

**Rezgőmozgás**  
**feladatok és megoldások**

1. A harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében:  
 $y = 0,12 \sin 5\pi t$ , ahol a kitérést méterben, az időt másodpercben mérjük. Mekkora a
- a) rezgés amplitúdója;
  - b) rezgés körfrekvenciája;
  - c) rezgés frekvenciája;
  - d) rezgésidő?
2. A harmonikus rezgőmozgást végző test amplitúdója 8 cm, a frekvenciája 2 Hz.
- a) Írja fel a rezgő test kitérését az idő függvényében! A kitérést méterben, az időt másodpercben mérje.
  - b) Határozza meg a rezgő test kitérését az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után  $\frac{1}{24}$  s elteltével!
3. A harmonikus rezgőmozgást végző test amplitúdója 5,5 cm, a rezgésidője 3 s.
- a) Írja fel a rezgő test kitérését az idő függvényében! A kitérést méterben, az időt másodpercben mérje!
  - b) Határozza meg a rezgő test kitérését az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után 6 s elteltével!
4. A 200 g tömegű, rugóra függesztett test harmonikus rezgőmozgást végez. A kitérése  $y = 12 \sin \frac{2\pi}{3}t$ , ahol a kitérést centiméterben, az időt másodpercben mérjük. Mekkora a test
- a) legnagyobb sebessége;
  - b) legnagyobb gyorsulása;
  - c) sebessége, gyorsulása és az energiája akkor, amikor a kitérése 6 cm?
5. A  $2,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  direkción erejű rugóra függesztett test mozgását a következő összefüggéssel lehet leírni:  $y = 8 \cos \frac{\pi}{4}t$ . A kitérést centiméterben, az időt másodpercben mérjük. Mekkora a rugóra függesztett test
- a) tömege;
  - b) frekvenciája;
  - c) sebessége és gyorsulása legnagyobb sebességének elérése után kétharmad másodperccel?



6. A harmonikus rezgőmozgást végző test tömege 500 g, rezgésideje 3,6 s. Mekkora
- a rugó direkciós ereje?
  - a rezgés amplitúdója, ha az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után 0,3 s elteltével a kitérés 3,5 cm?
  - Mekkora a test sebessége, illetve gyorsulása a *b*) kérdés adatai alapján?

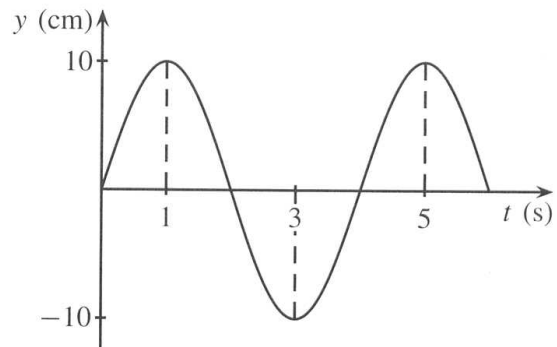


7. A felfüggesztett,  $120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  direkciós erejű rugót szabad végénél fogva 6 cm-rel megnyújtották.

- Mekkora a megnyújtáskor kifejtett erő munkája?
- Mekkora munkával lehet a rugót még további 4 cm-rel megnyújtani?
- A rugó szabad végére függesztve mekkora tömeg okozna hasonló megnyúlást? ( $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ )



8. Az alábbi grafikon a rezgőmozgást végző test kitérését ábrázolja az idő függvényében.



- Írja fel az ábra alapján a kitérés–idő, a sebesség–idő és a gyorsulás–idő függvényeket!
- Határozza meg 1,5 s elteltével a rezgő test kitérését (cm-ben), a sebességét ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ -ban) és a gyorsulását ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ -ben)!



9. A rezgőmozgást végző, 1,2 kg tömegű test amplitúdója 15 cm, a rezgésideje 3 s.

- Mekkora a test mechanikai energiája?
- Mekkora kitérés esetén egyezik meg a test sebességének számértéke a gyorsulásának a számértékével?



10. A rugóra függesztett  $m$  tömegű test harmonikus rezgést végez. Amikor kitérése az amplitúdó fele, a test összes mechanikai energiájának hányad része a felső helyzethez képest

- a helyzeti energiája?
- a mozgási energiája?

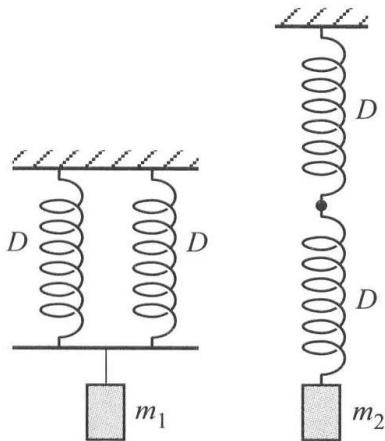


11. Az egyik végén felfüggesztett rugó másik végére 900 g tömegű testet erősítettek. Ebben az esetben a rugó hossza 15 cm lett. Ha 1,5 kg tömegű testtel terhelték a rugót, akkor a hossza 17 cm lett. A  $g$  értéke  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- Mekkora a terheletlen rugó hossza?
- Mekkora a rugó direkciós ereje?
- Mekkora munkával lehet a már 15 cm hosszúra megnyújtott rugót 20 cm hosszúra megnyújtani?
- Mekkora frekvenciájú rezgéseket végez a rugóra függesztett 900 g tömegű, illetve az 1,5 kg tömegű test?



12. Két, ugyanolyan direkciós erejű rugót a mellékelt ábrák szerint függesztettek fel. (A tartórúd tömege elhanyagolható.)



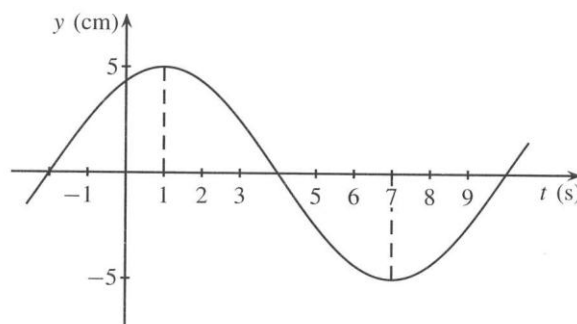
- Mekkora az eredő direkciós erő az egyes esetekben?
- Mekkora tömegű testeket kell az egyes esetekben a rugókra függeszteni ahhoz, hogy rezgés esetén a frekvenciájuk megegyezzen?
- Mekkora a rezgő rendszerek energiája ugyanakkora megnyúlás esetén?
- Mekkora megnyúlások esetén egyezik meg a rezgő rendszerek energiája?



13. Az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatától számítva az időt, egy teljes periódus alatt, mikor egyezik meg a harmonikus rezgőmozgást végző test rugalmas helyzeti energiája a mozgási energiájával?



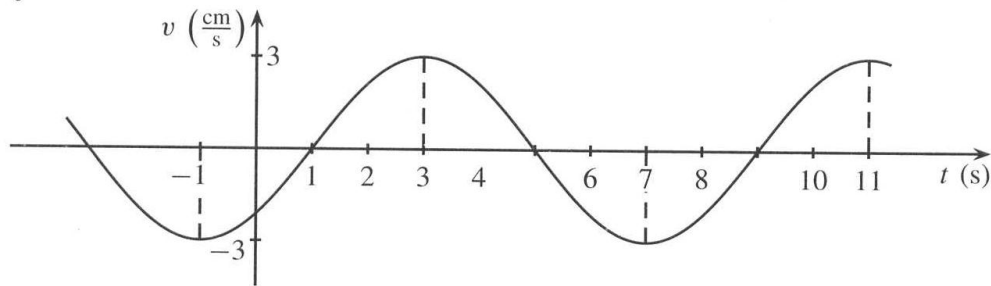
14. Az alábbi grafikon a rezgőmozgást végző test kitérését ábrázolja az idő függvényében.



- Olvassa le a grafikonról az amplitúdó, a rezgésidő és a kezdőfázis értékeit!
- Írja fel az ábra alapján a kitérés-idő, a sebesség-idő és a gyorsulás-idő függvényeket!
- Határozza meg 1 s elteltével a rezgő test kitérését (cm-ben), a sebességét ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ -ben) és a gyorsulását ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ -ben)!



15. Az alábbi grafikon a rezgőmozgást végző test sebességét ábrázolja az idő függvényében.



- a) Olvassa le a grafikonról a legnagyobb sebesség, a rezgésidő és a kezdőfázis értékeit!
- b) Írja fel az ábra alapján a kitérés-idő, a sebesség-idő és a gyorsulás-idő függvényeket!
- c) Határozza meg 1 s elteltével a rezgő test kitérését (cm-ben), a sebességét ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ -ben) és a gyorsulását ( $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ -ben)!

16. Mekkora a matematikai inga lengésideje, ha a hossza 25,3 cm? A  $g$  értéke  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .



17. Mekkora a matematikai inga hossza, ha a lengésideje 2,4 s? A  $g$  értéke  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .



18. Ugyanannyi idő alatt az egyik matematikai inga 44 lengést, a másik 55 lengést végzett. Milyen hosszúak az ingák, ha az egyik inga 9 cm-rel hosszabb a másiknál?



## Megoldások

1. a) A rezgés amplitúdója a megadott  $y = 0,12 \sin 5\pi \cdot t$  összefüggésből:

$$A = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm.}$$

- b) A rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = 5\pi \frac{1}{\text{s}} = 15,7 \frac{1}{\text{s}}.$$

- c) A rezgés frekvenciája:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5\pi \frac{1}{\text{s}}}{2\pi} = 2,5 \frac{1}{\text{s}}.$$

- d) A rezgésidő:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2,5 \frac{1}{\text{s}}} = 0,4 \text{ s.}$$

2.  $A = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$ ,  $f = 2 \frac{1}{\text{s}}$ ,  $t = \frac{1}{24} \text{ s}$ .

- a) A rezgő test kitérése az idő függvényében:

$$y = A \sin 2\pi \cdot f \cdot t = 0,08 \cdot \sin 4\pi t.$$

- b) A kitérés az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után  $\frac{1}{24} \text{ s}$  elteltével:

$$y = 0,08 \text{ m} \cdot \sin \left( 4\pi \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{1}{24} \text{ s} \right) = 0,08 \text{ m} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm.}$$

3.  $A = 5,5 \text{ cm} = 0,055 \text{ m}$ ,  $T = 3 \text{ s}$ ,  $t = 6 \text{ s}$ .

- a) A rezgő test kitérése az idő függvényében:

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} = 0,055 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} t.$$

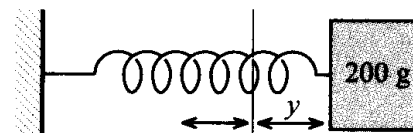
- b) A kitérés az egyensúlyi helyzeten való áthaladás után 6 s elteltével:

$$y = 0,055 \text{ m} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \cdot 6 \text{ s} \right) = 0,055 \text{ m} \cdot \sin 4\pi = 0.$$

4. Az adott  $y = 12 \sin \frac{2\pi}{3} t$  összefüggésből kiolvasható, illetve megadott adatok:

$$A = 12 \text{ cm}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}}, \quad m = 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg}, \quad y_1 = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m.}$$

A feladat vonatkozzék vízszintesen mozgó rugóra, ez esetben a rugó súlyából származó megnyúlástól eltekinthetünk.



a) A test legnagyobb sebessége:

$$v_{\max} = A\omega = 12 \text{ cm} \cdot \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} = 25 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

b) A test legnagyobb gyorsulása:

$$a_{\max} = -A\omega^2 = -12 \text{ cm} \cdot \frac{4\pi^2}{9} \frac{1}{\text{s}^2} = -53 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A negatív előjel azt jelzi, hogy a gyorsulás ellentétes irányú a kitéréssel. Tehát a számértéke  $a_{\max} = 53 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ .

c) Ha a kitérés  $y_1 = 6 \text{ cm}$ , akkor:

$$6 = 12 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} t,$$

$$0,5 = \sin \frac{2\pi}{3} t,$$

amiből:

$$\frac{2\pi}{3} t = \frac{\pi}{6},$$

$$t = \frac{1}{4} \text{ s}.$$

A test sebessége  $t = \frac{1}{4} \text{ s}$  elteltével:

$$v = A\omega \cos \omega t,$$

$$v = 12 \text{ cm} \cdot \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{1}{4} \text{ s} \right) = 22 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A test gyorsulása:

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

$$a = -12 \text{ cm} \cdot \left( \frac{4\pi^2}{9} \frac{1}{\text{s}^2} \right) \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{1}{4} \text{ s} \right) = -26,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

A test energiája az energiamegmaradás törvénye értelmében megegyezik a legnagyobb kitérés esetére számított rugalmas helyzeti energiával:

$$E = \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \text{ kg} \cdot \left( \frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{s}} \right)^2 \cdot (0,12 \text{ m})^2,$$

$$E = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 6,3 \text{ mJ},$$

ahol felhasználásra került az  $\omega^2 = \frac{D}{m}$  összefüggés.

5.

Az adott  $y = 8 \cos \frac{\pi}{4} t$  összefüggésből kiolvasható, illetve megadott adatok:



$$A = 8 \text{ cm}, \quad \omega = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}}, \quad D = 2,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad t = \frac{2}{3} \text{ s}.$$

a) A rugóra függesztett test tömege:

$$m = \frac{D}{\omega^2} = \frac{2,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\frac{\pi^2}{16} \frac{1}{\text{s}^2}} = 4 \text{ kg}.$$

b) A rugóra függesztett test frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{4 \text{ kg}}} = 0,125 \frac{1}{\text{s}}.$$

c) A rugóra függesztett test sebessége a legnagyobb sebességének elérése után két-harmad másodperccel:

$$v = -A\omega \sin \omega t = -8 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{2}{3} \text{ s} \right) = -6,3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \sin \frac{\pi}{6},$$

$$v = -3,15 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A rugóra függesztett test gyorsulása a legnagyobb sebességének elérése után két-harmad másodperccel:

$$a = -A\omega^2 \cos \omega t = -8 \text{ cm} \cdot \left( \frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \right)^2 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{2}{3} \text{ s} \right) = -4,9 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \cos \frac{\pi}{6},$$

$$a = -4,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

6.

$$m = 500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}, \quad T = 3,6 \text{ s}, \quad t = 0,3 \text{ s}, \quad y = 3,5 \text{ cm}.$$



a) A rugó direkciós ereje:

$$D = m\omega^2 = m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0,5 \text{ kg} \cdot \frac{4\pi^2}{12,96 \text{ s}^2} = 1,52 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

b) A rezgés amplitúdója:

$$y = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin \left( \frac{2\pi}{3,6 \text{ s}} \cdot 0,3 \text{ s} \right) = A \sin \frac{\pi}{6},$$

ahonnan:

$$A = \frac{y}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{3,5 \text{ cm}}{0,5} = 7 \text{ cm}.$$

c) A test sebessége:

$$v = A\omega \cos \omega t = 7 \text{ cm} \cdot \frac{2\pi}{3,6} \frac{1}{\text{s}} \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{3,6} \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,3 \text{ s} \right) = 12,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{6},$$
$$v = 10,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A test gyorsulása:

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t = -7 \text{ cm} \cdot \left( \frac{2\pi}{3,6} \frac{1}{\text{s}} \right)^2 \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{3,6} \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,3 \text{ s} \right) = -21,32 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{6},$$
$$a = -10,66 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

7.

$$D = 120 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad y_1 = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}, \quad y_2 = 4 \text{ cm} = 0,04 \text{ m}.$$

VISSZA

a) A rugó megnyújtásakor végzett munka:

$$W_1 = \frac{1}{2} D y_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 120 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,06 \text{ m})^2 = 0,216 \text{ J} = 216 \text{ mJ}.$$

b) A rugó további 4 cm-rel történő megnyújtásakor végzett munka:

$$W_2 = \frac{1}{2} D (y_1 + y_2)^2 - \frac{1}{2} D y_1^2 = \frac{1}{2} D [(y_1 + y_2)^2 - y_1^2] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 120 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot [(0,1 \text{ m})^2 - (0,04 \text{ m})^2] = 0,504 \text{ J} = 504 \text{ mJ}.$$

c) A rugóra függesztendő test tömege:

$$m = \frac{D(y_1 + y_2)}{g} = \frac{120 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,1 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1,2 \text{ kg}.$$

8.

A grafikonról leolvasható, illetve megadott adatok:

$$A = 10 \text{ cm}, \quad T = 4 \text{ s}, \quad t = 1,5 \text{ s}.$$

VISSZA

a) A periódusidő ismeretében a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4 \text{ s}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}}.$$

A rezgőmozgás kitérés-idő függvénye:

$$y = A \sin \omega t = 10 \text{ cm} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t.$$

A rezgőmozgás sebesség-idő függvénye:

$$v = A\omega \cos \omega t = 10 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} t = 15,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} t.$$



A rezgőmozgás gyorsulás-idő függvénye:

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t = -10 \text{ cm} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}}\right)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} t = -24,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t.$$

b) A rezgő test kitérése 1,5 s elteltével:

$$y = 10 \text{ cm} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t = 10 \text{ cm} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{3}{2} \text{ s}\right) = 10 \text{ cm} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 7,1 \text{ cm}.$$

A rezgő test sebessége 1,5 s elteltével:

$$v = 15,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} t = 15,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{3}{2} \text{ s}\right) = 15,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{3\pi}{4},$$
$$v = -11,1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

A rezgő test gyorsulása 1,5 s elteltével:

$$a = -24,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} t = -24,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\text{s}} \cdot \frac{3}{2} \text{ s}\right) = -24,7 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{3\pi}{4},$$
$$a = -17,46 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

9.

$$m = 1,2 \text{ kg}, A = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}, T = 3 \text{ s}.$$



a) A rezgésidő ismeretében a rugó direkciós ereje:

$$D = m\omega^2 = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 1,2 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2\pi}{3 \text{ s}}\right)^2 = 5,26 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A rezgőmozgást végző test mechanikai energiája:

$$E = \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,26 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 0,059 \text{ J} = 59 \text{ mJ}.$$

b) A rezgőmozgást végző test sebessége:

$$v = A\omega \cdot \cos \omega t.$$

A rezgőmozgást végző test gyorsulása:

$$a = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t.$$

A feltétel szerint a sebesség és a gyorsulás számértéke megegyezik:

$$A\omega \cdot \cos \omega t = A\omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

amiből:

$$\frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \text{tg } \omega t = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{3}{2\pi},$$

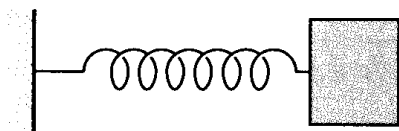
$$\omega t = 0,445.$$

A feltételnek eleget tevő kitérés:

$$y = A \sin \omega t = 15 \text{ cm} \cdot \sin 0,445 = 6,46 \text{ cm}.$$

10.

$$y = 0,5A.$$



A feladat vonatkozzék vízszintesen mozgó rugóra, ez esetben a rugó súlyából származó megnyúlástól eltekinthetünk.

a) A rezgő test kitérése:

$$y = A \sin \omega t.$$

A feltétel szerint:

$$0,5A = A \sin \omega t,$$

$$0,5 = \sin \omega t,$$

ahonnan:

$$\omega t = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\pi}{6\omega}.$$

A rezgő test sebessége:

$$v = A\omega \cos \omega t = A\omega \cos \left( \omega \cdot \frac{\pi}{6\omega} \right) = A\omega \cos \frac{\pi}{6} = \frac{A\omega \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

A rezgő test összes energiája:

$$E = \frac{1}{2}DA^2.$$

A rezgő test helyzeti energiája az adott pillanatban:

$$E_h = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}DA^2 = \frac{1}{8}DA^2.$$

A rezgő test mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{3A^2\omega^2}{4} = \frac{3}{8}DA^2,$$

ahol felhasználásra került:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad \rightarrow \quad m = \frac{D}{\omega^2}.$$

A kérdéses arányok:

$$\frac{E_h}{E} = \frac{\frac{1}{8} \cdot DA^2}{\frac{1}{2} \cdot DA^2} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad E_h = \frac{1}{4}E,$$

$$\frac{E_m}{E} = \frac{\frac{3}{8} \cdot DA^2}{\frac{1}{2} \cdot DA^2} = \frac{3}{4} \rightarrow E_m = \frac{3}{4} E.$$

11.  $m_1 = 900 \text{ g} = 0,9 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $l_1 = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$ ,  $m_2 = 1,5 \text{ kg}$ ,  $l_2 = 17 \text{ cm} = 0,17 \text{ m}$ ,  $l_3 = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ .



a) A testre ható nehézségi erő mindkét esetben megegyezik a rugóerővel:

$$m_1 \cdot g = D(l_1 - l_0), \quad \text{illetve:} \quad m_2 \cdot g = D(l_2 - l_0),$$

ahol  $l_0$  a terheletlen rugó hossza.

A második egyenletet osztva az elsővel:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{l_2 - l_0}{l_1 - l_0},$$

amelyből a rendezés után a terheletlen rugó hossza:

$$l_0 = \frac{m_2 \cdot l_1 - m_1 \cdot l_2}{m_2 - m_1} = \frac{1,5 \text{ kg} \cdot 0,15 \text{ m} - 0,9 \text{ kg} \cdot 0,17 \text{ m}}{1,5 \text{ kg} - 0,9 \text{ kg}} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}.$$

b) Az első esetre felírt egyenlet:

$$m_1 \cdot g = D \cdot (l_1 - l_0),$$

ahonnan a rugó direkciós ereje:

$$D = \frac{m_1 \cdot g}{l_1 - l_0} = \frac{0,9 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,15 \text{ m} - 0,12 \text{ m}} = 300 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

c) A keresett munkát megkapjuk, ha a 20 cm hosszúra nyújtott rugó helyzeti energiájából kivonjuk a 15 cm-re nyújtott rugó helyzeti energiáját:

$$\begin{aligned} W &= E_3 - E_1 = \frac{1}{2} D(l_3 - l_0)^2 - \frac{1}{2} D(l_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2} D[(l_3 - l_0)^2 - (l_1 - l_0)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 300 \frac{\text{N}}{\text{m}} [(0,08 \text{ m})^2 - (0,03 \text{ m})^2] = 0,825 \text{ J} = 825 \text{ mJ}. \end{aligned}$$

d) A rezgések frekvenciája:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{300 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{0,9 \text{ kg}}} = 2,9 \frac{1}{\text{s}},$$

illetve:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m_2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{300 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{1,5 \text{ kg}}} = 2,25 \frac{1}{\text{s}}.$$

12.

A felhasznált két rugó direkciós ereje és egyéb paraméterei megegyeznek.



a) Az első ábra szerint a direkciós erő:

$$D_1 = 2D,$$

illetve a második esetben:

$$D_2 = \frac{D}{2}.$$

b) A frekvenciák egyezése esetén a körfrekvenciák is megegyeznek:

$$\omega^2 = \frac{D_1}{m_1} = \frac{D_2}{m_2}.$$

Beírva a direkciós erőket:

$$\frac{2D}{m_1} = \frac{D}{m_2},$$

ahonnan a rendezés után:

$$m_1 = 4m_2.$$

c) Ezt a kérdést érdemes kissé részletesebben vizsgálni. A felfüggesztett rugón rezgő testek esetén a rezgő rendszerre érvényes, hogy a rezgés összenergiája állandó, azaz

$$\frac{1}{2}D \cdot A^2 = \frac{1}{2}D \cdot y^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2,$$

ha az  $y$  kitérést a rugóra akasztott test egyensúlyi helyzetétől mérjük. Ilyenkor természetesen  $y$  nem egyezik meg a rugó  $y_r$  megnyúlásával ( $y_r = y + \frac{m \cdot g}{D}$ ) és

$\frac{1}{2}D \cdot y^2$  sem azonos a rugóenergiával.

A feladat kérdése nyilván a rugó maximális megnyúlására és a rezgő rendszer összenergiájára vonatkozik, azaz

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot D \cdot \left( y - \frac{4m \cdot g}{2D} \right)^2 = D \cdot \left( y - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D} \right)^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \left( y - \frac{m \cdot g}{\frac{D}{2}} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot D \cdot \left( y - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D} \right)^2.$$

Tehát  $E_1 = 4 \cdot E_2$ .

d) Az előző kérdésre adott válasz alapján:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot D \cdot \left( y_1 - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \left( y_2 - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D} \right)^2,$$

$$2 \cdot \left( y_1 - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D} \right) = y_2 - \frac{2 \cdot m \cdot g}{D},$$

$$y_2 = 2 \cdot \left( y_1 - \frac{m \cdot g}{D} \right).$$

**617** A rezgőmozgást végző test helyzeti energiája:

$$E_h = \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}D(A \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t,$$

ahol felhasználásra került:

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad \rightarrow \quad D = m\omega^2.$$

A rezgőmozgást végző test mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega \cos \omega t)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t.$$

A feltétel szerint a rezgőmozgást végző test helyzeti energiája megegyezik a mozgási energiájával:

$$E_h = E_m,$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t,$$

$$\sin^2 \omega t = \cos^2 \omega t,$$

$$\sin \omega t = \cos \omega t \quad \text{vagy} \quad \sin \omega t = -\cos \omega t.$$

Ekkor:

$$\omega t = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$$

amiből:

$$t = \left(\frac{1}{4} + k\right) \frac{\pi}{\omega} = \left(\frac{1}{4} + k\right) \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T}} = \left(\frac{1}{4} + k\right) \cdot \frac{T}{2}, \quad t = \left(\frac{3}{4} + k\right) \cdot \frac{T}{2}.$$

A két megoldástípus összefoglalható az

$$\omega t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

képlettel, illetve

$$t = \left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}\right) \cdot \frac{T}{2}.$$

Ha az egyensúlyi helyzettől mérjük az időt, akkor a teljes periódus alatt a helyzeti energia a mozgási energiával a következő időpontokban egyezik meg:

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{T}{8}, \quad k = 1 \quad \rightarrow \quad t_2 = 3\frac{T}{8},$$

$$k = 2 \quad \rightarrow \quad t_3 = 5\frac{T}{8}, \quad k = 3 \quad \rightarrow \quad t_4 = 7\frac{T}{8}.$$

a) A megadott grafikon alapján az amplitúdó:  $A = 5 \text{ cm}$ ,  
 a rezgésidő:  $T = 12 \text{ s}$ ,  
 a kezdőfázis:  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ .

b) A kitérés-idő függvény:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12 \text{ s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

A sebesség-idő függvény:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = 5 \text{ cm} \cdot \frac{2\pi}{12 \text{ s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$v = 2,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

A gyorsulás-idő függvény:

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y = -\left(\frac{2\pi}{12 \text{ s}}\right)^2 \cdot 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$a = -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right).$$

c) A rezgő test kitérése 1 s elteltével:

$$y = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 5 \text{ cm} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 5 \text{ cm}.$$

A rezgő test sebessége 1 s elteltével:

$$v = 2,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) = 2,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2,6 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

A rezgő test gyorsulása 1 s elteltével:

$$a = -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) = -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1,37 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

15.

a) A megadott grafikon alapján a legnagyobb sebesség:  $v_{\max} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ,

a rezgésidő:  $T = 8 \text{ s}$ ,

a kezdőfázis:  $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ .

b) A rezgőmozgás amplitúdója:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T \cdot v_{\max}}{2\pi} = \frac{8 \text{ s} \cdot 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{2\pi} = 3,8 \text{ cm}.$$

A kitérés-idő függvény:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) = 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8 \text{ s}} \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right) = 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

A sebesség-idő függvény:

$$v = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0) = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right),$$

A gyorsulás-idő függvény:

$$\begin{aligned} a &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y = -\left(\frac{2\pi}{8 \text{ s}}\right)^2 \cdot 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= -2,34 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

c) A rezgő test kitérése 1 s elteltével:

$$\begin{aligned} y &= 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} - \frac{3\pi}{4}\right) = 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 3,8 \text{ cm} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ y &= -3,8 \text{ cm}. \end{aligned}$$

A rezgő test sebessége 1 s elteltével:

$$v = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} - \frac{3\pi}{4}\right) = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

A rezgő test gyorsulása 1 s elteltével:

$$a = -2,34 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +2,34 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

16.

$$l = 25,3 \text{ cm} = 0,253 \text{ m}, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A matematikai (fonál) inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,253 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1 \text{ s}.$$

17.

$$T = 2,4 \text{ s}, \quad g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A matematikai (fonál) inga hossza:

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2,4 \text{ s})^2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2} = 1,46 \text{ m}.$$

VISSZA

18.

$$n_1 = 44, \quad n_2 = 55, \quad l_1 - l_2 = 9 \text{ cm} = 0,09 \text{ m}.$$

A feltétel szerint:

$$t = n_1 T_1 = n_2 T_2,$$

$$n_1 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = n_2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Az egyenlet rendezése után:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = \frac{l_2}{l_1},$$

$$\left(\frac{44}{55}\right)^2 l_1 = l_1 - 0,09 \text{ m}.$$

Az egyik inga hossza:

$$0,64l_1 = l_1 - 0,09 \text{ m},$$

$$l_1 = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}.$$

A másik inga hossza:

$$l_2 = 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}.$$

VISSZA