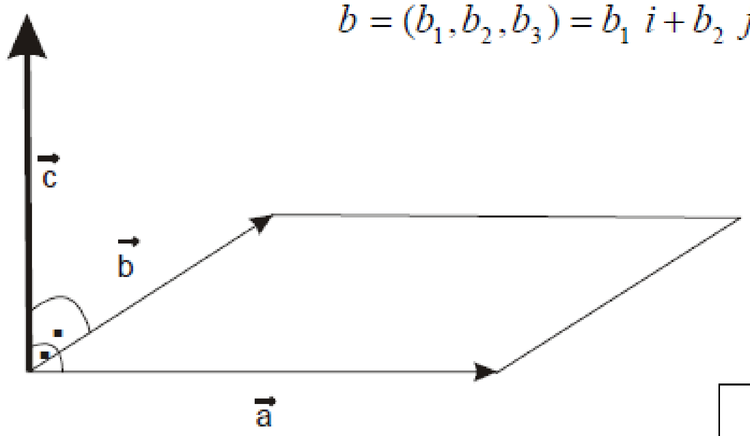
VEKTORSKI I MEŠOVITI PROIZVOD

Neka su dati vektori

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$



$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}}$$

Pazi: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

Ako su vektori zadati intenzitetom, pravcem i smerom, njihov vektorski proizvod je moguće odrediti primenom sledećih pravila:

1. Intenzitet vektorskog proizvoda određuje se formulom:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \sin\alpha,$$

2. Pravac vektorskog proizvoda normalan je na pravce oba činioca, odnosno, normalan je na ravan koju određuju ti vektori.
3. Smer vektorskog proizvoda se određuje pravilom desne ruke (desne zavojnice): ako se savijeni prsti desne ruke postave tako da pokazuju od prvog vektora u proizvodu (u ovom slučaju $\vec{a}$) ka drugom (u ovom slučaju $\vec{b}$), onda odvojeni palac pokazuje smer vektorskog proizvoda.

Vektorski proizvod ima sledeće osobine koje ga, pored tipa rezultata, razlikuju od skalarnog proizvoda:

1. Vektorski proizvod je antikomutativna operacija, odnosno, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, što je posledica činjenice da je $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$.
2. Vektorski proizvod je jednak nuli kada su vektori paralelni, jer je $\sin(0^0) = 0$, a najveću vrednost ima kada su vektori uzajamno normalni, jer je $\sin(90^0) = 1$.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako je njihov vektorski proizvod jednak $\vec{0}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ = razvijemo ovu determinantu i (na primer) dobijemo $= \#\vec{i} + \$\vec{j} + \&\vec{k}$ gde su

#, $, & neki brojevi.

Tada je $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{\#^2 + \$^2 + \&^2}$

Površina paralelograma nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Dok površinu trougla računamo (logično) kao polovinu površine paralelograma:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

PRIMER 1

Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima:

$$\vec{a} = (1,1,-1) \quad \text{i} \quad \vec{b}\,(2,-1,2)$$

Rešenje: $P = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ Najpre tražimo $\vec{a} \times \vec{b}$.

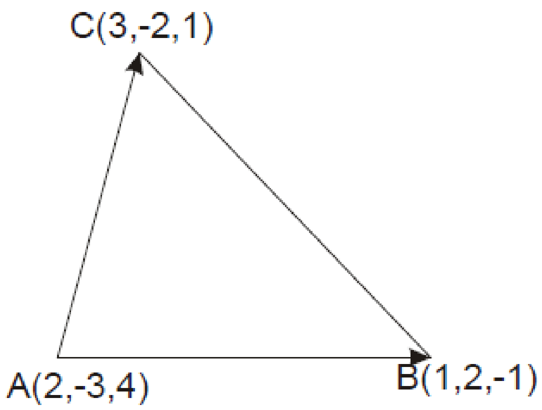
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2\text{-}1) - \vec{j}\,(2\text{+}2) + \vec{k}\,(\text{-}1\text{-}2) = 1\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 3\,\vec{k} = (1, -4, -3)$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \quad \text{dakle } P = \sqrt{26}$$

PRIMER 2

Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena: A(2, -3, 4), B(1,2,-1), C(3,-2,1)

Rešenje: Najpre oformimo vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AB} = (1-2,\ 2-(-3),\ -1-4) = (-1,5,-5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-2,\ -2-(-3),\ 1-4) = (1,1,-3)$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\,\vec{i} - 8\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-10)^2+(-8)^2+(-6)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$P_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \frac{1}{2}\ 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ i evo rešenja!

PRIMER 3

Pokazati da je $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$, *odnosno da je skalarni proizvod nekog vektora sa bilo kojim njegovim vektorskim proizvodom jednak nuli.*

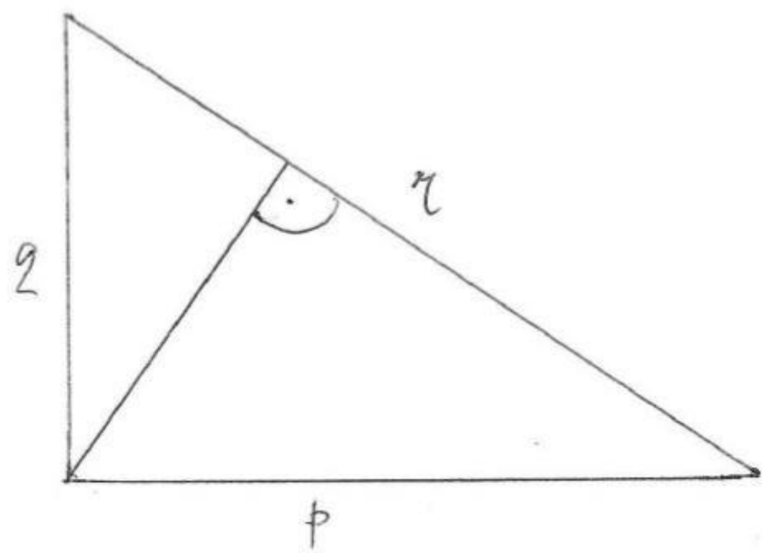
Rešenje:

Dokaz je jednostavan. Posmatrajmo proizvoljni vektor $\vec{a}$. Bilo koji vektorski proizvod tog vektora $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ je normalan na svoje činioce, pa prema tome, i na sam vektor $\vec{a}$, tj. $\vec{c}\perp\vec{a}$. Skalarni proizvod dva uzajamno normalna vektora je jednak nuli, pa je, dakle, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$, što je trebalo dokazati.

PRIMER 4

Dve stranice trougla su $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ i $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, gde su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ normalni ortovi. Izračunati visinu prema trećoj stranici trougla.

$$\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}\,;\ \vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$$
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$$
$$\vec{a}\perp\vec{b}$$



$$P=\frac{1}{2}|\vec{p}\times\vec{q}|=\frac{1}{2}\left|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|2(\vec{a}\times\vec{a})-8(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{b}\times\vec{a})-12(\vec{b}\times\vec{b})\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|-8(\vec{a}\times\vec{b})+3(\vec{b}\times\vec{a})\right|=\frac{1}{2}\left|-11(\vec{a}\times\vec{b})\right|=\frac{1}{2}*11|\vec{a}\times\vec{b}|$$
$$=\frac{11}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})=\frac{11}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{p} - \vec{q} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} + 4\vec{b} = \vec{a} + 7\vec{b}$$

$$\vec{r}^2 = \left(\vec{a} + 7\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 + 49\left|\vec{b}\right|^2 + 14|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| = 1 + 49 = 50$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$P = \frac{r * h}{2}$$

$$\frac{11}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}h$$

$$h = \frac{11}{5\sqrt{2}}$$

MEŠOVITI PROIZVOD

Mešoviti proizvod je $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$. Najčešće se obeležava sa $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$. Dakle : $(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$

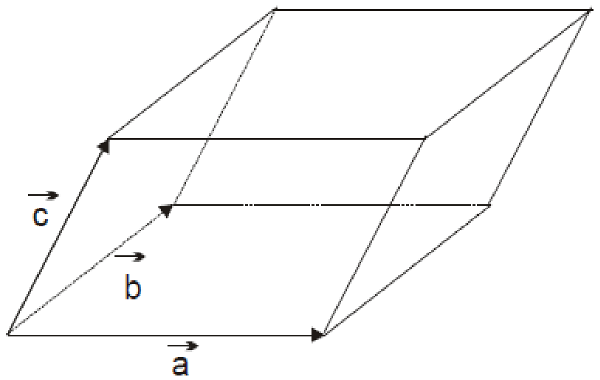
Kako se on izračunava?

Ako su vektori zadati sa: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ onda je:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

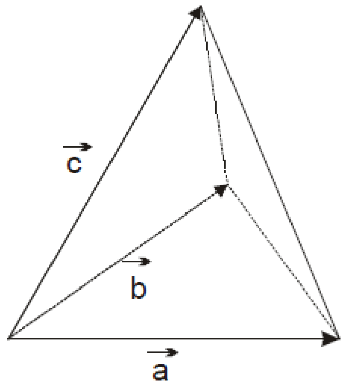
ČEMU SLUŽI MEŠOVITI PROIZVOD?

i) Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad njima, to jest : $V(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right|$



ii) Zapremina trostrane piramide (tetraedra) konstruisane nad nekomplanarnim vektorima a,b,c,je:

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right|$$



Napomena: Često se u zadacima traži visina H neke piramide. Nju ćemo naći tako što najpre nađemo zapreminu preko formule $\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, zatim nadjemo bazu B=$\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ pa to zamenimo u H = $\frac{3V}{B}$.

iii) Uslov komplanarnosti

Vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

Dakle uslov komplanarnosti je : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

PRIMER 5

Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima: $\vec{a}(0,1,1), \vec{b}(1,0,1), \vec{c}(1,1,0)$

Rešenje:

$$V(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\text{upotrebimo Sarusovo pravilo} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} =$$

$(0 + 1 + 1) - (0+0+0) = 2$

Dakle : V = 2

PRIMER 6

Dati su vektori $\vec{a}(\ln(p-2),-2,6), \vec{b}(p,-2,5), \vec{c}(0,-1,3)$ **. Odrediti realan broj p , tako da vektori budu komplanarni.**

Rešenje:

Kao što rekosmo, uslov komplanarnosti je : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$, pa je

$\begin{vmatrix} \ln(p-2) & -2 & 6 \\ p & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ = razvijemo je po prvoj koloni...= ln(p-2)[-6+5] – p [-6+6] = - ln(p-2)

Mora biti - ln(p-2) = 0

p – 2 = 1, pa je p = 3 traženo rešenje.

PRIMER 7

Dati su vektori $\vec{a}(1,1,-1), \vec{b}(-2,-1,2), \vec{c}(1,-1,2)$

Rastaviti vektor $\vec{c}$ **po pravcima vektora** $\vec{a}, \vec{b}$ **i** $\vec{a} \times \vec{b}$

Rešenje: Najpre ćemo naći $\vec{a} \times \vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ = Razvijamo po prvoj vrsti...= 1 $\vec{i}$ - 0 $\vec{j}$ + 1 $\vec{k}$ = (1,0,1)

Postavimo sada razlaganje:

$\vec{c} = m\,\vec{a} + n\,\vec{b} + p\,(\vec{a} \times \vec{b})$, gde su m,n i p konstante koje moramo naći.

(1,-1,2) = m (1,1,-1) + n (-2,-1,2) + p (1,0,1)   prelazimo u sistem jednačina:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1m - 2n + 1p \\ -1 = 1m - 1n + 0p \\ 2 = -1m + 2n + 1p \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} m - 2n + p = 1 \\ m - n \qquad = -1 \\ -m + 2n + p = 2 \end{array}$$

saberemo prvu i treću...pa je $p=\frac{3}{2}$

Vratimo $p = \frac{3}{2}$ u ostale dve jednačine i dobijamo : $m = -\frac{3}{2}$ i $n = -\frac{1}{2}$

Vratimo se sada u :

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\,(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\,\vec{a} - \frac{1}{2}\,\vec{b} + \frac{3}{2}\,(\vec{a}\times\vec{b})$$ je konačno rešenje

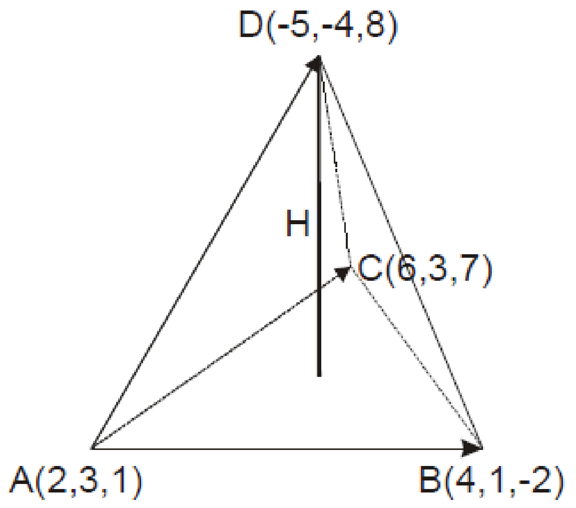
PRIMER 8

Data su temena tetraedra A (2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7) i D(-5,-4,8).

Odrediti zapreminu tetraedra i dužinu visine spuštene iz temena D na stranu ABC.

Rešenje:

Najpre nacrtamo sliku i postavimo problem:



Oformimo najpre vektore $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = (4\text{-}2, 1\text{-}3, \text{-}2\text{-}1) = (2, \text{-}2, \text{-}3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (6\text{-}2, 3\text{-}3, 7\text{-}1) = (4, 0, 6)$$

$$\overrightarrow{AD} = (\text{-}5\text{-}2, \text{-}4\text{-}3, 8\text{-}1) = (\text{-}7, \text{-}7, 7)$$

Možemo naći zapreminu tetraedra po formuli:

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{308}{6}$$

Dalje tražimo površinu baze ABC : $\quad B = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\,\vec{i} + 24\,\vec{j} + 8\,\vec{k} = (-12, 24, 8)$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + 24^2 + 8^2} = 14$$

Iskoristićemo da je $H = \dfrac{3V}{B}$.

$$H = \frac{3\,\frac{308}{6}}{14} = 11$$

Dakle, tražena visina je $H = 11$

Napomena :

Ako vam traže neku drugu visinu, recimo iz temena C, postupak je analogan.

Nađete zapreminu, zatim bazu preko $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ i zamenite u $\mathrm{H} = \frac{3V}{B}$.

ZADACI ZA VEŽBANJE
Stojanović: 564-610
Vene: 512-578