{x}$ rulningsbetingelsen. Kombineret fås:

$$G = km\ddot{x} \tag{2}$$

Indsat i ligning (1) fås herefter

$$\ddot{x} = \frac{a}{1+k} \tag{3}$$

for accelerationen af tønden relativt til lastbilen.

Hvis vi for nemheds skyld antager a for konstant og kalder ladets længde for L, er tiden τ, det tager tønden at rulle fra forhuset til bagenden af ladet, ifølge faldloven for det frie fald, derfor givet ved:

$$L = \frac{a\tau^2}{2(1+k)}. \tag{4}$$

I tiden τ er distancen D, lastbilen har bevæget sig i forhold til vejen tilsvarende givet ved:

$$D = \frac{1}{2}a\tau^2. \tag{5}$$

Sammenholdes ligningerne (4) og (5), fås:

$$D = (1+k)L \tag{6}$$

som svar på opgaven. Svaret ses, udover af ladets længde (L), alene at afhænge af tøndens inertimoment (k), men altså ikke af lastbilens acceleration (a).

Kommentar

Hvad adskiller et velvalgt breddeeksamensproblem, der ved eksamen skal kunne løses på en time uden hjælpemidler, fra et velegnet projektkim, der skal kunne fungere som afsæt for et fysikorienteret 15 ECTS projektarbejde på 2. semester på den naturvidenskabelige bacheloruddannelse på RUC? Ikke meget, nødvendigvis. Opgaven her har været brugt som eksamensopgave i den svære ende af fysikstudiet, men kan også efter min vurdering bruges som afsæt til et 2. semesters projektarbejde. Men mine overvejelser over de to slags brug af opgaven er meget forskellige.

Som eksamensopgave hører opgaven, som skyldes Poul Winther Andersen, samtidigt med, at den er eksemplarisk for breddeopgavegenren, til i den svære ende. Løsningen af den forudsætter kombination af viden om og erfaring med accelererede koordinatsystemer, stive legemers mekanik, rulning og frit fald, på uvant måde. Vanskeligheden af opgaven taget i betragtning, er ovenstående besvarelse fuldt ud tilfredsstillende som resultatet af en times overvejelser ved eksamen.

Antagelsen, at a er konstant, er imidlertid overflødig. Resultatet i ligning (6) er gyldigt, uanset hvordan $a(t)$ varierer med tiden, forudsat tønden ikke skrider under forløbet. To gange integration af ligning (3) giver:

$$L = \int_{t_2=0}^{t_2=\tau} \left[\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} \frac{a(t_1)}{1+k} dt_1 \right] dt_2 \tag{7}$$

Tilsvarende har vi:

$$D = \int_{t_2=0}^{t_2=\tau} \left[\int_{t_1=0}^{t_1=t_2} a(t_1) dt_1 \right] dt_2 \tag{8}$$

som sammenholdt med ligning (7) igen giver resultatet i ligning (6).

Men, som sagt, løsningen af opgaven ved antagelse af konstant a var OK. Det afgørende, breddeopgaverne skal træne, er evnen til formaliserende fysisk problemløsning. At kunne løse bredere og mere uskarpt formulerede problemer ved at identificere et forenklet og formelt formuleret matematisk/fysisk kerneproblem, hvis løsning fanger en essens for svaret på det løsere formulerede problem. I den sammenhæng kan udvidelsen fra konstant a til tidsligt varierende $a(t)$ betragtes som mere teknisk end essentiel.

For tøndefaldsproblemet som projektkim for et 15 ECTS projektarbejde på den naturvidenskabelige bacheloruddannelse på RUC forholder det sig helt anderledes. Problemet inviterer til eksperimentelle undersøgelser. For at sammenholde teori og eksperiment må k så måles eller beregnes for forskellige foreliggende tønder. Og følsomheden af resultatet i ligning (6) af antagelsen om konstant a vurderes. Hvilket da leder til udvidelsen af rækkevidden af ligning (6) via ligningerne (7) og (8).

Et ideelt RUC projekt drejer sig ikke om at gå på jagt efter gemte essenser, som breddeopgaverne gør. Her drejer det sig netop om selvstændigt løbende at udvide og justere udgangsproblemet i takt med løbende problemafklaringer. Udover rækken af opdukkende problemer i sammenhæng med udførelsen af det eksperimentelle arbejde, kunne det også tænkes, at spørgsmålet om skridning dukkede op som teoretisk problem.

Så længe a ikke er for stor har vi ren rulning med G givet ved indsættelse af ligning (3) i ligning (2):

$$G = \frac{kma}{1+k}. \tag{9}$$

Skridning indtræffer, når G ifølge ligning (9) overskrider $\mu_s mg$, hvor μ_s er den statiske gnidningskoefficient og g tyngdefeltstyrken. Tønden skrider derfor i stedet for at rulle, når a overstiger a_{kr} givet ved:

$$a_{kr} = \frac{k+1}{k}\mu_s g \tag{10}$$

For en tom tønde med radius r og højde h og samme vægtykkelse overalt er k givet ved:

$$k = \frac{r+2h}{2r+2h}. \tag{11}$$

Som et lidt realistisk eksempel kan vi vælge $h = 4r$. Da er k ifølge formlen 0,9. For stål imod stål er μ_s lig med 0,7. Indsættes det sammen med $k = 0{,}9$ i ligning (10) fås $a_{kr} = 1{,}5g$. Det er en ret voldsom acceleration, som vistnok sjældent forekommer for lastbiler, bortset fra i ulykkestilfælde.

Men i et projektarbejde kunne denne grænse måske udfordres. I så tilfælde udvikler der sig en kaskade af bevægelsesforløb at undersøge og regne på. Bevægelsen på ladet er givet ved ligning (1), hvor G er givet ved ligning (9) i perioder, hvor a er mindre end a_{kr}. I perioder, hvor a er større end a_{kr}, er G i ligning (1) derimod givet ved $\mu_d mg$, hvor μ_d er den dynamiske gnidningskoefficient (for stål imod stål 0,6).

Projektarbejdet kunne også udvides i retning af tønder med asymmetrisk massefordeling. Eller tønder med skvulpende væske i.

Det er en pointe ved projektarbejdet på RUC, at det er de studerende selv, der foretager dets løbende problemudvikling. Så jeg stopper med antydninger af retninger af mulige forløb her, idet jeg håber at have illustreret den didaktisk forskellige situation mellem at arbejde med en breddeopgave som træning i fysisk problemløsning og at benytte den som afsæt for et projektarbejde med dets større spektrum af læringsmål.

Breddeopgave 70. Acceleration i inhomogent tyngdefelt

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2014, nr. 70 i rækken her i KVANT):

En frit svævende stang med retning mod Jordens centrum er så lang, at tyngdefeltet er af forskellig størrelse i de to ender af stangen. Hvor stor er stangens acceleration imod Jorden? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Acceleration i inhomogent tyngdefelt
– breddeopgave 70 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 70 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 70: Acceleration i inhomogent tyngdefelt

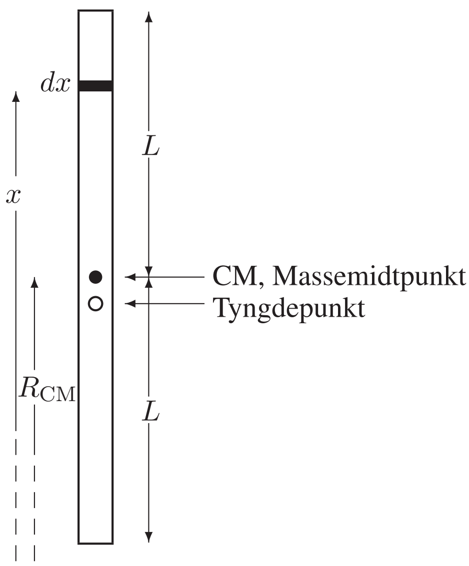
En frit svævende stang med retning mod Jordens centrum er så lang, at tyngdefeltet er af forskellig størrelse i de to ender af stangen. Hvor stor er stangens acceleration imod Jorden? Begrund svaret.

Løsning

På den lille del af stangen markeret som dx på figuren virker tyngdekraften

$$dF = G\frac{Mmdx}{2Lx^2} \qquad (1)$$

hvor G er gravitationskonstanten, M Jordens masse, $2L$ og m stangens længde og masse, og x afstanden fra massedelen til Jordens centrum.



Den samlede tyngdekraft på stangen er derfor:

$$\begin{aligned} F &= G\frac{Mm}{2L}\int_{R_{\mathrm{CM}}-L}^{R_{\mathrm{CM}}+L}\frac{dx}{x^2} \\ &= G\frac{Mm}{2L}(-1)\left(\frac{1}{R_{\mathrm{CM}}+L}-\frac{1}{R_{\mathrm{CM}}-L}\right) \\ &= G\frac{Mm}{R_{\mathrm{CM}}^2}\frac{1}{1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2} \qquad (2)\end{aligned}$$

hvor R_{CM} er afstanden fra Jordens centrum til stangens midtpunkt og massemidtpunkt CM.

Ifølge tyngdepunktssætningen er stangens masse gange massemidtpunktets acceleration, a, lig med den samlede kraft på stangen. Svaret på opgaven er derfor

$$a = \frac{GM}{R_{\mathrm{CM}}^2}\frac{1}{1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2}. \qquad (3)$$

Kommentar

Opgaven her viser, at den danske sprogbrug, at kalde massemidtpunktet for tyngdepunktet, er sløset. Tyngdepunktssætningen burde hedde massemidtpunktssætningen, da det er bevægelsen af massemidtpunktet den vedrører. På figuren har jeg markeret stangens massemidtpunkt, og hvad der her giver mest mening at kalde et tyngdepunkt. Nemlig der, hvor tyngdekraften på stangens masse samlet i punktet er den samme som den samlede tyngdekraft på stangen. Kalder vi det således definerede tyngdepunkt for R_{GR}, ses af ligning (2), at

$$R_{\mathrm{GR}}^2 = R_{\mathrm{CM}}^2\left(1-(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}})^2\right), \qquad (4)$$

eller for $L \ll R_{\mathrm{CM}}$:

$$R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}}\sqrt{1-\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2} \approx R_{\mathrm{CM}} - \frac{L^2}{2R_{\mathrm{CM}}}. \qquad (5)$$

Afstanden imellem tyngdepunktet og massemidtpunktet er derfor for realistiske stanglængder stærkt overdrevet på figuren.

Kalder vi accelerationen, som stangen ville have, hvis al dens masse var samlet i dens massemidtpunkt, a_{CM}, viser ligning (3), at vi for $L \ll R_{\mathrm{CM}}$ har

$$\begin{aligned} a &= a_{\mathrm{CM}}\left(1-\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right)^{-1} \\ &\approx a_{\mathrm{CM}}\left(1+\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right), \qquad (6)\end{aligned}$$

altså en relativ afvigelse af a fra a_{CM} på

$$\frac{a - a_{\mathrm{CM}}}{a_{\mathrm{CM}}} \approx \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2. \tag{7}$$

På et geofysikkursus for en del år siden erfarede jeg, at man med et såkaldt gravimeter kunne måle afvigelsen af tyngdefeltstyrken ved Jordens overflade, når gravimeteret blev flyttet fra gulvet op på et bord. Idet tyngdefeltstyrken $g(r) = GM/r^2$, og derfor $dg/g = -2dr/r$, fås med $dr \approx 1$ m og $r \approx 6000$ km, at gravimetret må have kunnet måle med en relativ nøjagtighed på 10^{-6} eller mindre. Hvis vi kunne bruge gravimetret til at måle forskellen mellem tyngdefeltstyrken i tyngdepunktet, som er lig med a, og tyngdefeltstyrken i massemidtpunktet, som er lig med a_{CM}, ses det af ligning (7) og $R_{\mathrm{CM}} \approx 6000$ km, at længden af en stang nær Jordens overflade skal være større end $2L = 2R_{\mathrm{CM}} \cdot 10^{-3} \approx 10$ km for at gravimeteret ville kunne registrere forskellen. Den praktiske betydning af svaret på breddeopgave 70 er derfor nok ikke stor.

Men regnestykket er selvfølgelig en påmindelse om, at ækvivalensen imellem acceleration og tyngdekraftfelt kun gælder infinitesimalt. Lange og korte stænger falder ikke lige hurtigt. Hvis de er rettet radialt i forhold til Jorden falder de hurtigere, jo længere de er.

For stænger liggende på tværs af retningen imod Jorden falder de lange stænger langsommere end de korte. Jeg vil overlade udregningen til læserne. For stænger på tværs finder jeg svarende til ligning (6) for stænger på langs:

$$\begin{aligned} a &= a_{\mathrm{CM}} \left(1 + \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx a_{\mathrm{CM}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{8}$$

For stænger på tværs finder jeg modstykket til ligning (5) til at være:

$$R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{L}{R_{\mathrm{CM}}}\right)^2} \approx R_{\mathrm{CM}} + \frac{L^2}{4R_{\mathrm{CM}}}. \tag{9}$$

Modsat situationen for stænger på langs gælder det for stænger på tværs, at deres tyngdepunkt er længere væk fra Jorden end deres massemidtpunkt.

Kun for kuglesymmetriske massefordelinger gælder ifølge Newtons teorem, at $R_{\mathrm{GR}} = R_{\mathrm{CM}}$, og derfor $a = a_{\mathrm{CM}}$, og følgelig at store og små genstande falder lige hurtigt.

Galilei argumenterede overbevisende for, at lette og tunge genstande falder lige hurtigt. Hvis vi f.eks. antager, at tunge genstande falder hurtigere end lette, så vil en let genstand sammenbundet med en tung genstand holde den tunge tilbage i faldet, så den falder langsommere, end hvis den faldt frit. Men tilsammen vil de to sammenbundne genstande ifølge antagelsen på den anden side udgøre en genstand tungere end den tunge, hvorfor den tunge genstand sådan anskuet vil falde hurtigere, end hvis den var fri. Antagelsen om at tunge genstande falder hurtigere end lette må derfor være forkert, da den fører til logisk modstrid.

Der er ikke noget i vejen med Galileis argument. Det handler om tunge og lette genstande. Men i inhomogene tyngdefelter viser opgavebesvarelsen, at argumentet ikke kan overføres til store og små genstande. Normalt falder store og små genstande som vist ikke lige hurtigt.

Breddeopgave 71 og 72. Tidevandsfelter

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse opgaver fra breddekurset på RUC (fra henholdsvis sygeeksamen august 1983 og sygeeksamen september 1987, nr. 71 og 72 i rækken her i KVANT):

71. Hvordan kan det være, at det med god tilnærmelse går godt at regne med, at inertiens lov gælder i et koordinatsystem med centrum i Solen og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse, når vi ved, at Solen deltager i galaksens rotation?

72. Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.

Den anden af opgaverne har været behandlet tidligere i KVANT, juli 2008. Løsningen dengang er rigtig. Men siden er jeg kommet på bedre tanker angående begrundelsen for den rigtige løsning. De bedre tanker bringes sammen med løsningen til den første opgave i næste nummer af KVANT.

Tidevandsfelter – breddeopgave 71 og 72 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

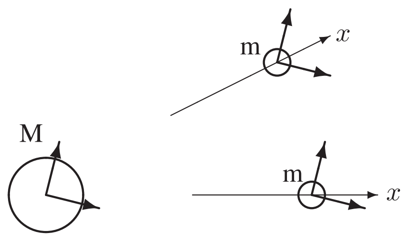
Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 71 og 72 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 71 og 72: Tidevandsfelter

71. *Hvordan kan det være, at det med god tilnærmelse går godt at regne med, at inertiens lov gælder i et koordinatsystem med centrum i Solen og faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse, når vi ved, at Solen deltager i galaksens rotation?*
72. *Indtræffer springflod ved fuldmåne, nymåne eller halvmåne? Begrund svaret.*

Løsninger

Det væsentlige angående tidevandsfelter kan forstås ud fra følgende figur:



Figur 1. Koordinatsystem (m) accelereret i forhold til inertialsystem (M).

På figuren er markeret to legemer M og m med masserne M og m. For nemheds skyld antager vi, at M er så mange gange større end m, at der til det store legeme kan knyttes et inertialsystem med nulpunkt i det store legemes centrum, medens det lille legeme kredser omkring det store på grund af deres gensidige tyngdekraftstiltrækning. Accelerationen $\boldsymbol{a}$ af det lille legeme er da ifølge Newtons II lov rettet imod centrum af det store legeme og har størrelsen

$$a = GM/R^2, \tag{1}$$

hvor G er gravitationskonstanten og R afstanden imellem de to legemers centre.

På figuren er også indtegnet et koordinatsystem med nulpunkt i det lille legemes centrum, og akser der ikke drejer i forhold til inertialsystemet. Hvis vi vil beskrive bevægelser relativt til dette koordinatsystem, skal vi, udover de kræfter, der også er virksomme i inertialsystemet, medregne en systemkraft (ofte kaldet en fiktiv kraft, selvom den er virkelig nok) modsatrettet $\boldsymbol{a}$ af størrelsen a gange massen af det, der bevæger sig. Tilstedeværelsen af det store legeme har derfor to samtidige konsekvenser for bevægelser af masser relativt til det lille legemes koordinatsystem. Det store legeme påvirker masserne med en tyngdetiltrækning. Og det store legeme accelererer det lille, således at der i dets koordinatsystem herudover virker et systemkraftfelt. Tidevandsfeltet fra det store legeme i det lille legemes koordinatsystem er summen af dette systemkraftfelt og tyngdekraftfeltet fra det store legeme. I det lille legemes massemidtpunkt ophæver de to kraftfelter hinanden. Men da tyngdekraftfeltet varierer med stedet, hvorimod systemkraftfeltet er det samme overalt, gælder det kun i netop massemidtpunktet. På figuren er indtegnet en x-koordinatakse, som går igennem de to massemidtpunkter, og som har nulpunkt i det lille legemes massemidtpunkt. Langs denne x-akse er størrelsen af tidevandsfeltet $F_t(x)$, regnet positivt bort fra M:

$$F_t(x) = \frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{(R+x)^2} = \frac{GM}{R^2}\left[1 - \frac{1}{(1+\frac{x}{R})^2}\right]. \tag{2}$$

Her er x afstanden fra det lille legemes massemidtpunkt, regnet positiv bort fra M. Ved rækkeudvikling efter den lille størrelse $\frac{x}{R}$ fås:

$$F_t(x) \approx \frac{GM}{R^2}\left[1 - \left(1 - \frac{2x}{R}\right)\right] = \frac{GM}{R^2}\frac{2x}{R}. \tag{3}$$

Denne formel rummer svarene på begge opgaver. (En mere detaljeret udledning af formlen findes i artiklen om springflod i KVANT, juli 2008, breddeopgave 31).

I den første opgave er pointen, at tidevandsfeltet er faktoren $2x/R$ mindre end gravitationsfeltet i nærheden af det lille legeme, GM/R^2. Med galaksen som det store legeme og Solen, i afstanden $2.6 \cdot 10^{20}$ m fra galaksecentret, som det lille legeme, ses tidevandsfeltet i solkoordinatsystemet i Jordens afstand fra Solen, $1,5 \cdot 10^{11}$ m, således at være af størrelsesordenen $2(1,5 \cdot 10^{11})/(2,6 \cdot 10^{20}) \approx 10^{-9}$ gange mindre end både gravitationsfeltet og udslyngningen fra galaksen taget hver for sig. Faktoren 10^{-9} forklarer, hvorfor et koordinatsystem med centrum i Solen i praksis kan regnes for et inertialsystem.

I den anden opgave er pointen, at tidevandsfeltet omkring det lille legeme ifølge formlen, idet x på figuren er negativ på siden vendt imod det store legeme og positiv på siden vendt bort fra det store legeme, peger bort fra centrum af det lille legeme på begge sider. Solen forårsager derfor på Jorden både en tidevandspukkel vendt imod Solen og en tidevandspukkel vendt bort fra Solen, som Jorden dagligt drejer sig i.

Hvad angår tidevandsfeltet fra Månen gør det ingen forskel, at det fælles tyngdepunkt ligger så forskelligt i de to situationer. Med M for Månens masse og R for afstanden imellem Jorden og Månen er accelerationen af Jorden i dens bevægelse omkring Jordens og Månens fælles massemidtpunkt igen givet ved ligning (1), og tidevandsfeltet på forbindelseslinjen følgelig igen givet ved ligning (3) med to tidevandspukler.

Tidevandsfelterne fra Solen og Månen ses at forstærke hinanden, når Solen, Månen og Jorden ligger på linje. Springflod finder derfor sted så vel ved fuldmåne, som ved nymåne. Men ikke ved halvmåne.

Kommentar

Indsættes talværdier i Newtons gravitationslov findes gravitationsfeltet fra Jorden ved Månen at være $2,7 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Tilsvarende findes Solens gravitationsfelt ved Månen ud fra gravitationsloven at være $5,9 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Solens træk i Månen er altså mere end dobbelt så stort som Jordens træk i Månen.

Som indledning til undervisning i accelererede koordinatsystemer har jeg ofte taget udgangspunkt heri. Hvordan kunne det, dette faktum taget i betragtning, lade sig gøre for Newton at demonstrere sammenhængen imellem æblets fald fra træet og Månens omløbstid om Jorden ved at regne Månen og Jorden som et isoleret system uden Solens tilstedeværelse? Forklaringen ligger i faktoren $2x/R$ i ligning (3). Med afstanden mellem Jorden og Månen indsat for x og afstanden mellem Jorden og Solen indsat for R er faktoren 0,005. Effekten af Solens tilstedeværelse på Newtons regnestykke, Solens tidevandsfelt på Månen i jordkoordinatsystemet, er derfor af størrelsesordenen 1% af Jordens træk, og ikke det dobbelte af Jordens træk.

Besvarelsen ovenfor af breddeopgave 71 er inspireret af denne forklaring. Solen kan tages som nulpunkt for et inertialsystem, hvor der ses bort fra galaksens påvirkning af genstande i solsystemet, på samme måde som Jorden kan tages som nulpunkt for et inertialsystem , hvori der ses bort fra Solens påvirkning af genstandes bevægelser omkring Jorden. Generelt er det måske sådan, at det er faktoren 2x/R, der forklarer den hyppige forekomst af koordinatsystemer, som i praksis fungerer som inertialsystemer? I et system af kinesiske æsker kan der ved beregninger i indre æsker ofte med god tilnærmelse ses bort fra indvirkningen af gravitationsfelterne fra de ydre æsker, fordi disse kun medfører radikalt mindre tidevandsfelter end gravitationsfelterne selv.

Det mere direkte svar på opgave 71 er imidlertid, at gravitationsfeltet fra galaksen i solsystemet er ca. $5 \cdot 10^{-10}$ m/s^2, bedømt ud fra en solomløbstid i galaksen på $250 \cdot 10^6$ år og en solafstand til galaksens centrum på 26000 lysår. Og dette er i sig selv et meget svagt felt sammenlignet med f.eks. Solens gravitationsfelt på Jorden og Månen på $5,9 \cdot 10^{-3}$ m/s^2. Ved udregningen af formel (3) er antaget en sfærisk symmetrisk massefordeling i galaksen. Om det mørke stof bidrager tilstrækkeligt til at gøre antagelsen berettiget, ved jeg ikke. Men selvom forholdet imellem styrken af tidevandsfeltet fra galaksen og gravitationsfeltet fra galaksen ikke er 10^{-9}, som antagelsen fører til, er der under alle omstændigheder tale om, at tidevandsfeltet er ret så mange størrelsesordener mindre end gravitationsfeltet. Alligevel er gravitationsfeltet i sig selv så svagt, at hele snakken om tidevandsfelter er overflødig, som svar på opgave 71.

I øvrigt burde opgaveformuleringens "faste akser i forhold til stjernerne i vores galakse" under alle omstændigheder have været ændret til "faste akser i forhold til fjerne objekter uden for vores galakse", svarende til figur 1. Ellers skal der udover systemkraftfeltet som følge af accelerationen af koordinatsystemets nulpunkt også, unødvendigt komplicerende, tages højde for systemkraftfelter som følge af koordinatsystemets aksedrejning. Jeg ville ikke have stillet opgaven i dag.

Min tanke om gravitationen opbygget i et kinesisk æskesystem har også ledt mig på vildveje i forlængelse af besvarelsen af opgave 72. Det er jo nemlig ikke Jorden, der isoleret bliver slynget rundt af Solen, men det samlede system af jord plus måne. Det relevante tidevandsfelt til bedømmelse af fejlen, der begås, når Månens omløbstid udregnes i det isolerede jord/måne system, er derfor det felt, der findes i koordinatsystemet med Jordens og Månens fælles massemidtpunkt som nulpunkt, fremfor feltet i koordinatsystemet med Jordens centrum som nulpunkt. Og hvad menes der så – i forlængelse af denne tankegang – med at addere tidevandsfelterne på Jorden fra Månen og fra Solen, som det altid gøres, og som det blev gjort i løsningen her af opgave 72

Godt hjulpet (af Peter Ditlevsen) er mit svar nu på dette spørgsmål:

Lad os tænke på en klode påvirket af gravitationskraftfelter fra n andre objekter $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0}), \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{0}), ..., \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})$, hvor $\boldsymbol{0}$ refererer til klodens centrum, således at det er feltstyrkerne i centrum, der er tale om. Kloden vil da i et inertialsystem have accelerationen $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{0}) + ... + \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})$. I et koordinatsystem med nulpunkt i klodens centrum og faste akser i forhold til inertialsystemets akser vil genstande i positionen $\boldsymbol{r}$ derfor, udover gravitationskraftfelterne $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}), ..., \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r})$, være påvirket af systemkraftfeltet $-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{0})$. Det resulterende kraftfelt i klodens system er derfor

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}) + ... + \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{0}) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{0})] + ... + [\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{0})], \tag{5}$$

hvor de kantede parenteser repræsenterer tidevandsfelterne forårsaget af de n objekter. Ifølge formel (5) findes det resulterende felt tydeligvis ved direkte addition af bidragende tidevandsfelter fra involverede kilder.

Det er altså i orden at besvare springflodsproblemet ved at lægge tidevandsfeltet fra Solen og tidevandsfeltet fra Månen sammen. Men jeg savnede som sagt et argument for det før den enkle udledning af ligning (5). Jeg har ikke kunnet finde argumentet og udledningen i litteraturen. Tilsyneladende tages den almindelige addition af kræfter umiddelbart til indtægt for den direkte addition af tidevandsfelter. Måske er det selvfølgeligt, selvom tidevandsfeltet forårsaget af en enkelt kilde på en måde er virtuelt, når der findes flere tidevandsfelt-forårsagende kilder. Tidevandsfeltet fra den enkelte kilde er virtuelt i den forstand, at det refererer til en ikke eksisterende acceleration, som ville være der, hvis alene kilden var til stede. Måske er det hele noget fortænkt; men tidevandsfeltet fra Solen i koordinatsystemet med nulpunkt i jord/måne massemidtpunktet, til bedømmelse af fejlen i Newtons isolering af jord/måne systemet ved beregningen af Månens omløbstid, er et andet end tidevandsfeltet fra Solen i koordinatsystemet med nulpunkt i Jordens centrum, til bedømmelse af spørgsmålet om springflod.

Breddeopgavegenren udfordrer ikke kun de studerende. Den udfordrer også opgavestillerne.

Breddeopgave 73. Rutsjende dug.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave (nr. 73 i rækken her i KVANT):

Hvornår rutsjer en dug, et tov eller lignende ned af bordet, som dugen m.m. ligger på tværs af med ulige lange nedhæng til to modstående sider? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Rutsjende dug
- breddeopgave 73 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er - udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse - dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 73 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 73: Rutsjende dug

Hvornår rutsjer en dug, et tov eller lignende ned af bordet, som dugen m.m. ligger på tværs af med ulige lange nedhæng til to modstående sider? Begrund svaret.

Løsning

Hvis dugen hænger stykket x mere ned til den ene side end til den anden side, er der et ekstra træk i dugen til denne side i forhold til trækket fra den anden side på $\rho x g$, hvor ρ er massen af dugen per længde dug, og g er tyngdefeltstyrken. Så længe dugen ikke rutsjer, modvirkes dette ekstra træk af den statiske gnidningskraft G imellem bordet og dugen, $G \leq \mu N$, hvor μ er den statiske gnidningskoefficient imellem dug og bord, og N er normalreaktionen imellem bord og dug. Da dugen ikke bevæger sig i lodret retning må N være lig med $\rho b g$, hvor b er bredden af bordet. Når $\rho x g$ bliver større end $\mu N = \mu \rho b g$, kan gnidningskraften ikke længere holde dugen på plads. Dugen rutsjer altså, når

$$x > \mu b. \tag{1}$$

Kommentar

Opgaven var tænkt brugt som eksamensopgave, idet vi forestillede os opgaven løst mere eller mindre sådan. Men opgaven blev opgivet som eksamensopgave, fordi denne måde at besvare opgaven på er forkert.

Den afgørende fejl er, at det underforstået er antaget, at strækspændingen i dugen forplantes uændret rundt om kanterne på bordet, svarende til den måde snorkraften for et tov rundt om en trisse forplantes. Men sådan er situationen ikke ved runding med statisk gnidning. Lad os regne på, hvordan snorkraften i et belastet tov varierer, når det er viklet omkring en pæl, i grænsen hvor tovet netop ikke skrider om pælen.

Der regnes differentielt: Snorkraftens størrelse ved vinklen φ kaldes $S(\varphi)$, og størrelsen ved vinklen $\varphi + d\varphi$ tilsvarende $S(\varphi + d\varphi)$. De to snorkræfter, som trækker i tovstykket mellem φ og $\varphi + d\varphi$, er ikke modsatrettede. Langs midtnormalen til tovstykket har de tilsammen en komposant rettet imod pælens midterakse af omtrentlig størrelse $S(\varphi)d\varphi/2 + S(\varphi + d\varphi)d\varphi/2 \approx S(\varphi)d\varphi$, som i ligevægt må være lig med normalreaktionen fra pælen på tovstykket. Vi sætter φ lig 0, hvor snorkraften er størst, og regner φ positiv i den retning, hvor $S(\varphi)$ aftager. Den tangentielle ligevægtsbetingelse i grænsen for maksimalt opnåelig statisk gnidning er da $S(\varphi + d\varphi) - S(\varphi) \approx -\mu S(\varphi)d\varphi$ eller $dS(\varphi)/d\varphi = -\mu S(\varphi)$ med løsningen

$$S(\varphi) = S(0)\exp(-\mu\varphi). \tag{2}$$

(På side 19 i Eivind Hiis Hauge og Jon Andreas Støvneng: Grundlæggende fysik, Tapir Akademisk Forlag, Tronheim 2010, findes en mere udførlig udledning.)

Ligning (2) forklarer, hvorfor en matros ved hjælp af en fortøjningspæl kan holde et krydstogtsskib på plads. Tovet behøver ikke blive viklet særlig mange gange rundt om fortøjningspælen, før matrosens træk i tovet, $S(\varphi)$, er radikalt mindre end tovets træk i skibet, $S(0)$. For den rutsjende dug betyder ligning (2), at der ikke kan ses bort fra gnidningen imod bordkanterne, som vi umiddelbart gjorde.

For at løse opgaven må vi analysere fem dele af dugen hver for sig. Vi kalder dugens længde l, bordets bredde b, nedhænget modsat rutsjesiden y, og nedhænget i rutsjesiden $y + x$ og har så:

1. For den del, der hænger ned i rutsjesiden, gælder: tyngden af delen medfører, at "dugkraften" ved bordkanten er $S_1 = \rho g(y + x)$.

2. For delen omkring bordkanten i rutsjesiden gælder ifølge ligning (2): $S_1^* = S_1 \exp(-\mu\pi/2)$, hvor S_1^* er den vandrette "dugkraft", der fra rutsjesiden trækker i den del af dugen, der er på bordet.

3. For den del, der hænger ned modsat rutsjesiden gælder: $S_2 = \rho g y$ for dugkraften ved bordkanten som følge af tyngden af nedhænget.

4. For delen omkring bordkanten modsat rutsjesiden gælder ifølge ligning (2): $S_2^* = S_2 \exp(\mu\pi/2)$, hvor S_2^* er den vandrette dugkraft, der fra ikke-rutsjesiden trækker i den del af dugen, der er på bordet. S_2^* er større end S_2, fordi de statiske gnidningskræfter er rettet modsat den potentielle rutsjeretning

5. For delen af dugen på bordet gælder i grænsen for maksimal statisk gnidning: $S_1^* - S_2^* = \mu\rho g b$.

Ved indsætning heri fås: $\rho g(x + y)\exp(-\mu\pi/2) - \rho g y \exp(\mu\pi/2) = \mu\rho g b$. Da $l = y + b + (y + x)$, og derfor $y = (l - b - x)/2$ og $y + x = (l - b + x)/2$, kan x af denne ligning findes til at være:

$$x = \frac{2\mu b + (l - b)(\exp(\mu\pi/2) - \exp(-\mu\pi/2))}{\exp(\mu\pi/2) + \exp(-\mu\pi/2)}, \quad (3)$$

og det er jo et ganske andet svar på opgaven end det givet ved ligning (1). I grænsen $\mu\pi/2 \ll 1$ har vi $x = \mu(b + (l - b)\pi/2)$. Hvis vi samtidig også er i grænsen $l - b \ll b$, når vi frem til ligning (1).

Ved besvarelsen er det benyttet, at grænsen for maksimal statisk gnidning nås samtidigt for delene 2, 4 og 5. Hvis den statiske gnidningskraft lokalt har nået grænsen for sin ydeevne vil, dugen stadig ligge fast, hvis det ikke er tilfældet på andre lokaliteter. Først når der ikke er nogen steder, hvor gnidningskraften ikke har nået maksimal ydeevne, rutsjer dugen.

Alt i alt er opgaven - i modsætning til, hvad vi tænkte i udgangspunktet - for vanskelig til at kunne bruges som breddeopgave til eksamen. I almindelighed kan det være svært at ramme niveauet ved fabrikation af eksamensopgaver. De kan både være for lette og for svære i forhold til den aktuelle eksamen. Med de åbent formulerede breddeopgaver er der en særlig risiko for at ramme et forkert niveau, eller måske direkte ramme forbi med et forkert stillet problem, fordi problemerne netop ikke, via formalisering, er placeret i et velkendt løsningsterræn. Breddeopgavegenren stiller derfor krav til opgavestillernes faglige overblik. Og krav til deres villighed til at risikere at begå faglige fejl, selvom fejl selvfølgelig forsøges undgået.

Breddeopgave 74 og 75. Usikkerhedsrelationen og Bohr radius

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra den indledende opgavesamling i 1976, nr. 74 i rækken her i KVANT, og fra eksamen august 1983, nr. 75 i rækken her i KVANT):

74. *Synes det ræsonnabelt at forestille sig neutronen som opbygget af en elektron og en proton holdt sammen af elektrostatiske kræfter? Begrund svaret.*

75. *Efter Rutherfords opdagelse af, at atomer ikke er kompakte, men består af tomt rum med en positiv ladet kerne af meget ringe udstrækning og derom kredsende elektroner med endnu mindre udstrækning (må man forestille sig), fremstår det som en gåde, at stof ikke kollaberer ved, at elektronerne trækkes ind til deres kerner, således at atomerne skrumper ind. Hvorfor sker det ikke? Begrund svaret.*

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Usikkerhedsrelationen og Bohrradius
– breddeopgave 74 og 75 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra KVANT 2017 nr. 3 samt en ny opgave. De seneste opgaver var Breddeopgaver 74 og 75:

Usikkerhedsrelationen og Bohrradius

Synes det ræsonnabelt at forestille sig neutronen som opbygget af en elektron og en proton holdt sammen af elektrostatiske kræfter? Begrund svaret.

Efter Rutherfords opdagelse af, at atomer ikke er kompakte, men består af tomt rum med en positiv ladet kerne af meget ringe udstrækning og derom kredsende elektroner med endnu mindre udstrækning (må man forestille sig), fremstår det som en gåde, at stof ikke kollaberer ved, at elektronerne trækkes ind til deres kerner, således at atomerne skrumper ind. Hvorfor sker det ikke? Begrund svaret.

Løsning

Lad os fokusere på det simpleste atom, brintatomet. Hvorfor kollaberer det ikke? Et semiklassisk svar herpå kunne se sådan ud:

En elektron, der bevæger sig omkring en proton, har potentiel energi E_{pot} og kinetisk energi E_{kin}.

Ifølge Coulombs lov er elektronens potentielle energi givet ved $E_{\text{pot}}(r) = -e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$, hvis vi sætter E_{pot} til nul, når elektronen er uendelig langt fra protonen. Her er ε_0 dielektricitetskonstanten i vakuum, e elektronens og protonens ladning og r afstanden imellem elektronen og protonen.

Elektronens kinetiske energi er ikke givet som en funktion af r, som det er tilfældet for dens potentielle energi. På grund af usikkerhedsrelationen kan vi imidlertid i grove træk vurdere en mindste kinetisk energi, $E_{\text{kin,min}}$, som er en funktion af r:

Hvis vi tænker os, at elektronen befinder sig inden for en kugleskal i afstanden r fra protonen, så er størrelsesordenen af usikkerheden på dens positionsbestemmelse i f.eks. x-retningen, Δx, mindre end r: $\Delta x < r$. Heisenbergs usikkerhedsrelation kan skrives: $m_e \Delta v_x \Delta x \geq h/4\pi$, hvor m_e er elektronens masse, Δv_x er usikkerheden på hastigheden v_x i x-aksens retning, og h er Plancks konstant. Heraf ses, at Δv_x, og dermed elektronens kinetiske energi, ikke kan være nul, medmindre Δx er uendelig. Definerer vi Δv_x som kvadratroden af middelværdien af kvadratafvigelserne imellem v_x og middelværdien af v_x, $\Delta v_x = \sqrt{< v_x^2 - < v_x >^2 >}$, er Δv_x^2 her lig med middelværdien af v_x^2, fordi middelværdien af v_x af symmetrigrunde er nul. Af samme grund er $< v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 > = 3 < v_x^2 >$. Som konsekvens af usikkerhedsrelationen har vi alt i alt for middelværdien af den kinetiske energi for elektroner inden for kugleskallen:

$$< E_{\text{kin}} > = \frac{3}{2} m_e < v_x^2 > = \frac{3}{2} m_e \Delta v_x^2. \qquad (1)$$

Dermed har vi

$$< E_{\text{kin}} > \geq \frac{3 m_e h^2}{2(4\pi m_e \Delta x)^2}. \qquad (2)$$

Hvis vi tænker os, at elektronen befinder sig inden for en kugleskal omkring protonen med radius r, dvs $\Delta x \approx r$, så må vi ifølge usikkerhedsrelationen altså gå ud fra, at den i gennemsnit mindst har den kinetiske energi:

$$E_{\text{kin,min}} \approx \frac{3h^2}{32\pi^2 m_e r^2} \qquad (3)$$

Benytter vi overslagsmæssigt elektronens potentielle energi i afstanden r fra kernen som tilnærmelse for dens gennemsnitlige potentielle energi inden for kugleskallen, har vi for den minimale totalenergi som funktion af r:

$$E_{\text{tot,min}}(r) \approx \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{3h^2}{32\pi^2 m_e r^2}. \qquad (4)$$

Funktionen $E_{\text{tot,min}}(r)$ har et minimum for $r = r_0$ givet ved:

$$r_0 = \frac{3h^2\varepsilon_0}{4\pi m_e e^2}. \qquad (5)$$

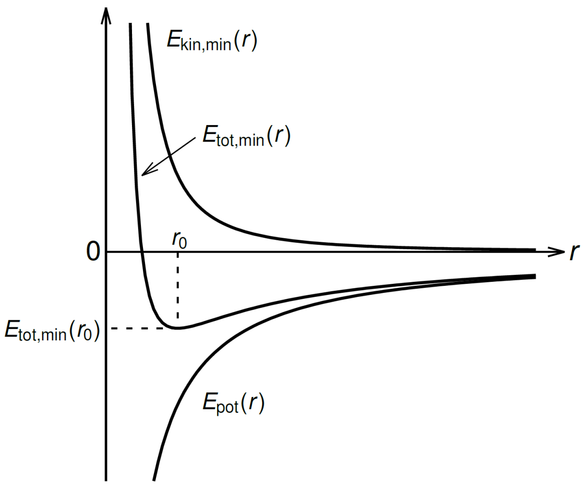
Det findes ved differentiation af $E_{\text{tot,min}}(r)$. Indsættelse af r_0, givet ved ligning (5), i ligning (4), giver herefter:

$$E_{\text{tot,min}}(r_0) = -\frac{m_e e^4}{6(h\varepsilon_0)^2}. \qquad (6)$$

At r_0 repræsenterer et minimum, og ikke et maksimum, ses af, at $E_{\text{tot,min}}(r_0)$ er negativ og dermed mindre end nul, som er energien, når elektronen er i hvile uendeligt langt fra protonen. For at øge r fra r_0 til uendelig skal der tilføres energien $-E_{\text{tot,min}}(r_0)$. Der skal også tilføres energi for at ændre r fra r_0 til mindre værdier af r. I ligning (4) er det det andet og positive led proportionalt med r^{-2}, der ender med at dominere over det første og negative led proportionalt med r^{-1}, når r går imod nul. $-E_{\mathrm{tot,min}}(r)$ går derfor imod plus uendeligt, når r går imod nul. Det kræver tilførsel af energi at ændre r fra r_0 til noget andet både i opadgående og nedadgående retning. Derfor repræsenterer $r = r_0$ den stabile konfiguration af elektron/proton parret. Situationen minder om et potentialminimum, hvor $E_{\mathrm{pot}}(r)$ repræsenterer en tiltrækkende kraft, og $E_{\mathrm{kin,min}}(r)$ repræsenterer en frastødende kraft, som ophæver hinanden for $r = r_0$. Men "frastødningen"skyldes altså ikke en kraft. Den skyldes usikkerhedsrelationen.

Bortset fra talfaktorerne kendes resultaterne i ligningerne (5) og (6) som henholdsvis Bohr radius og brintatomets bindingsenergi. I stedet for Bohrs postulater har vi benyttet usikkerhedsrelationen.

Svaret på den anden opgave er da: Usikkerhedsrelationen er grunden til, at atomer ikke kollaberer. Den medfører en minimal kinetisk energi ("nulpunktsenergien"), der i udregningerne indgår svarende til, at der var en frastødende kraft ved siden af den tiltrækkende Coulomb kraft, således at de to ophævede hinanden i en afstand karakteristisk for atomernes størrelse. Det tilsvarende "potentialminimum"er vist på figur 1.



Figur 1. “Potentialminimum” for brintatomet.

Svaret på den første opgave er: Det synes ikke rimeligt at forestille sig neutronen som en elektron og en proton holdt sammen af elektrostatiske kræfter. Den stabile tilstand for en elektron og en proton alene holdt sammen af elektrostatiske kræfter er som udledt brintatomet med en radius, der er 10^5 gange så stor som neutronens radius. Der skal altså mere end usikkerhedsrelationen og elektrostatiske kræfter til at give neutronen dens størrelse.

Kommentar

Den semiklassiske udledning her af Bohr radius ved hjælp af usikkerhedsrelationen giver som sagt samme resultat som Bohrs model af brintatomet, bortset fra en talfaktor af størrelsesorden nær 1. Den kvantemekaniske udregning ved brug af Schrödingerligningen giver samme resultat som Bohrs. Overensstemmelsen imellem de tre udregninger er ikke overraskende. Alle tre udregninger har $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$, m_e og h som de indgående parametre i udregningerne. Og en dimensionsanalyse viser, at r_0 givet ved ligning (5),bortset fra talfaktoren, er den eneste måde, som en hvilken som helst model eller teori, baseret på disse tre inputparametre, kan levere en karakteristisk længde på (jf. breddeopgave 68, KVANT, marts 2016).

På kurserne i Fysisk problemløsning I og Fysisk problemløsning II på RUC, som breddeopgaverne er knyttet til, underviser vi ikke i kvantemekanik som matematisk formuleret teori. Det sker på et decideret kvantemekanikkursus. På Fysisk problemløsning II kurset nøjes vi, udover Bohrs atommodel, med en mere kvalitativ indgang til kvantefysik. I hovedsagen præsenteres kvantemekanik som afvigende fra klassisk mekanik på tre punkter: Kvantiseringen af fysiske størrelser, usikkerhedsrelationen og partiklers uskelnelighed (Pauliprincippet). Det er i denne undervisningssammenhæng breddeopgaverne her om usikkerhedsrelationen og Bohrradius skal forstås.

På den ene side kan Bohrradius udregnes fra Bohrs model for brintatomet. På den anden side kan den udregnes fra Schrödingerligningen. Ingen af de to udregninger giver den kvalitative forståelse af, hvorfor stof ikke kollaberer, som udregningen her gør det. Bohrs model rummer ikke usikkerhedsrelationen, og Schrödingerligningen rummer den kun implicit. Som supplement og/eller introduktion til den eksakte kvantemekanik håber vi at støtte de studerendes kvalitative forståelse af kvantemekanik ved på Fysisk problemløsning II kurset at stille opgaver, der inviterer til at benytte kvantiseringen af fysiske størrelser, usikkerhedsrelationen, og/eller Pauliprincippet direkte som tilfældet er ved løsningen her af breddeopgave 74 og 75.

Angrebsmåden oven for kan minde om situationer i kemi. Det kan være hensigtsmæssigt at tænke i kvalitative billeder som ion-bindingen og den kovalente binding. Og med ion-bindingen at tænke på en frastødning og en tiltrækning, der ophæver hinanden i et potentialminimum. Imidlertid skyldes "frastødningen"i ion-bindingen ikke en kraft, men kvantisering, usikkerhedsrelation og Pauliprincip. I tilfældet kovalent binding skyldes både frastødning og tiltrækning kvantisering, usikkerhedsrelation og Pauliprincip. Helt principielt kan man ikke tale om de to bindinger som af forskellig slags. Det er samme fysik, der i princippet kan forklare både ion-bindingen og den kovalente binding (og bindinger derimellem), Coulombs lov og Schrödingerligningen. Alligevel er de kvalitative billeder, som er det, de to bindingstyper er, helt nødvendige i kemisk tankegang.

Breddeopgave 76. Opdrift på flyvinge

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra samlingen af træningsopgaver ved starten af "Breddekursus", nr. 76 i rækken her i KVANT):

Hvorfor er vingen på en flyvemaskine mere buet på oversiden end på undersiden?

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Opdrift på flyvinge
- breddeopgave 76 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUC's fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

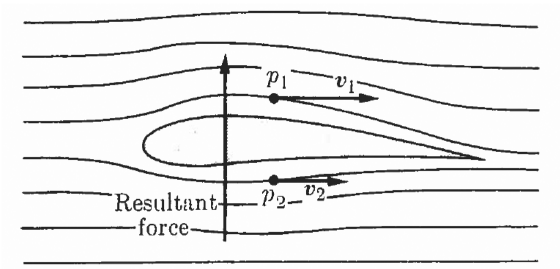
Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 76 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 76. Opdrift på flyvinge

Hvorfor er vingen på en flyvemaskine mere buet på oversiden end på undersiden?

Løsning

På figur 1 er vist et tværsnit af en flyvinge med strømlinjer omkring, svarende til luftens bevægelse i forhold til flyvingen. Flyvingen er mere buet på oversiden end på undersiden. Derfor er luftens fart langs oversiden, v_1, større end luftens fart på undersiden, v_2. Ifølge Bernoullis ligning er trykket på oversiden, p_1, derfor mindre end trykket på undersiden, p_2. Konstansen langs en strømlinje af $\frac{1}{2}\varrho v^2 + p$, hvor ϱ er massefylden af luft, er nemlig den samme i det fjerne for strømlinjen over vingen og strømlinjen under vingen, således at $\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$. Følgelig medfører $v_1 > v_2$, at $p_1 < p_2$, altså større tryk på undersiden end på oversiden og dermed opdrift. Derfor er vingen mere buet på oversiden end på undersiden.



Figur 1. Luftens løft på flyvinge ifølge Alonso-Finn. Den større hastighed af luften på vingens overside giver et mindre tryk, mens den mindre hastighed på vingens underside giver et større tryk.

Kommentar

Løsningen svarer til, hvad jeg tænkte på i 1976, da opgaven blev formuleret som breddeopgave. Det er også sådan problemet er behandlet i f.eks. Alonso-Finn, Fundamental University Physics I (1967), side 273, hvor figuren er kopieret fra. Men forklaringen er uigennemtænkt og figuren grundlæggende fysisk forkert.

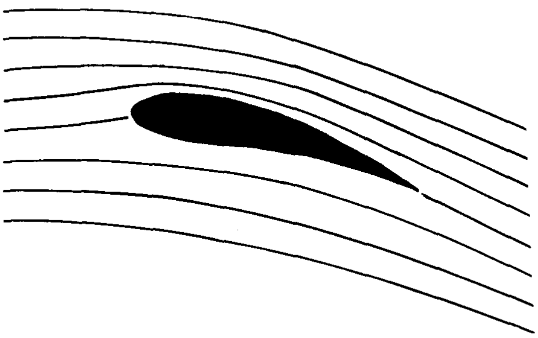
At luftens fart langs oversiden er større end langs undersiden, fordi flyvingen er mere buet på oversiden end på undersiden, er ikke et selvindlysende argument. Umiddelbart trækker argumentet på, at afstanden fra forende til bagende af vingen er større langs oversiden end langs undersiden. Og en forestilling om, at naboluftpartikler ved forenden, der løber hver sin vej om vingen, mødes igen ved bagenden. Men det er en ubegrundet forestilling. Eksperimenter har også vist, at den er forkert.

Man kan med en vis ret hævde, at tætheden af strømlinjer og v_1 må være større på oversiden end tætheden af strømlinjer på undersiden og v_2, fordi oversiden indsnævrer passagen mere end undersiden. Tilsyneladende er det ikke det, der signaleres i figuren. I det hele taget er figuren helt u-fysisk ved at lade strømlinjerne have samme retning før og efter flyvingen.

Grundlæggende skyldes opdriften på flyvingen, dvs. kraftpåvirkningen fra luften, at flyvingen påvirker luften med en tilsvarende modsatrettet kraft med dertil hørende impulsoverførsel per tid nedad til luften. Eller på jævnt dansk: Luften skal løbende sparkes nedad for at holde flyet oppe. Det – og ikke Bernoullis ligning – er det grundlæggende. Det forklarer, hvorfor man kan flyve med plane skråtstillede vinger, og hvorfor fly med buede vinger kan flyve på ryggen mm.

Ifølge Klaus Weltner (*"A comparison of explanations of the aerodynamic lifting force"*, Am. J. Phys. **55(1)**, januar 1987) er det hastighedsforskellene på hver side af en buet vinge, der ud fra trykforskellene kan forklares ved hjælp af Bernoullis ligning, ikke trykforskellene ud fra hastighedsforskellene, som i vores løsning af opgaven. I Klaus Weltners artikel findes figur 2 med et rigtigere strømlinjeforløb end i Alonso-Finn-figuren.

Vingeprofilen får strømlinjerne til at krumme nedad både over og under vingen. Ifølge Newtons anden lov må der da være en trykgradient nedad både over og under vingen. Derfor er trykket over vingen mindre end trykket et stykke over flyet og trykket under vingen større end trykket et stykke under flyet. Trykket i nogen afstand fra flyet er stort set det samme. Derfor kan Bernoullis ligning benyttes til at forklare, at luften har større fart langs oversiden end langs undersiden.



Figur 2. Strømlinier omkring flyvinge, ifølge K. Weltner.

I det tekniske museum i Luleå i Sverige, skrev de, da jeg besøgte det i 2004, at videnskaben var splittet angående forklaringen på opdrift på flyvinger. Det er nok at tage munden for fuld. Men rigtigt er det, at fejlagtige forklaringer med henvisning til Bernoullis ligning har huseret i indledende lærebogslitteratur, som i Alonso-Finn tilfældet. Imidlertid er der mest tale om fortidssynder. I de fleste indledende lærebøger nu om dage er fremstillingerne i orden. Om det er Klaus Weltners artikel, der har katalyseret opretningen, er svært at opspore. Men kollektivt er der sket en opretning.

Grunden til, at der i en periode kan cirkulere en fejlagtig forklaring, er formentlig, at lærebogsforfatterne skriver af efter hinanden. Det er svært for lærebogsforfatterne at overkomme at tænke alt i en lærebog igennem fra bunden af. En tilsvarende fejlagtig vandrefortælling i fysiklærebøger er den, som jeg omtalte i artiklen om rulning i KVANT, april 2011. Vandrefortællingen går ud på, at momentsætningen, $dL/dt = \tau$, ved rulning kan benyttes med momenter taget om røringspunktet, fordi røringspunktet momentant ligger stille. Som vist i KVANT-artiklen er det, ligesom Bernoulliforklaringen her, også forkert (pointen vedrørende rulning har jeg uddybet i: *"Rules for rolling as a rotation about the instantaneous point of contact"*, Eur. J. Phys. **32**, 389-397 (2011), og yderligere i *"Five ways of deriving the equation of motion for rolling bodies"*, Am. J. Phys. **80**, 1073-1077 (2012)).

Breddeopgave 77. Åreforkalkning

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2016, nr. 77 i rækken her i KVANT):

Hvor meget skal blodtrykket procentvis øges for at sikre den samme blodgennemstrømning ved 5% formindskelse af årenes indvendige diametre på grund af åreforkalkning? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Åreforkalkning -
- breddeopgave 77 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 77 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 77. Åreforkalkning

Hvor meget skal blodtrykket procentvis øges for at sikre den samme blodgennemstrømning ved 5 % formindskelse af årernes indvendige diametre på grund af åreforkalkning? Begrund svaret.

Løsning

Lad os lave et overslag ved at regne på en stationær laminar strømning gennem et rør. Vi vil gerne vide, hvor meget trykgradienten i åren skal øges for at sikre den samme blodgennemstrømning ved 5 % formindskelse af årernes indvendige diametre. Vi leder efter en formel, der udtrykker trykgradienten dP/dx som funktion af blodets volumenstrøm Q, årens radius r og blodets viskositet η,

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q^{\alpha}r^{\beta}\eta^{\gamma} \tag{1}$$

Dimensionen af de indgående størrelser er $[dP/dx] = \mathrm{ML^{-2}T^{-2}}$, $[Q] = \mathrm{L^3T^{-1}}$, $[r] = \mathrm{L}$ og $[\eta] = \mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$. Kravet om samme dimension på begge sider af lighedstegnet medfører derfor

$$\begin{aligned} ML^{-2}T^{-2} &= (L^3T^{-1})^{\alpha}L^{\beta}(ML^{-1}T^{-1})^{\gamma} \quad (2)\\ &= M^{\gamma}L^{3\alpha+\beta-\gamma}T^{-\alpha-\gamma}, \quad (3) \end{aligned}$$

og ved afstemning af potenserne af basisdimensionerne M, L og T hver for sig, fås ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}:\quad 1 &= \gamma \quad (4)\\ \mathrm{L}:-2 &= 3\alpha+\beta-\gamma \quad (5)\\ \mathrm{T}:-2 &= -\alpha-\gamma, \quad (6) \end{aligned}$$

med løsningen (α, β, γ) = (1,-4, 1). Den efterspurgte formel er derfor af dimensionsgrunde nødvendigvis

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q\,r^{-4}\,\eta \tag{7}$$

Formlen kan bruges til at se på en ændring $d(dP/dx)$ af dP/dx som følge af en ændring dr af r, hvor Q og η samtidigt er fastholdt. Ved differentiation af ligning (7) med hensyn til r fås

$$d(dP/dx) = -(\text{ukendt tal})\,Q\,(-4r^{-5}\,dr)\,\eta. \tag{8}$$

Herefter fås ved division af ligning (8) med ligning (7)

$$\frac{d(dP/dx)}{(dP/dx)} = -\frac{4dr}{r}. \tag{9}$$

En relativ formindskelse $-dr/r$ af r på 5 % hænger derfor sammen med en relativ forøgelse af trykgradienten og dermed blodtrykket på 4 gange 5 %, altså 20 %. Hvis den samme blodgennemstrømning skal opretholdes.

Kommentar

Det "ukendte tal" vides at være $8/\pi$ ifølge Poiseuilles lov. Hvis en studerende til eksamen havde husket Poiseuilles lov og taget udgangspunkt i den, havde det været i orden. Da hjælpemidler ikke er tilladt ved eksamen, bortset fra et på begge sider beskrevet A4-ark efter eget valg, er det imidlertid usikkert, om de studerende har loven præsent. Men de skal så kunne udlede den ved dimensionsanalyse, som vist.

En toppræstation ville være at undersøge, hvad svaret på opgaven er, hvis det ikke antages, at blodet strømmer laminart, men tværtimod gennemført turbulent. Hvad hvis arbejdet, som trykforskellene udfører, ikke som ved laminar strømning bliver omsat til varme afhængig af størrelsen af η, men derimod bliver omsat til makroskopisk kinetisk energi i hvirvelbevægelser afhængig af blodets massefylde ρ? Så skal dimensionsanalysen gennemføres med ρ^{γ} på η^{γ}'s plads i ligning(1). I stedet for ligning (2)-(3) får vi da

$$\begin{aligned} ML^{-2}T^{-2} &= (L^3T^{-1})^{\alpha}L^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma} \quad (10)\\ &= M^{\gamma}L^{3\alpha+\beta-3\gamma}T^{-\alpha}, \quad (11) \end{aligned}$$

som fører til ligningssystemet

$$\begin{aligned} \mathrm{M}:\quad 1 &= \gamma \quad (12)\\ \mathrm{L}:-2 &= 3\alpha+\beta-3\gamma \quad (13)\\ \mathrm{T}:-2 &= -\alpha, \quad (14) \end{aligned}$$

med løsningen (α, β, γ) = (2,-5, 1). Den efterspurgte formel er derfor af dimensionsgrunde

$$\frac{dP}{dx} = -(\text{ukendt tal})Q^2\,r^{-5}\rho \tag{15}$$

i stedet for ligning (7).

Modsat ligning (7) kan ligning (15) dårligt udregnes på anden måde end ved dimensionsanalyse.

Svarende til udledningen af ligning (8) fra ligning (7) og konklusionen ud fra den, viser ligning (15), at trykket og trykgradienten i den fuldt udviklede turbulente grænse, på grund af -5 eksponenten for r, procentvis skal øges med 5 gange 5 % = 25 % for at opretholde den samme blodgennemstrømning ved en 5 % mindskning af årernes diametre.

Der er altså ikke så stor forskel på besvarelsen af opgaven i den turbulente og den laminare grænse. I intervallet med Reynolds tal herimellem kunne man derfor (men ikke med sikkerhed) antage et svar i samme retning som for de store og små Reynolds tal. Regnestykket er idealiseret ved at se bort fra, at årerne er elastiske med radier, der indstiller sig efter blodtrykket. Og blodstrømningen foregår pulseret og ikke som en jævn strømning. Alligevel skønner min kollega Johnny Ottesen, der som matematisk biolog professionelt har arbejdet med blodgennemstrømning i årerne, at svaret 20-25 % ikke er noget dårligt bud på en besvarelse af opgaven.

Opgaven giver som antydet muligheder for besvarelser på flere niveauer. Det kræver mere at udlede ækvivalenten til Poiseuilles lov ved dimensionsanalyse end at have loven ved hånden og rykke rundt på den til brug her. Og det kræver endnu mere at overveje og gennemføre den supplerende udledning i den turbulente grænse for at undersøge, hvor meget konklusionen i den laminare grænse afhænger af at være i denne grænse. Vores vurdering er, at det er godt, hvis breddeopgaverne i almindelighed, som her, giver mulighed for besvarelser på flere niveauer. Det bidrager til at gøre det muligt at formulere opgaverne som et enkelt spørgsmål, uden at det bliver svært at differentiere imellem opgavebesvarelserne. Vi ønsker ikke den traditionelle opbygning af opgaver via hjælpespørgsmål, med mulighed for at skrabe nok point sammen ved eksamen via hjælpespørgsmålene, uden at hovedspørgsmålet berøres. Det skyldes først og fremmest, at vores undervisning baserer sig på tidligere eksamenssæt med den indholdsmæssige styring, der ligger heri. Både svage og stærke studerende skal fastholdes på interessen i at svare på hovedspørgsmålene i undervisningen. Deres udbytter af undervisningen er forskellige, hvilket ses af deres eksamensbesvarelser. Men de får den samme oplevelse af, hvad målene med undervisningen er.

Breddeopgave 78. Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekten

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen februar 2017, nr. 78 i rækken her i KVANT):

Temperaturen på 200 millioner grader af plasmaet i fusionsreaktoren JET måles ved at undersøge hastighedsfordelingen af plasmapartiklerne ved hjælp af frekvensfordelingen af reflekteret laserlys fra partiklerne. Er det det reflekterede lys fra elektronerne eller fra ionerne i plasmaet, der giver den bedste temperaturbestemmelse? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekt - breddeopgave 78 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

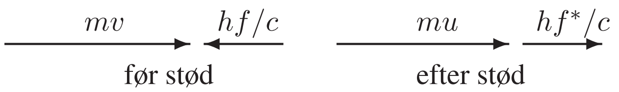
Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 78 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 78. Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekten

Temperaturen på 200 millioner grader af plasmaet i fusionsreaktoren JET måles ved at undersøge plasmapartiklernes hastighedsfordeling ved hjælp af frekvensfordelingen af laserlys reflekteret fra partiklerne. Er det det reflekterede lys fra elektronerne eller fra ionerne i plasmaet, der giver den bedste temperaturbestemmelse? Begrund svaret.

Løsning

Vi vil regne på det elastiske 180°-stød antydet på figuren:



Figur 1. Elastisk 180°-stød imellem en foton og en elektron/ion.

Energikvantet af laserlys hf, hvor h er Plancks konstant og f frekvensen af laserlyset, tilbagekastes af elektronen/ionen, som har massen m og hastigheden v. Herved ændres frekvensen af det tilbagekastede laserlys til f^*. Og elektronens/ionens hastighed ændres til u. Vi antager, at elektronernes og ionernes hastigheder er små i forhold til lysets hastighed.

Energibevarelsen under det elastiske stød giver:

$$\frac{1}{2}mv^2 + hf = \frac{1}{2}mu^2 + hf^*, \tag{1}$$

hvoraf fås, idet vi antager $v - u \ll v$:

$$h(f^* - f) = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2) \approx \frac{1}{2}m(v-u)2v. \tag{2}$$

Impulsbevarelsen giver:

$$mv - hf/c = mu + hf^*/c, \tag{3}$$

og heraf fås, idet vi antager $f^* - f \ll f$:

$$m(v-u) = h(f+f^*)/c \approx h2f/c, \tag{4}$$

hvor c er lyshastigheden.

Sammenholdt med

$$h(f^* - f) \approx m(v-u)v \quad \text{fra (2)} \tag{5}$$

fås

$$(f^* - f)/f \approx 2v/c. \tag{6}$$

Dette er tilnærmelsen til første orden af v/c for Doppler-effekten ved vinkelret lysrefleksion fra et bevæget spejl. Måske kunne vi have gættet det fra en start? Elektronen som et spejl?

For at besvare opgaven skal ligning (6) sammenholdes med, at middelværdien af bidraget til den kinetiske energi fra bevægelserne i den ene af tre mulige retninger ifølge ækvipartitionsprincippet er givet ved:

$$< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T, \tag{7}$$

hvor k_{B} er Boltzmanns konstant og T den absolutte temperatur. Fordelingen af v omkring 0 har derfor en bredde, Δv, givet ved:

$$\Delta v = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}. \tag{8}$$

Ifølge ligning (6) modsvares fordelingen af v af en fordeling af $f^* - f$. Sammenholdes ligning (8) og ligning (6) ses det, at bredden af fordelingen af $f^* - f$ er et mål for $\sqrt{T}$. Det ses endvidere, at bredden af fordelingen er proportional med $\sqrt{m^{-1}}$. Der er derfor mere at måle på, jo mindre m er. Det reflekterede lys fra elektronerne giver derfor en nøjagtigere temperaturbestemmelse end lyset fra ionerne.

Kommentar

Opgaven hører til i den svære ende af spektret af breddeeksamensopgaver. Vi udvælger blandt andet eksamensopgaverne med henblik på deres senere værdi i undervisningen, som i høj grad er baseret på tidligere eksamensopgaver. At der i eksamensopgavesættene forekommer opgaver af varierende sværhedsgrad, er ikke i sig selv et problem. Besvarelsen af et opgavesæt vurderes i sin helhed. Besvarelsen af de enkelte opgaver i sættet tildeles altså ikke nødvendigvis samme vægt ved den samlede bedømmelse.

Opgaven kan besvares på tre niveauer.

Det første niveau består i umiddelbart at antage gyldigheden af ligning (6) ud fra analogien til refleksionen fra et bevæget spejl og derefter sammenholde den med ligning (8).

Det andet niveau er det, der er gennemgået ovenfor under antagelserne $v \ll c$, $v - u \ll v$ og $f^* - f \ll f$. Det tredje niveau er at gennemregne problemet uden disse antagelser.

En eksakt relativistisk beregning giver:

$$f^* = f \frac{\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}}{\frac{2hf}{mc^2} + \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}} \tag{9}$$

i stedet for ligning (6).

I JET-tilfældet er $hf \approx 1$ eV og mc^2 for en elektron ca. 1 MeV. Leddet $2hf/(mc^2)$ i ligning (9) er derfor i vores tilfælde forsvindende lille. I grænsen, hvor $2hf/(mc^2)$ går imod 0, går ligning (9) imod $f^* = f(1+v/c)/(1-v/c)$, som er den relativistiske Dopplerformel for refleksion af en elektromagnetisk bølge fra et spejl bevæget imod bølgen. Refleksionen fra elektronen svarer derfor i JET-tilfældet til refleksionen fra et bevæget spejl.

Den typiske fart af elektronerne i JET-plasmaet kan ud fra ligning (8) vurderes til at være ca. 1/6 af lyshastigheden. Med udgangspunkt i den relativistiske Doppler-formel kan vi derfor lave tilnærmelserne $f^* \approx f(1 + v/c)(1 + v/c) \approx f(1 + 2v/c)$, eller $(f^* - f)/f \approx 2v/c$, jævnfør ligning (6). Det andet niveau for besvarelsen af opgaven bestod således af tilnærmelsesvis rigtige regninger. Antagelserne $v \ll c$, $v - u \ll v$ og $f^* - f \ll f$ var altså berettigede.

I grænsen $v/c = 0$, dvs. 180° elastisk fotonspredning fra en hvilende ladet partikel, giver formel (9)

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f}(1 + \frac{2hf}{mc^2}). \tag{10}$$

Eller oversat til bølgelængder af fotonerne, λ^* og λ, $\lambda^* - \lambda = 2h/(mc)$, som er Compton-formlen for elastisk fotontilbagespredning fra en hvilende ladning med massen m. Formel (9) indeholder således både et tilfælde af Doppler-effekt og et tilfælde af Compton-effekt som grænsetilfælde.

I grænsen $hf \ll mc^2$ går ligning (9), som sagt, imod Doppler-formlen for refleksion af en elektromagnetisk bølge fra et spejl bevæget imod bølgen. Den generelle formel for bevarelsen af relativistisk energi og impuls i sammenstød imellem en foton og en elektron har altså kontinuumsfænomenet lysrefleksion i et bevæget spejl som grænsetilfælde.

Et fint eksempel på korrespondensprincippet!

Breddeopgave 79. Klodesprængning

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2016, nr. 79 i rækken her i KVANT):

Hvilken indflydelse har massetætheden på, hvor hurtigt kloder kan rotere om sig selv uden at sprænges? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Klodesprængning
- breddeopgave 79 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 79 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 79. Klodesprængning

Hvilken indflydelse har massetætheden på, hvor hurtigt kloder kan rotere om sig selv uden at sprænges? Begrund svaret.

Løsning

Lad os for nemheds skyld antage, at en klode har samme massetæthed ρ overalt. Vi kalder vinkelhastigheden for klodens rotation om sig selv ω, og klodens radius R. En prøvemasse m på klodens overflade ved klodens ækvator er da påvirket af gravitationskraften

$$F_{\mathrm{G}} = Gm\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \frac{1}{R^2} = Gm\frac{4}{3}\pi R\rho \qquad (1)$$

indad. G er gravitationskonstanten. Samtidig er prøvemassen påvirket af centrifugalkraften

$$F_{\mathrm{C}} = mR\omega^2 \tag{2}$$

udad. Kloden sprænges, hvis F_{C} er større end F_{G}. Og det ses at ske for

$$\omega > \sqrt{4\pi G\rho/3}. \tag{3}$$

Det er bemærkelsesværdigt, at klodens størrelse, når vi spørger til den kritiske rotationshastighed, ikke spiller nogen rolle.

Kommentar

Opgaveløsningen er ikke afhængig af den simplificerende antagelse om, at massen af kloden er homogent fordelt. Vi kan nøjes med at antage samme massefylde i samme dybde. Så er middelværdien af massefylden givet ved

$$< \rho >= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr/V, \tag{4}$$

hvor V er klodens volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ifølge Newtons teorem om massetiltrækningen fra en homogen kugleskal kan vi i stedet for ligning (1) skrive:

$$F_{\mathrm{G}} = Gm \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr/R^2 = Gm\frac{4}{3}\pi R < \rho > . \tag{5}$$

For en lagdelt klode ses betingelsen i ligning (3) derfor stadig at gælde, blot skal ρ erstattes med $< \rho >$.

Opgaven kan også besvares ved dimensionsanalyse. Den kritiske rotationshastighed ω_{kr} kan tænkes at afhænge af ρ (eller $< \rho >$), G og R. Vi antager da:

$$\omega_{\mathrm{kr}} = k\rho^\alpha G^\beta R^\gamma. \tag{6}$$

Her er k nødvendigvis et rent tal, da der indgår tidsdimension i G, men ikke i ρ og R, hvorfor der ikke kan dannes en dimensionsløs kombination af ρ, G og R. Kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet indebærer:

$$\mathrm{T}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-3})^\alpha (\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^\beta \mathrm{L}^\gamma. \tag{7}$$

Da M for masse, L for længde og T for tid, som valgte basisdimensioner, ikke kan reduceres til hinanden, skal deres potenser stemme overens hver for sig. Det giver ligningssystemet:

$$\mathrm{M}: \; 0 = \alpha - \beta \tag{8}$$
$$\mathrm{L}: 0 = -3\alpha + 3\beta + \gamma \tag{9}$$
$$\mathrm{T}: \quad -1 = -2\beta, \tag{10}$$

med den entydige løsning $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$, og $\gamma = 0$, svarende til ligning (3). At ω_{kr} ikke afhænger af klodens størrelse, kunne vi ikke have gættet forud for dimensionsanalysen uden at opstille ligningerne (1) og (2). Men det viser sig altså også som en konsekvens af dimensionsanalysen.

Opgaver som denne, der lægger op til besvarelser på flere måder og på flere niveauer, er en god ting i breddeopgavegenren. Vi foretrækker at komme svagere og stærkere studerende samtidigt i møde herved, fremfor ved den traditionelle opbygning af eksamensopgaver med hjælpespørgsmål undervejs til den endelige opgaveløsning.

Det er ved løsningen af opgaven forudsat, at planeten er sfærisk. Men en roterende planet vil være fladtrykt på grund af centrifugalkræfterne. En gennemgang af problemet for en fladtrykt planet er omfattende. Det kunne være en udfordring for et projektarbejde, men kan ikke fungere som emne for en breddeopgave. Dog kan vi ved dimensionsanalyse komme et stykke af vejen. Hvis vi kalder planetens radier ved polerne og ved ækvator for henholdsvis T og R – i grænsesituationen for sprængning – giver dimensionsanalysen:

$$\omega_{\mathrm{kr}} = f\left(\frac{T}{R}\right)\sqrt{G\rho}, \tag{11}$$

hvor f er en ukendt funktion af T/R. Den kritiske værdi af ω er altså igen uafhængig af planetens størrelse, men den afhænger af dens form ved den kritiske værdi af ω. Både ligning (3) og (11) er udregnet under forudsætning af, at planetens materiale er som fx en bunke grus, en væske eller en gas, dvs. et materiale uden stærk intern sammenhængskraft i forhold til gravitationskræfterne.

Breddeopgave 80. Bobler

Til næste nummer af KVANT stiller jeg denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2018).

En vandtank har fået skruet låget lufttæt fast efter at være blevet delvist fyldt med vand. Ved et uheld slås der et hul i bunden af tanken. Hvor meget vand løber ud af tanken, før der begynder at boble luft ind i den? Begrund svaret.

Bobler – breddeopgave 80 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til breddeopgave nr. 80 i rækken her i KVANT:

Bobler

En vandtank har fået skruet låget lufttæt fast efter at være blevet delvist fyldt med vand. Ved et uheld slås der et hul i bunden af tanken. Hvor meget vand løber ud af tanken, før der begynder at boble luft ind i den? Begrund svaret.

Løsning

Som på figuren kalder vi startværdien af højden af luftlommen h_l, startværdien af højden af vandoverfladen h_v, startværdien af trykket i luftlommen og uden for beholderen P_u, sænkningen af vandoverfladen, når den første luftboble bobler op i flasken, for Δh, og det tryk, der da er i luftlommen, for $P_{\Delta h}$. Vandets massefylde kalder vi ρ og tyngdefeltstyrken g.

Hvis hullet i bunden af beholderen er tilstrækkeligt lille, kan vi antage, at udvidelsen af luftlommen sker langsomt og isotermt i overensstemmelse med Boyles lov. For en beholder med konstant tværsnitsareal har vi:

$$P_u h_l = P_{\Delta h}(h_l + \Delta h). \tag{1}$$

Idet vi ser bort fra overfladespænding, begynder der at boble luft ind i beholderen, når trykket i vandet lige inden for hullet er faldet til samme værdi som trykket i luften uden for hullet:

$$P_{\Delta h} + \rho g(h_v - \Delta h) = P_u. \tag{2}$$

Elimineres $P_{\Delta h}$ ved kombination af ligningerne (1) og (2), fås

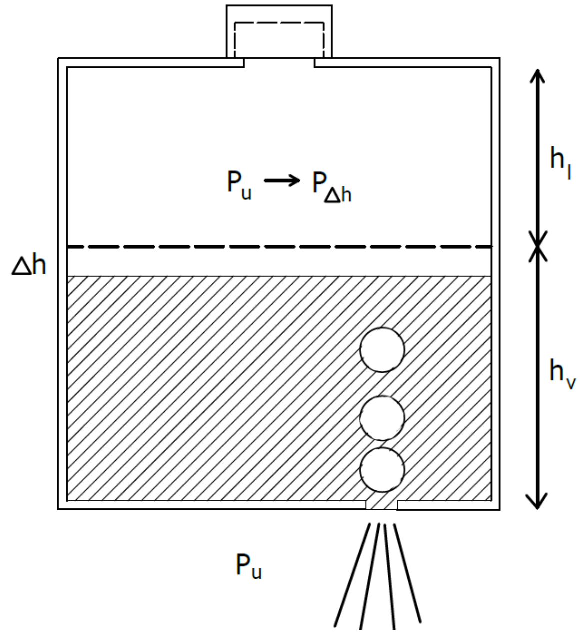
$$P_u h_l = (P_u - \rho g(h_v - \Delta h))(h_l + \Delta h), \tag{3}$$

der omskrives til:

$$\Delta h^2 + (\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)\Delta h - h_l h_v = 0 \tag{4}$$

med løsningen:

$$\Delta h = -\frac{1}{2}(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)+\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)^2 + h_l h_v}. \tag{5}$$



Figur 1. Luftbobler på grund af hul i vandtank.

Svaret på opgaven er derfor, at der er løbet et volumen vand ud af beholderen givet ved tværsnitsarealet af beholderen ganget med Δh, før der begynder at boble luft ind i den.

Hvis h_l går imod 0, ses Δh at gå imod 0. Det hænger sammen med, at undertrykket i den indespærrede luft øges hurtigt med øgningen af Δh, når h_l er lille, jævnfør ligning (1). Størrelsen Δh ses også at gå imod 0, når h_v går imod 0. Det hænger sammen med, at vandsøjletrykket på boblerne går imod 0 i denne grænse. Ligning (5) virker rimelig i begge grænser.

Kommentar

Selvom vi har set bort fra overfladespænding, lever udtrykket for Δh i ligning (5) ikke helt op til Einsteins fysikerprogramerklæring: "Make everything as simple as possible, but not simpler". Medmindre der tænkes på vandtanke af husstørrelse, er leddet $P_u/\rho g \approx 1$ atm/(1 atm/10 m) = 10 m stort i forhold til h_l og h_v. For indendørs vandtanke kan ligning (5), omformet til

$$\Delta h = \frac{1}{2}(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)\left(-1+\sqrt{1 + \frac{4h_l h_v}{(\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)^2}}\right). \tag{6}$$

rækkeudvikles efter argumentet $\frac{4h_l h_v}{(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)^2} \ll 1$ med det enklere og mere overskuelige resultat:

$$\Delta h \approx \frac{h_l h_v}{\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v} \approx \frac{h_l h_v \rho g}{P_u}. \tag{7}$$

Det er en pointe, at dette resultat kunne være opnået mere direkte uden omvejen omkring ligning (5) ved at approksimere fra begyndelsen, hvis vi indskrænker os til at udtale os om indendørs vandtanke. Samtidigt kan vi opnå et resultat, der ikke er indskrænket til at gælde for så små huller i tanken, at udvidelsen af luftlommen sker isotermt.

Vi erstatter ligning (1) med

$$P_u h_l^\gamma = P_{\Delta h}(h_l + \Delta h)^\gamma, \tag{8}$$

hvor $\gamma = 1$ svarer til den isoterme grænse (små huller), og $\gamma = 7/5$ svarer til den adiabatiske grænse (store huller), idet luften består af diatomige molekyler. Efter omformning til $P_{\Delta h} = P_u(1+\Delta h/h_l)^{-\gamma}$, rækkeudvikling heraf efter $\Delta h/h_l \ll 1$ til $P_{\Delta h} = P_u(1-\gamma\Delta h/h_l)$, og indsættelse i ligning (2) med resultatet $\rho g h_v = \Delta h(\rho g + \gamma P_u/h_l)$, fås, idet $\rho g \ll P_u/h_l$:

$$\Delta h \approx \frac{h_l h_v \rho g}{P_u \gamma}. \tag{9}$$

Dette resultat dækker flere situationer end resultatet i ligning (7), og vi er nået frem til det ved enklere regninger. Moralen synes at være, at det, for at bevare overblikket og gøre sagen så simpel som mulig, betaler sig at approksimere så hurtigt som muligt. Tænk først fysisk, så matematisk – ikke omvendt.

Men der findes også eksempler, der peger på den modsatte morale: Præcisér sagen så eksakt og matematisk som muligt, og overvej fysisk begrundede forenklinger til sidst.

Breddeopgaven i KVANT oktober 2017 handlede om, hvornår en dug, et tov eller lignende rutsjer ned af bordet, som dugen m.m. ligger på tværs af med ulige lange nedhæng til to modstående sider. Umiddelbart kunne man forestille sig, at det sker, når forskellen mellem tyngdekræfterne på de to udhæng overstiger den mulige statiske gnidningskraft imellem dugen og bordpladen. I kommentaren redegjorde jeg imidlertid matematisk for, hvordan gnidningen ved bordkanterne er afgørende på en måde, der kun gør det umiddelbare svar på opgaven tilnærmelsesvist rigtigt under specielle omstændigheder. Så moralen her var så afgjort, at det betaler sig at modellere så eksakt som muligt og først approksimere til sidst.

I kommentaren skrev jeg også, at opgaven – i modsætning til, hvad vi tænkte i udgangspunktet – var for vanskelig til at kunne bruges som breddeopgave til eksamen. Siden har jeg gennemset samlingen af breddeopgaver og fundet, at vi alligevel ved to tidligere eksamener (januar 1996 og januar 2010) har stillet opgaver svarende til den om den rutsjende dug, hvor vi åbenbart forhastet har tænkt, at der kunne ses bort fra gnidningen imod bordkanten i forhold til gnidningen imod bordpladen. Det er først tredje gang opgaven i den ene eller anden forklædning dukker op som idé, at vi behandler den med matematisk omhu. Skaden er ikke stor i forhold til de studerendes eksamen. De bliver mere bedømt på, om de kan tænke som fysikere konfronteret med eksamensopgaverne, end om de når frem til rigtige resultater. Men sagen er en god illustration af, at fysikere (opgavestillerne) ikke kun skal “make everything as simple as possible”, men også skal være opmærksomme på anden del af Einstein-citatet: “but not simpler”.

Martin Niss har for nylig skrevet en artikel (“What is physics problem solving competency? The views of Arnold Sommerfeld and Enrico Fermi”, *Science & Education*, bind **27**, nr. 3–4, side 357–369 (2018)), hvor han karakteriserer Sommerfelds tilgang til fysisk problemløsning som en “theory first, phenomenon second”-tilgang, og Fermis tilgang som en “phenomenon first, theory second”-tilgang. Modstillingen ligner den, som jeg har forsøgt at illustrere ved at modstille løsningsstrategier for breddeopgaven her om bobler og breddeopgaven om den rutsjende dug i KVANT-nummeret fra oktober 2017, idet der med “theory” tænkes på en matematisk formuleret ramme for problemet under behandling.

Breddeopgavegenren lægger sig tæt op af Fermi-udgaven af fysisk problemløsning. Men overordnet er moralen, at man, for at kunne tænke som fysiker, alt efter omstændighederne skal kunne tilgå problemer både på Fermi-måden og på Sommerfeld-måden. Breddekurset er derfor kun en del af uddannelsen til fysiker.

Breddeopgave 81. Gnidning, arbejde og varme

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2017, nr. 81 i rækken her i KVANT):

En stor kælk med et lad står stille på en spejlglat tilfrosset sø. Kælken sættes i bevægelse, fordi en postsæk kastes ud på ladet, hvor den bremses ned i forhold til ladet på grund af gnidning. Hvor langt har kælken flyttet sig, når postsækken ligger stille i forhold til kælken? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Gnidning, arbejde og varme
– breddeopgave 81 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 81 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 81. Gnidning, arbejde og varme

En stor kælk med et lad står stille på en spejlglat tilfrosset sø. Kælken sættes i bevægelse, fordi en postsæk kastes ud på ladet, hvor den bremses ned i forhold til ladet på grund af gnidning. Hvor langt har kælken flyttet sig, når postsækken ligger stille i forhold til kælken? Begrund svaret.

Løsning

Vi kalder positionen af postsækken x og positionen af kælken y, begge målt fra det sted postsæk og kælk var, da postsækken til en start landede på ladet. Gnidningskraften imellem postsæk og kælk under deres relative bevægelse er μmg, hvis vi kalder gnidningskoefficienten μ, postsækkens masse m og tyngdefeltstyrken for g.

Bevægelsesligningen for postsækkens bevægelse i forhold til isen er da:

$$m\ddot{x} = -\mu mg, \tag{1}$$

idet gnidningskraften fra slæden på postsækken er rettet modsat postsækkens bevægelse. Med v_0 for postsækkens fart før den lander på slæden, fås heraf:

$$\dot{x} = v_0 - \mu gt, \tag{2}$$

og

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}\mu gt^2. \tag{3}$$

Bevægelsesligningen for slædens bevægelse i forhold til isen er, med M for slædens masse:

$$M\ddot{y} = \mu mg, \tag{4}$$

idet gnidningskraften fra postsækken på slæden er rettet i samme retning som slædens bevægelse. Idet slæden starter med at være i hvile i forhold til isen, fås heraf:

$$\dot{y} = \mu gtm/M, \tag{5}$$

og

$$y = \frac{1}{2}\mu gt^2 m/M. \tag{6}$$

Postsækken ligger stille i forhold til slæden, når den har mistet fart og slæden vundet fart, så de to hastigheder i forhold til isen er ens.

Ifølge ligningerne (2) og (5) er tidspunktet t_s, hvor det sker, givet ved $v_0 - \mu g t_s = (m/M)\mu g t_s$ eller $t_s = (v_0/\mu g)M/(M+m)$. Svaret på opgaven fås herefter ved at indsætte denne værdi af t i ligning (6), med resultatet:

$$y(t_s) = \frac{mMv_0^2}{2\mu g(M+m)^2}. \tag{7}$$

Så langt flytter slæden sig, før postsækken ligger stille på slæden.

Vi kan tilsvarende finde, hvor langt postsækken bevæger sig i forhold til isen, medens den bremses op på slæden, ved at indsætte værdien af t_s i ligning (3), med resultatet:

$$x(t_s) = \frac{(M+2m)Mv_0^2}{2\mu g(M+m)^2}. \tag{8}$$

Ved at trække udtrykket for $y(t_s)$ i ligning (7) fra udtrykket for $x(t_s)$ i ligning (8) kan vi finde, hvor langt postsækken glider henad slædens lad, før den ligger stille på slæden:

$$x(t_s) - y(t_s) = \frac{Mv_0^2}{2\mu g(M+m)}. \tag{9}$$

Ved at lade $m/M \to 0$ i ligningerne (7) og (8) fås:

$$y(t_s) \to 0 \text{ og } \mu mgx(t_s) \to \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{10}$$

for $M/m \to \infty$.

Når slæden er meget tungere end postsækken, bevæger postsækken således ikke slæden. Samtidig ses det, at bremselængden for postsækken i denne grænse direkte kan findes ved at sætte størrelsen af gnidningskraftens negative arbejde på postsækken lig med sækkens tab af kinetisk energi.

Kommentar

Spørger vi om, hvor meget varme, der er udviklet under opbremsningen, lader det sig besvare ud fra impuls- og energibevarelse for det isolerede system postsæk plus slæde. For hastigheden af tyngdepunktet af systemet, som også er sluthastigheden af postsæk og slæde, når de til sidst følges ad, v_{cm}, gælder ifølge impulsbevarelsen: $mv_0 = (m+M)v_{\mathrm{cm}}$, så vi har

$$v_{\mathrm{cm}} = \frac{mv_0}{M+m} \tag{11}$$

Ifølge energibevarelsen for det isolerede system postsæk plus slæde har vi da for varmeudviklingen Q:

$$Q = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{Mmv_o^2}{2(M+m)} \tag{12}$$

Dette resultat kan også opnås ved at betragte gnidningskræfternes arbejde under opbremsningen.

Arbejdet udført af gnidningskraften på postsækken er negativt, da kraft og vej er modsatrettede. Det svarer til, at postsækken taber kinetisk energi. Ifølge mekanikkens arbejde-kinetisk energi-teorem har vi:

$$\mu mgx(t_s) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{Mm(M+2m)v_0^2}{2(M+m)^2} \tag{13}$$

Ved at anvende arbejde-kinetisk energi-teoremet finder vi det samme resultat for $x(t_s)$ som i ligning (8) mere umiddelbart end ved løsningen af bevægelsesligningerne. Tilsvarende fås det positive arbejde udført af gnidningskraften på slæden, ifølge arbejde-kinetisk energi-teoremet, og indsættelse af ligning (11), til at være:

$$\mu mgy(t_s) = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{Mm^2v_0^2}{2(M+m)^2}, \tag{14}$$

som umiddelbart giver svaret på opgaven i overensstemmelse med ligning (7).

Det er hurtigere at løse opgaven ved brug af mekanikkens arbejde-kinetisk energi-teorem end ved løsningen af bevægelsesligningerne som først gjort ovenfor. At det kan lade sig gøre, skyldes, at arbejde-kinetisk energi-teoremet, uanset om der er tale om konservative kræfter eller fx gnidningskræfter, er matematisk ækvivalent med Newtons anden lov for bevægelsen af et tyngdepunkt. At det er hurtigere, skyldes bl.a., at der allerede er foretaget en integration ved udledningen af arbejde-kinetisk energi-teoremet fra Newtons anden lov.

Ved at sammenholde ligningerne (12), (13) og (14), kan vi finde:

$$Q + \mu mgy(t_s) - \mu mgx(t_s) = 0. \tag{15}$$

Her står, at summen af den udviklede varme ved opbremsningen og gnidningskræfternes resulterende arbejde er nul. Er det en udgave af termodynamikkens første hovedsætning?

Nej! Ligning (15) udsiger ganske vist formelt set, at summen af den udviklede varme og gnidningskræfternes arbejde er nul for det isolerede system postsæk plus slæde. Men ligning (15) er ikke et udtryk for energibevarelse som overordnet princip. Den fremkommer via de kinetiske energier, som både optræder i arbejde-kinetisk energi-teoremet i ligningerne (13) og (14) og i den egentlige energibevarelse i ligning (12).

Begrebet "arbejde" bruges forskelligt i forbindelse med arbejde-kinetisk energi-teoremet og i forbindelse med termodynamikkens første hovedsætning. I mekanikken kan vi udtale os om arbejdet udført på postsæk og slæde hver for sig. Det første er negativt. Det andet er positivt. Men der er ikke tale om varmetilførsel til postsækken og varmeafgivelse fra slæden. Koblingen af arbejde og varme kan kun gøres for det samlede, isolerede system postsæk plus slæde.

For det samlede system gælder der termodynamisk set, at dets energi er bevaret, da der ikke bliver udført arbejde på det udefra og heller ikke bliver tilført varme udefra. Systemets energi består af den, på grund af impulsbevarelsen, konstante tyngdepunktsenergi $\frac{1}{2}(m+M)v_{\mathrm{cm}}^2$ plus en, derfor også, konstant indre energi. Til en start er systemet i termodynamisk uligevægt med indre energi – energien i tyngdepunktssystemet – i form af makroskopisk kinetisk energi. Gnidningskræfterne bringer herefter systemet i ligevægt ved at omdanne den indre kinetiske energi til termisk energi.

Det er ikke kun begrebet "arbejde", der sædvanligvis benyttes forskelligt i termodynamik og mekanik. Begrebet "varme" er i den termodynamiske tradition udtryk for energitransport ud og ind af et system. I mere daglig tale bruger vi ordet om fx den termiske energi udviklet på grund af gnidning.

Måden hvorpå ligning (15) blev udledt via de kinetiske energier gør, at den ikke kun gælder for tidspunktet t_s, men for ethvert tidspunkt t fra 0 til t_s. Differentieres ligningen, med t_s udskiftet med t, fås:

$$\dot{Q} = \mu mg(\dot{x} - \dot{y}) \tag{16}$$

For studerende, som endnu ikke er blevet forvirrede af den forskellige brug af begreberne arbejde og varme i mekanik og termodynamik, er denne ligning formentlig umiddelbart forståelig: tempoet, hvormed der udvikles gnidningsvarme mellem postsæk og kælk, er givet ved gnidningskraften imellem dem gange deres relative hastighed. Hvad andet kan tænkes?

Breddeopgave 82. Fugle

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2018, nr. 82 i rækken her i KVANT):

Lad os antage, at alle fugle, der er i stand til i vindstille at holde sig svævende over samme punkt af landskabet ved at baske med vingerne, kun varierer i størrelse: Deres form og måden, de bevæger vingerne på, antages at være ens. Hvordan afhænger frekvensen de basker med da af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

Fugle – breddeopgave 82 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 82 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 82. Fugle

Lad os antage, at alle fugle, der er i stand til i vindstille at holde sig svævende over samme punkt af landskabet ved at baske med vingerne, kun varierer i størrelse: Deres form og måden, de bevæger vingerne på, antages at være ens. Hvordan afhænger frekvensen, de basker med, da af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsning

Når en fugl holder sig svævende i en konstant højde, må der være en opdriftkraft, O, fra luften på fuglen, i modsat retning og af samme størrelse som tyngdekraften på fuglen, mg, hvor m er fuglens masse og g tyngdefeltstyrken:

$$O = mg. \tag{1}$$

For stillestående, baskende fugle må opdriften afhænge af massefylden ρ af den luft, der presses nedad, og frekvensen f, hvormed der baskes. Hvis vi antager fuglenes form og måden, de bevæger vingerne på, for at være ens, må opdriften herudover alene afhænge af et lineært mål for fuglenes størrelse, fx længden l af deres vinger. Da ρ, f og l ikke kan kombineres til en dimensionsløs størrelse, må O så være givet ved:

$$O = a\rho^{\alpha} f^{\beta} l^{\gamma}, \tag{2}$$

hvor a er et ukendt, dimensionsløst tal, og hvor α, β, og γ skal vælges, så vi får samme dimension på begge sider af lighedstegnet. Da $[O]$ = MLT^{-2}, $[\rho]$ = ML^{-3}, $[f]$ = T^{-1}, $[l]$ = L, skal α, β, og γ derfor opfylde kravet:

$$\mathrm{MLT}^{-2} = (\mathrm{ML}^{-3})^{\alpha}\mathrm{T}^{-\beta}\mathrm{L}^{\gamma}. \tag{3}$$

Da basisdimensionerne per definition ikke kan afledes af hinanden, skal potenserne for hver basisdimension være den samme på begge sider af lighedstegnet:

$$\mathrm{M}: \quad 1 = \alpha \tag{4}$$
$$\mathrm{L}: \quad 1 = -3\alpha + \gamma \tag{5}$$
$$\mathrm{T}: \quad -2 = -\beta, \tag{6}$$

Da den entydige løsning til dette ligningssystem er $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 4)$, har vi derved ved indsættelse i ligning (2) af dimensionsgrunde fundet O til at være givet ved formlen:

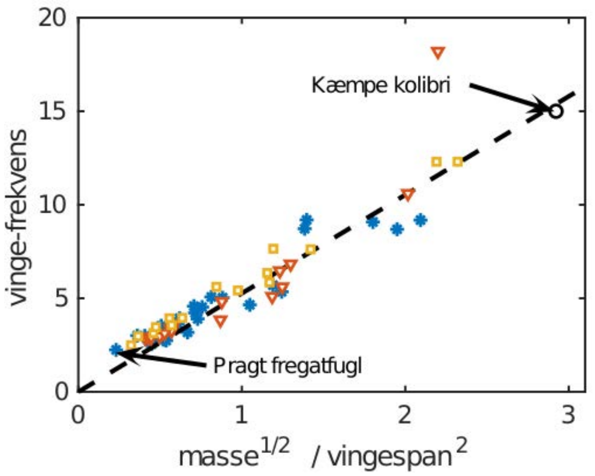
$$O = a\rho f^2 l^4. \tag{7}$$

Frekvensen kan så findes ved at sammenholde ligningerne (1) og (7) til at være:

$$f = \sqrt{\frac{mg}{a\rho l^4}}. \tag{8}$$

Holder antagelsen om ensartet form for alle fugle stik, er m proportional med l^3. Sammenholdt med ligning (8) betyder det, at svaret på opgaven er:

$$f \propto \frac{1}{\sqrt{l}}. \tag{9}$$



Figur 1. Baskefrekvensen som funktion af $\sqrt{m}/l^2$ for 32 forskellige slags fugle.

Kommentar

I Kvant september 2014 drejede breddeopgave nummer 60 sig om fisk. Her er det så fugle, det handler om. Dimensionsanalyse kan bruges til meget! Eller kan det? Dimensionsanalysen forudsatte jo antagelser om ligedannethed. Og kan man med rimelighed antage noget sådant? Det kan man tilsyneladende. Forbavsende nok.

Min kollega Tina Hecksher har fundet[1] og derefter bearbejdet data for 32 forskellige slags fugles baskefrekvenser, masser, vingelængder og vingearealer. Det fremgår, at vingearealer og kvadratet på vingelængder er stort set proportionale. Derimod kan man ikke regne med, at alle fugle er lige slanke eller buttede. Deres masser er ikke proportionale med vingelængderne i tredje potens. Formel (9) stemmer derfor ikke med dataene. Men formel (8) stemmer forbavsende godt. Da g og ρ er fælles for alle fuglene, har vi ifølge formlen:

$$f \propto \frac{\sqrt{m}}{l^2} \tag{10}$$

Og det er også, hvad dataene ifølge figur 1 viser.

Det skal nævnes, at baskefrekvenserne ikke er optalt for stillestående fugle, men for fugle i flugt. Men som Tina og jeg forstår biologen Pennycuick,[1] anser han fugles baskefrekvenser for fysiologiske konstanter svarende til, at vores gangfrekvens er styret af placeringen af tyngdepunktet og størrelsen af inertimomentet af vores ben. Og så må man jo antage, at baskefrekvensen for en given fugleart er den samme i flugt og stillestående. Det er dog stadig forunderligt, så god overensstemmelsen er imellem vores teoretisk udledte formel og data. Er måden, hvorpå forskellige slags fugle bevæger vingerne, virkelig ens? Varierer de ikke amplituden, når de basker med vingerne? Pennycuick kommenterer det ikke. Og Tina og jeg er ikke biologer.

Breddeopgave 83 og 84. Ståltrådsstrækning

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 1993 og eksamen juni 2010, nr. 83 og 84 i rækken her i Kvant):

Hvor meget strækkes en stang under sin egen vægt, når den hænger lodret ned fra den ene ende?

En ståltråd svinges rundt i en vandret plan. Hvor meget forlænges ståltråden af at blive svinget rundt? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

[1] C. J. Pennycuick (1990) "Predicting Wingbeat Frequency and Wavelength of Birds", *J.Exp.Biol.*, bind **150**, side 171–185.

Ståltrådsstrækning
- breddeopgave 83 og 84 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var disse breddeopgaver (nr. 83 og 84 i rækken her i Kvant):

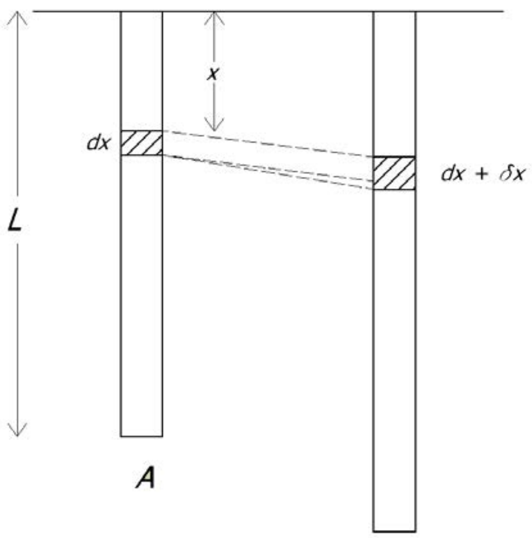
Breddeopgave 83 og 84. Ståltrådsstrækning

Hvor meget strækkes en stang under sin egen vægt, når den hænger lodret ned fra den ene ende?

En ståltråd svinges rundt i et vandret plan. Hvor meget forlænges ståltråden af at blive svinget rundt? Begrund svaret.

Løsninger

Lad os starte med stangen, der strækkes under sin egen vægt. For at analysere sagen nærmere er vi nødt til at betragte stangen som sammensat af små infinitesimale stykker, som det er vist på figur 1.



Figur 1. Henholdsvis ubelastet stang og stangen strakt under sin egen vægt.

Vi kalder stangens ubelastede længde for L og dens tværsnitsareal for A. Det infinitesimale stykke af den ubelastede stang, dx, i afstanden x fra dens øvre ende, er forøget med længden δx på grund af trækspændingen i stangen i afstanden x forårsaget af tyngdekraften F på stykket af stangen under det infinitesimale stykke. Vi kalder stangens masse for M og tyngdefeltstyrken for g og har så:

$$F = Mg\frac{L-x}{L} \tag{1}$$

Definitionen på Youngs modul Y er

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l}, \tag{2}$$

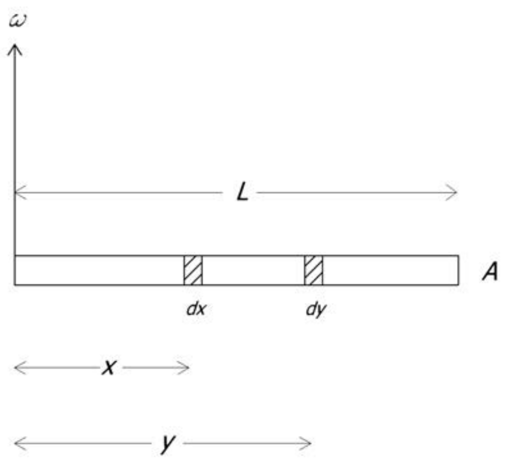
hvor $\Delta l/l$ er den relative forlængelse af fx en stang, og F/A er spændingen, som stangen er udsat for. Oversat til det infinitesimale stykke dx udsat for trækspændingen givet ved ligning (1), har vi:

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{Mg}{YA}(1-\frac{x}{L}). \tag{3}$$

Den samlede strækning af stangen under dens egen vægt, ΔL, fås da ved integration af δx-bidragene fra de forskellige værdier af x:

$$\Delta L = \int_0^L \delta x = \frac{Mg}{YA}\int_0^L (1-\frac{x}{L})dx = \frac{MgL}{2YA}. \tag{4}$$

Strækningen af ståltråden, der svinges rundt i et vandret plan (med vinkelfrekvensen ω), er et analogt problem, bortset fra udregningen af F. Vi vil analysere problemet i det medroterende system. Ligning (1) ses ikke at kunne benyttes for F, da kraftfeltet, der forårsager strækningen, nu ikke er homogent. Udregningen af den samlede centrifugalkraft på stykket uden for det infinitesimale dx-stykke, og dermed trækspændingen i x, kræver en integration.



Figur 2. Strækning af ståltråd, som svinges rundt i et vandret plan.

Med betegnelserne i figur 2 fås

$$dF = \frac{My\omega^2 dy}{L}, \quad (5)$$

så

$$F = \int_{y=x}^{y=L} dF = \frac{M\omega^2(L^2 - x^2)}{2L} \quad (6)$$

i stedet for F, givet ved ligning (1). Derfor fås

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{M\omega^2(L^2 - x^2)}{2AYL} \quad (7)$$

i stedet for ligning (3). Og

$$\Delta L = \int_{x=0}^{x=L} \delta x = \frac{M\omega^2 L^2}{3YA} \quad (8)$$

i stedet for ligning (4). Svaret på opgaven om strækningen af ståltråden, der svinges rundt, fremgår således af svaret på opgaven om strækningen af stangen, der hænger i tyngdefeltet, ikke blot ved at erstatte g med $L\omega^2$, men også ved at erstatte 1/2 med 1/3 på grund af inhomogeniteten af centrifugalfeltet.

Kommentar

Ved kurserne Fysisk problemløsning I og Fysisk problemløsning II på RUC, som tilsammen er den nutidige udgave af det tidligere Breddekursus, diskuterer både lærere og studerende, hvad der skal til for at svare på breddeopgaverne (det kalder vi dem stadig). Der er enighed om, at løsningen af breddeopgaver typisk foregår i to trin. Det første trin består af en formalisering af det stillede problem. Det andet trin består herefter i at løse det fremkomne formaliserede problem. Og der er enighed om, at det oftest er det første trin, der volder de største vanskeligheder. Formaliseringen består i varierende blandinger af "fysificering"og "matematificering". Ved fysificeringen placeres breddeopgaveproblemet, formuleret i dagligdags sprog, i fysik-kontekster. Hvad drejer sagen sig essentielt om? Hvilken slags fysik skal i spil? Ved matematificeringen placeres problemet i matematik-kontekster. Hvilke er de uafhængige variable, de afhængige variable og parametrene i problemet? Hvilken slags matematik skal i spil? I en nyere artikel[1] er formaliseringsproblemet behandlet i større detalje ved gennemgang af fire breddeopgaver, som er valgt, så de repræsenterer fire forskellige måder, matematik og fysik indgår i forhold til hinanden på ved formaliseringen af opgaverne.

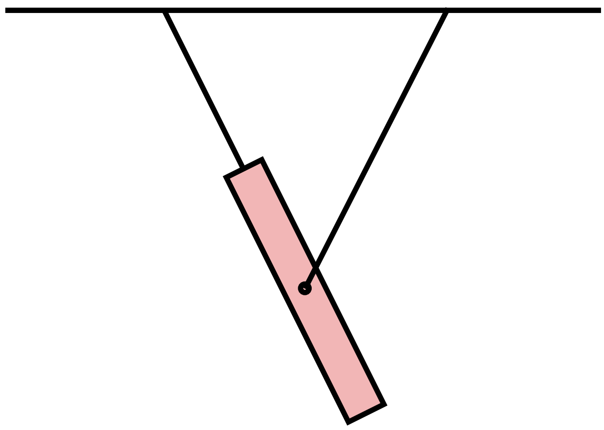
Den ene af opgaverne er den i artiklen her, om hvor meget en lodret hængende stang strækkes under sin egen vægt. Løsningen af opgaven kræver nogle indledende fysikovervejelser om belastning, jf. ligning (1), og elasticitetsmodul, jf. ligning (2). Parallelt hermed modnes idéen om, at ligning (2) skal bringes i anvendelse til udregning af infinitesimale længdeudvidelser, δx, af infinitesimale dele af stangen, dx, endende op med en integration. Det er vores vurdering, at det er denne matematificering af opgaven, der i dette tilfælde er den mest krævende del af besvarelsen.

I det hele taget er matematificeringen erfaringsmæssigt – i varierende grad – en afgørende barriere ved løsningen af breddeopgaver. Omvendt kan breddekurset, udover at være en introduktion af fysik i bredden, via sin form for problemløsningsorientering, også betragtes som en træningsbane for matematificering og matematisk problemløsning i det hele taget.

Breddeopgave 85, 86 og 87. Svingninger, opdrift og mørkt stof.

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningerne til disse opgaver fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2019, nr. 85, 86 og 87 i rækken her i Kvant):

En homogen stang er ophængt i to snore, som vist på figuren. Hvordan svinger stangen, hvis henholdsvis den ene og den anden snor knækker? Begrund svarene.



En spand vand, hvori der flyder en træklods, sættes på gulvet i en elevator. Hvorledes ændrer træklodsens stilling sig i forhold til vandoverfladen, når elevatoren begynder at køre? Begrund svaret.

Hypotesen om mørkt stof blev først fremsat i 1933 af Fritz Zwicky, fordi han observerede, at galakserne i en bestemt galaksehob bevægede sig, som om massetætheden i galaksehoben var omkring 400 gange større end massetætheden af det synlige stof i galaksehoben. Hvor mange gange hurtigere bevægede galakserne i galaksehoben sig, end de ville have gjort, hvis det alene var synligt stof, der bevægede dem? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

[1] J. H. Jensen, M. Niss og U. T. Jankvist (2017) "Problem solving in the borderland between mathematics and physics", *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, bind **48**, side 1–15.

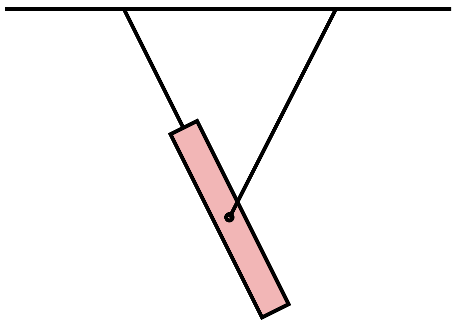
Svingninger, opdrift og mørkt stof
- breddeopgave 85, 86 og 87 med didaktisk kommentar

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var disse breddeopgaver (nr. 85, 86 og 87 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 85. Svingninger

En homogen stang er ophængt i to snore, som vist på figuren. Hvordan svinger stangen, hvis henholdsvis den ene og den anden snor knækker? Begrund svaret.



Løsning

Knækker den venstre snor, vil stangen herefter være påvirket af tyngdekraften og snorkraften fra den anden snor. Da begge kræfter angriber i tyngdepunktet, vil stangen ifølge momentsætningen om tyngdepunktet for stive legemer bevare sin retning i rummet. Medens den ifølge tyngdepunktssætningen vil svinge, som var stangens masse samlet i dens midtpunkt.

Knækker den højre snor, vil stangen herefter ifølge tyngdepunktssætningen svinge bundet til den anden snor. Men snoren og stangen vil holde op med at være i forlængelse af hinanden. Snorkraften fra den anden snor vil derfor få en projektion vinkelret på stangen og dreje den om dens tyngdepunkt. Alt i alt bliver bevægelsen af stangen en kaotisk blanding af rotation om dens tyngdepunkt og svingning af tyngdepunktet.

Breddeopgave 86. Opdrift

En spand vand, hvori der flyder en træklods, sættes på gulvet i en elevator. Hvorledes ændrer træklodsens stilling sig i forhold til vandoverfladen, når elevatoren begynder at køre? Begrund svaret.

Løsning

Træklodsens stilling i vandet, når elevatoren er i hvile, er givet ved, at opdriftkraften på den modsvarer tyngdekraften på den. Opdriftkraften er lig med tyngdefeltstyrken, g, gange massen af det fortrængte vand. Tyngdekraften er lig med massen af træklodsen gange g. Massen af det fortrængte vand er derfor lig med massen af træklodsen.

Når elevatoren begynder at køre med accelerationen a, befinder vi os i et accelereret referencesystem, hvor det resulterende kraftfelt er $g - a$. Her er a positiv, hvis acceleration er nedadrettet, og negativ, hvis accelerationen er opadrettet. Vi skal nu gange de to masser med $g - a$ i stedet for med g for at udregne de to balancerende kræfter. Men det ændrer ikke på, at massen af det fortrængte vand stadig må være lig med massen af træklodsen. Træklodsens stilling i forhold til vandoverfladen er derfor upåvirket af, at elevatoren kører.

Breddeopgave 87. Mørkt stof

Hypotesen om mørkt stof blev først fremsat i 1933 af Fritz Zwicky, fordi han observerede, at galakserne i en bestemt galaksehob bevægede sig, som om massetætheden i galaksehoben var omkring 400 gange større end massetætheden af det synlige stof i galaksehoben. Hvor mange gange hurtigere bevægede galakserne i galaksehoben sig, end de ville have gjort, hvis det alene var synligt stof, der bevægede dem? Begrund svaret.

Løsning

Lad os antage, at galaksehoben er kugleformet med en jævn massetæthed ρ. Hvis vi for simpelheds skyld antager jævn cirkelbevægelse, er den fart v, som en galakse med massen m i afstanden r fra galaksehobens centrum bevæger sig med, givet ved:

$$m\frac{v^2}{r} = Gm\frac{4\pi\rho r^3}{3r^2} \qquad (1)$$

hvor G er gravitationskonstanten i Newtons gravitationslov. Det følger af Newtons anden lov for en jævn cirkelbevægelse sammen med Newtons teorem, at påvirkningerne fra stoffet i galaksehoben i større afstande fra centrum end r er nul, og at påvirkningen fra stoffet i mindre afstande end r svarer til, at det var samlet i centrum.

Af ligningen ses det, at en vurderet forøgelse af ρ med en faktor 400 må have hængt sammen med en iagttaget forøgelse af v med en faktor $\sqrt{400} = 20$ i forhold til det forventede, hvis det alene var synligt stof, der bevægede galakserne.

Kommentar

Nu om dage er det oprindelige breddekursus på RUC opdelt i to. Fysisk problemløsning I på bachelordelen af fysikstudiet og Fysisk problemløsning II på kandidatdelen. På kandidatdelen stilles der eksamensopgaver i et helt fysikpensum i bredden, på bachelordelen det halve af dette pensum. De tre mekanikopgaver her er fra den samme eksamen på Fysisk problemløsning

I. Ud over de tre mekanikopgaver bestod eksamenssættet af en relativitetsteoriopgave og en hydrodynamik/termodynamikopgave. I alt fem opgaver, hvoraf de studerende skulle besvare fire efter eget valg.

Jeg har valgt at bringe de tre mekanikopgaver fra samme eksamen samlet for at kunne diskutere deres relative sværhedsgrad.

Da min medeksaminator (Tina Hecksher) og jeg bedømte eksamensbesvarelserne, støttede vi os som sædvanligt til point, som vi hver for sig gav for besvarelsen af de enkelte opgaver i hvert opgavesæt, for slutteligt at vurdere besvarelsen af opgavesættet i dets helhed. Lægges både mine og Tinas point ved den pågældende eksamen sammen for alle de studerendes besvarelser, gav vi 48% af det maksimalt opnåelige sammenlagte antal point for besvarelserne af svingningsopgaven, 67% af det maksimalt opnåelige antal point for besvarelserne af opdriftopgaven, og 75% for opgaven om mørkt stof. Procenterne skal ikke tages for mere end en strømpil. Fysikstudiet på RUC er lille (og hyggeligt) med kun 11 studerende til den pågældende eksamen. Og vores måde at give point på er ikke udtryk for eksakt videnskab. Ikke desto mindre er procenterne i overensstemmelse med, hvad man kunne forvente.

Opgaven om mørkt stof er emnemæssigt spændende og interessant, men den mindst udfordrende af de tre opgaver. Newtons anden lov anvendt på jævn cirkelbevægelse er mere eller mindre indarbejdet rutine hos de fleste af de studerende fra mange andre problemløsninger. Det samme gælder til en vis grad anvendelsen af Newtons teorem.

Opgaven om opdrift (som skyldes Poul Winther Andersen) er begrebsmæssigt mere udfordrende. De studerende kender godt Arkimedes' lov. De ved også godt, at der optræder supplerende kræfter i et accelereret referencesystem. Men en ting er at kende og kunne anvende Arkimedes' lov i konkrete situationer. Noget andet er at have fået ind under huden, hvorfor Arkimedes' lov gælder. Og derigennem være klar over, at størrelsen af det resulterende kraftfelt i elevatoren er uden betydning.

At opgaven om den svingende stang var den sværeste, kom som sagt ikke som nogen overraskelse. Det er en kendt sag, at begrebsforståelsen vedrørende det grundlæggende i Newtons mekanik er svær at tilegne sig. Googler man "Force concept inventory", finder man en overvældende kaskade af fysikdidaktisk litteratur fra 1985 og fremefter, som rapporterer undersøgelse efter undersøgelse, der dokumenterer gymnasieelevers og fysikstuderendes mangel på grundlæggende begrebslig forståelse af Newtons mekanik. Eleverne og de studerende kan typisk kun anvende Newtons mekanik i indøvede standardsituationer.

I vores tilfælde havde nogle af de studerende styr på, hvad der sker, når den venstre snor knækker. Men ingen havde et rimeligt bud på, hvad der sker, når den højre snor knækker. Det mest almindelige bud var, at den venstre snor og stangen så svingede ligesom et pendul i et bornholmerur, som om snoren og stangen var stift forbundne. Og det kan ikke lade sig gøre. Kalder vi længden af snoren l_1, længden af stangen l_2, massen af stangen M, vinklen med lodret Θ, og tyngdefeltstyrken g, skal en sådan bevægelse både respektere tyngdepunktssætningen for bevægelsen af stangens massemidtpunkt, og momentsætningen for stang plus snors drejning omkring ophængspunktet i loftet:

$$M(l_1 + l_2/2)\ddot{\Theta} = -Mg\sin\Theta \qquad (2)$$

og

$$M((l_1 + l_2/2)^2 + l_2^2/12)\ddot{\Theta} = -Mg\sin\Theta(l_1 + l_2/2) \qquad (3)$$

For en i praksis masseløs snor, der ikke kan levere en kraft på tværs af sin længderetning, viser de to ligninger, at antagelsen om en svingning ligesom pendulet i et bornholmerur for alle værdier af $\Theta(\neq 0)$ medfører *en modstrid:*

$$M((l_1 + l_2/2)^2 + l_2^2/12) = M(l_1 + l_2/2)^2 \qquad (4)$$

De studerende forsøgte sig typisk med det fysiske pendul som skema for deres overvejelser over, hvad der sker, når den højre snor knækker. Hvorimod de ikke foretog analysen mere grundlæggende ud fra tyngdepunktsætningen og momentsætningen for stive legemer. Hverken kvalitativt eller kvantitativt. Det er heller ikke nemt. Især da ikke kvantitativt. Hvis vi antager snoren stiv og forbundet med stangen med et drejeleje, er der tale om et kaospendul. Og endnu værre er det med en ikke stiv snor, som ikke behøver at være strakt hele tiden. Opgaven var derfor først og fremmest en invitation til at gøre sig kvalitative overvejelser ved hjælp af grundbegreberne i Newtons mekanik for stive legemer.

Hvorfor stille så udfordrende en opgave til eksamen?

Den nævnte kaskade af undersøgelser ved hjælp af "Force concept inventory" viser samstemmende, at studerende typisk bliver stående ved situationsbundne, konkrete forståelsesmåder, så længe de rækker. For at lære dem mere generelle, abstrakte forståelsesmåder er det nødvendigt at udfordre dem med eksempler, hvor den konkrete og situationsbundne forståelse ikke rækker. Da vores undervisning bygger på samlingen af tidligere eksamensopgaver, er der derfor brug for sådanne udfordrende opgaver i samlingen.

Men der er også mere opskriftorienterede opgaver i samlingen. Som den om opdrift, og i højere grad den om mørkt stof.

Breddeopgave 88. Hvilemasse

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen august 2015, nr. 88 i rækken her i Kvant):

En snurretop på en vægt vejer mere, jo hurtigere den snurrer. Hvor hurtigt skal den snurre, for at det kan måles? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Hvilemasse – breddeopgave 88

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø, Roskilde Universitet

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 88 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 88. Hvilemasse

En snurretop på en vægt vejer mere, jo hurtigere den snurrer. Hvor hurtigt skal den snurre, for at det kan måles? Begrund svaret.

Løsning

Ifølge Einsteins $E = mc^2$ ligning er et systems hvilemasse ækvivalent med dets energi i det referencesystem, hvor systemets samlede impuls er nul.

Når snurretoppen ligger stille på vægten, er dens masse $m_0 = E_0/c^2$, hvor c er lyshastigheden og E_0 den indre energi af snurretoppen, når den ikke roterer. Når snurretoppen snurrer, øges dens energi i nul-impulssystemet med $\frac{1}{2}I\omega^2$, hvor I er snurretoppens inertimoment og ω vinkelfrekvensen, den snurrer med. Størrelsesordensmæssigt er forøgelsen lig med $m_0R^2\omega^2$, hvor R angiver snurretoppens udstrækning. Snurretoppens masse er da ifølge masse-energi ækvivalensen:

$$m_\omega \approx (E_0 + m_0R^2\omega^2)/c^2. \tag{1}$$

Den relative vægtforøgelse af snurretoppen, når den snurrer, er derfor:

$$(m_\omega - m_0)/m_0 \approx (R\omega/c)^2. \tag{2}$$

Lad os antage, at vi til måling af vægtforøgelsen, kan finde en vægt, som kan måle med 8 betydende cifre. Så er den mindste vinkelfrekvens, $\omega_{\min}$, hvor der kan måles en vægtforøgelse af snurretoppen:

$$\omega_{\min} \approx 10^{-4}c/R, \tag{3}$$

svarende til $(R\omega_{\min}/c)^2 \approx 10^{-8}$. Med $R = 30$ cm giver det $\omega_{\min} \approx 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$.

Måling af, at snurretoppens vægt forøges, når den snurrer, ser ud til at være noget af en udfordring.

Kommentar

Både i gymnasiet og på universiteterne undervises der i sammenhængen mellem en atomkernes bindingsenergi E_{binding} og kernens massedefekt $m_{\text{defekt}} \equiv (Zm_{\text{p}} + Nm_{\text{n}}) - m_{\text{kerne}}$ (Z er antallet af protoner i kernen, hver med massen m_{p}; N er antallet af neutroner i kernen, hver med massen m_{n}):

$$E_{\text{binding}} = m_{\text{defekt}}c^2 \tag{4}$$

Ligningen udtrykker, at energien, der skal tilføres en hvilende kerne for at splitte den i henholdsvis dens Z og N hvilende protoner og neutroner, er lig med masseforøgelsen herved gange kvadratet på lysets hastighed. Altså at masseændring og energiændring hænger sammen, når en atomkerne splittes ad i sine bestanddele.

Den samlede energi af en bevæget partikel,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

hvor m_0 er partiklens hvilemasse og v dens fart, sammenfattes ofte ved hjælp af den "relativistiske masse" $m = m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ til $E = mc^2$. Da den således definerede relativistiske masse er proportionalitetsfaktoren imellem impuls og hastighed, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, kan begrebet, forstået således, udvides til også at inkludere fotoner og andre partikler uden hvilemasse. Her er $\boldsymbol{p} = E/c^2 \cdot \boldsymbol{c}$, og altså $m = E/c^2$, eller igen $E = mc^2$. Denne ligning bør imidlertid ikke forveksles med Einsteins ækvivalensligning mellem energi og hvilemasse med det samme udseende.

I 1906 beskrev Einstein et tankeeksperiment, hvor en foton udsendes fra den ene endevæg inden i en kasse for siden at blive absorberet i kassens anden endevæg [1]. Kassen står på et glat underlag. Kassen flytter sig derfor, medens fotonen bevæger sig fra den ene endevæg til den anden, idet summen af fotonens og kassens impuls skal være den samme før, under og efter fotonbevægelsen. Men da der ikke har været nogen ydre påvirkning, kan tyngdepunktet af det isolerede system ikke have flyttet sig. Derfor må vi gå ud fra, at der i sammenhæng med fotonens energioverførsel fra den ene endevæg til den anden også har fundet en overførsel af masse sted. Dette kvalitative ræsonnement forudsætter ikke relativitetsteori. Og ved at benytte den i forvejen kendte sammenhæng imellem impuls og energi i elektromagnetisk stråling kunne han med en tilnærmet beregning, igen uden brug af relativitetsteori, finde sammenhængen til at være $E = mc^2$.

Ved vintereksamen 2002 på breddekurset på RUC drejede en af eksamensopgaverne sig om eftervisning af Einsteins regnestykke. Opfølgende skrev jeg en breddeopgaveartikel i Kvant, hvor jeg undrede mig over, at regnestykket ikke kunne gennemføres relativistisk og uden tilnærmelser uden at løbe ind i en modstrid [2]. Kunne den specielle relativitetsteoris måske mest afgørende resultat ikke eftervises eksakt? Hvor lå fejlen? Ulrik I. Uggerhøj (UIU) kom mig til undsætning med en reference, der viste, at der principielt set ikke kan regnes eksakt på Einsteins kasse [3]. Begrebet stift legeme er eksakt set ikke af denne verden. I tilfældet Einsteins kasse kan man således ikke gå ud fra, at bevægelsen af lysafsendelsesvæggen momentant kan forplante sig til bevægelse af den modsatte endevæg. Den anden endevæg kan tidligst registrere, at lyskvantet blev afsendt, når det når frem til den.

Undervejs til denne afklaring havde UIU og jeg en indbyrdes diskussion af Einsteins kasse problem i Kvant [4]. UIU fokuserede i farten på fotonen som massetransportør, og fandt eksakt $E = mc^2$ for sammenhængen imellem fotonens energi og dens "relativistiske masse". Men det vidste vi jo godt i forvejen. Det følger, som vist ovenfor, direkte af definitionen på relativistisk masse. Derimod fokuserede jeg med Einstein på hvilemassen, der slutteligt var blevet flyttet fra den ene væg til den anden. Og jeg opretholdt min påstand om modstrid, indtil UIU's reference og forkastelsen af begrebet stift legeme. Episoden viser, at det er vigtigt at understrege, at Einsteins berømte ligning handler om hvilemasse og ikke om relativistisk masse.

Helt generelt, altså ikke blot i sammenhæng med formel (4) og Einsteins kasse, gælder, at lysets hastighed i anden potens gange massen af et vilkårligt fysisk system i et koordinatsystem, hvori det fysiske systems samlede impuls er nul, er lig med det fysiske systems energi i koordinatsystemet. Det er den generelle betydning af Einsteins ligning $E = mc^2$. Hvilemassen er generelt et mål for energiindholdet i et isoleret system, uanset om der er tale om bindingsenergi, termisk energi, strålingsenergi eller rotationsenergi, hvis systemets samlede impuls er nul.

Selvom $E = mc^2$, forstået generelt, nok er det væsentligste resultat af den specielle relativitetsteori, lever beviset herfor en noget tilbagetrukken rolle i universiteternes indledende undervisning i speciel relativitetsteori. I 1937 i Fysisk Tidsskrift leverer Chr. Møller et bevis [5]. Det bygger på energibevarelse og impulsbevarelse for isolerede fysiske systemer og Lorentztransformationen af impuls og energi mellem et nul-impuls koordinatsystem og et koordinatsystem med konstant hastighed i forhold til det. Beviset behøvede måske ikke at være uden for rækkevidde ved den indledende universitetsundervisning.

Måske skyldes tilbageholdenheden med at levere bevis for masse-energi-ækvivalensen for alle energiformer, at beviset oprindeligt var forbundet med fødselsveer? Omfanget af masse-energi ækvivalensen stod først klart i 1908, selvom Einsteins første artikel om den specielle relativitetsteori er fra 1905. Så sent som i 1937 blev det i en artikel i Fysisk Tidsskrift, med inspiration fra slagsmålet om "arisk fysik" kontra "jødisk fysik" blandt fysikere i nazitidens Tyskland, forsøgt at skabe usikkerhed om sagen. Chr. Møllers artikel i det samme nummer af Fysisk Tidsskrift var et svar herpå.

Modsat den almindelige tilbageholdenhed forholder det sig for Eugene Hecht [6]. Han advokerer i en nylig artikel for, at det svært definerbare energibegreb i fysik, som udgangspunkt for undervisning bør forstås som hvileenergi, $E_0 = mc^2$, og bevægelsesenergi. Punktum. I stedet for at være tøvende over for tolkningen af masse som hvileenergi generelt. Det mener han, vil skabe begrebslig klarhed. Og det skal der til:

"Clearly, we have been able to successfully do physics without being overly careful about defining the foundational basics, but teaching physics without conceptual rigor is a different matter."

Selvom jeg synes, at Eugene Hecht i sin artikel giver et godt overblik over energibegrebets historie både i fysik og i fysikundervisning, deler jeg ikke det citerede synspunkt, at undervisning, til forskel fra forskning, kræver præcist definerede begreber. Tværtimod vil jeg advare imod synspunktet.

Hverken forskning eller læring i en undervisningssituation foregår som aksiomatisk deduktive processer. Begreber udvikles og udbygges ved erfaring med deres brug i forskellige slags sammenhænge. Jo flere forskellige slags erfarede sammenhænge et begreb har vist sig produktivt i, des dybere forstås begrebet. Begreber udvikles i høj grad induktivt.

Vi har ikke undervist i det generelle bevis for $E = mc^2$ på breddekurset. I forhold hertil er opgaven om snurretoppens hvilemasse ment som en introduktion. Først når dette og andre eksempler på anvendelsen af $E = mc^2$ er forstået og erfaret, er vejen banet for den deduktivt sammenfattende forståelse af $E = mc^2$, fx gennem Chr. Møllers bevis. Først når det forstås, hvad det er, der skal bevises, kan beviset forstås.

Breddeopgave 89. Varmehjælp til naboen.

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2015, nr. 89 i rækken her i Kvant):

I et dobbelthus, bestående af to ens sammenbyggede huse ved siden af hinanden, er det ene hus i en periode ubeboet, med lukkede radiatorer. Alene ved samtidigt at måle temperaturerne, dels udendørs, dels indendørs i hvert af de to huse, kan det udregnes, hvor stor en del af varmeforbruget i det dobbelte hus, der går til opvarmning af det ubeboede hus. Hvordan?

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] A. Einstein (1906) Das Prinzip von Erhaltung der Scherpunktsbewegung und die Trägheit der Energie, *Annalen der Physik bind*. bind **20**, side 627.

[2] J.H. Jensen (2004) Opgavehjørnet – Relativistisk tyngdepunktsflytning, *Kvant*, bind **15**, nr. 4, side 28–30.

[3] A.P. French (1968) Special Relativity, M. I. T Introductory Physics Series, side 27.

[4] U.I. Uggerhøj (2005) Relativistisk tyngdepunktsforskydning, og J.H. Jensen (2005) Svar til Ulrik I. Uggerhøj, *Kvant*, bind **16**, nr. 2, side 23–25.

[5] C. Møller (1937) Sætningen om Massens og Energiens Ækvivalens, *Fysisk Tidsskrift*, bind **35**, side 59–71.

[6] E. Hecht (2019): Understanding energy as a subtle concept: A model for teaching and learning energy, *Am. J. Phys.*, bind **87**, side 495–503.

Varmehjælp til naboen
– breddeopgave 89 med didaktisk kommentar

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 89 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 89. Varmehjælp til naboen

I et dobbelthus, bestående af to ens sammenbyggede huse ved siden af hinanden, er det ene hus i en periode ubeboet med lukkede radiatorer. Alene ved samtidigt at måle temperaturerne, dels udendørs, dels indendørs i hvert af de to huse, kan det udregnes, hvor stor en del af varmeforbruget i det dobbelte hus, der går til opvarmning af det ubeboede hus. Hvordan?

Løsning

Vi kalder varmen leveret per tid af radiatorerne i det beboede hus for W. I en stationær situation modsvares den af summen af varmeafgivelsen per tid gennem væggene mellem dette hus og henholdsvis det ubeboede nabohus og de udendørs omgivelser:

$$W = K_i(T_b - T_u) + K_y(T_b - T_0). \tag{1}$$

Her er T_b og T_u temperaturerne indendørs i henholdsvis det beboede hus og det ubeboede hus, og T_0 er udendørstemperaturen i de to huses omgivelser. Konstanten K_i afhænger af arealet og isoleringen af den indre væg mellem de to huse, medens konstanten K_y afhænger af arealet og isoleringen af ydervæggen for det beboede hus.

Ser vi herefter på det ubeboede hus, kommer dets varmeforsyning per tid gennem væggen til det beboede hus. I en stationær situation modsvares den af varmeafgivelsen per tid fra dette hus til omgivelserne:

$$K_i(T_b - T_u) = K_y(T_u - T_0). \tag{2}$$

Da det ubeboede hus og det beboede hus er ens konstrueret, er konstanten K_y den samme som den, der optræder i ligning (1).

Andelen a af varmeforbruget i det dobbelte hus, der går til opvarmning af det ubeboede hus, fås da ved indsættelse af (2) i (1):

$$a = \frac{K_i(T_b - T_u)}{W} = \frac{K_y(T_u - T_0)}{K_y(T_u - T_0) + K_y(T_b - T_0)}. \tag{3}$$

Ved bortforkortning af K_y har vi altså:

$$a = \frac{(T_u - T_0)}{(T_u - T_0) + (T_b - T_0)}, \tag{4}$$

der viser, at a kan findes alene ved at måle de tre temperaturer.

Kommentar

Det fundne resultat i ligning (4) er ikke overraskende, hvis der fokuseres på varmetabene til omgivelserne fra det ubeboede hus i forhold til varmetabet til omgivelserne fra de to huse tilsammen. På grund af energibevarelse for det ubeboede hus, henholdsvis de to huse tilsammen, er dette forhold i en stationær situation det samme som forholdet mellem varmetilførslen til det ubeboede hus og fra radiatorerne til de to huse tilsammen. Både varmetabene til omgivelserne fra det ubeboede hus og varmetabet til omgivelserne fra de to huse tilsammen er proportionale med K_y. Forholdet imellem dem ses derfor umiddelbart at være givet ved ligning (4). Omvejen via K_i i ovenstående løsning af opgaven var derfor unødvendig.

Hvorfor da nævne omvejen? Jeg selv fulgte i første omgang omvejen, da jeg først løste opgaven. Først da jeg kendte formel (4), fik jeg øje på genvejen. Det er imidlertid ikke derfor, at jeg anfører omvejen; det er, fordi omvejen kontra genvejen for mig illustrerer forskellige slags tænkemåder i fysik, som jeg også har mødt i opgangen i etageejendommen, hvor jeg bor.

På et tidspunkt opererede vi med natlukning af varmen til hele opgangen. Ifølge termometret i min stue medførte det, at forskellen mellem indendørstemperaturen og udendørstemperaturen faldt ca. 10% i løbet af nattens 8 timer, for derefter i løbet af de næste 8 timer at stige til udgangspunktet. Det betyder, at varmeafgivelsen ud af ydervæggene formindskedes med ca. $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot$ (8 timer/24 timer) $\cdot 10\% \approx 3\%$, hvilket efter min mening var for lidt i forhold til besvær og ulemper. Men mine medbeboere i opgangen var ikke nemme at overbevise af mit overslag, som de tvivlede på rigtigheden af. Derimod følte de sig sikre på, at der blev sparet, når der blev lukket for det varme vand til radiatorerne om natten. Og de tænkte tilsyneladende, at min 3% vurdering var noget fysiker-fortænkthed. Kontrol af varmeforbruget ved varme-indgangen var nemmere at acceptere end kontrol af varmeforbruget ved varme-udgangen.

Jeg tænker, at der er tale om et forholdsvist enkelt eksempel på forskellen mellem det, Martin Niss og jeg[1] har kaldt nomologiske kontra kausale ræsonnementer i fysik. Ved en nomologisk forklaring af et fænomen (ordet nomos er fra græsk og betyder regel eller lov) består forklaringen i at redegøre for, hvordan fænomenet er udtryk for gennemsætningen af et overordnet mønster eller en overordnet lovmæssighed under de foreliggende omstændigheder. Ved en kausal forklaring af et fænomen (ordet kausal er fra latin og betyder årsagsbestemt) består forklaringen i at redegøre for, hvad i de foreliggende omstændigheder, der forårsager fænomenet.

Mine medbeboere i opgangen tænkte på kausal vis på lukning og åbning af varmen ved varmekilden, hvorimod jeg på nomologisk vis via brug af energibevarelse flyttede fokus til varmedrænet ud gennem ydermurene. I min ovenstående opgavebesvarelse startede jeg med at tænke kausalt. Først kommer varmen ud af radiatorerne i det beboede hus, så går en del af varmestrømmen herfra ud gennem husets ydervægge og en anden del herfra ind i det ubeboede hus (ligning (1)). I det ubeboede hus strømmer varmen herefter ud af dets ydervægge (ligning (2)). Men jeg kunne også, som nævnt, have tænkt nomologisk, ved fra begyndelsen at flytte fokus til de to huses ydervægge, uden at indføre mellemregninger med K_i.

Det forekom sværere for både mine medbeboere i min opgang og mig at ræsonnere nomologisk fremfor at ræsonnere kausalt. For de fleste forekommer nomologiske forklaringer i det hele taget mere abstrakte end kausale forklaringer. Og derfor vanskeligere at forstå. Skal man da forsøge at undgå dem i fysikundervisning? Nej, det synes jeg ikke. Dels er der fænomener, der ikke lader sig forklare andet end nomologisk. Dels, fordi netop demonstrationen af nomologiske forklaringer er et tilbud, som specielt faget fysik er særlig leveringsdygtigt i. Det er, frem for andre fag, først og fremmest i fysik, at der kan sættes fokus på, at det at forstå ikke kun er et spørgsmål om at kende til mekanismer, men også at indse lovbundetheder. Og den indsigt har betydning for såvel elevers og studerendes kognitive udvikling, som for deres omverdensforståelse og deres selvforståelse. Og når fysikere fx undertiden har held til at medvirke ved udviklingen af ikke blot ingeniørfag, men også fag som biologi og økonomi, skyldes det formentlig netop træning i at trække pointer ud af komplekse sammenhænge ved at abstrahere til enklere og kendte matematiske mønstre. Der er således grunde til at fastholde, at universitetsundervisning i fysik udover at introducere de studerende til fagets emner i høj grad også handler om at lære dem at "tænke som fysikere".

Men det er vigtigt, at såvel fysikunderviserne som deres elever eller studerende er opmærksomme på, at det måske også netop er de nomologiske forklaringer, der gør fysik til et svært fag.

Breddeopgave 90. Gammakvant i tyngdefelt

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave til breddekurset på RUC (fra den indledende samling af opgaver til kurset, nr. 90 i rækken her i Kvant):

Ved forsøg med emission af γ-kvanter fra kerner og påfølgende absorption i kerner af samme slags er der konstateret forskellige resultater, når henholdsvis kilde og absorber befinder sig lodret over hinanden, og når de befinder sig i samme vandrette plan. Forklar dette forhold.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

[1] En nyere artikel herom fra vores hånd er "Nomological Versus Causal Reasoning When Learning Physics", som kan findes ved at google "IMFUFA tekster" og gå til tekst 511, side 168. Se også Kvant, bind 16, nr. 2, side 21 (maj 2005).

Gammakvant i tyngdefelt
– breddeopgave 90 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 90 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 90. Gammakvant i tyngdefelt

Ved forsøg med emission af γ-kvanter fra kerner og påfølgende absorption i kerner af samme slags er der konstateret forskellige resultater, når henholdsvis kilde og absorber befinder sig lodret over hinanden, og når de befinder sig i samme vandrette plan. Forklar dette forhold. Begrund svaret.

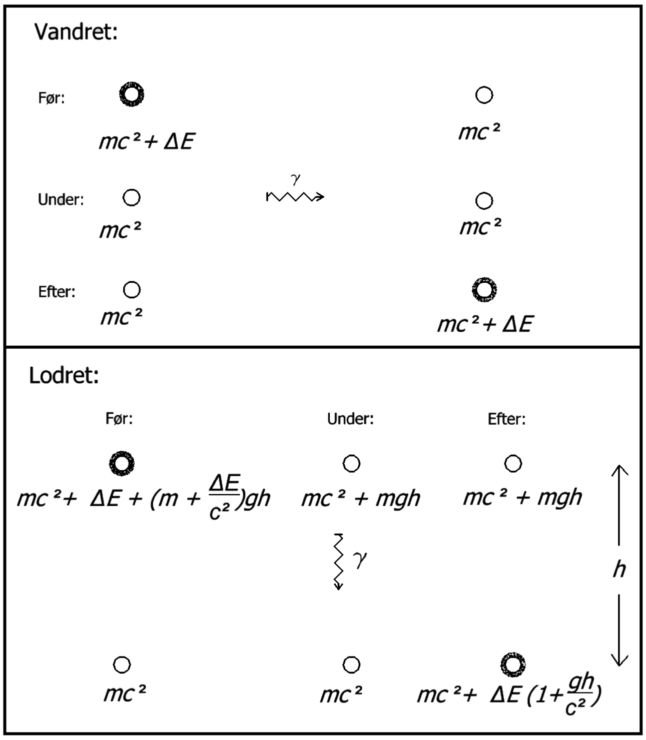
Løsning

Figur 1 opsummerer overførsel af energi fra en anslået kerne til en kerne i grundtilstanden via et γ-kvant, når henholdsvis kilde og absorber befinder sig i samme vandrette plan eller lodret over hinanden. Det er antaget, at overførslen kan ske rekylfrit uden tilførsel af kinetisk energi til kernerne ved hverken emissionen eller absorptionen af γ-kvantet. Det svarer til at antage kernernes hvilemasse i grundtilstanden, m, for meget stor. I det følgende står c for lysets hastighed, ΔE for anslagsenergien af den anslåede kerne, g for tyngdefeltstyrken, og h for afstanden imellem kilde og absorber i det lodrette tilfælde.

I det vandrette tilfælde betyder energibevarelsen, når vi ser bort fra rekyl, at den absorberende kerne bliver bragt i den anslåede tilstand, den emitterende kerne havde. I det lodrette tilfælde er sagen mere kompliceret. Da de anslåede kerner har hvilemassen $m + \Delta E/c^2$ ifølge ækvivalensen imellem hvilemasse og hvileenergi, er den potentielle energi i det lodrette tilfælde $(m+\Delta E/c^2)gh$ i forhold til absorberens position. Efter udsendelsen af γ-kvantet har kernen den potentielle energi mgh. Energibevarelsen fra før udsendelsen af γ-kvantet til efter absorptionen af kvantet fører da til, at den anslåede absorberende kerne har fået forøget sin energi med $\Delta E(1 + gh/c^2)$ i kontrast til ΔE i det vandrette tilfælde af rekylfri resonansabsorption. Hvis ellers absorptionen kan finde sted.

Kommentar

At komme på den ide, at resonansabsorptionen kunne ske rekylfrit, er ikke trivielt. Det var det, Rudolf Mössbauer realiserede i en vandret opstilling i 1958 og fik 1961-Nobelprisen i fysik for. Mössbauer-effekten er grundlæggende et kvantemekanisk fænomen. En emitterende kerne vil før emissionen af γ-kvantet ifølge usikkerhedsrelationen have sin impuls p_f sandsynlighedsfordelt omkring $p_f = 0$ med spredningen $\Delta p = \hbar/2\Delta x$, hvis kernen kun kan bevæge sig inden for et begrænset område, Δx, som det er tilfældet i kondenseret stof. $\hbar$ er Plancks konstant divideret med 2π. Efter udsendelsen af γ-kvantet fra kernen, vil dens impuls p_e være sandsynlighedsfordelt med samme spredning, men, på grund af impulsbevarelsen, nu omkring $p_e = -p_\gamma$. Alligevel vil der være en rimelig sandsynlighed for, at emissionen sker rekylfrit, svarende til $p_e = p_f$, hvis $\Delta p/p_\gamma$ er et stort nok tal.



Figur 1. Vandret og lodret rekylfri kerneresonansabsorption.

På samme måde, som der er en vis sandsynlighed for rekylfri emission, er der tilsvarende en vis sandsynlighed for rekylfri absorption. Derfor kan Mössbauereffektens rekylfri resonansabsorption finde sted.

Et år efter Mössbauers opdagelse blev effekten brugt af Pound og Rebka til at eftervise, at fotoner vinder energi ved fald på 22,5 m i Jordens tyngdefelt [1,2].

Det er denne eftervisning, som figur 1 og opgaven egentlig handler om. Ifølge figuren skal den absorberende kerne på grund af antagelsen om rekylfrihed og energibevarelse under processen absorbere energien $\Delta E(1+gh/c^2)$. Hvorimod den emitterende kerne afgav energien ΔE. Fra emission til absorption er γ-kvantets energi derfor øget med $\Delta Egh/c^2$. Den relative energiøgning er altså gh/c^2. Den relative øgning af γ-kvantets frekvens ν er tilsvarende givet ved $\Delta\nu/\nu = gh/c^2$. Da energiniveauerne i den absorberende kerne er diskrete, kan absorptionen i figur 1 ikke umiddelbart finde sted. Absorptionen kræver en tilpasning af γ-kvantets energi til ΔE. Til det formål udnytter Mössbauers set-up Doppler-skiftet af frekvensen ved bevægelse af den absorberende kerne i forhold til den emitterende med varierende fart. Absorptionen fandt da sted ved farten u, givet ved

$$\frac{u}{c} \approx \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{c^2}. \tag{1}$$

Herved blev det bekræftet, at fotoner øger deres energi relativt med gh/c^2, når de falder afstanden h i Jordens tyngdefelt.

Læg mærke til, at formlen ikke blev udledt ud fra den generelle relativitetsteori, som den normalt tages som en konfirmering af. Udledningen benytter energibevarelse, newtonsk mekanik og ækvivalensen mellem hvilemasse og hvileenergi udledt fra den specielle relativitetsteori. Ved eksperimentelt at vise, at fotoner accelereres i et tyngdefelt, foregriber Pound og Rebka logisk set den generelle relativitetsteori. Men teorien er altså ikke tvingende for at forklare eksperimentet. Modsat den berømte måling af lysets bøjning omkring Solen ved solformørkelsen i 1919. Her var der en faktor 2 til forskel mellem en newtonsk beregning på fotoner tillagt træg og tung masse svarende til deres energi og den generelle relativitetsteoris beregning, hvor der også må tages hensyn til rummets krumning.

Opgaven er ikke en sædvanlig breddeopgave. Den bevæger sig ud over breddekursets nuværende pensum.

I almindelighed lægger vi vægt på overensstemmelse mellem eksamensopgaver og undervisningsopgaver i en grad, så undervisningen som det vigtigste bygger på tidligere eksamensopgaver. I megen undervisning kan det være et problem, som det hedder på engelsk, at "the matter meant, the matter taught, the matter learnt, and the matter assessed" ikke hænger tæt nok sammen. Vores måde at sikre sammenhængen imellem kursets formål, undervisningen, de studerendes læring, og vurderingen heraf ved eksamen, er da den radikale; at lade formålet styre udarbejdelsen af eksamensopgaverne og lade undervisningen fra starten basere sig på tidligere eksamensopgaver, så de studerende derved fra starten samtidigt kan orientere sig mod eksamen og formålet med kurset. Opskriften er ikke uden problemer. Den er som at lære nogen at svømme ved at skubbe dem i vandet. Og det kræver opmærksomhed på de studerendes ve og vel. Herunder at vi overholder overensstemmelsen mellem karakteren af de opgaver, der arbejdes med i undervisningen, og karakteren af eksamensopgaverne.

Med opgaven her, der ikke har været stillet som eksamensopgave, men alligevel benyttes i undervisningen, har vi ikke kunnet stå for fristelsen til at give udsyn til noget, der ikke er eksamenspensum. Men det er undtagelsesvist, at vi i undervisningen arbejder med opgaver, der ikke har eller kunne have været stillet til eksamen.

Breddeopgave 91 og 92. Benzinforbrug og covid-smitte

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne overveje løsningen til disse opgaver til breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2011 og eksamen januar 2021, nr. 91 og 92 i rækken her i Kvant):

Hvordan afhænger benzinforbruget og CO_2-*udledningen ved bilkørsel per kørt kilometer af hastigheden, der køres med? Begrund svaret.*

I lukkede rum er der fare for at blive smittet med coronavirus, selvom der holdes afstand, hvis ikke der luftes ud. Det skyldes, at mikrodråber (aerosoler) af virussen hænger i længere tid i luften, og derfor kan bevæges længere rundt, end de større dråber, som undgås ved at holde afstand. Hvordan afhænger den tid, som mikrodråberne hænger i luften, af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] R. V. Pound og G. A. Rebka (1959) "Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance", *Phys.Rev.Lett.*, bind **3**, side 439–441.

[2] R. V. Pound og G. A. Rebka (1960) "Apparent weight of photons", *Phys.Rev.Lett.*, bind **4**, side 337–341.

Benzinforbrug og covidsmitte
– breddeopgave 91 og 92 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var:

Breddeopgave 91 og 92. Benzinforbrug og covidsmitte

Hvordan afhænger benzinforbruget og CO_2-udledningen ved bilkørsel per kørt kilometer af hastigheden, der køres med? Begrund svaret.

I lukkede rum er der fare for at blive smittet med coronavirus, selvom der holdes afstand, hvis ikke der luftes ud. Det skyldes, at mikrodråber (aerosoler) af virussen hænger i længere tid i luften, og derfor kan bevæges længere rundt, end de større dråber, som undgås ved at holde afstand. Hvordan afhænger den tid, som mikrodråberne hænger i luften, af deres størrelse? Begrund svaret.

Løsning

91. Energien fra forbrænding af benzin i en bils benzinmotor går til spildvarme og arbejde, som motoren udfører på bilens hjul. Benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer afhænger af det leverede arbejde af bilens motor per kørt kilometer. Når bilen har kørt et stykke vej, er dette arbejde det samme som gnidningskraften fra vejen på bilens dæk gange længden af stykket. Antager vi, at benzinmotorens nyttevirkning er uafhængig af bilens hastighed, er benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer derfor proportional med størrelsen af gnidningskraften mellem vej og dæk.

Ved almindelig bilkørsel med konstant hastighed på vandret vej er gnidningskraften fra vejen på bilens dæk og luftmodstanden imod bilens bevægelse modsatrettede og lige store. På grund af størrelsen af biler og størrelsen af typiske kørehastigheder vil vi antage, at energioverførslen til luften omkring en bil via luftmodstanden umiddelbart sker i form af et hvirvlende kølvand i luften, altså at arbejdet leveret af bilens motor omsættes til makroskopisk kinetisk energi i luften. I så tilfælde spiller luftens viskositet kun en rolle for, hvor hurtigt hvirvlerne, efter de er dannet, siden nedbrydes til varme, og ikke for størrelsen af energien i luften og derved luftmodstanden. Udover af bilens størrelse r og dens hastighed v afhænger luftmodstanden da kun af luftens massefylde ρ. Af dimensionsgrunde er luftmodstanden, og dermed gnidningskraften mellem vej og dæk, så givet ved en talfaktor gange $\rho r^2 v^2$. Gnidningskraften mellem vej og dæk, og dermed benzinforbruget og CO_2-udledningen per kørt kilometer, er derfor proportionale med kørehastigheden kvadreret.

92. Ser vi på et lodret fald af en dråbe, vil dens hastighed stige, indtil luftmodstanden imod dråbens bevægelse er vokset til at være lige så stor som den modsatrettede tyngdekraft på dråben. For en mikrodråbe sker det hurtigt, hvorefter dråben vil bevæge sig med en konstant hastighed bestemt af, at luftmodstand og tyngdekraft ophæver hinanden. Da dråben er meget lille, antager vi, at luftmodstanden imod dens fald hænger sammen med, at dens gradvise tab af potentiel energi går til varmeudvikling i laminar strømning omkring den. Luftmodstanden skyldes gnidning i luften. Det makroskopiske strømningsmønster omkring dråben er konstant det samme. Vi antager derfor, at luftmodstanden udover af dråbens størrelse r og dens faldhastighed v er bestemt af luftens viskositet η og ikke afhænger af luftens massefylde. Af dimensionsgrunde er luftmodstanden da givet ved en talfaktor gange $\eta r v$. Med talfaktoren 6π (i overensstemmelse med Stokes lov for en kugleformet dråbe), m for en dråbes masse, og g for tyngdefeltstyrken, er balanceligningen mellem luftmodstanden og tyngdekraften på en dråbe da:

$$6\pi\eta r v = mg. \tag{1}$$

Mikrodråberne består i det væsentlige af vand med massefylden ρ_v, således at $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v$. Altså har vi

$$v = \frac{2}{9} r^2 \rho_v \frac{g}{\eta} \tag{2}$$

for en dråbes faldhastighed. Tiden τ, som dråben er om at falde højden h, er derfor:

$$\tau = \frac{9\eta h}{2r^2 \rho_v g} \tag{3}$$

Svaret på opgaven er altså, at tiden, som det tager mikrodråber at falde til jorden, er omvendt proportional med dråbernes størrelse kvadreret.

Kommentar

På RUC er halvdelen af studietiden optaget af projektarbejde. Mængden af obligatorisk kursuspensum er begrænset. Fx er der ikke på fysikuddannelsen afsat tid til et kursus specielt i hydrodynamik/aerodynamik. Emnet behandles, hvis ikke det tages op i et projektarbejde eller et tilvalgskursus, alene som en mindre del af de to kurser i fysisk problemløsning (breddekurset). I alt med sammenlagt 8 skematimer. Vi giver ikke nogen matematikbåren introduktion svarende til traditionen. I stedet introducerer vi mere kvalitativt til emnet med fokus på ved dimensionsanalyse at løse problemer, som de to ovenstående [1].

Om luften strømmer jævnt og laminart eller hvirvlende og turbulent omkring en genstand i en luftstrøm må i almindelighed afhænge af luftens massefylde ρ, luftens viskositet η, genstandens størrelse r, genstandens form, og den relative hastighed v imellem genstanden og luftstrømmen. Luftmodstanden må således umiddelbart være en funktion af de 4 størrelser ρ, η, r og v, udover dimensionsløse størrelser til karakterisering af genstandens form. Imidlertid viser dimensionsanalyse, at strømningsmåden kan karakteriseres alene ved genstandens form og værdien af det dimensionsløse *Reynoldstal*:

$$Re = \rho r v / \eta. \tag{4}$$

For en given form behøver man derfor ikke måle luftmodstanden som funktion af ρ, η, r og v efter tur og i en uoverskuelig mængde indbyrdes kombinationer. I stedet kan man nøjes med at måle luftmodstanden for forskelligt formede genstande som funktion alene af Reynoldstallet. Erfaringen viser da, at luften strømmer jævnt og laminart omkring en kugle, hvis størrelsesordenen af Reynoldstallet er mindre end 1. Og helt hvirvlende og turbulent omkring ikke specielt strømlinede genstande, hvis størrelsesordenen af Reynoldstal er større end 10^6. Stemmer disse erfaringer med de to forskellige antagelser om strømningsmønstre ved løsningen af de to opgaver?

Med værdierne $0{,}66 \cdot 10^5$ s/m^2 for ρ/η af luft ved stuetemperatur, $r = 1$ m og $v = 100$ km/time = 28 m/s, fås $Re = 2 \cdot 10^6$ vedrørende opgaven om benzinforbrug og CO_2-udledning ved bilkørsel. Altså en retfærdiggørelse af antagelsen om, at luftmodstanden imod bilen skyldes, at arbejdet, bilmotoren udfører, hænger sammen med den skabte energi i et hvirvlende og turbulent kølvand i luften efter bilen frem for umiddelbar gnidningsopvarmning af luften.

Indsættes værdierne $r = 0{,}005$ mm, $\rho_v = 1$ g/cm$^3 = 10^3$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2, og $\eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}$ kg/(m·s) for viskositeten af luft ved stuetemperatur, i formel (2), fås $v = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s for faldhastigheden i luft af en 0,005 mm stor mikrodråbe. Det betyder, at et fald på 2 m tager $\tau \approx 10$ minutter. Medens en 5 gange mindre dråbe, jævnfør ligning (3), vil holde sig svævende 25 gange længere tid, dvs. omkring 4 timer. Hvorimod en 5 gange større dråbe vil holde sig svævende omkring et halvt minut. Til sammenligning er $\tau = \sqrt{2h/g} = \sqrt{2 \cdot 2/10}$ s = 0,6 s for faldtiden ved store dråbers frie fald. Den traditionelle skæring for, hvad der regnes for mikrodråber, er $r < 0{,}005$ mm. Altså svarende til, at dråberne hænger i luften i længere tid end netop 10 minutter.

Med værdierne $0{,}66 \cdot 10^5$ s/m^2 for ρ/η af luft ved stuetemperatur, $r = 0{,}005$ mm, og den fundne faldhastighed $v = 3 \cdot 10^{-3}$ m/s, fås $Re = 10^{-3}$ vedrørende covidsmitte-opgaven. Antagelsen om, at luftstrømningen omkring en mikrodråbe er laminar, svarende til, at luftmodstanden hænger sammen med den gradvise overførsel af dråbens potentielle energi til gnidningsvarme i luften, og ikke til makroskopisk kinetisk energi i luften, kan altså også godtages.

Da de studerende, ud over papir og kuglepen, til eksamen som hjælpemiddel kun må medbringe et A4-ark beskrevet på begge sider efter eget valg, havde de ikke ved eksamen mulighed for at foretage disse kontroller af rimeligheden af grundantagelserne om strømningsmønstrene i de to tilfælde. De har måttet bero mere intuitivt på erfaringer fra lignende problemløsninger, og de blev bedømt herefter.

Hvordan skal man angribe problemer med Reynoldstal, der ikke er i ydergrænserne $Re < 1$ og $Re > 10^6$? Det er et emne, der beskæftiger mange, da det er vanskeligt at overskue, fordi den grundlæggende differentialligning er ulineær. Men det bør ikke skygge for, at mange situationer kan forstås simpelt, når Reynoldstallet befinder sig i en af ydergrænserne.

Ved små Reynoldstal kan der undertiden gennemføres matematisk analytiske beregninger, som fx udregningen af Stokes? lov for modstanden imod bevægelsen af en kugle, jf. ligning (1). I almindelighed er matematisk analytiske beregninger af luftmodstand komplicerede for genstande med andre former. Dimensionsanalyse viser da under alle omstændigheder, at luftmodstanden er givet ved en ukendt talfaktor gange $\eta \rho r$. Heraf følger fx opgavesvaret, at faldtiden for mikrodråberne er omvendt proportional med deres størrelse i anden potens. Men den ukendte talfaktor skal kendes, hvis udfordringen er at finde en nøjagtig kvantitativ værdi af faldtiden for en dråbe. Dog kan dimensionsanalytisk udledte resultater være til hjælp ved vurdering af størrelsesordener, da de ukendte talfaktorer i fysiske formler størrelsesordensmæssigt normalt ligger i intervallet mellem 10^{-1} og 10. En afvigelse af mikrodråbernes form fra at være kugleformede svarende til talfaktoren 6π i ligning (1) ændrer ikke afgørende ved den ovenstående vurdering af den størrelsesordensmæssige konsistens mellem laminar strømning og størrelsen af Reynoldstallet.

Der er ikke tradition i lærebogslitteraturen for ingeniører og fysikere for at begrunde hastighedskvadratisk luftmodstand ved store Reynoldstal ved hjælp af dimensionsanalyse. I betragtning af, at hastighedskvadratisk luftmodstand i praksis er hyppigt forekommende, kunne det ellers være på sin plads. Luftmodstanden anskues traditionelt som funktion af Reynoldstallet, hvori både ρ og η indgår. Hvordan da antage, at luftmodstanden er uafhængig af η som udgangspunkt for dimensionsanalysen ved store Reynoldstal? Hvis der ingen gnidning var i luften, svarende til $\eta = 0$, er der slet ingen luftmodstand ifølge d'Alemberts paradoks. Hvordan da sætte η lig med nul ved en dimensionsanalyseudregning af luftmodstanden ved store Reynoldstal? Svaret er, at det er nødvendigt at regne med gnidning i luften i grænselag ved overflader, som luften bevæger sig i forhold til. Det er gnidningen her, der skaber hvirvlerne i det turbulente kølvand efter en bevæget genstand. Men ved tilstrækkeligt store Reynoldstal er det ikke størrelsen af luftens viskositet, der afgør kølvandets udseende. Viskositetens betydning er analog til den statiske gnidningskoefficient ved ren rulning. Den statiske gnidningskoefficient skal ikke have nogen bestemt værdi, værdien skal blot være stor nok til, at ren rulning kan lade sig gøre. Størrelsen af den statiske gnidningskoefficient indgår ikke i formler for den rent rullende bevægelse, så længe bevægelsen forbliver rent rullende. Tilsvarende skal viskositeten ikke have nogen bestemt værdi for dannelsen af det hvirvlende kølvand, værdien skal blot være stor nok til, at det dannes. Kølvandet er ved store Reynoldstal for ikke for strømlinede genstande bestemt af genstandens størrelse og form, uafhængigt af størrelsen af η. Og da afhænger kølvandets makroskopiske kinetiske energi ikke af både η og ρ, men kun af ρ.

Breddeopgave 93. Bølgemodstand

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave til breddekurset på RUC (fra eksamen februar 2020, nr. 93 i rækken her i Kvant):

Et overfladeskib, der sejler med jævn hastighed på dybt vand, danner bølger. Den del af modstanden imod skibets bevægelse, der skyldes bølgedannelsen, kaldes bølgemodstanden. For at finde bølgemodstanden ved modelforsøg i en prøvetank skal det såkaldte Froudetal være det samme ved modelforsøget, som ved den modellerede sejlads. Hvad er formlen for Froudetallet? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] J. H. Jensen (2013) "Introducing fluid dynamics using dimensional analysis", *Am. J. Phys.*, bind **81**, side 688-694.

Bølgemodstand
- breddeopgave 93 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgaver. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 93 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 93. Bølgemodstand

Et overfladeskib, der sejler med jævn hastighed på dybt vand, danner bølger. Den del af modstanden imod skibets bevægelse, der skyldes bølgedannelsen, kaldes bølgemodstanden. For at finde bølgemodstanden ved modelforsøg i en prøvetank skal det såkaldte Froude tal være det samme ved modelforsøget som ved den modellerede sejlads. Hvad er formlen for Froude tallet? Begrund svaret.

Løsning

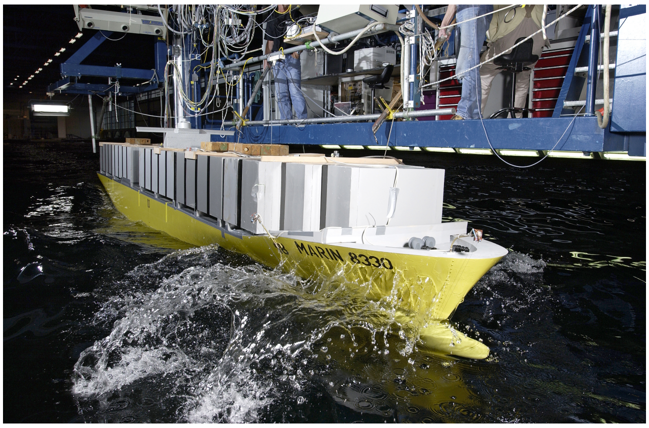
Bølgemønstret omkring skibet afhænger af dets hastighed v. Og det afhænger af formen og størrelsen af delen af skibet under vandlinjen, som kan beskrives ved en karakteristisk længde l, sammen med en række vinkler og størrelsesforhold, altså sammen med en række dimensionsløse størrelser.

Da bølgerne er tyngdebølger, altså vandbevægelser i tyngdefeltet, afhænger bølgemønstret også af tyngdefeltstyrken g. På en anden planet vil bølgemønstret være et andet, alt andet lige, hvis et sådant findes. Det er umiddelbart mindre tænkeligt, at bølgemønstret afhænger af vandets massefylde ρ, da størrelsen af masser normalt ikke har betydning for deres bevægelser i tyngdefelter. Den går ud i beregningen af bevægelser. Men størrelsen af masser har naturligvis betydning for både deres kinetiske og potentielle energi i tyngdefelterne. Da bølgemodstandskraften gange skibets hastighed er lig med det arbejde per tid, som skibets motorer skal levere for at modvirke bølgemodstanden, der igen er lig med den producerede bølgeenergi per tid, må vi derfor, ud over v, l og g, også inddrage ρ som bestemmende inputstørrelse i en bølgemodstandsformel. Derimod har størrelsen af viskositeten af væsken, der sejles i, først og fremmest betydning for, hvor hurtigt kølvandet dør ud, og ikke for dets dannelse. Alt i alt må vi gå ud fra, at bølgemodstanden K, afhænger af form, v, l, g og ρ.

Vi søger derfor en formel for bølgemodstanden med udseendet:

$$K = k \cdot v^{\alpha} \cdot l^{\beta} \cdot g^{\gamma} \cdot \rho^{\delta}, \qquad (1)$$

hvor eksponenterne skal vælges således, at dimensionen på begge sider af lighedstegnet er den samme, og hvor k i almindelighed er et dimensionsløst tal eller en dimensionsløs funktion af dimensionsløse størrelser eller dimensionsløse kombinationer af de indgående inputstørrelser.



Figur 1. Model af containerskibet Emma Mærsk under test i en prøvetank.

K er en kraft med dimensionen M L T^{-2}. Derfor skal produktet i ligning (1) også have denne dimension udtrykt ved basisdimensionerne: masse M, længde L og tid T. Da basisdimensionerne ikke kan afledes fra hinanden, skal ligning (1) dimensionsmæssigt stemme overens for hver basisdimension for sig:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}: \quad 1 &= \delta & (2)\\ \mathrm{L}: \quad 1 &= \alpha + \beta + \gamma - 3\delta & (3)\\ \mathrm{T}: -2 &= -\alpha - 2\gamma. & (4) \end{aligned}$$

Ligning (4) er opfyldt for $\gamma = 1 - \alpha/2$. Indsat i ligning (3) sammen med $\delta = 1$ er denne opfyldt for $\beta = 3 - \alpha/2$. Alle formler af formen:

$$K = k \cdot v^{\alpha} \cdot l^{3-\alpha/2} \cdot g^{1-\alpha/2} \cdot \rho = k \left(\frac{v}{\sqrt{lg}})\right)^{\alpha} \rho l^3 g \quad (5)$$

lever derfor op til kravet om samme dimension på begge sider af lighedstegnet i ligning (1). Det gælder for alle værdier af α (3 ligninger med 4 ubekendte). Og også for alle linearkombinationer af led med forskellige værdier af α, da $v/\sqrt{lg}$ er dimensionsløs. Sammenfattende er bølgemodstanden derfor givet ved:

$$K = f_1(\mathrm{form}, F_r) \cdot \rho l^3 g, \qquad (6)$$

hvor f_1 er en ukendt funktion af formen af skibsdelen under vandlinjen og af den dimensionsløse størrelse $F_r = v/\sqrt{lg}$, det såkaldte Froude tal.

Hvis man ved et modelforsøg med en prøvetank, på Jorden og med vand i, benytter samme form under vandlinjen og samme værdi af F_r som ved den sejlads, der ønskes modelleret, og dermed samme værdi af funktionen f_1 som ved sejladsen, viser ligning (6), at bølgemodstanden ved den fremtidige sejlads, K_s, er givet ved:

$$K_s = K_m \cdot (l_s/l_m)^3, \tag{7}$$

hvor K_m er bølgemodstanden målt ved modelforsøget og l_s og l_m den valgte karakteristiske længde for henholdsvis skib og skibsmodel. Svaret på opgaven er således, at $F_r = v/\sqrt{lg}$ ved modelforsøget skal have samme størrelse i prøvetanken som ved den modellerede sejlads. Hvis skibsmodellens lineære udstrækning er 100 gange mindre end skibets, gælder resultatet i formel (7) altså for det tilfælde, hvor skibets fart er 10 gange større end skibsmodellens fart.

Kommentarer

1. Ligningerne (2), (3) og (4) kan også bruges til at udtrykke α og β som funktioner af γ i stedet for γ og β som funktioner af α, som gjort ovenfor. Så fører dimensionsanalysen til formlen:

$$K = f_2(\text{form}, lg/v^2) \cdot \rho l^2 v^2 \tag{8}$$

i stedet for udtrykket for K i ligning (6). Forskellen mellem udtrykkene er imidlertid kun tilsyneladende. Da $F_r = v/\sqrt{lg}$, er fastholdelse af F_r, og dermed funktionsværdien af f_1, ensbetydende med fastholdelse af lg/v^2 og med det funktionsværdien af f_2. Og resultatet $K_s = K_m \cdot (l_s^2 v_s^2)/(l_m^2 v_m^2)$, afledt af ligning (8), er identisk med ligning (7), når $l_s g/v_s^2 = l_m g/v_m^2$. Hvis ligningerne (2), (3) og (4) bruges til at finde α og γ som funktioner af β, fører det på tilsvarende måde igen til ligning (7).

2. Når jeg forsøger at bidrage til markedsføringen af dimensionsanalyse som et vigtigt tænkeværktøj for fysikere m.fl., bliver jeg undertiden spurgt, om et udtryk af en art som ligning (1) er repræsentativt for alle formler. Kan der ikke optræde summer af led med samme dimension i fysiske formler? Jo, lad os antage, at der i en fysisk formel indgår en linearkombination $aA + bB$ af de to led A og B med samme dimension. Det kan imidlertid omskrives til $aA(1 + bB/aA)$, hvor parentesen er dimensionsløs. Den kan derfor medregnes til k i formler som ligning (1). Så udtryk som ligning (1) *er* repræsentative. De dækker alle mulige formler, hvor symbolerne ikke repræsenterer tal, men fysiske størrelser med tilhørende krav om dimensionsmæssig homogenitet.

3. Måden, som jeg har valgt at vise løsningen af opgaven på, er, samtidigt med at være en løsning, også ment som en illustration af dimensionsanalyse. En kortere og mere indforstået løsning er: Blandt de dimensionsbærende inputvariable v, l, g og ρ, er det kun ρ, der har massedimension. Derfor må bølgemodstanden (en kraft) være proportional med ρ. Bølgemodstanden må altså være lig med ρ gange en funktion af v, l og g. Da disse kan kombineres til den dimensionsløse størrelse v^2/lg må der i denne funktion indgå en faktor, der på ukendt måde afhænger af $v^2/lg(= F_r^2)$, som derfor skal have samme værdi for skibet og for skibsmodellen.

4. Der findes betydeligt nemmere dimensionsanalytiske udfordringer end opgaven her. Men også da er det min erfaring, at mine studerende er pænt udfordret. Ikke så meget på grund af det algebraiske som på grund af vanskeligheden ved at identificere de styrende input variable på højre side af ligningen, der skal indgå i formlen til beregning af outputvariablen på venstre side. Altså i tilfældet her, at opstille ligning (1). Det er et ret almindeligt udsagn, at det er man først i stand til, når man ved, hvad resultatet skal blive. Men det mener jeg, er et helt forkert synspunkt. Det er rigtigt, at valget af inputvariable kræver fysisk forhåndsforståelse. Det kan man imidlertid sige om alle opgaveudfordringer, hvis ikke opgaverne først og fremmest inviterer til reproduktion af standardrutiner. I stedet for at mene, at man først skal have lært sig fysik på anden vis for at kunne magte dimensionsanalytiske argumenter, er arbejde med dimensionsanalyse, efter min mening, et meget velegnet middel til at tilegne sig dybere forståelser. Ved arbejdet med at udvælge de styrende inputvariable tvinges man netop til at orientere sig imod det essentielle i fænomenerne [1].

Breddeopgave 94. Brandslange

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra samlingen af træningsopgaver fra opstarten af breddekurset i 1975, nr. 94 i rækken her i Kvant):

En brandslange er ført om et hushjørne. Der står en brandmand på hver side af hjørnet. Når vandet strømmer i slangen, skal brandmændene bruge kræfter for at undgå, at den retter sig ud. Hvor mange kræfter skal de bruge? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] Se fx J.H. Jensen (2013) Introducing fluid dynamics using dimensional analysis, *Am. J. Phys.*, bind **81**, side 688–694.

Brandslange
- breddeopgave 94 med didaktisk kommentar

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

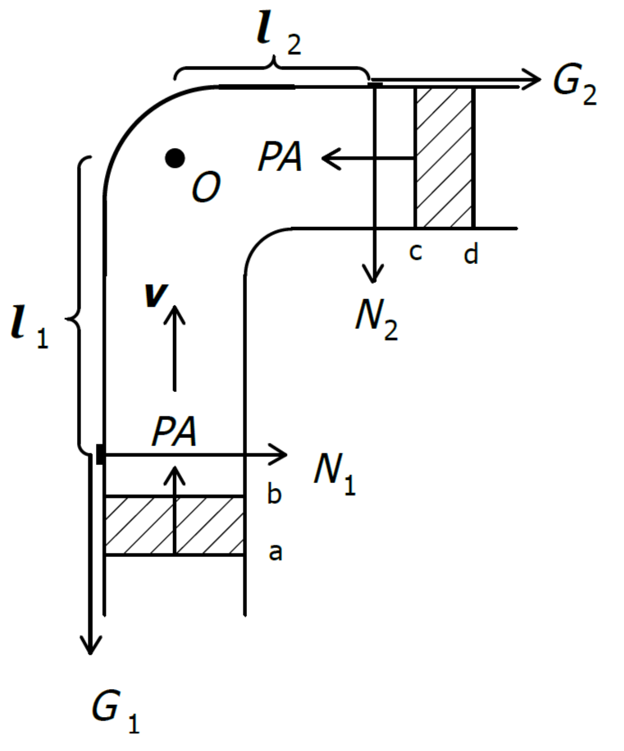
Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 94 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 94. Brandslange

En brandslange er ført om et hushjørne. Der står en brandmand på hver side af hjørnet. Når vandet strømmer i slangen, skal brandmændene bruge kræfter for at undgå, at den retter sig ud. Hvor mange kræfter skal de bruge? Begrund svaret.

Løsning



Figur 1. Brandslange om hushjørne set fra oven.

Hvis de to brandmænd står lige langt fra hjørnet kan slangen holdes på plads alene af figurens to normalkræfter N_1 og N_2. Vi vil anvende mekanikkens bevægelseslove på det afgrænsede system, der består af den markerede vandmængde, der på et tidspunkt befinder sig mellem a og c på figuren, og brandslangen, som antages fri, bortset fra brandmændenes greb i den. Tidsrummet dt senere befinder den markerede vandmængde sig mellem b og d, hvorimod slangen ikke har flyttet sig. Kaldes vands massefylde ρ, tværsnittet af brandslangen A og vandets strømningshastighed i slangen v, mindskes volumenet af venstre del af den markerede vandmængde på figuren i tidsrummet dt med $Avdt$. I samme tidsrum øges volumenet af den øvre del af den markerede vandmængde på figuren med $Avdt$. Den tilsvarende masseforskydning er $\rho Avdt$. Vores afgrænsede vandmængde henholdsvis mister og øger derfor impulsen ρAv^2 per tid i de to retninger. Ud over kræfterne fra de to brandmænd leverer trykket P fra det omgivende vand kraften PA på vores afgrænsede system i de to retninger, som vist på figuren. Projektionerne i figurens to retninger af Newtons anden lov anvendt på systemet, giver da alt i alt

$$N_1 = \rho Av^2 + PA \qquad (1)$$
$$N_2 = \rho Av^2 + PA \qquad (2)$$

som svar på opgaven.

At de to brandmænd skal bruge lige mange kræfter, betyder, når de står lige langt fra hjørnet, at det kraftmoment om punktet O på figuren, de tilsammen leverer på vores afgrænsede vandmængde, er nul. Da trykkræfterne fra det omgivende vand heller ikke leverer noget kraftmoment om O, er det i overensstemmelse med, at den afgrænsede vandmængdes impulsmoment om O er konstant nul.

Kommentar

Brandslange-opgaven er en af de 68 træningsopgaver fra opstarten af "Breddekurset" i 1975 forud for den første eksamen i det i 1976. Jeg tænker, at det var specialtilfældet med en glat brandslange og de to brandmænd placeret i samme afstand fra hjørnet, svarende til ovenstående "løsning", som vi i skyndingen har haft i tankerne. Men brandmænd er dårligt stillede ved kun at få anvist denne særlige måde at bruge kræfterne på.

En normal brandslange vil være ru, så brandmændene ud over normalkræfterne N_1 og N_2 også kan påvirke brandslangen med de viste statiske gnidningskræfter G_1 og G_2 på figuren. Så er de mulige størrelser af de involverede kræfter ifølge den klassiske mekanik, jf figuren, generelt båndlagt af ligningerne:

$$N_1 + G_2 = \rho Av^2 + PA \qquad (3)$$

$$N_2 + G_1 = \rho A v^2 + PA \quad (4)$$
$$l_1 N_1 = l_2 N_2 \quad (5)$$

Generelt båndlægger den klassiske mekanik altså brandmændenes muligheder for at undgå, at slangen retter sig ud, til at være løsninger for de fire ubekendte N_1, N_2, G_1 og G_2 til de tre ligninger (3), (4) og (5).

Antages, som i ovenstående løsning af opgaven, $l_1 = l_2$, så er, jf ligning (5), $N_1 = N_2$, og følgelig, jf (3) og (4), $G_1 = G_2$. Ligningerne kan så sammenfattes til den ene: $N + G = \rho A v^2 + PA$, med de to ubekendte N og G. Det viser, at brandmændene, hvis den statiske gnidningskoefficient er tilstrækkelig stor, lige så vel kan holde slangen på plads med $N = 0$, som med $G = 0$. Eller en vilkårlig, men ens for de to brandmænd, kombination af N og G med værdien $\rho A v^2 + PA$ sammenlagt.

Antages slangen at være olieret og glat, hvor den ene brandmand griber fat, således at fx $G_1 = 0$, har ligningssystemet for vilkårlige værdier af l_1 og l_2 den entydige løsning

$$\begin{aligned} N_2 &= \rho A v^2 + PA & (6)\\ N_1 &= (l_2/l_1)(\rho A v^2 + PA) & (7)\\ G_2 &= (1 - l_2/l_1)(\rho A v^2 + PA). & (8) \end{aligned}$$

Antages $G_1 = G_2 = 0$, fås $N_1 = N_2$ ifølge (3) og (4) og $N_1 = (l_2/l_1)N_2$ ifølge (5). Altså en modstrid, medmindre $l_2 = l_1$. Da en sådan betingelse kan være svær at opfylde i farten, må der således advares imod for glatte brandslanger.

I almindelighed vil måden, de fire kræfter N_1, N_2, G_1 og G_2 opfylder ligningerne (3), (4) og (5) på, være bestemt af, hvordan brandmændene greb fat om brandslangen til en start. I kommentaren til breddeopgave 63, "Bræt imod væg" (Kvant 2015, nr. 1), diskuterede jeg tilfældet, hvor væggen, som brættet er stillet skråt opad, ikke er glat. I modsætning til det ofte forekommende regnestykke i lærebøgerne i fysik, hvor væggen antages glat. Problemet, at finde de virkende kræfter på brættet, når væggen ikke er glat, men ru, er, ligesom her i brandslangetilfældet, underbestemt, klassisk mekanisk set. Hvorimod den noget søgte antagelse om glatte vægge i lærebøgerne giver et entydigt svar. Og det er jo nok grunden til antagelsen.

Videnskabsfilosoffen Kuhn mener, at teoretisk normalvidenskab opererer efter en devise, der med min spidsformulering kunne lyde: Svar haves. Spørgsmål søges. I modsætning til mere praktiske videnskabers: Spørgsmål haves. Svar søges. Hvor teoretisk normalvidenskab ligner manden, der leder efter den tabte gadedørsnøgle under gadelygten, fordi der her er lys, ikke fordi han tabte den der. Hvorimod praktisk orienteret videnskab mere føler sig frem i mørket, hvor nøglen blev tabt. Der er forskel på teoretisk normalvidenskabs teoretiske problemer og praktisk orienteret videnskabs praktiske problemer. Derfor skal der fx mere til at kunne udøve ingeniørvidenskab end fx at kunne anvende fysik. Men alligevel kan fysik, i kraft af teoretisk overblik, undertiden være til praktisk nytte. Det er således tilfældet her, hvor "svaret" klassisk mekanik sætter fokus på spørgsmålet: Hvor ru skal brandslanger være, for at undgå, at de smutter fra brandmændene, når der lukkes op for vandet?

Som det fremgår, er det med tiden gået op for os, at brandslange-opgaven ville have været for krævende som eksamensopgave. Men vi bruger den i undervisningen.

Breddeopgave 95. Rutherford spredning

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2021, nr. 95 i rækken her i Kvant):

En α-partikel skydes, som vist på figuren, ind i nærheden af en tung atomkerne. Find ved en dimensionsanalyse den dimensionsløse størrelse, der bestemmer vinklen mellem retningerne, som α-partiklen bevæger sig i, før og efter afbøjningen ved passagen af atomkernen.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.