Hydrostatika

Hydrostatika

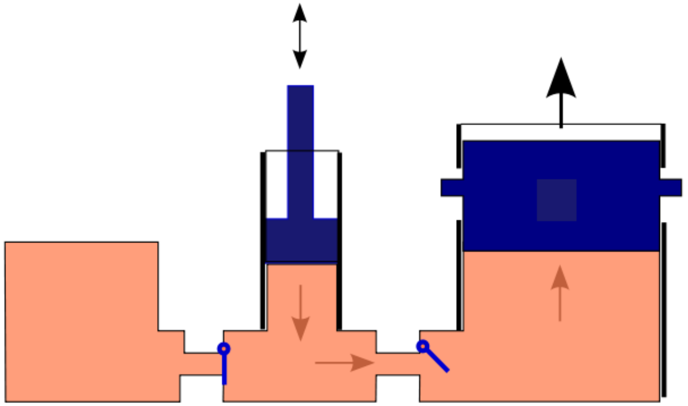
Hydrostatika se zabývá chováním tekutin, které se vzhledem k ohraničujícímu prostoru nepohybují

- objem tekutiny bude v klidu, pokud výslednice objemových a plošných sil, které zde působí, bude rovna nule

Předmětem hydrostatiky je především výpočet tlaků a tlakových sil na plochy a tělesa.

Do hydrostatiky patří také případy relativního klidu

- hydraulický lis
- kapaliny v pohybující se nádobě



Síly působící na kapalinu

Síly působící na makroskopickou částici tekutiny

Hmotnostní (objemové)
- závisí na hmotnosti částice
- působí v těžišti objemu

tíhová síla

odstředivá síla

setrvačná síla

Plošné
- závisí na velikosti plochy

tlaková síla

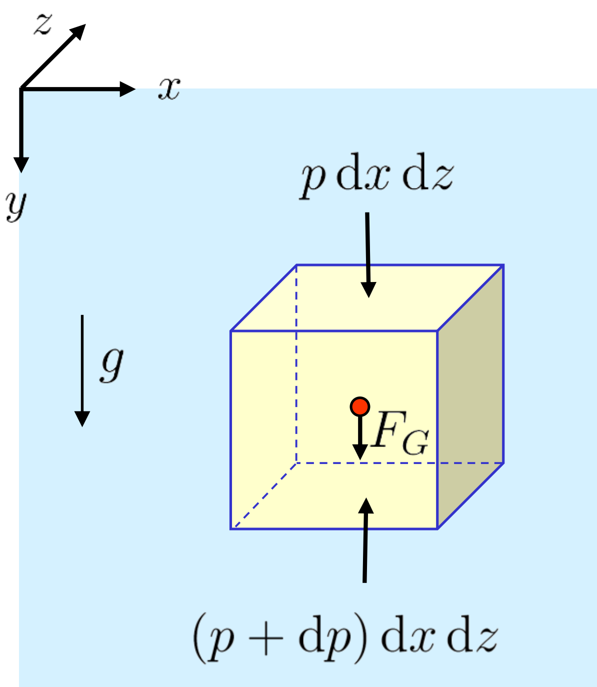
třecí (viskózní) síla

síly povrchového napětí

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_M = \mathbf{a}\,\rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_S = p\,\mathrm{d}\mathbf{A}$$

Rovnováha sil v tekutině v klidu



Rovnováha sil

$$p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \rho\,g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (p+\mathrm{d}p)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

Přírustek tlaku $\mathrm{d}p$ v tekutině o hustotě ρ v místě, jehož hloubka je vyšší o $\mathrm{d}y$

$$\mathrm{d}p = \rho\,g\,\mathrm{d}\,y$$

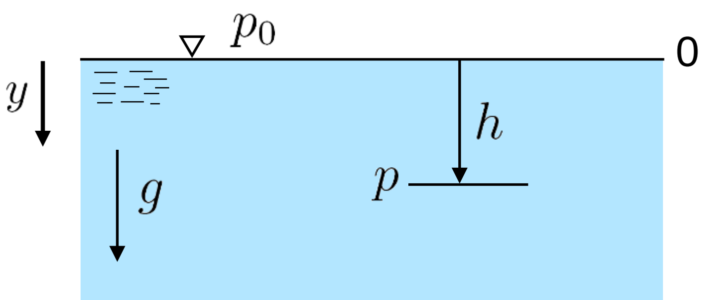
Tlak: $F_p = p\,\mathrm{d}A$

Tíha: $F_G = \rho\,g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Hydrostatický tlak

Kapaliny

$\rho =$ konst.



$$\mathrm{d}p = \rho\, g\, \mathrm{d}\, y$$

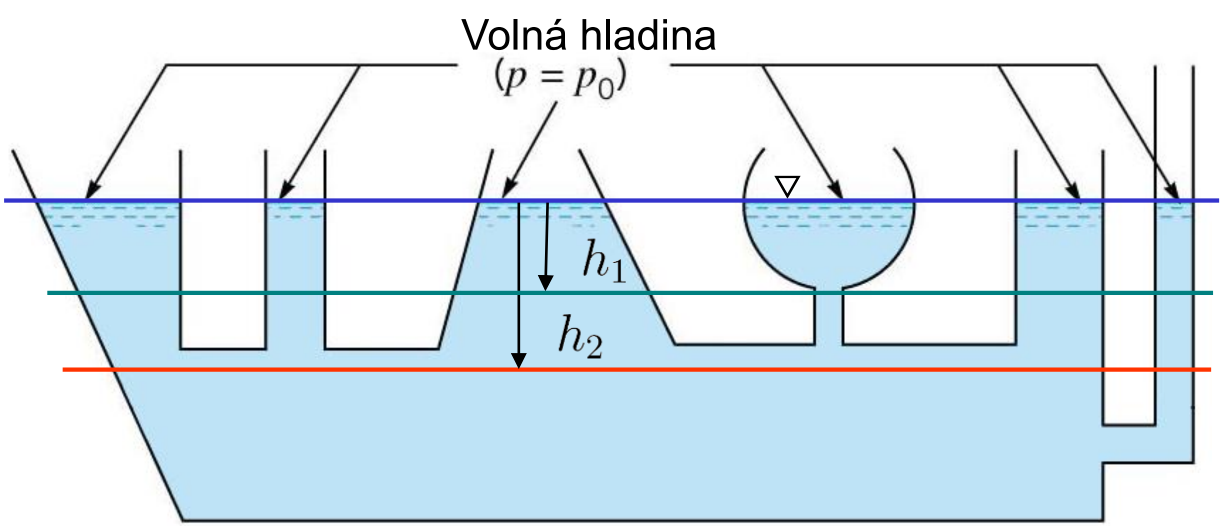
$$\int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p = \int_0^h \rho\, g\, \mathrm{d}y \longrightarrow$$

Hydrostatický tlak

$$\boxed{p = p_0 + h\, \rho\, g}$$

Tlak v kapalině, která je v rovnovážném stavu, roste s rostoucí hloubkou a je závislý na hustotě kapaliny.

Hydrostatický tlak nezávisí na tvaru a průřezu nádoby, ve které je kapalina, ale pouze na výšce sloupce kapaliny nad místem, kde tlak určujeme, a na hustotě kapaliny.
= **hydrostatické paradoxon**



čáry konstantního tlaku

p_0

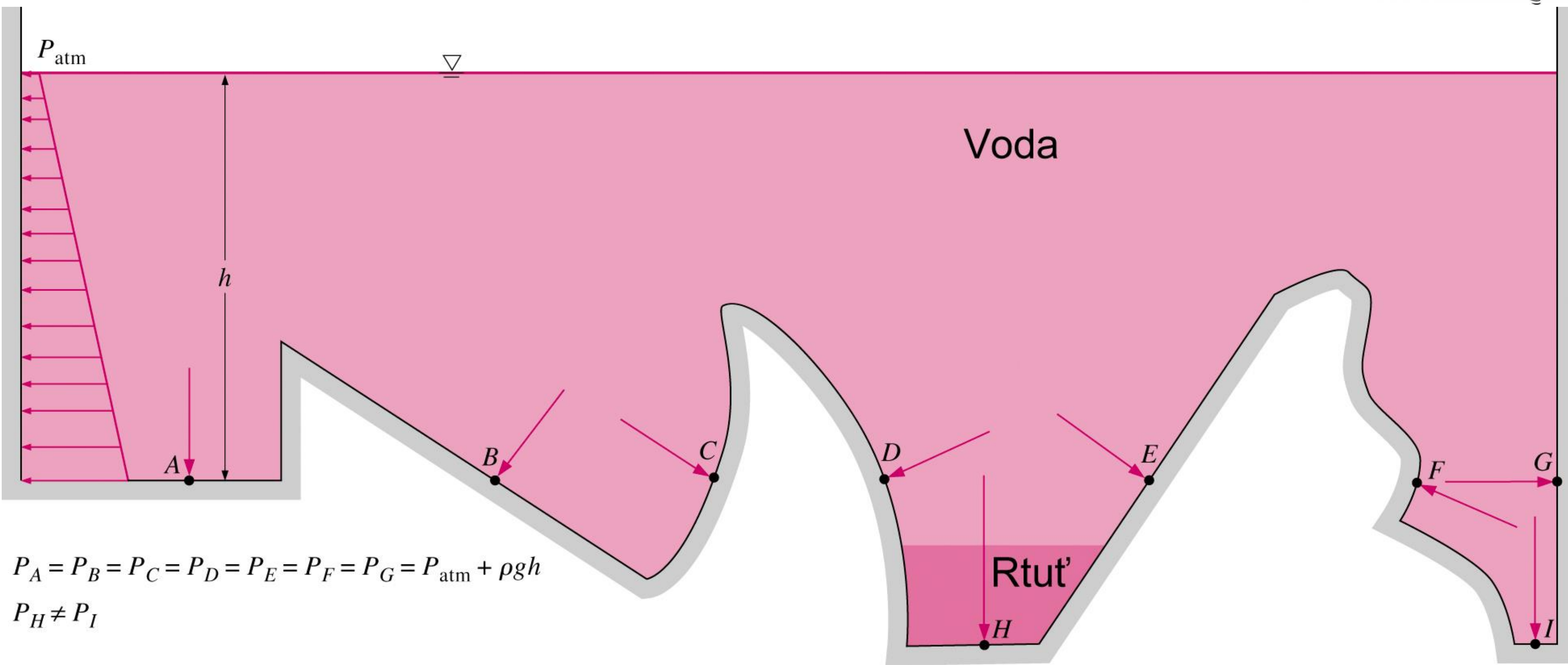
$p_1 = p_0 + h_1\, \rho\, g$

$p_2 = p_0 + h_2\, \rho\, g$

Hydrostatický tlak

Hydrostatický tlak nezávisí na tvaru a průřezu nádoby, ve které je kapalina, ale pouze na výšce sloupce kapaliny nad místem, kde tlak určujeme, a na hustotě kapaliny.

= **hydrostatické paradoxon**



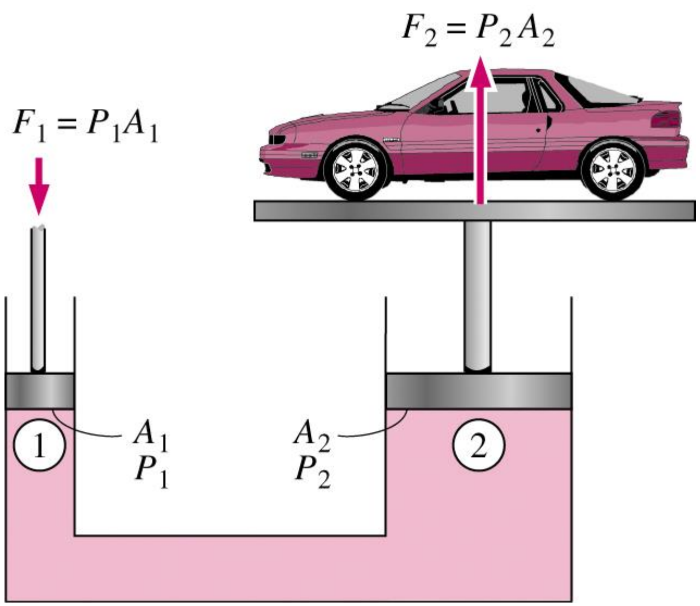
$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E = P_F = P_G = P_{atm} + \rho g h$$

$$P_H \neq P_I$$

Hydrostatický tlak - Pascalův zákon

Průmyslové aplikace: hydraulický lis, hydraulické pohony

Pascalův zákon: Působí-li na kapalinu v uzavřené nádobě vnější tlaková síla, zvýší se tlak ve všech místech kapaliny stejně.

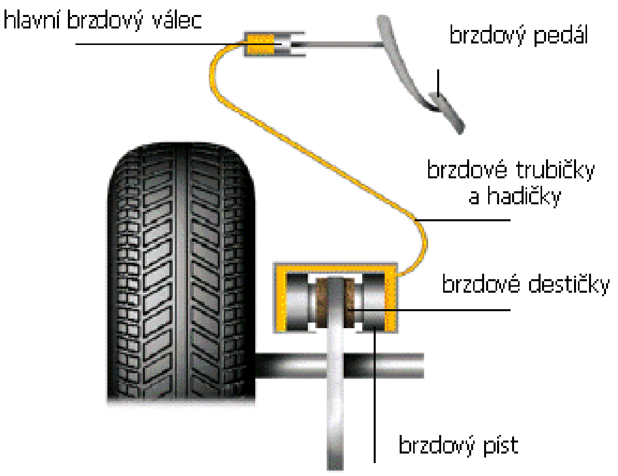


V místech stejné úrovně kapaliny je shodný tlak.

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \implies F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

$$F_2 > F_1$$



Hydrostatický tlak

$$y \downarrow g \qquad \mathrm{d}p = \rho\, g\, \mathrm{d}\, y$$

Plyny

- hustota se mění s tlakem, $\rho = \rho(p)$ => integrace není tak snadná, jako v případě kapalin

Ideální plyn: $pV = nRT \;\rightarrow\; pV = \dfrac{m}{M} RT \;\rightarrow\; \rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{Mp}{RT}$

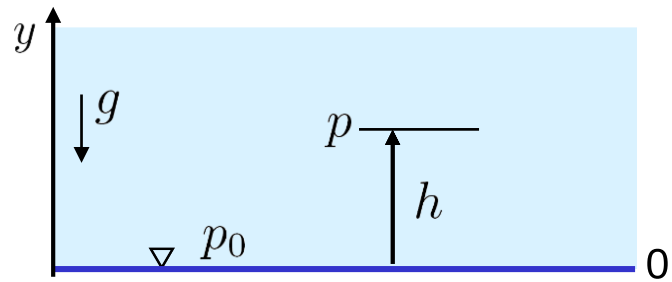
$$\mathrm{d}p = -\rho(p)\, g\, \mathrm{d}\, y$$

$$\mathrm{d}p = -p \frac{M g}{R T} \mathrm{d}\, y$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M g}{R T} \int_{y_0}^{y_1} \mathrm{d}\, y$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{M g}{R T} (y_1 - y_0)$$

$$\boxed{p = p_0 \exp\left(-\frac{M g}{R T} h\right)}$$

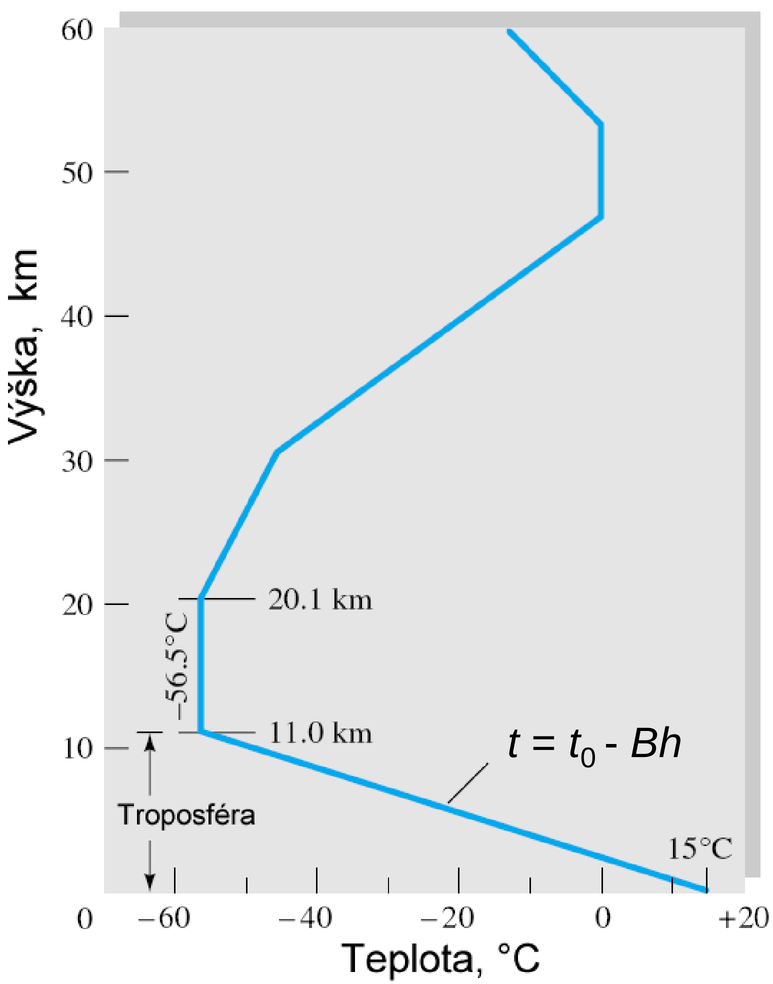


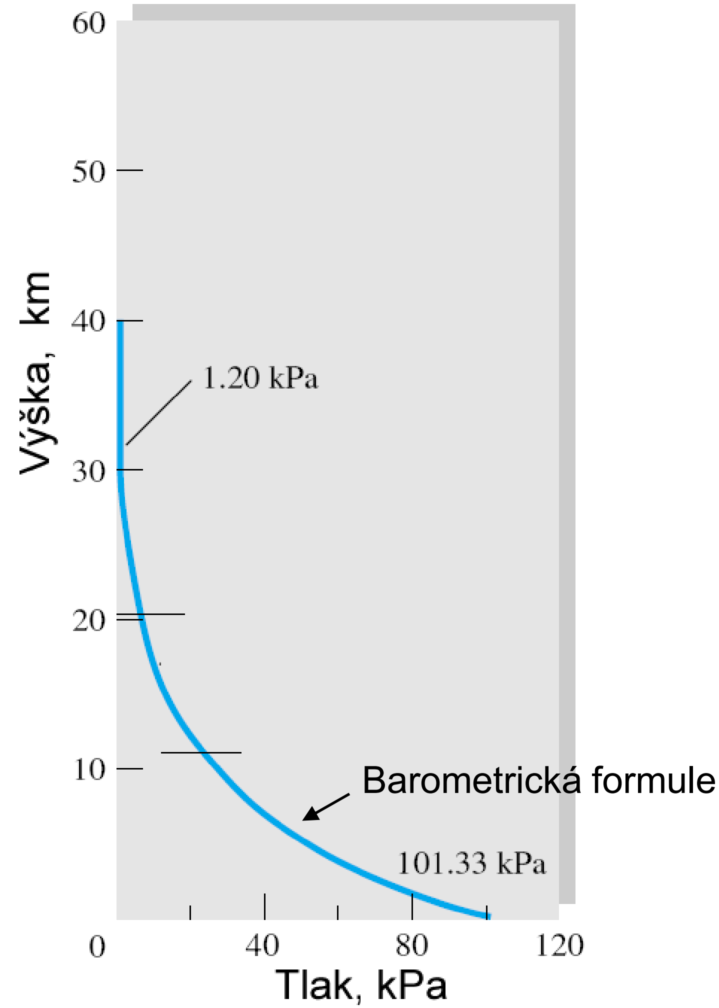
p_0 – tlak při hladině moře, Pa
y_0 – hladina moře (=0 m), m
y_1 – výška nad mořem, m
h – výška nad mořem, m
T – teplota ve výšce h, K
M – střední mol. hmotn. vzduchu (0,02884 kg/mol)
R – univerzální plynová konstanta (8,314 J/K/mol)

Barometrická formule
- určení nadmořské výšky z naměřeného tlaku

Hydrostatický tlak

Plyny

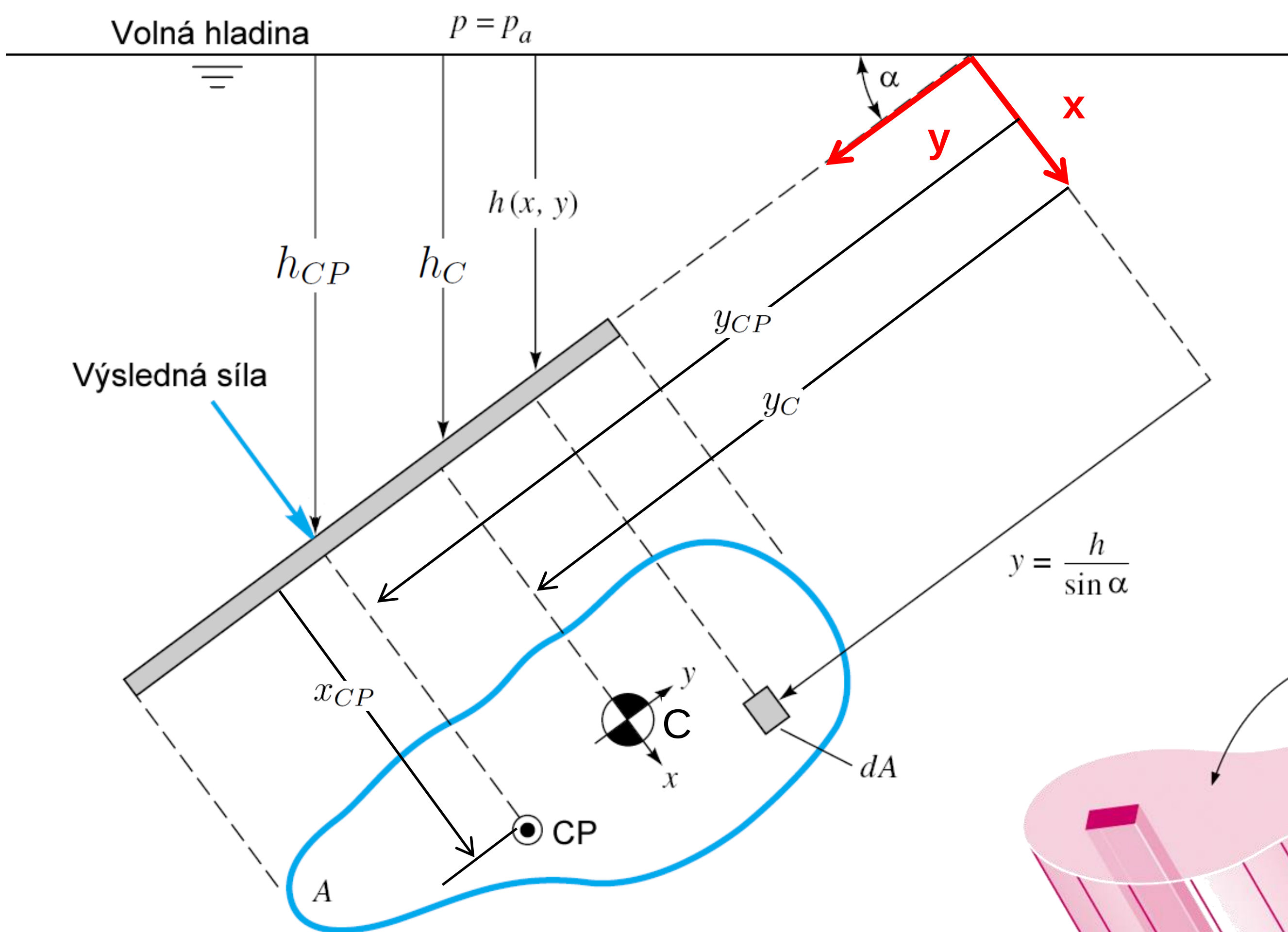


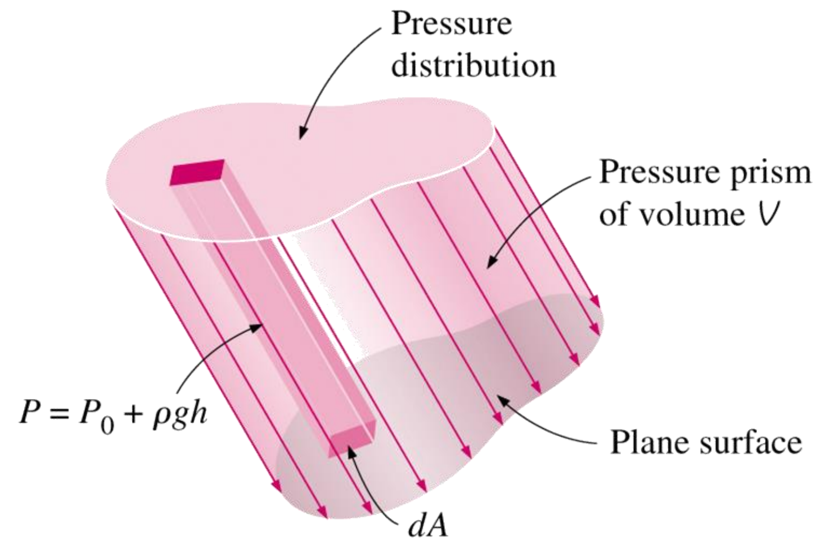


B = 6,5 °C/km

t_0 = 15°C

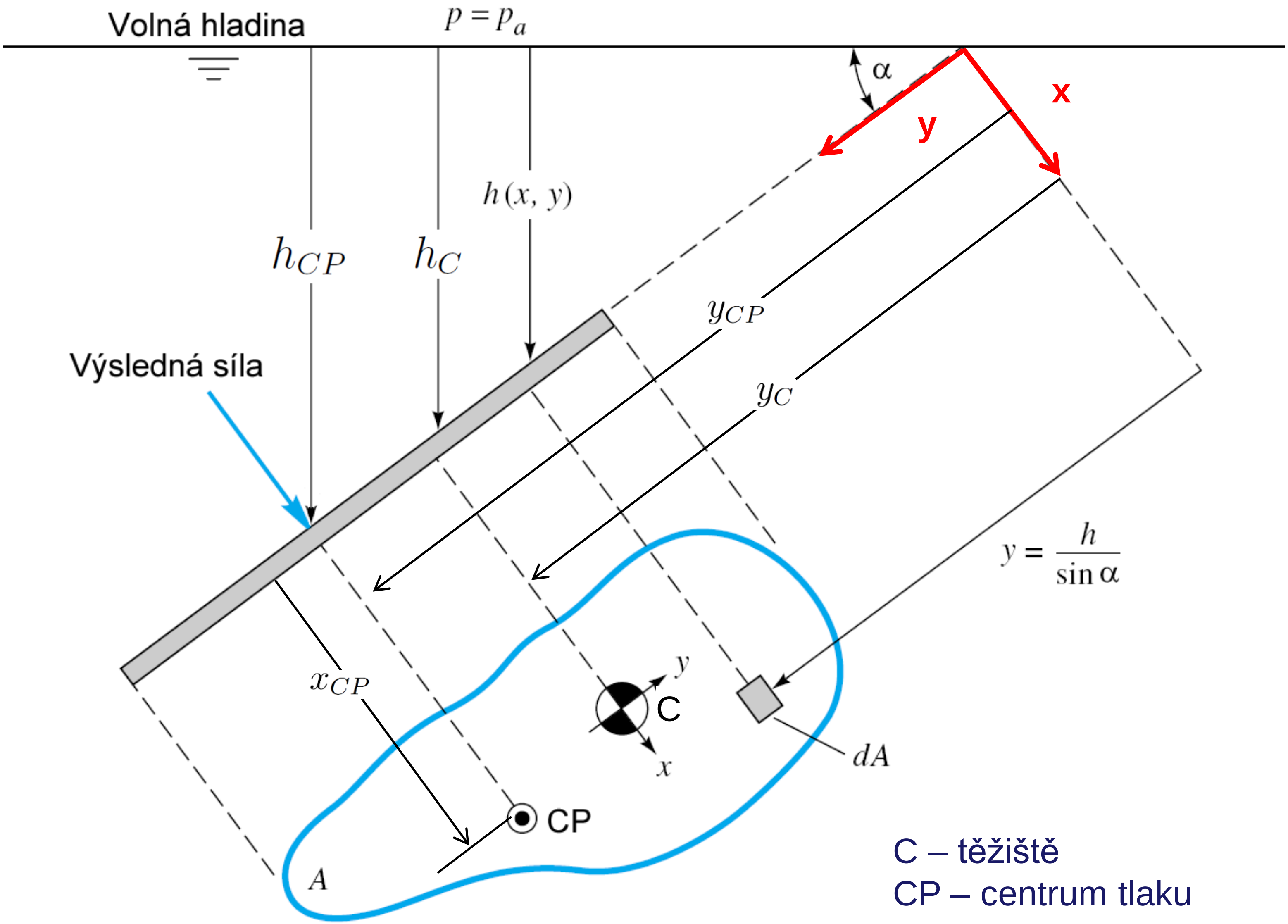
Hydrostatické síly na rovinné plochy





C – těžiště
CP – centrum tlaku

Hydrostatické síly na rovinné plochy



C – těžiště
CP – centrum tlaku

Hydrostatické síly na rovinné plochy

Síla působící na elementární plochu:

$$\mathrm{d}F = \rho g h \mathrm{d}A \qquad \mathrm{d}F = \rho g y \sin\alpha \mathrm{d}A$$

Výsledná hydrostatická síla:

$$F_h = \int_A \rho g h \mathrm{d}A = \int_A \rho g y \sin\alpha \mathrm{d}A$$

Při konstantní hustotě a úhlu sklonu plochy:

$$F_h = \rho g \sin\alpha \int_A y \, \mathrm{d}A$$

Statický moment plochy A vzhledem k ose x:

$$\int_A y \mathrm{d}A = y_C A$$

y_c je y souřadnice těžiště objektu

Výpočet hodnoty hydrostatické síly:

$$\boxed{F_h = \rho \, g \, h_C \, A = \rho \, g \, y_C \, \sin\alpha \, A}$$

Centrum tlaků

Hydrostatická síla vytváří stejný moment jako součet momentů kolem osy x tvořených celkovým tlakem:

$$\mathrm{d}F = \rho\, g\, y\ \sin\alpha\, \mathrm{d}A$$

$$F_h\, y_{CP} = \int_A y\, \mathrm{d}F = \int_A \rho\, g\, y^2\ \sin\alpha\, \mathrm{d}A$$

$$F_h = \rho\, g\, y_C\ \sin\alpha\ A$$

$$F_h\, y_{CP} = \rho\, g\ \sin\alpha \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

$$y_{CP} = \frac{\int_A y^2 \mathrm{d}A}{y_C\ A} = \frac{I_x}{y_C\ A}$$

moment setrvačnosti, I_x

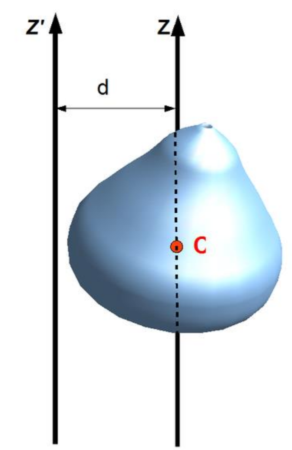
pokud počátek souřadnic soustavy zvolíme v těžišti:

$$I_x = I_{xC} + A\, y_C^2$$

I_{xc} moment setrvačnosti plochy vzhledem k ose procházející těžištěm paralelní k ose x

$$\boxed{y_{CP} = \frac{I_{xC}}{y_C\ A} + y_C}$$

Huygens–Steiner věta



Moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti v těžišti zvětšeném o moment setrvačnosti tělesa vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm.

Centrum tlaků

Hydrostatická síla vytváří stejný moment jako součet momentů kolem osy y tvořených celkovým tlakem:

$$\boxed{\mathrm{d}F = \rho\, g\, y\, \sin\alpha\, \mathrm{d}A}$$

$$F_h\, x_{CP} = \int_A x\, \mathrm{d}F = \rho\, g\, \sin\alpha \int_A x\, y\, \mathrm{d}A$$

$$\boxed{F_h = \rho\, g\, y_C\, \sin\alpha\, A}$$

$$x_{CP} = \frac{\int_A xy\, \mathrm{d}A}{y_C\, A} = \frac{I_{xy}}{y_C\, A}$$

$$I_{xy} = \int_A xy\, \mathrm{d}A$$

druhý moment setrvačnosti, I_{xy}

Aplikace Steinerovy věty:

$$I_{xy} = I_{xyC} + A\, x_C\, y_C$$

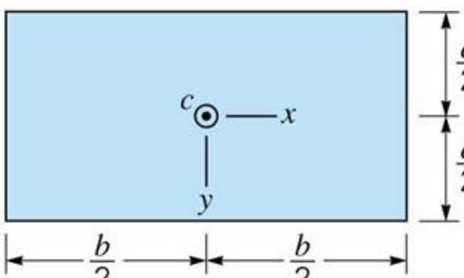
I_{xyc} druhý moment setrvačnosti vzhledem k osám procházejícím těžištěm

$$\boxed{x_{CP} = \frac{I_{xyC}}{y_C\, A} + x_C}$$

Hydrostatické síly na rovinné plochy

Druhé momenty pro běžné plochy

Obdélník



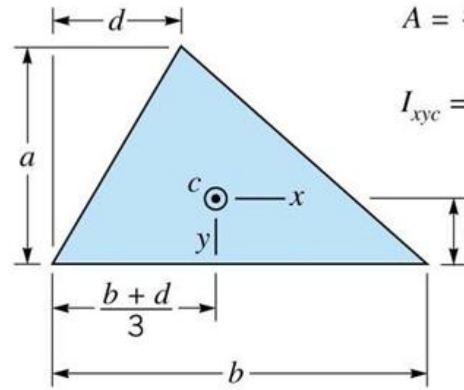
$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12}ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12}ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$

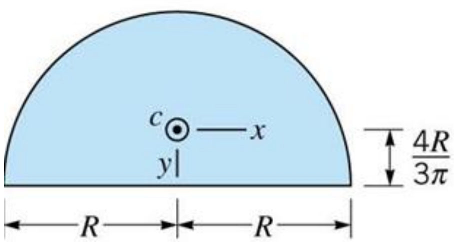
Trojúhelník



$$A = \frac{ab}{2} \qquad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$

Půlkruh



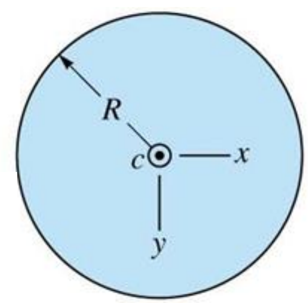
$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

$$I_{xyc} = 0$$

Kruh

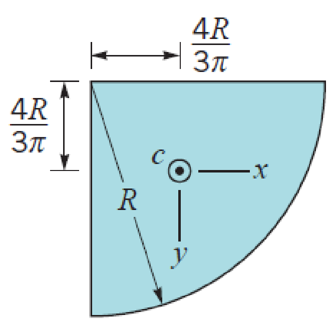


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$

Čtvrtkruh



$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

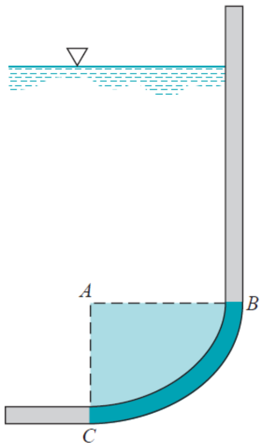
$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

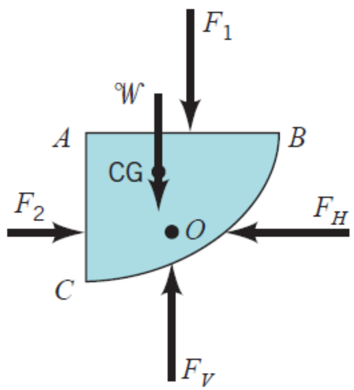
Hydrostatická síla na zakřivené plochy

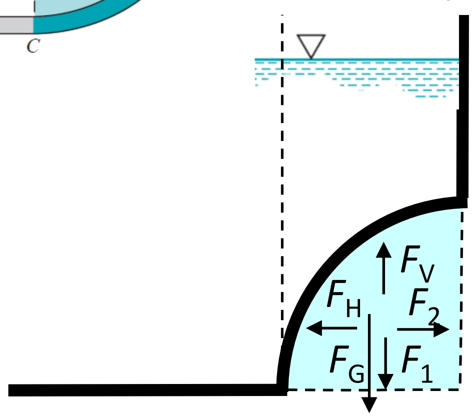
Metoda náhradních ploch

- spočívá v tom, že se křivá plocha nahradí jednou, nebo více rovinnými plochami, a to tak, aby s křivou plochou uzavíraly objem

A) Horizontální a vertikální náhradní roviny







F_H a F_V jsou horizontální a vertikální složky síly, kterou stěna působí na tekutinu

F_1 a F_2 jsou hydrostatické síly na každou rovinnou plochu (velikost a působiště sil se počítají ze vztahů pro rovinné plochy)

$$F_H = F_2$$

- v případě, kdy se náhradní plochou **ubral** od zatěžujícího obrazce objem kapaliny, jehož tíha působí na křivou plochu, je nutno k výslednici tlakové síly na náhradní plochu **přičíst** tíhový účinek kapaliny F_G

$$F_V = F_1 + F_G$$

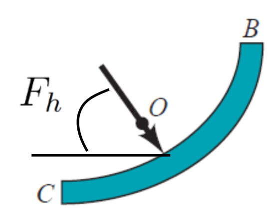
- v případě, kdy se náhradní plochou **přidal** k zatěžujícímu obrazce objem kapaliny, je nutno od výslednice tlakové síly na náhradní plochu tíhový účinek kapaliny F_G **odečíst**

$$F_V = F_1 - F_G$$

Velikost výsledné hydrostatické síly:

$$F_h = \sqrt{(F_H)^2 + (F_V)^2}$$

Úhel sklonu výsledné síly= $\tan^{-1}(F_V/F_H)$

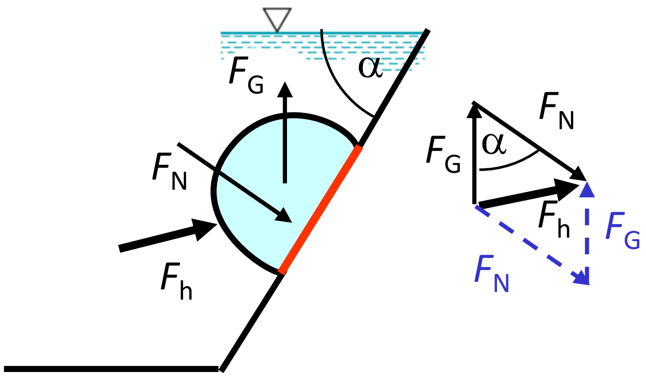


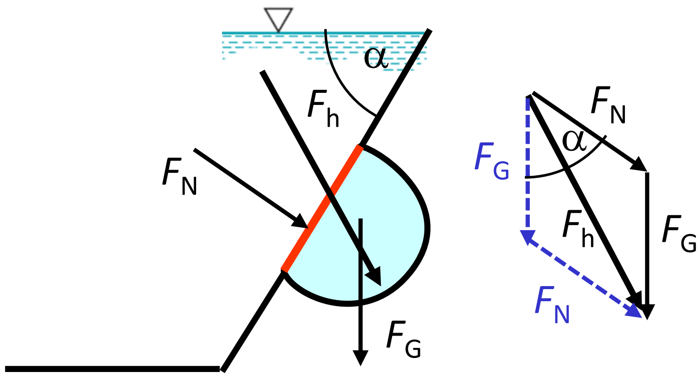
Metoda náhradních ploch

B) Šikmo skloněné náhradní roviny

F_N je náhradní hydrostatická síla na šikmo skloněnou plochu, která s křivou plochou uzavírá objem (velikost a působiště náhradní hydrostatické síly se počítají ze vztahů pro rovinné plochy)

V případě, kdy se náhradní plochou **ubral** od zatěžujícího obrazce objem kapaliny, jehož tíha působí na křivou plochu, je nutno k výslednici tlakové síly na náhradní plochu **přičíst** tíhový účinek kapaliny F_G (a naopak)





$$F_N = \sqrt{F_G^2 + F_N^2 - 2\,F_G\,F_N\,\cos\alpha}$$

$$F_N = \sqrt{F_G^2 + F_N^2 + 2\,F_G\,F_N\,\cos\alpha}$$