Hódi Gyula

Fizika döcögőknek

korrepetáló tankönyv főleg középiskolásoknak

I. év – Mechanika

v3.2 (TELJES változat)

Értsd meg a jelenségeket, vágd be a képleteket
és törvényeket… és ragaszkodj hozzájuk.

Köszönöm egykori tanáromnak, Barthos Zoltánnénak, Gabi néninek, akit te is bírnál.

Szia.

Ez a szokatlan stílusú könyv azok kedvéért készült, akik nem jók fizikából, de szeretnének *jobbak* lenni.

A tankönyvek *képletekkel* próbálnak magyarázni. **Én szóban magyarázok**, a képleteket pedig a magyarázatok tanulságaként adom meg.

Ez a könyv ezért nem olyan "szakszerű", mint a te tankönyved. Az a jó fizikásoknak való. Azzal a tankönyvvel nem lehetsz túl elégedett, különben ezt talán nem is olvasnád.

Készülj fel arra, hogy *néhány fejezet nagyon hosszú*, mert minden lényeges dolgot elmagyarázok, részletesen. **Ellenőrző kérdésekkel** osztottam a szöveget szakaszokra. **Ezeknél tarts rövid pihenőt**, és gondold át a lényegét annak, amit olvastál. Ha nem érted, újra el kell olvasnod, mondatonként. **Meg fogod érteni**.

Amit **matekból** kell tudnod hozzá, azt az utolsó fejezetből megtanulhatod.

Használd ki jól a **példafeladatok**at önmagad ellenőrzésére, ne csak felületesen nézd át őket. Ahol a "**…**" jelzést látod, ott állj meg, és keresd a választ a kérdésre. Ne add fel túl hamar.

Ne fald, mert megfekszi az agyadat. Ha kapkodsz, úgy esélyed sincs, hiszen gyors tempóban eddig sem értetted.

Ez egy nagyon sűrű szöveg. Olvasgathatod félgőzzel is, de amikor megtanulni akarod, akkor rendesen neki kell ülnöd az olvasásának, különben szédelegni fogsz a sok információtól.

Sok tankönyv a mozgásokkal kezdi az anyagot és a mozgásokat létrehozó erőkkel folytatja. Én nem. A sorrend szerintem így ésszerű, engem is így tanítottak. De nem kötelező az elejéről haladnod. **Használd a tartalomjegyzéket.** (Könyvjelzők, bookmarks.) Ne felejtsd el, hogy **ebben a fájlban *keresni is tudsz***. (Valószínűleg Ctrl-F-fel.)

Amit megértettél, azt **meg is kell jegyezned**. Ne ringasd magad abban a hitben, hogy ha már érted, akkor bármikor fel is tudod idézni. Mondd is fel magadnak a tanultakat, félhangosan.

A képleteket és törvényeket meg kell tanulnod! Kívülről, betű szerint, mindenáron! Nem elég jó, amíg nem tudod bármikor gördülékenyen és hibátlanul elmondani. Nehéz, tudom, de nagyon fontos, hidd el nekem. Ha egy feladat megoldásakor sokáig kell törnöd rajta a fejedet, akkor fontos perceket veszítesz, ha pedig nem sikerül felidézni, akkor annyi.

Használd következetesen a tanult kifejezéseket. Segíteni fogok abban, hogy ezt megszokd.

Ezután rajtad a sor, próbáld **gyakorló feladatok** megoldásában felhasználni azt, amit a fejedben összeraktunk. Én elmagyarázom az elveket, példákat mutatok, de *a jegyeidet feladatok megoldásával szerzed.* Használj olyan feladatgyűjteményt, amelyik megadja az eredményt is. Ha az nem egyezik a tiéddel, akkor tudhatod, hogy hibáztál.

A könyvet **ne nyomtasd ki**, mert az ábrák színei eltűnnek, és úgy már nincs értelmük.

Mielőtt belefogsz, nézd meg a http://fizikasegitseg.atw.hu oldalon, hogy nincs-e ott egy ennél frissebb változat.

Ott letölthetsz egy **Fizika sietőknek** című rövidített, összefoglaló változatot is.

Testek

A testnek ereje van, sebessége és energiája. De mi az a test?

Tömeg

A test egy általánosító fogalom, minden tárgy, amivel a fizikában történik valami, egy-egy test.

Minden testnek van tömege, ez az anyag elválaszthatatlan tulajdonsága. **A tömeg az anyag mennyiségét jelenti.** Az SI rendszerben **a tömeg alapmértékegysége a kilogramm**, annak ellenére, hogy a szó a gramm ezerszeresét (kilo) jelenti. (Lásd még a könyv végén a PREFIXUMOK fejezetet.)

Egyelőre nem sikerült olyan megbízható természeti etalont találni, amelyből a kilogramm bármikor rekonstruálható lenne, ezért 1 kilogramm tömeg egyenlő a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban őrzött **kilogramm-etalon** tömegével. Korábban az volt a definíció, hogy a kilogramm pontosan 1 dm^3 (1 liter) 4°C-os tiszta víz tömege; ezt ma már csak közelítő meghatározásként szabad használni.

> Kb. $5{,}018370833 \times 10^{25}$ darab 12-es atomtömegű szénatom össztömege is 1 kg. Ez a kijelentés elég haszontalannak látszik, mégis fontolgatták már ehhez hasonló definíció megalkotását.

Az etalonból minden országnak vannak pontos másolatai, ezeket időnként összehasonlítják a Sèvres-ben hét lakat alatt őrzött eredetivel.

> Érdekesség: Ha valaki lereszelne egy darabot az eredeti etalonból, akkor furcsa módon nem az etalont rontaná el a kilogrammhoz képest, hanem megváltoztatná magát a kilogrammot. Ezután elvileg a többi etalonból is le kellene reszelni, valamint átállítani a világ összes mérlegét és súlykészletét, árjegyzékét, fuvarozási szabályait, mérnöki szabványát stb. Persze a valóságban nyilván nem ez történne, de nagyon komoly fejtörést okozna.

Későbbi fejezetekben ki fog derülni, hogy **a tömeg két lényegi tulajdonságával válik számunkra érzékelhetővé és érdekessé: a tehetetlenségével és a tömegvonzásával**.

Egy test tömegét hétköznapi körülmények között a súlya alapján mérjük meg, vagy rugós mérleggel, vagy pedig összehasonlítva a súlyt egy ismert tömeg súlyával, kétkarú mérlegen. A súlytalanság körülményei között egyik módszer sem használható, ilyenkor a tömeget a tehetetlenségének a megmérésével állapítjuk meg, úgy, hogy *erőt fejtünk rá, és megmérjük, hogy ettől milyen gyorsan nő a sebessége*. Erről a 3. témakörben lesz szó, A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezetben. **A tömeg és a súly fogalmainak kettéválasztása** a feladatok pontos értelmezéséhez is fontos **alapkövetelmény**.

A **tömegmegmaradás elve** a következő: ha veszünk néhány testet, akkor akárhogy aprítjuk vagy összeforrasztjuk azokat, megolvasztjuk, megfagyasztjuk, összegyűjtve az elpárolgott anyagot is, a végül kapott testek **együttes tömege nem fog változni**. Már a 18. században is megfigyelték, hogy egy zárt kémcsőben levő tiszta széndarab – konkrétan egy apró gyémánt – és levegő együttes súlya nem változott meg attól, hogy a gyémántot kívülről hevítve elégették.

Tömeg nem semmisíthető meg és a semmiből nem keletkezhet. A zárt rendszerben levő tömeg állandó.

> Titkos megjegyzés: A tömegmegmaradás elve nem teljesen érvényes *minden* elképzelhető helyzetre. Einstein látásból mindenki által ismert tétele, a *tömeg–energia ekvivalencia* tétele szerint a test nyugalmi tömege egyenesen arányos a testben tárolódó relativisztikus energia mennyiségével, és az arányossági tényező a vákuumban mért fénysebesség négyzete, tehát: $E=m \cdot c^2$. Ebből még az is kihozható, hogy a tömeg *energiasugárzássá alakulhat*. De ez a terület már nem tartozik a klasszikus fizika témakörébe, ejthetjük is.

Halmazállapot

Már kisiskolásként megtanultuk a három halmazállapotot: **szilárd, folyékony és légnemű**. A hőmérséklettel fölfelé haladva először megolvad, aztán elpárolog, lefelé először lecsapódik, aztán megszilárdul. Általában ennél többet nem is kell ezen agyalni.

De a dolog igazából nem ennyire egyértelmű, merthogy a folyadéknak az a definíciója, hogy a pillanatnyi alakját megváltoztatva felveszi az edény formáját és kitölti az alját. Azt viszont nem mondta meg senki, hogy ezt *mennyi időn belül* kell megtennie. A víz folyékony, oké. A méz is az, csak lassabban folyik.

Amikor már meg van cukrosodva, még lassabban. Egy ausztrál egyetemen 1930 óta folyik egy kísérlet egy tölcsérbe öntött, megszilárdult szurokkal, szobahőmérsékleten; eddig 9 csepp esett le, a 10. csepp kialakulásának elején járunk. Szilárd vagy folyékony? Szóval kicsit zavaros ügy ez.

Negyedik halmazállapotnak tekintik a **plazma**állapotot, amikor az extrém forró anyagból már az elektronok is elszálltak, és maradt egy protonokból és neutronokból álló ionfelhő.

A légnemű halmazállapotot nem nevezhetjük egyszerűen gáznak, mert légnemű a pára és a gőz is, és általában a gázban oldott folyadék. Az egynemű gáz a zárt tartály teljes térfogatát egyenletesen kitölti (amíg a tartály magassága nem túl nagy), a zavartalan állapotban hagyott keverék pedig – mint például a levegővel keveredő szén-dioxid – szétválik, és a sűrűség szerint rétegződik.

A **szilárd halmazállapot** nem azonos a test **szilárdság**ának fogalmával, sem az ideálisan **szilárd test** vagy **merev test** fogalmával. A szilárd halmazállapot az, hogy nem folyik, a szilárdság pedig addig tart, amíg a test repedése, törése, szakadása be nem következik. A szilárd test elméleti fogalma pedig a példákban jelenti azt, hogy a test alakja nagy erő hatására sem változik meg.

A légnemű anyagok összenyomhatók vagy ritkíthatók, ekkor a térfogatuk és a sűrűségük változik. **A folyadékokat összenyomhatatlannak** tekintjük, a térfogatuk és sűrűségük erő hatására nem változik meg.

Sűrűség

A sűrűség arról árulkodik, hogy a testbe "mennyi anyag van zsúfolva". **A sűrűség a test anyagából vett, egységnyi térfogatú darabnak a tömege.** A térfogat egysége az SI rendszerben a m^3 (lásd még erről a könyv végén levő MÉRTÉKEGYSÉGEK fejezetet). A sűrűség kiszámításának képlete:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

ahol ρ (rhó) a sűrűség, m a test tömege, V pedig a térfogata. A sűrűség mértékegysége

$$[\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

A feladatokban rendszerint egyenletes sűrűségű, homogén anyagú testek szerepelnek. A vas sűrűsége nagyjából 7800 kg/m^3, az alumíniumé 2700 kg/m^3, a vízé 1000 kg/m^3, a levegőé normál nyomáson 1,293 kg/m^3. A sűrűség kicsit függ az anyag hőmérsékletétől, gázok esetében a nyomásától is.

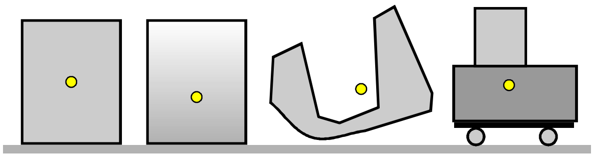
Itt az alkalom arra, hogy feltedd magadnak a kérdést: mire emlékszel ebből a néhány bekezdésből. Ismerős fogalmakról van szó, hajlamosak vagyunk az ilyet csak átfutni. Ha minden érthető volt, akkor most olvasd el újra, és próbáld megjegyezni nem egyszerűen azt, amit olvastál, hanem azt is, hogy a fejezetben *miről volt szó*. Némítsd le a telefont, állítsd le a facebookot, a tévét, az öcsédet, még a zenét is. Olvasd el kortyonként, csak erre koncentrálva. Lásd, értelmezd, fogd fel teljességében, *illeszd hozzá más ismereteidhez*, és préseld be az emlékezetedbe. Itt ér véget az olvasgatás, és itt kezdődik a *munka*. **Tíz ilyen perc többet ér, mint fél óra a szokásosból.**

Tömegközéppont

Ha egy testet megforgatva feldobunk, akkor mindig egy bizonyos pontja körül fog forogni, bármelyik irányba. Ezt a pontot **tömegközéppont**nak hívjuk. Itt van "az anyagának" a középpontja.

Amikor majd a súlyról és az egyensúlyról lesz szó, a tömegközéppontot súlypontnak fogjuk hívni. A tömegvonzás és a súlyerő *támadáspontjának* is ezt tekintjük majd.

Matekból ismered a háromszög súlypontjának fogalmát. Ha egy tű hegyére fektetnéd a háromszöget, ezen a ponton feltámasztva, akkor az egyensúlyban maradna. Négyzetnél az átlók metszéspontja ez a pont és így tovább. Képzeld el, hogy a feltámasztott háromszög vastagodni kezd. Mintha egymásra raknánk rengeteg teljesen lapos, egyforma háromszöget. A súlypont, tömegközéppont vízszintesen ugyanott marad, ezért nem fog lebillenni. Függőleges irányban viszont emelkedik, úgy, hogy mindig a vastagságon belül félúton marad.



Homogén, egyenletes sűrűségű testben a tömegközéppont a test **mértani középpontjával** esik egybe. A példákban többnyire ilyen testekről esik majd szó. Inhomogén, egyenetlen sűrűségű testben viszont ez a pont a **sűrűbb rész** felé tolódik!

A tömegközéppont csak egy mértani pont, ami a testhez tartozik, és vele mozog. Ha fel tudnánk függeszteni a testet egy belső pontjában, a tömegközéppontjában, *akkor a test pontosan itt lenne egyensúlyban*.

Egy palack tömegközéppontja máshová kerül, ha kiöntöd belőle az ital egy részét. A tömegközéppont nem is mindig van a testen belül! Gondolj például egy gyűrűre vagy egy patkóra, az ábrán a harmadik test is ilyen.

Több testnek is (akár milliárdnyinak is) meghatározható a ***közös tömegközéppontja***, lehetnek ezek egy kocsi rakománya, egy csomó biliárdgolyó vagy akár csak egy kalapács. Ha a kalapácsot megpörgeted, jól látható, hogy a fej és a nyél által képzett *merev rendszer* tömegközéppontja a fej közelében van.

Egy rendszer testeinek közös tömegközéppontja a rendszer centruma.

Hol van egy vékony rúd tömegközéppontja? És ha U alakúra hajlítod?

Mozgástani feladatokban, képzeletben gyakran helyettesítünk egy testet egy vele *azonos* tömegű, a tömegközéppontjában levő, pontszerű objektummal. Vagy elképzeljük, hogy a test egész anyagát egyetlen pontnyi méretbe préseljük össze. Ilyenkor mondja úgy a feladat, hogy „Egy pontszerű test…”, és nem akarjuk tudni, hogy a test mekkora méretű, csak a tömege érdekes. Ezzel például ki akarjuk hagyni azt a lehetőséget, hogy a test foroghat, mert az csak belekavarna az adott helyzetről szóló magyarázatunkba. A pontszerű tömeget úgy is hívjuk, hogy **tömegpont**.

Figyelj: az előbb arról volt szó, hogy hol van a tömegközéppont, most pedig már arról, hogy annak a pontnak tömege is lehet, és akkor a testet ez a pontszerű tömeg fogja jelenteni. A tömegpontok egyformán egyetlen pontnyi méretűek, de a tömegük különböző lehet, bármennyi.

Erről szól a **tömegközéppont-tétel**:

Egy *pontrendszert* egyenértékűen helyettesíthetünk a közös tömegközéppontjukba helyezett képzeletbeli tömegponttal (az egyensúlyi és mozgástani feladatokban). A helyettesítő tömegpont tömege az egész rendszer össztömegével egyenlő.

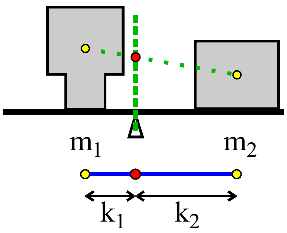
A pontrendszer olyan pontszerű tömegeket jelent, amelyek egymással kapcsolatban vannak, és egységes viselkedésű rendszert alkotnak. Egy test is pontrendszer, mert úgy vesszük, hogy végtelen sok apró tömegpontból rakódik össze, amelyeknek a helye ismert, és ezért meg tudjuk határozni a pontrendszer, a test tömegközéppontját. De egy testről pontrendszerként csak néhány törvény beszél, számunkra egy test csak test lesz, aminek látjuk a méretét, alakját. Viszont a tömegközéppont-tétel azt mondja ki, hogy ha azt nézzük, hogy a test milyen gyorsan halad, mennyi a súlya vagy mennyi a helyzeti energiája, akkor elég, ha az egész test helyett csak annak a tömegközéppontját figyeljük, méregetjük. Mert úgy egyszerűbb, és mert ez megengedett.

A tétel azzal, hogy pontrendszerről beszél, azt teszi lehetővé, hogy ha több testünk van, akkor mindegyiket helyettesíthessük a tömegközéppontjába tett tömegponttal, majd *ezeket a pontszerű tömegeket is* pontrendszernek vehessük, és helyettesíthessük az ő közös tömegközéppontjukba tett együttes tömegű ponttal. És ez lehet része újabb rendszernek is, és így tovább. Bizonyos esetben akár az egész Naprendszer helyettesíthető egyetlen tömegponttal, amelynek a tömege az egész Naprendszer együttes tömegével egyenlő. Ha a Tejútrendszer csillagai közötti vándorlásunkat nézzük, megkönnyítheti a számításokat. *Megengedett* az ilyen, a tétel ezt mondja, és látni fogod, hogy hogyan használjuk.

Pontszerű tömeggel a testek bármelyik *csoportja* is helyettesíthető.

Tudom, hogy nehéz ez a sok tömegpont, tömeg, pontszerű tömeg, tömegközéppont. De hát ez a nevük. De nem így megy ez a könyv legvégéig, ne aggódj. Olvasd el újra, és figyeld meg, hogy pontosan mi mire vonatkozik.

Mi a különbség a tömegközéppont és az oda képzelt pontszerű tömeg között?



Hogyan keressük meg két test centrumát (közös tömegközéppontját)? Először is mindkét testet behelyettesítjük a tömegközéppontjukba képzelt tömegponttal, majd ezt a két pontot képzeletben feltesszük egy mérleghintára. Most meg kell keresnünk azt a pontot, ahol a hintát alátámasztva az egyensúlyban van. A feltámasztás fölött van a két test rendszerének centruma, mellesleg a két tömegközéppontot összekötő egyenesen is. Ne felejtsd el, hogy az ábrán a két sárga pont *nem* egyforma nehéz.

Keresd meg néhány tárgy tömegközéppontját ezzel a módszerrel!

A centrum helye egész pontosan kiszámítható, a **mérleghinta-szabály** szerint. Ha m_1 és m_2 jelöli a két test tömegét, akkor a centrum, a piros pont úgy fog elhelyezkedni, hogy igaz legyen a következő:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ahol k_1 és k_2 a centrum távolságai az m_1 és m_2 testektől, ahogy az ábra mutatja. *Vedd észre, hogy az indexek megfordulnak*. Azaz **a centrum távolsága a két tömegponttól *fordítottan* arányos a tömegekkel**. Mondhatjuk úgy is, hogy a két távolságnak, azaz a hinta két karjának az aránya fordítottja a tömegek arányának. (Vagy mondhatjuk úgy is, hogy a centrum olyan arányban osztja ketté a szakaszt, mint amennyi a két test tömegének a reciproka.) Valamelyiket jegyezd meg, de előtte nézd is meg alaposan. Egyébként tapasztalatból is tudjuk, hogy a tálcát úgy fogjuk meg, hogy közelebb legyünk a tele pohárhoz, mint az üres pohárhoz, mert így lesz egyensúlyban. A kövér gyerek és a sovány gyerek között az egyensúlyi alátámasztási pont a kövér gyerekhez lesz közelebb.

A fenti képlet írható másképp is, ha a törtek nevezőivel "keresztbeszorzunk":

$$k_1 \cdot m_1 = k_2 \cdot m_2$$

Esetleg így könnyebben megjegyezhető. Ugyanaz van kétféleképpen leírva. Több test esetén mindig kettőt kiválasztasz, aztán a centrumokból is kettőt, és így haladsz, amíg egyetlen pontod marad.

Érdekesség: A Hold tömege csak 1/81 része a Föld tömegének. Ezért a Föld–Hold rendszer közös tömegközéppontja kb. 1600 kilométerrel a Föld felszíne alatt van, és igazából nem a Hold kering a Föld körül, hanem mindkét égitest "kering" e körül a pont körül.

Ha a mérleghinta három pontjából bármelyik kettő helyét ismerjük, akkor abból kiszámolható a harmadik pont helye is.

Kicsit hosszúnak találod? Lesz még sokkal hosszabb is. A tankönyvvel az egyik probléma az tud lenni, hogy rövid, de épp azért nem is érted. Egy egyébként méltán ismert középiskolai összefoglaló könyvből (Holics: Fizika) idézem *A tömegközéppont* fejezetet:

"Egy pontrendszer tömegközéppontján azt a pontot értjük, amelynek helyvektora: $r_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ "

Ez volt a fejezet. No, ezek után nyugodtan dönthetsz, hogy inkább ezt a verziót fogyasztod, vagy állhatatosan átrágod magadat azon, amit én írtam, feltételezve rólam a segítő szándékot. :-) De keverheted is.

A tankönyvekkel az is lehet probléma, hogy messzebb mennek, mint ahol te még követni bírod. A tankönyv a jó fizikásokat igyekszik kiszolgálni. Előre szólok, hogy ebben a könyvben én nem mondok el mindent precízen. Megpróbálok megmaradni azon a körön belül, ameddig a te türelmed és erőd talán kiterjedhet. Egy-egy fejezetből sokszor utólag is kivettem részeket, itt is így történt. Ha a tanár kijavít téged, vagy hozzáfűz valamit ahhoz, amit mondasz, annak ez is lehet az oka.

Nem biztos, hogy tudsz róla, de a most használt PDF-néző programod (XChange, Foxit, Acrobat) lehetővé teszi szavak kiemelését, aláhúzását, megjegyzések beillesztését. Mentsd ki a letöltött könyvet, nyisd meg a fájlt a gépedről, és a változásokat mindig mentsd el.

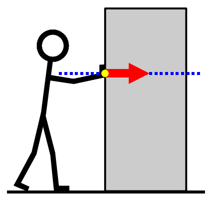
Erők

Ami a mozdulatlan, szilárd testek között zajlik.

A tananyag ebben az évben a **SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA**. Elsőként bevezetünk, megbeszélünk néhány alapfogalmat, aztán majd elkezdjük használni ezeket összetettebb fogalmak magyarázatában. Ha ti a mozgásokkal kezdtétek az évet, akkor is olvasgathatsz ebből a témakörből, mert nem nehéz.

Erő [redacted]

Az erő anyagi testek egymásra hatásának formája és mértéke. Ha egy test mozgása vagy alakja megváltozik, azt csakis egy erő okozhatta. **Az erőt mindig egy test hozza létre**, közvetlenül vagy erőtér közvetítésével hatva a másik testre. Ha egy testre erő hat, és a test mégis mozdulatlan marad, az csak azért lehetséges, mert valahonnan hat rá egy **ellenerő** is.



Az erő vektormennyiség, azaz van nagysága és iránya is. (Lásd a MATEK témakört!) Az **erővektor** vonalában elhelyezett egyenest az erő **hatásvonal**ának hívjuk, az erő **támadáspont**ja pedig az a pont, ahol az erő a testre hat. Tehát ha nekitámaszkodsz a szekrénynek, akkor erőt gyakorolsz rá, amely ez esetben vízszintes irányú, és a szekrény belseje felé mutat. A támadáspontja pedig ott van, ahol a szekrényt nyomod. Az erővektort *jelképező* nyilat mindig úgy helyezzük el a rajzon, hogy a nyíl kezdőpontja kerül az erő támadáspontjához.

Az erő "továbbadódhat" egy merev testen keresztül. Ha ráülünk egy székre, akkor a súlyerőnk nyomja a széket, a szék pedig nyomja a földet, továbbadva a súlyerőnket, hozzátéve még a saját súlyát is. A gyakorlatban az erő továbbadására jellegzetesen használt eszköz egy rúd vagy egy kötél, az utóbbi csak húzó irányban.

Mi hoz létre erőt? Mik az erővektor adatai? Mi kerül a támadásponthoz?

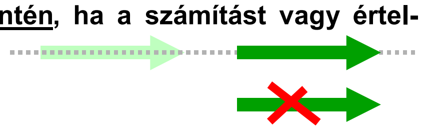
Az erő jele $\mathbf{F}$ (force), de néha más nagybetűvel jelöljük, például a súly esetében G-vel. A mértékegysége az SI mértékegységrendszerben a **newton (N)**. Mivel az erőt a test *tömegének* és az erő hatására létrejövő *gyorsulásának* a szorzatából származtatjuk (lásd később), a mértékegység megfeleltetése

$$1\ \mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

A súly is az erő egyik előfordulási formája, lásd a SÚLYERŐ fejezetet. Egy 1 kg tömegű test súlya (tengerszinten) 9,80665 N, ezt a feladatokban gyakran 10 newtonra kerekítjük. Tehát 1 N körülbelül akkora, mint egy 10 dekagrammos tárgy súlya.

A feladatok megoldásában ragaszkodni kell a newtonhoz *minden* erő megadásakor, különben a mindenféle fizikai mértékegységek átváltása hibás lesz.

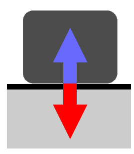
Az erő vektorát a rajzokon eltolhatjuk a saját hatásvonala mentén, ha a számítást vagy értelmezést ez megkönnyíti. A két vektor ilyenkor egyenértékű.



Kölcsönhatás, ellenerő

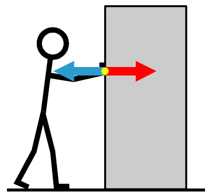
Newton III. törvénye (A *hatás–ellenhatás* törvénye):

Ha egy test erőt (hatást) fejt ki egy másik testre, akkor az a test *ugyanott* egy ugyanakkora, de ellentétes irányú ellenerőt (ellenhatást) fejt ki erre a testre. A két erő egymást kiegyenlíti.



Ha ülünk egy széken, akkor lefelé nyomjuk azt, ennek következményeként a szék felfelé nyom bennünket ugyanakkora erővel. Mi fejtünk ki egy erőt a székre, és a szék fejt ki egy ellenerőt ránk, ezek pedig kiegyenlítik egymást, ezért azonos nagyságúak, ellentétes irányúak. A két erővektor egy vonalba esik. A láda a piros erővel nyomja a földet, a föld ugyanakkora, de ellentétes irányú kék ellenerővel nyomja a ládát. *Vigyázz, mindig figyelj oda arra, hogy melyik erő melyik testre hat.*

Egy polcot lefelé húz a saját súlya és a rárakott tárgyak súlya, a polc ezeknek az erőknek *az összegével* húzza a kampókat, amelyekre a polc fel van függesztve. De a kampók ugyanakkora ellenerővel hatnak a polcra, ellentétes irányba. Ha a Föld vonz bennünket egy erővel, akkor *mi is vonzzuk* a Földet egy ugyanakkora erővel. Ha megpróbálunk eltolni egy nagy szekrényt, akkor vízszintesen nyomjuk egy erővel, a szekrény pedig minket nyom pontosan ugyanakkora erővel. Ha még erősebben nyomjuk, akkor az ellenerő is nő; ha nem nyomjuk, a szekrény sem nyom bennünket. Ha kötéllel *húzunk* egy szánkót, akkor a szánkó visszahúz bennünket ugyanakkora erővel.



Az ellenerő egy "aktív" erő "passzív" ellenerejeként születik, **igazodik hozzá**, kiegyenlíti azt. Mint például a szék ellenereje, válaszul arra az erőre, amennyivel mi nyomjuk. A szék nem nyomhat bennünket nagyobb erővel annál, mint amennyivel mi nyomjuk őt, különben felemelkednénk. De ha egy kigyúrt óriás ül rá, akkor a szék az ő súlyának megfelelő erőt fog kifejteni. Az aktív erőt valami létrehozza, erre a testre hatva, amitől ebben a testben ellenerő *indukálódik*, ami a másik testre visszahat.

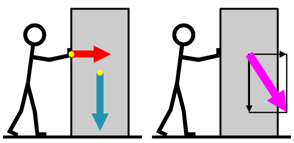
Két aktív erő is kiegyenlítheti egymást, például egy harapófogóban.

Egy **sík felület**, például egy fal vagy egy lejtő által kifejtett **ellenerő mindig a síkra merőleges**.

Eredő erő

Newton IV. törvénye szerint

> **Ha egy testre egyidejűleg több erő hat, akkor azok a számításokban egyenértékűen helyettesíthetők egyetlen erővektorral, amely a többi erővektor matematikai vektorösszege, a fizikában használt szóval EREDŐJE.**

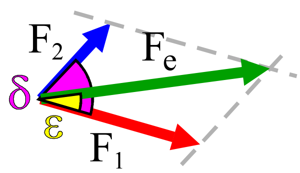


Nézd meg a rajzot: a szekrény súlyereje a tömegközéppontjában "támad" (kék), a te támaszkodó erőd viszont ott, ahol nyomod a szekrényt (piros). A két vektor összege, eredője a lila nyíl, amely a te erődet és a szekrény súlyerejét együttvéve a törvény értelmében egyenértékűen helyettesíti. Meg fogod tanulni, hogy ez a helyettesítés mikor és mire használható.

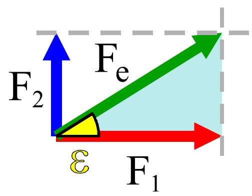
Az eredő nagyságát és irányát nekünk kell kiszámítanunk. Három esetet kell megkülönböztetnünk: az egyszerű esetben a vektorok szöget zárnak be egymással, a hatásvonaluk metszi egymást. A második esetben a vektorok hatásvonala egybeesik, a harmadik esetben a hatásvonalak párhuzamosak.

Több erővektor eredője úgy állítható elő, hogy megtaláljuk két erő eredőjét, majd annak és a harmadik erőnek az eredőjét és így tovább.

1. eset: szöget bezáró erők. Az eredőt formailag egy szerkesztéssel találjuk meg. Ez azzal kezdődik, hogy ha a vektorok kezdőpontjai nem esnek egybe, akkor a hatásvonalaik mentén eltoljuk őket. **Eredőt szerkeszteni csak úgy lehet, ha mindkét vektor közös pontból indul.** Az előbb a szekrényre ható erőket is eltoltam, láthatod a második képen a vázlatát. Tekintsd meg a könyv végén levő VEKTORMŰVELETEK fejezet.



Két vektor eredőjének megtalálásához a két vektorból egy parallelogramma két oldalát hosszuk létre, és az eredőjük ennek a parallelogrammának a közös kezdőpontból induló átlója. Kicsit bővebben: mindkét vektor (F_1 és F_2) *végpontjából* segédvonalakat húzunk a másik vektor vonalával párhuzamosan, és a két segédvonal metszéspontja jelöli ki az eredővektor (F_e) végpontját. Az eredő kezdőpontja pedig egybeesik a másik két vektor kezdőpontjával.



Az eredő erő vektora ezután a saját hatásvonalában szintén eltolható, ha kell.

A módszert **parallelogramma-szabály**nak hívjuk.

A számításhoz képletekre van szükséged, ezek a koszinusz-tételből és a szinusz-tételből vezethetők le, matekból tanulni fogod. *Ha ezeket nem kérik tőled, akkor kihagyhatod.*

Ismert $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$, valamint az általuk bezárt δ szög. Általános esetben **az eredő nagysága**:

$$F_e = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\delta}$$

Ha a két vektor derékszöget zár be, akkor létrejön egy jól ismert derékszögű háromszög, és mivel **cos 90°=0**, a képlet a PITAGORASZ-TÉTELre egyszerűsödik (hasonlítsd össze az előzővel):

$$F_e = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} \ .$$

Az eredő irányát valamelyik erőhöz viszonyítva adjuk meg. Az $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_e}$ által bezárt $\boldsymbol{\varepsilon}$ szög kiszámítása:

$$\boxed{\sin\varepsilon = \frac{F_2}{F_e}\cdot\sin\delta \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{F_2}{F_e}\cdot\sin\delta\right)}$$

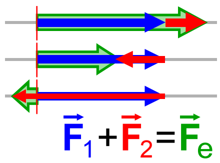
Derékszöget bezáró erőknél δ=90° (nézd a képet), és **sin 90°=1**, ezért az eset ismét egyszerűsödik:

$$\sin\varepsilon = \frac{F_2}{F_e} \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon = \operatorname{arc\,sin}\frac{F_2}{F_e} \ .$$

A képleteket a rajzzal együtt tanuld meg, mert ha a feladatban másképp vannak az erők, akkor a képletet ahhoz igazodva kell értelmezned!

Az eredő szerkesztésekor mi az első lépés? Honnan húzod a párhuzamost? Mivel párhuzamos?

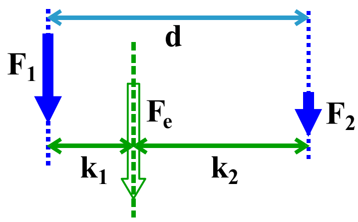
2. eset: az erők hatásvonala egybeesik. Ekkor a vektoroknak összesen kétféle iránya lehet, amit előjellel különböztethetsz meg egymástól. A teendő egyszerű: összeadod a hosszukat, *figyelve az előjelre*. Az ábrán mindig a zöld vektor a kék és a piros összege, mutatok különféle példákat azonos és ellentétes irányba eső vektorokkal is. Azt kell észben tartanod, hogy ha egymáshoz illeszted az összeadandó vektorokat, akkor az eredővektor kezdőpontja az első erővektor kezdőpontja lesz.



Párhuzamos hatásvonalú erők eredője

Nézzük az eredőszámítás harmadik esetét. **Adott két erő ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$), amelyek hatásvonalai egymással párhuzamosak**, a távolságuk **d**. Keressük a két erő eredőjét.

Az eredő két adatát (nagyság és hatásvonal) külön-külön tudjuk meg. Az eredővektor **nagysága** az erők nagyságának előjeles összegével egyenlő, úgy, mint ha a két erő hatásvonala egybeesne.



Az eredő hatásvonala párhuzamos az erőkkel. A hatásvonal **helyét** úgy kell kiszámítani, hogy érvényes legyen rá az alábbi képlet:

$$\boxed{|F_1\cdot k_1| = |F_2\cdot k_2|}$$

ahol F-fel az erőket, k-val az eredő erőtől leendő távolságukat jelöltük. Hasonlít a képlet a TÖMEG-KÖZÉPPONT számításának képletéhez, és még jobban fog hasonlítani az egyensúlyban levő mérleghinta forgatónyomaték-egyenletéhez, hamarosan jön. Azért kell a szorzatok abszolút értékét venni, hogy se az erővektorok iránya, se a *forgató* hatásuk előjele ne zavarjon bennünket a karok arányának kiszámításában. A képlet ezért akkor is működik, ha a két erő iránya ellentétes.

Az eredő hatásvonala tehát oda kerül, ahol a mérleghinta alátámasztása lenne az egyensúly megtalálása után. **Az eredő mindig a *nagyobb* erőhöz van közelebb.**

Ahogy az egymást metsző hatásvonalú erők eredőjének szerkesztésére használt módszer neve parallelogramma-szabály, úgy a párhuzamos hatásvonalú erők eredőjének meghatározására használt szabály neve **mérleghinta-szabály**.

Ennek az egyenletnek két ismeretlenje van (k_1, k_2), ezért kell egy második egyenlet: $k_2 = d - k_1$.

Ebből kijön, hogy $k_1 = \dfrac{F_2\cdot d}{F_1 + F_2}$, végül visszahelyettesítesz az első egyenletbe, hogy megkapd k_2-t is.

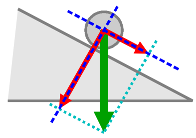
Ha ilyen példát kell kiszámolnod, akkor nem kell pánikba esni. Készíts egy jó vázlatot, írd fel az alapképletet a megfelelő jelölésekkel, írd le, hogy mit kell kiszámolnod. A pontok felét talán már megkapod ezért. Ezután egy kétismeretlenes egyenletet kell megoldanod. Ha sikerül ehhez hasonló jó második egyenletet felállítanod az egyik ismeretlenre, akkor végül is sínen vagy, próbálkozz, és jutsz, ameddig jutsz. Ha nem megy, és más dolgod is van még, akkor lépj tovább.

Az eredő erőnek így a nagyságát, irányát (előjel) és a hatásvonalát kaptuk meg. Hogy ebben a vonalban az eredővektort végül hová toljuk el, hová helyezzük a kezdőpontját, az a helyzettől, a feladattól függ. Ha egy feladat nem a két erőt adja meg, akkor sajnos matekozni kell, de maga *a képlet ugyanaz*.

Az eredő erőkomponensei

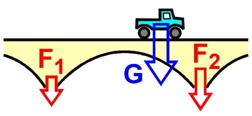
Newton IV. törvénye megfordítható:

Minden erővektor helyettesíthető két olyan vektorral, amelyeknek ez az erő az eredője.



A parallelogramma-szabályt használjuk "visszafelé", figyeld a sorrendet: adott az F_e (zöld). **Mi találjuk ki**, hogy a két vektorösszetevő (más szóval ***komponens***) hatásvonala hol legyen, aszerint, hogy az adott esetben mi a célravezető. Berajzoljuk a vonalakat (kék). Az F_e hegyétől párhuzamosokat húzunk (cián) a berajzolt hatásvonalakkal, ezek kimetszik a vektorok végpontjait. Végül a hatásvonalakon a metszéspontokig meghúzzuk az összetevőket (piros). Mindig ellenőrizd a parallelogramma-szabállyal, hogy az eredeti vektor valóban eredője legyen a két kapott vektornak!

Egy vektorhoz végtelen sok összetevő-páros található, azért, mert a két komponens számára bármilyen irányba kijelölhetjük a hatásvonalakat. Te úgy választod ki a megfelelőt, hogy valamilyen gyakorlati szempont alapján előre kijelölöd a két összetevő hatásvonalát. A feladatokban gyakran az bizonyul célszerűnek, hogy a két komponens merőleges legyen, de lehet, hogy az egyik komponensnek a vízszintes irány kötelező, vagy a függőleges, vagy a test mozgásának iránya stb., majd meg fogod látni.



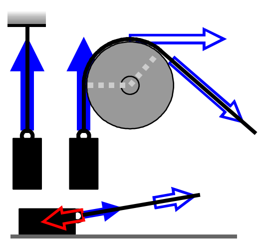
Az erő persze párhuzamos komponensekre is felbontható, csak a távolságukat kell kitalálni. Egy hídon áll egy teherautó. A híd lábai a talajra nehezednek, hordozva a híd súlyát. A teherautó súlya (G) ehhez hozzáadódik, azt is a talajnak kell megtartania, a híd közvetítésével. F_1 és F_2 eredője, az F_e itt a G súlyerő, az alapképlet most is a mérleghinta-szabály. Valójában csak más adatokat ismerünk belőle. Az egy eredő kétfelé történő párhuzamos felbontásának elve a **híd-szabály**.

Kényszererő

Szabaderőnek nevezzük azokat az erőket, amelyek hatására egy test szabadon elmozdulhat. Ha egy *kényszer* ezt a mozgást korlátozza, akkor a mozgás *kényszermozgás*. A kényszert létrehozó erő **kényszererő**. A kényszererők egy része egy erő ellenerejeként születik.

Ha egy golyót egy lejtőre teszünk, a golyót lefelé húzza a súlya, de a lejtő a mozgását másfelé erőlteti. A lejtő által a golyóra gyakorolt nyomóerő kényszererő. A bennünket tartó szék megakadályozza, hogy mi leessünk arra, amerre a súlyunk húz, tehát a szék által ránk gyakorolt tartóerő is egy kényszererő. A körmozgás során a testet egy erő húzza befelé, ez kényszeríti a körpályára, ez is kényszererő.

Kötélerő

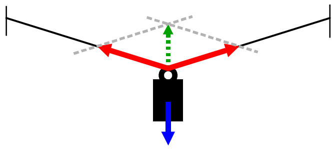


A kötél (fonál) olyan test, amely révén erő továbbítható. Ha a kötelet meghúzod az egyik végén, akkor az továbbadja a húzóerőt a másik végén annak a testnek, amelyhez kötve van. (Ettől a test nem feltétlenül mozdul el, lehet, hogy így tartasz valamit.) Ez akkor is így történik, ha a kötél nem egyenes, hanem csigán vagy kötéldobon van átvetve. Kötéllel nem tudunk eltolni egy testet, ahogy egy bottal, *a kötél csak húzni tud*. Az egyenes kötél által létrehozott húzóerő hatásvonala a kötél vonalában van. Ha a kötél nem egyenes, akkor a hatásvonal minden pontnál a kötél *érintője*. A kötélre nem lehet forgatónyomatékot (lásd később) kifejteni, mert a kötél nem szilárd test.

Ha egy kötél erőt fejt ki egy testre, akkor a hatás–ellenhatás törvénye szerint a test is erőt fejt ki a kötélre, ellentétes irányban, a kötelet húzva, (piros nyíl). Ettől a kötél el is szakadhat.

Ha egy feladat nem foglalkozik vele külön, akkor az ott használt "ideális" kötelet végtelen szakító-szilárdságúnak, súrlódásmentesnek, tömeg nélkülinek (tehát akadálytalanul gyorsulónak és saját súly nélkülinek) és vonalszerűen vékonynak vesszük, ezért ilyenkor nem is tekintjük testnek.

Példa: **szerkesszük meg azt a két erőt, amely a szárítókötélben ébred a középre akasztott test súlyának kiegyenlítéséül.** Csak a kék súlyerőt ismerjük, de a test mozdulatlanságának kötelező feltétele, hogy azt kiegyenlítse egy ugyanakkora (zöld) tartóerő, amelyről tudjuk, hogy függőleges, és azonos nagyságú a test súlyerejével. Ez azonban csak a kötélben ható húzóerőkből adódhat össze, mert a testet a gyakorlatban ezek tartják. Akkor pedig a két erőkomponens *a kötél vonalában van*, ahogy a kötélerőnél ez törvényszerű. Ideiglenesen berajzoljuk a zöld tartóerőt, a csúcsából a párhuzamosok megrajzolásával pedig megkapjuk a piros erőkomponensek hosszát. A kék erővel a két piros erő tart egyensúlyt.



Tömegvonzás, gravitáció

A tömeghez, halmazállapotától és mennyiségétől függetlenül, elválaszthatatlanul hozzátartozik egy belőle származó erő, a tömegvonzás, más szóval gravitáció. Ez a hatás a jelenlegi ismereteink szerint gömbszimmetrikus, nem árnyékolható, nem téríthető el, nem növelhető vagy csökkenthető, és csak a végtelenben csökken nullára. **A tömegvonzási erő két tömeg között jön létre:**

$$F_{grav} = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol $\mathbf{m_1}$ és $\mathbf{m_2}$ a két test tömege, $\mathbf{r}$ a *tömegközéppontjuk* közötti távolság, $\mathbf{f}$ pedig a gravitációs állandó, amelynek értéke:

$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

(Más helyeken az $\mathbf{f}$ helyett $\mathbf{G}$-vel jelölik, de ez keverhető a súlyerő jelével.) A nagyságrendje csak 10^{-11}, százmilliárdod. Ezt azt jelzi, hogy már egy kis gravitációs erőhöz is jó nagy tömeg kell.

Az f mértékegységét nem kell megtanulnod, ha le tudod vezetni a képletből. (MÉRTÉKEGYSÉGEK fejezet)

Sose tanulj be képletet úgy, hogy nem tanulod meg hozzá: „… ahol ez jelenti ezt, az jelenti azt”. Lehet, hogy egy feladatban más betűkkel vannak jelölve mennyiségek, esetleg egy ismert betűt más dolog megjelölésére használtak (idegen nyelvű szövegekben is előfordul ilyen), és ha csak mész a betűk után, ráfaragtál. A megtanult képletet egy megoldás közben, ha kell, írd le magadnak oldalra, elkülönítve, nem tilos, és gondold át, hogy az aktuális esetben mi mit jelöl, ezek után folytasd úgy, hogy a betűk helyére értelemszerűen helyettesíted be a feladatban használt betűket, értékeket.

A tömegvonzás egyenesen arányos a testek tömegeivel, kétszer akkora test tömegvonzása kétszer akkora. Viszont négyzetesen és fordítottan arányos a távolsággal, tehát ha a távolságot háromszorosra növeljük, a tömegvonzás 1/9-szeresére *csökken*. (3^2=9) Ha majd a Föld gravitációját kell számolgatnod, ne felejtsd el, hogy a felszínen levő test távolsága *nem nulla*, hanem 6373 km, mert a vonzást a Föld tömegközéppontjától kell mérni.

A hatás–ellenhatás törvényéből következően te pontosan akkora erővel vonzod a Földet, mint amennyivel az vonz téged. A két erő vektora a két tömegközéppontot összekötő egyenesre illeszkedik.

A tömegvonzás hatását közvetítő közegként egy régebbi, de még mindig kutatás alatt álló elmélet gravitonnak nevezett, még felfedezetlen részecskéket feltételez. Az általános relativitáselmélet szerint viszont a tömeg **a tér meggörbítésével** fejti ki vonzásszerű hatását.

Newton nem azt fedezte fel – a mese szerint –, hogy az alma leesik, hanem arra jött rá, hogy ez az unalmas jelenet úgy is nézhető, hogy a Föld vonzza magához az almát. A továbblépéshez a teret ez a másképp látás nyitotta meg. Mert akkor a Föld a túlsó felén is csak *maga felé* vonzza az almát, megválaszolva a régi kérdést, hogy onnan miért nem esnek le az emberek.

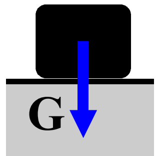
Mekkora tömegű test hoz létre 1 méter távolságból 1 N tömegvonzási erőt? Gondolkozz **…**

A kérdés *hiányos*, ezért megválaszolhatatlan. A tömegvonzási erő ***két*** test tömegétől függ, a képletben is láthatod. (És a tömegvonzás nem mindig a Földről szól.) Vagyis ha egy tankhajónak y tömegvonzási ereje van egy adott távolságban levő 1 kg-os testre, akkor 20y vonzereje lesz egy ugyanott levő 20 kg-os testre. Mindig meg kell adni azt is, hogy mekkora tömegre gyakorolt tömegvonzási erő a kérdés.

Pontosítok: mekkora tömegű test hoz létre 1 méter távolságból 1 N tömegvonzási erőt egy 1 kg tömegű testen? A képletben most F, m_1 és r értéke is 1, a számítás nagyon egyszerű: m_2=1/f=$1{,}493\cdot10^{10}$ kg, durván 15 millió tonna. És egy 100 kilós emberen? Csak *150 ezer* tonna. **Gondold át!**

Nehézségi erő

Ha egy test a Föld (vagy más égitest) közelében van, akkor nézhetjük úgy a helyzetet, hogy a Föld van *lefelé*. Ilyenkor azt az erőt, amivel a Föld a testet vonzza, **nehézségi erő**nek hívjuk. Ez az erő egyenesen arányos a test tömegével, és **a testre** hat. A jele $\mathbf{G}$, a mértékegysége newton. A hatásvonala függőleges, az iránya lefelé mutat, a támadáspontjának a test tömegközéppontját tekintjük.



$$G = m \cdot g$$

ahol $\mathbf{m}$ a test tömege (kilogrammban), a $\mathbf{g}$ (az ún. nehézségi gyorsulás) értéke ~**10** N/kg, lásd később.

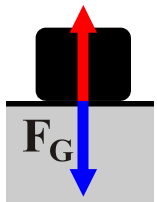
A tömegvonzási erő a testek tömegközéppontja közötti távolságtól is függ, ezért a testre ható nehézségi erőt befolyásolja az is, hogy a mérés milyen magasságban történik. A Föld sugara 6373 km, így 10 km magasan a nehézségi erő a tengerszinten mérhetőnek 99,687%-a. Számold ki te is.

Ha azt mondjuk, hogy "a test nehézségi ereje", akkor is **a testre ható** nehézségi erőről beszélünk. **A nehézségi erő hozza létre a súlyerőt.** Később majd látni fogod, hogy a súly "eltűnhet", de a nehézségi erő *mindig* megmarad.

Súlyerő

Egy test súlya az az erő, amivel a mozdulatlan test az alátámasztást vagy felfüggesztést nyomja.

Minden testnek van (vagy lehet) súlya. **A súlyerő forrása a test nehézségi ereje**. A nehézségi erő hat a testre, a súlyerő hat az alátámasztásra. A hatás–ellenhatás törvénye szerint a test által nyomott alátámasztás is nyomja a testet, egy ugyanakkora ellenerővel. Látod az előző és a mostani kép közötti különbség*ek*et? A feladatokban néha az egyik, néha a másik jellegű ábrát fogod látni, vagy éppen megrajzolni, attól függően, hogy éppen mi a lényeg. Szokás a test súlyát csak jelzésszerűen úgy ábrázolni, ahogy a nehézségi erőnél látod.



A súlyerő jele $\mathbf{F}_G$, de a legtöbbször ezt is $\mathbf{G}$-vel jelölik. A mértékegysége newton. Általában elfogadható a két fogalom összemosása, de próbáld figyelni a különbséget.

Vannak ugyanis esetek, amikor a súlyerő eltér a nehézségi erőtől, esetleg nullára csökken, de ehhez a testnek bizonyos fajtájú *haladó* mozgást kell végeznie, és ide tartozik az az eset is, amikor a test egy űrhajóval együtt a Föld körül kering. Erről egyelőre elég ennyit tudnod. **Amikor a test mozdulatlan, akkor a súlyerő megegyezik a nehézségi erővel:**

$$F_G = G$$

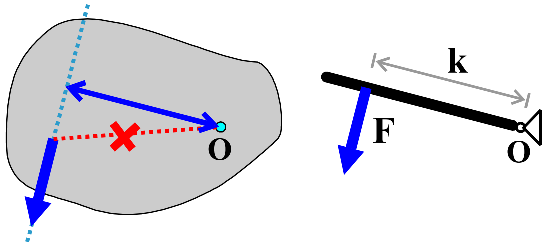
A súly az erő egyik előfordulási formája. Ebből következően *a súly mértékegysége nem kilogramm, nem tonna*, mert azok a tömeg mértékegységei. A két fogalom fizikapéldákban történő összekeverése kapásból egy jegy levonás.

A hétköznapi életben a newton alkalmatlannak bizonyult a súly megadására, amit nem csodálhatunk, ha azt vesszük, hogy egy **1 kg tömegű test szabványos súlya tengerszinten 9,80665 N (~10 N)**. A feladatokban többnyire megengedett a kerekítés. A régi mértékegységgel ugyanez a súly 1 kilopond volt, de ezt az SI hatályon kívül helyezte. A feladatmegoldásokban ragaszkodni kell a newtonhoz *minden* erő, így a súlyerő megadásakor is, különben a számítások hibásak lesznek.

Forgatónyomaték [redacted]

Ez egy nagyon fontos, sokszor visszatérő téma, ezért alaposan kitárgyaljuk. Figyelj fel arra, hogy fejezeteken át *egyetlen képletet* használunk, és csak megtanuljuk, mi a haszna különféle helyzetekben.

Ha egy szilárd test egy pontját csuklóval vagy tengellyel rögzítjük úgy, hogy a test e pont körül el tud fordulni, akkor a testre ható erő a test elforgatására törekedik. A **forgáspont**ot többnyire O-val jelöljük.



Tapasztalatból tudjuk, hogy **egy erő elforgató hatása nagyobb akkor, ha az erőt megnöveljük, és akkor is, ha az erőt *a forgásponttól távolabb* alkalmazzuk.** Ezért készítenek hosszú nyelet például egy erős kábelek elvágására való szerszámnak vagy egy villáskulcsnak, feszítővasnak, krumplinyomónak.

Az erő elforgató hatását kifejező mennyiség neve forgatónyomaték.

Erőkarnak hívjuk az erővektor hatásvonalának merőleges távolságát a forgásponttól. *Nem* a támadáspont és a forgáspont közötti távolság számít.

Az M forgatónyomaték egyenesen arányos az F erővel és a k erőkarral, azaz

$$\mathrm{M} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{k}$$

A forgatónyomaték mértékegysége, a képletből is következően a **newtonméter**:

$$[\mathrm{M}] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

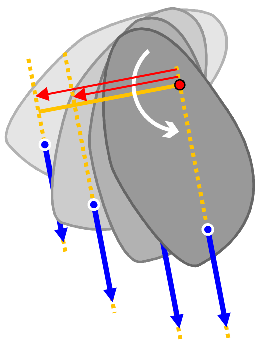
A forgatónyomaték mindig egy adott forgáspontra vonatkozik. Ha a forgáspontot áthelyezzük, megváltozik a forgatónyomaték is.

A feladatok megoldásakor a szilárd testet helyettesíthetjük egy súly nélküli, vékony, végtelenül teherbíró rúddal, amelynek egyik vége a forgáspontban csuklósan van rögzítve, az ábrán láthatod. Az a legjobb, ha a rúd merőleges az erővektor hatásvonalára, ilyenkor tulajdonképpen az erőkar helyére kerül. Figyeld meg, hogy a rajzon a rúd hosszabb, de ez nem számít, mert **az erőkar igazi hosszát az erővektor helye, hatásvonala határozza meg**. Maga a test valójában lehet akár perec alakú is, ahol a forgáspontból induló egyenes nem marad végig a testen belül, merev testnél ez nem érdekes.

Ha egy erő hatásvonala átmegy a forgásponton, akkor az erőkar hossza, azaz a k távolság 0, tehát az erő forgatónyomatéka is 0.

Ha a forgáspont rögzített, akkor a testnek az a pontja nem mozdítható el, csak forgatható. De a forgáspont nem mindig van rögzítve úgy, mint egy fogó szárainál vagy egy ajtónál. Ha egy fekvő gerenda egyik végét felemeljük, akkor időlegesen a másik, a földre támaszkodó végéből lesz ***eseti* forgáspont**. Amikor eltörünk egy botot, akkor a törés helye viselkedik eseti forgáspontként. Ha egy olyan test forog, amelynek nincs sem rögzített, sem eseti forgáspontja, akkor a forgás tengelye a test tömegközéppontján megy át.

Ha egy merev, elfordulni képes testen egy erővel forgatónyomatékot hozunk létre, akkor a test a nyomaték irányába elfordul. Ha az elfordulás közben az erő iránya nem változik, akkor az erő hatásvonala egyre közelebb kerül a forgásponthoz, és egyre rövidebbé válik az erő erőkarja. Figyeld meg.

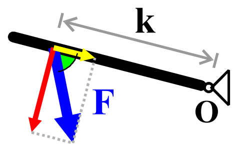


A test addig fordul a nyomaték irányába, amíg az erő hatásvonala át nem megy a forgásponton, ekkor az erőkar és forgatónyomaték 0-ra csökken, a test *egyensúlyba* kerül.

Ha az erő iránya követné az elfordulást, akkor az erőkar nem változna, a hatásvonal sosem érné el a forgáspontot, ezért a test nem kerülne egyensúlyba, hanem (egyre gyorsabban) forogna.

Milyen nekünk fontos dolog változik az elforgatás közben?

Ha a feladat elemzése, a vázlat elkészítése közben úgy alakul a helyzet, hogy az F erő nem merőleges erre az egyszerűsítésként használt elméleti rúdra, akkor sincs semmi baj. *A rúd nem maga az erőkar*, hanem csak helyettesíti a testet. **Az erőkar egy távolság.** Az EREDŐ ERŐKOMPONENSEI fejezetből tudjuk, hogy ez az erő egyenértékűen helyettesíthető két másik erővel, amelyeknek az F az eredője. Jó okunk van arra, hogy az egyik összetevőt (piros) a rúdra merőlegesen vegyük fel: az erőkar ettől a rúd vonalába kerül, tehát kényelmesebb elképzelni. Ha a másik összetevő (sárga) a rúdba kerül, az azért nagyon jó nekünk, mert így a hatásvonala átmegy a forgásponton, tehát a forgatónyomatéka nulla, vagyis többet nem is kell vele foglalkoznunk. Derékszögű háromszöggel mindig könnyebb számolni, a SZÖGFÜGGVÉNYEK és a PITAGORASZ-TÉTEL használatával. Ezekről a könyv végén olvashatsz, tanuld meg őket tökéletes biztonsággal. Sokszor lesz rájuk szükséged.



Remélem, megkérdezted magadtól, hogy ez a sárga erő magával a rúddal mit fog csinálni, mert egy erőt általában nem lehet csak úgy elhanyagolni, lehet egy feladatban akár egymillió newton nagyságú is, elvileg. Nos, az ilyen elméleti rúdról azt feltételezzük, hogy nem lehet sem összenyomni, sem megnyújtani, sem meghajlítani, vagyis *ideálisan merev*. Így aztán ez a sárga erő nem csinál vele semmit.

A piros és a sárga erőkkel *helyettesítjük* a kék F erőt, tehát egy feladatban innentől úgy kell számolni, hogy a kék erő már nincs, van helyette a piros és a sárga, és a sárga érdektelen, marad a piros.

Hogy a piros és a sárga erő, tehát az F két komponense *mekkora*, az külön probléma. Ha ismered az F erőnek a rúddal bezárt α szögét (zöld), akkor a piros lesz az $F\cdot\sin\alpha$, a sárga az $F\cdot\cos\alpha$.

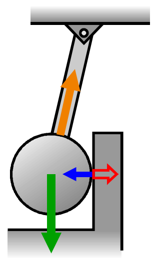
Miért így vettük fel az F-et helyettesítő erővektorokat?

A forgatónyomaték **irányított mennyiség** (de nem vektor), így az értékének **előjele** is van. Pozitív iránynak az óramutató járásával ellentétes forgási irányt vesszük.

Ha egy forgáspontban rögzített testre több erő is hat, akkor mindegyik saját forgatónyomatékot hoz létre.

Több erő közös forgatónyomatéka egyenlő az egyes forgatónyomatékok előjeles összegével.

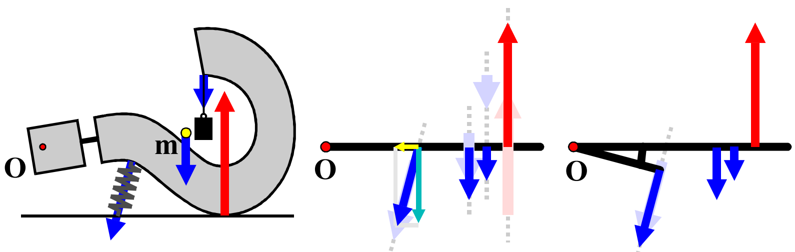
Ne felejtsd el: **összeadnod csak azokat a forgatónyomatékokat szabad, amelyeket *ugyanarra a testre* ható erők hoznak létre.** Ha az elforduló test támaszkodik egy másik testen, akkor nem szabad beleszámolni azt az erőt, amivel ez a test *a másikat* nyomja, ilyen a piros nyíllal jelölt erő. Ugyanakkor bele *kell* számolni azt az ellenerőt, amivel a másik test ezt a testet nyomja, ez a kék nyíl. A zöld és a kék erőnek is van forgatónyomatéka a forgáspontra vonatkoztatva, a sárga átmegy a forgásponton, a piros másik testre hat.



Példa. Nézzünk meg együtt egy olyan esetet, amiben ezeknek az elvi részleteknek a használata mind megfigyelhető. Nem nehéz, de olvasd figyelmesen.

A képen látható, elég homályos célú szerkezetre összesen négy erő hat: a saját súlyereje az itt **m**-mel megjelölt tömegközéppontban, egy rá akasztott súly ereje (érted a különbséget a két írásmód között?), egy rugó húzóereje és az alátámasztás nyomóereje. **A feladat most csak *az ábra egyszerűsítése*.**

Maga az O tengely is kifejt egy erőt a testre, de mivel a forgatónyomatéka annak automatikusan nulla – hiszen a hatásvonala átmegy a tengelyen –, más pedig most nem is érdekel bennünket, ezért be sem rajzoltam. Később látsz egy olyan példát is.



No kérem szépen, az első pánik már el is múlt, akkor most szórjunk ki minden fölösleges dolgot. **Helyettesítsük a testet** a forgáspontban rögzített, saját súly nélküli, tökéletesen merev, egyenes rúddal. Ennek az iránya *tetszőlegesen* megválasztható, de mivel a forgatónyomatékok számolgatásakor az erők hatásvonalaira húzott merőlegesekkel dolgozunk, és itt három erő is függőleges, ezért az a leg*kényelmesebb*, ha a rudat vízszintesen vesszük fel, és akkor pont egybeesik három erőkarral is, az O ponthoz viszonyítva.

Miért függőleges a talaj nyomóereje? Mert **a nyomóerőt mindig a felületre merőlegesnek vesszük**.

Van négy erőnk, ebből a három kék erő fix, a piros erő viszont ezek hatására indukálódó ellenerő, ezért ennek a nagysága az egyetlen bizonytalan érték, egy feladat is valószínűleg ezt kérdezné. De a számértékekkel most nem foglalkozunk.

Felvettük tehát a képzeletbeli rudat, és ezután az erővektorokat eltologatjuk a saját hatásvonaluk mentén úgy, hogy mindegyiknek a támadáspontja a rúdra kerüljön. Három erő máris merőleges, vagyis a hozzájuk tartozó erőkarok a rúd vonalába esnek.

Miért fontos ez? Igazából nem fontos, de talán eleinte a testet egyben, egy merev rúddal helyettesítve szeretjük elképzelni, azért, mert az segíti a helyzet pontosabb átlátását. Ez kézzelfoghatóbbá teszi számunkra a forgatónyomatékokat. Később ettől már el lehet rugaszkodni. Most mindenesetre három erőkar is a rúdban van, el tudod képzelni, hogy három erő is egymással versengve nekinyomódik egy rúdnak, amely a végén egy csuklóval van rögzítve a falhoz. Így talán egyszerűbben megállapítható az erőkarok aránya, esetleg a pontos hosszuk is, és a megoldásokhoz mindig erre van szükségünk.

Az erőkar csak egy képzeletbeli vonal, egy fogalom, egy távolság, az erő merőleges távolsága a forgásponttól, és nem kell anyagi testnek, rúdnak lennie, csak annak képzeljük el.

A negyedik erőt, a rugó erejét is eltoltuk kicsit, de ez nem merőleges a rúdra. Ha azt szeretnénk elérni, hogy minden erőhöz tartozó erőkar a rúd vonalában legyen, akkor két dolgot lehet csinálni.

Az egyik az, hogy a rugótól származó ferde erővektort felbontjuk egy rúd irányú és egy rúdra merőleges összetevőre, ezt bármikor megtehetjük, ha így kényelmes, az előbb már csináltunk ilyet. A rúd irányú összetevő (sárga nyíl) forgatónyomatéka nulla, ezért többet nem is törődünk vele. A másik összetevő erőkarja a rúdba került, ez volt a vágyunk, a hosszát az erőnek a rúddal bezárt szöge alapján pontosan ki is számolhatnánk: az arány a szög szinusza.

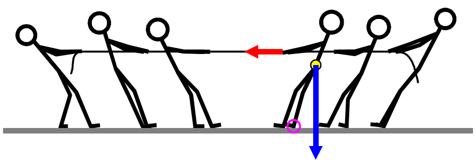
Erről a szinuszról az előbb volt szó. Hasonlítsd össze az ábrákat!

A másik lehetőség az, hogy a rugóerő ferde vektorához *egy másik rudat is* beépítünk a rendszerünkbe, amely merev egységet alkot az első rudunkkal. Ez egyáltalán nem tilos, a vizsgált test maga is merev, szilárd test volt, a két rúdból álló is az. (Rajzoltam közéjük egy "merevítő" elemet is, csak segítségül.) Ha valamiért úgy kényelmes nekünk a helyzetet elképzelni, akkor mindenféle erőkhöz egy-egy saját rudat is felvehetünk, mindegyiket a forgáspontból indítva. Úgyis csak annyi szerepe van, hogy megfoghatóvá teszi számunkra az erőkarokat. Amint látható, ezzel a rugó erejéhez tartozó, az erővektor hatásvonalára merőleges erőkart kaptunk, amivel a számolást a kapott adatok szerint már könnyebben elvégezhetjük.

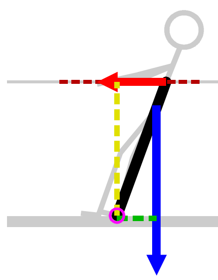
A két módszer matematikailag egymásból levezethető, tehát egyenértékűek, *bármelyiket választhatod*. Az erőkarok hossza a feladatban megadott adatokból derül ki. Mindegyik erőnek van egy forgató-nyomatéka, és szükség esetén ezek a forgatás iránya szerinti előjelekkel összeadhatók. A példán a három kék erő nyomatéka negatív, a piros nyomatéka pozitív.

Most semmilyen számítást nem végeztünk. Csak láttál egy példát egy zűrös ábra egyszerűsítésére.

Ez egy olyan eset, amikor döntened kell, hogy a lehetőségek közül melyikkel élsz. A feladatok megoldásának (erős ütemű) gyakorlása során fogod megszokni azt, ahogy egyre jobb leszel, hogy te milyen helyzetre miféle megközelítést tartasz a magad számára legkényelmesebbnek.



Ezek a kötélhúzók még egy példát mutatnak arra, hogyan lehet a lényegét kiemelni egy erőtani helyzetnek. Mindegyik emberről elkészíthető lenne lényegileg ugyanez az ábra, de én téged emellek ki közülük.

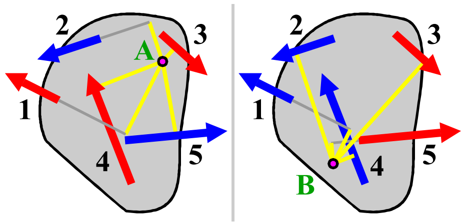


A célod az, hogy a kötelet minél nagyobb erővel húzd. Ennek az erőnek a forrása viszont csak a súlyod lehet, más nincs. Jól megveted a lábadat, megfogod a kötelet, majd hátra dőlsz. A kinyújtott testű ember tömegközéppontja körülbelül a köldökénél szokott lenni. (Mély guggolásban vagy zsugorszaltóban eltolódik a gyomorszáj környékére.) Ezzel a hátradőléssel a tömeg-középpontodban ható nehézségi erőnek (kék) egy erőkart hozol létre a forgás-pontként működő sarkadtól (zöld). Te erőt gyakorolsz a kötélre, de Newton III. törvénye szerint a kötél ellenerőt gyakorol rád. Ismét emlékeztetlek, hogy bár jellegzetesebb, lényegesebb az az erő, amivel te húzod a kötelet, mégsem szabad összevegyítened olyan erőket, amelyek nem ugyanarra a testre hatnak. *Rád* a kötél ellenereje hat, és hiba lenne a piros nyilat ellenkező irányba rajzolni.

A tested felfogható egy merev rúdként, amelyre két támadáspontban egy-egy erő hat. Láthatod, hogy ha jobban hátradőlsz, a nehézségi erő erőkarját megnöveled, ráadásul a rúddal bezárt szöge is kedvező irányba változik. Ennek eredményeként a rúd nagyobb erővel próbál negatív irányba elfordulni, azaz nagyobb kötélerő kell a megtartásához, erősebben húzod a kötelet. Hogy az a rúd merev legyen, arról úgy gondoskodsz, hogy az izmaidat megfeszíted. Ha a piros és kék erő eredője, amely kiegyensúlyozott helyzetben pontosan a rúd irányában hat, erősebbnek bizonyul az izmaidnál, akkor összerogysz.

A forgatónyomaték fogalma elő fog kerülni a *Körmozgás* témakörben is.

Forgatónyomatékok összege



Az ábrán egy testre 5 erő hat, mindegyiknek forgatónyomatéka van az *A* forgáspontra, néhány pozitív, néhány negatív irányú. Jelöljük indexelt M-mel mindegyiket (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5), írd fel az öt forgatónyomaték összegét! **…**

Mutatom a megoldást: **$M_{össz}=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5$.**

Van valami probléma? Hiányolod a mínuszokat? Elhiszem. De a fizikát csak akkor támogatja a matek, ha a matekot pontosan használjuk. Mi a *jele* az 1. erővektor által létrehozott forgatónyomatéknak? M_1. Azt mondtam, hogy „a forgatónyomaték *értékének* előjele is van”. Az 1. erő nyomatéka negatív irányú, tehát lehet például $M_1=-37$ Nm. Látod, ott van az a negatív előjel. Vagyis az M-ek lehetnek pozitív és negatív számok is (és nulla is), amelyek összege ettől még összeadással számítandó ki. Összeg: összeadás. Erre mondom azt, hogy a matek eszközeit pontosan kell használni, egy egyenlettel is így szoktunk bánni.

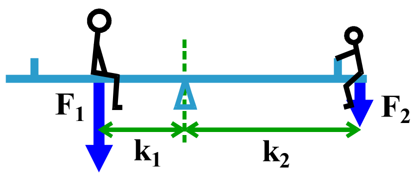
Az előjel a számértékbe kerül. Csak kitalált számértékekkel felírom neked a forgatónyomatékok összegének, az $M_{össz}$-nek a kiszámítását erre az esetre: (−37)+(+20)+(−8)+(−102)+(80). Összesen −47, tehát a testre ezek az erők együttesen egy negatív irányba ("jobbra") forgató nyomatékot hoznak létre. Kész.

Csakhogy lehet, hogy ti másképp csináljátok. A tanárnak lehet az az igénye, hogy a számítási képlet leírásakor már lássa, hogy melyik erőnek milyen irányú a forgatónyomatéka, pontosabban lássa, hogy te látod. Ezért lehet, hogy neked így kell leírni az első képen levő erők forgatónyomatékainak összegét: **$M_{össz}=-M_1+M_2-M_3-M_4+M_5$.** Ahhoz, hogy ez a képlet matematikailag helyes legyen, hozzá kell tenni azt a kikötést, hogy minden M az adott nyomaték **abszolút értékét** tartalmazza, azaz mindegyik pozitív. És a forgatás irányát a képletben jelölted.

Te tudod, hogy az órán ti hogyan csináljátok, és igazodj ahhoz. Csak ne keverd a kettőt.

Mellékesen nézd meg, hogy ha a forgáspont máshová kerül (*B*), akkor a forgatónyomatékok teljesen meg tudnak változni. Szintén csak egy durva becsléssel: +16+80−100+35−20=+11, "balra" forgat.

Mérleghinta



Az egyensúly fenntartásához a két gyerek súlya által létrehozott forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást, az összegük nulla. A két forgatónyomaték nagysága egyenlő, az előjelük ellentétes.

$$M_1 = -M_2 \qquad F_1 \cdot k_1 = -F_2 \cdot k_2$$

A képlethez magyarázatul: ha a forgatónyomatékok összege nulla, akkor $M_1+M_2=0 \leftrightarrow M_1=-M_2$.

A forgásponthoz mindig a nagyobb erő van közelebb. Ha az erőkarok vagy az erők valamelyikén változtatunk, akkor a forgatónyomatékok egyensúlya és a mérleghinta felbillen.

Mozdulatlanság [redacted]

A mechanika erőtani részét statikának is nevezik, mert a tárgyalt helyzetek statikusak, egy helyben álló, kiegyensúlyozott állapotú testekről szólnak.

Egy test mozgása kétféle dologból tud összerakódni. Az egyik tényező a test **helyzete**, ennek megváltozása egy forgáspont körüli elfordulást jelent, a test **forgó mozgást** végez. Ha a testnek nincs rögzített forgáspontja, attól még elfordulhat, egyéb hatás hiányában a tömegközéppont körül. A másik tényező a test **helye**, ezen leginkább a test tömegközéppontjának a helyét érthetjük. Ha a test helye megváltozik, akkor a test **haladó mozgást** végez. Mindkét mozgás jellegzetességeivel önálló témakör foglalkozik.

Egy testet mozdulatlan tekintünk, ha az sem forgó, sem haladó mozgást nem végez.

Lehetséges, hogy rettenetes erők feszülnek egymásnak, de amíg ezek az erők kiegyenlítik egymást, addig a test mozdulatlan.

Egy test akkor és csak akkor van forgási egyensúlyban, ha a testre ható erők forgatónyomatékainak *bármelyik* pontra vonatkozatott előjeles összege nulla.

Egy test csak akkor áll, ha a testre ható erővektorok eredője nulla.

Beszéljük meg ezt az „akkor és csak akkor”-t. Vegyünk egy állítást: „A rakéta akkor és csak akkor indul (B), ha az űrhajósok beszálltak (A).” B↔A. Két *független* dolgot állítunk egyszerre. **1)** A rakéta **akkor** elindul, ha az űrhajósok beszálltak. A beszállástól a rakéta biztosan elindul. B←A. És ha nem szállnak be? *Lehet*, hogy akkor is elindul, talán automata űrhajó, ez nem derül ki a mondatból. Beszállnak: biztosan elindul; nem szállnak be: nem tudjuk. **2)** A rakéta **csak akkor** indul, ha beszállnak. Űrhajós nélkül a rakéta nem indul. Ha elindult, akkor biztosan beszálltak. B→A. De ha beszállnak, *még nem biztos*, hogy elindul. Beszállhatnak gyakorlásul is. Elindult: biztosan beszálltak; nem indult el: nem tudjuk. **1+2) Vonjuk egybe a két részállítást.** Mit jelent az, amikor az 1) és a 2) is érvényes? Beszállnak: biztosan indul, elindult: biztosan beszálltak. Nem szállnak be: biztosan nem indul, nem indult el: biztosan nem szálltak be. *Akkor és csak akkor.* A mondat két fele, a feltétel és a következmény tehát pontosan egyszerre igaz. **Ha az egyik teljesül, akkor a másik is. Ha az egyik nem teljesül, akkor a másik sem.** B↔A. A matekon belül talán tanulni fogtok formális logikát, abban fogtok ilyenekkel szórakozni. Kicsit nehéz, mert a nyelv szavai nem az ilyen precíz és szigorú jelentések kifejezésére készültek. Amint sikerül szimbólumokba áttenni a szöveget, minden könnyebbé válik.

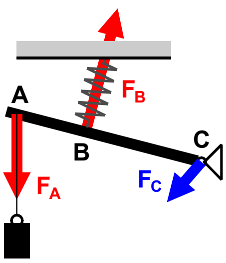
Ha ezek után megfigyeled a második szabályt, az azt sejteti, hogy ha a testre ható erők eredője nulla, akkor a test más is csinálhat, mint áll. Erről szól majd A TEHETETLENSÉG TÖRVÉNYE fejezet. De ahhoz, hogy a test álljon, az erők eredőjének nullának kell lennie. Most ennyi is elég.

Sokszor lesz segítségedre ez a törvény. Ha látod, hogy egy test nem forog, akkor tudod, hogy a rá ható forgatónyomatékok összege nulla, akárhol nézed is meg. Ha forog, akkor pedig tudod, hogy a forgatónyomatékok összege nem nulla. Ha szerinted forognia kellene, de nem forog, akkor valahol van még olyan erő, amit elfelejtettél bevenni a számításba, vagy olyan erőnek a forgatónyomatékát vetted figyelembe, amely nem is erre a testre hat. Ha szerinted nem szabadna forognia, mégis forog – vagy azt állítja róla a feladat, hogy forog –, akkor ugyanez a helyzet.

Nézd meg a korábbi ábrát a kérdőjel alakú testtel, és olvasd el a feladatot újra! Mennyi a testre ható erők forgatónyomatékának összege? **…**

Ha azt mondod, hogy nulla, akkor én azt mondom, hogy *mondta valaki, hogy a test nem forog?* Ki tudja, esetleg éppen azt látjuk, ahogy a forgáspont körül megindul felfelé, pozitív irányba. A feladat nem állította, hogy az erők egyensúlyban vannak, csak egyszerűsítettük az ábrát. Ez a legalapvetőbb hiba, erre vigyázz nagyon: csak olyan adatra alapozz, amit biztosan tudhatsz. Ezt vésd az eszedbe. Ha szükséges, kérdezz rá. Ha nem lehet, akkor *írd le*, hogy milyen feltételezésre alapozol.

De ha azt mondtad, hogy ennyi adatból nem lehet tudni, akkor gratulálok.



Nézd meg ezen a már egyszerűsített ábrán levő felállást! Ez a rendszer egyensúlyban van. (Most már tudod, nem csak hiszed.) Mi történik, ha a C csuklóból kihúznád a csapszeget, a pöcköt? **…**

A józan érzékeidre hagyatkozva remélhetőleg érzed, hogy ekkor a rúd C vége felcsapódna. Akkor pedig ebben a helyzetben a rudat egy erő, a kék $\mathbf{F_C}$ erő tartja a helyén. Ez az erő kényszererő, és a nagysága és iránya attól függ, hogy az egyensúly létrehozásához milyen erőre van szükség.

A törvény azt mondja ki, hogy a test *bármely* pontjára is kiszámítva az erők forgatónyomatékának előjeles összegét, akkor ha az nulla, a test nem forog. És ha nem forog, akkor tudjuk, hogy nulla. Ennek a rendszernek van rögzített forgáspontja, forgás tehát csak akörül lehetséges. A gyakorlatban elég a törvényt a forgásponton kívül az erők támadáspontjaira elvégzett számításokkal ellenőrizni, más pontra nem kell.

A képen levő, egyensúlyban levő rendszer esetében tehát három pontra kell ellenőriznünk a forgatónyomatékokat: az A pontra vonatkoztatva az F_B és F_C forgatónyomatékait, a B pontra vonatkoztatva az F_A és F_C forgatónyomatékait, a C pontra vonatkoztatva az F_A és F_B forgatónyomatékait. Az összegnek mindhárom esetben 0-ra kell kijönnie. Soha ne felejtsd el, hogy a kiszámításhoz **a forgáspontból az erő *hatásvonalára* merőlegesen** húzott erőkarok hosszát kell felhasználnod. Az $\mathbf{F_A}$ nem merőleges a rúdra, ezért az erőkarja soha nem a rúdban lesz, hanem a rajzon vízszintesen.

Az F_C erő irányát és nagyságát nem ismerjük. Talán megtippelni sem tudjuk. Nem számít, mert konkrét számításokat fogunk végezni, amelyekből ezek az adatok majd kiderülnek. Ha végül az jön ki, hogy ennek az erőnek a nagysága 0, *az is egy eredmény*, amelyből megtudtuk, hogy ott mégsincs erő, és az egyensúly anélkül is fennmarad. Az is lehet, hogy a számításokból tudjuk meg, hogy az F_C is merőleges a rúdra. Most még nem tudjuk. A számításoknak pont az a feladata, hogy ha elméletileg jól végezzük el őket, akkor a kapott eredmények megbízhatóan elmondják nekünk a valóságot.

Mikor lenne az F_A erő erőkarja a rúd vonalában?

A mozdulatlanság törvénye két részből áll. A második fele úgy használható, hogy **ha azt látjuk, hogy egy test mozdulatlan, akkor teljesen biztos, hogy a rá ható erők eredője nulla**, különben a test haladna. Ha egy feladatban a test mozdulatlan, de az erők megvizsgálásakor azt látjuk, hogy azok a testben nem nullát adnak eredőül, akkor valamit elhibáztunk, valószínűleg kifelejtettünk a számításainkból valamilyen még fellépő erőt, például az alátámasztás erőhatását. Figyelnünk kell arra, hogy ehhez a test *által* más testre gyakorolt erőt ne vegyük ide, csak azokat, amelyek a kérdéses test*re* hatnak. Nézd meg a rajzot: mindhárom **F** erő a rúdra hat. Van még egy törvény, ami most teljesül:

Három nem párhuzamos erő eredője csak akkor lehet nulla, ha a három erő hatásvonala egy pontban metszi egymást.

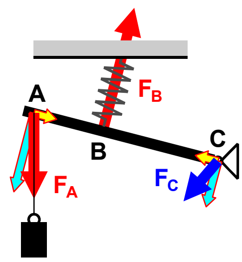
Ezt a rudat meghúzhatjuk, felnyomhatjuk, de a rugó és a súly végül megtalálja az egyensúlyát, a rendszer mozdulatlanná válik. Tehát tudjuk, hogy most mindhárom előbb felsorolt forgatónyomaték-összeg egyformán 0. Ha nem az lenne, a rendszer elfordulna. Az ebben a jó nekünk, hogy ha valamelyik erőt nem ismerjük, de ki kell számolnunk, akkor kiindulhatunk abból, hogy a forgatónyomatékok összege 0, tehát az ismeretlen erőnek úgy kell kijönnie, hogy ezt a követelményt teljesítse.

Azt én nem állítom, hogy ez nagyon egyszerű, de ha ilyenkor felírod azokat az egyenleteket, amiket tudsz, behelyettesíted azokat az értékeket, amiket tudsz, akkor a feladat megoldása sokszor egy egyenletrendszer megoldására zsugorodik, és azzal már illik elbánni.

A forgatónyomatékokat ehhez melyik pont*o*kra számítjuk ki?

Ha érdekel, akkor megmutatom ezeknek az elveknek a használatát konkrét számításban is.

Ismerjük az $\mathbf{F_B}$ erőt, amely merőleges a rúdra, és azt is, hogy a rúd mekkora α szöget zár be a vízszintessel. A feladat az $\mathbf{F_A}$ (a test súlya) és mellékesen az $\mathbf{F_C}$ kiszámítása. $\mathbf{F_B}$=90 N, a súly felfüggesztési pontjának távolsága a csuklótól (AC) 160 cm, a rugó csatlakozási pontjának távolsága a csuklótól (BC) 90 cm, eszerint AB=70 cm. α=22°.



A számítások megkönnyítésére mindkét keresett erőt két komponensből fogjuk összerakni, bejelöltem őket, a rúdra merőleges komponensek legyenek $\mathbf{F_{AX}}$ és $\mathbf{F_{CX}}$, *ezeknek a erőkarjait ugyanis már ismerjük*, a rúd irányú (sárga) komponensek pedig $\mathbf{F_{AY}}$ és $\mathbf{F_{CY}}$, ezek forgatónyomatéka automatikusan 0, mert a hatásvonaluk átmegy a tengelyen. A számítások során kiderülhet akár az is, hogy valamelyik komponens nagysága is nulla, de előre ezen nem kell töprengenünk.

Írjuk fel a forgatónyomatékok egyenleteit mindhárom pontra (A, B és C), az egyensúly teljesülésekor:

A: $+F_B \cdot \overline{AB} - F_{CX} \cdot \overline{AC} = 0$ **B:** $+F_{AX} \cdot \overline{AB} - F_{CX} \cdot \overline{BC} = 0$ **C:** $+F_{AX} \cdot \overline{AC} - F_B \cdot \overline{BC} = 0$

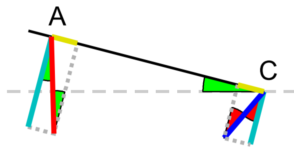
Látod az előjeleket? Ezen nagyon el lehet csúszni. A három egyenlet három különböző pontra írja fel a forgatónyomatékok egyensúlyát, és mindháromszor *újra* meg kell nézni, hogy az adott forgáspont (A, B és C) körül melyik erő merre forgat. Balra van a pozitív, emlékszel? *Ugyanaz* az erő (itt F_B) lehet pozitív az egyikben, negatív a másikban. A kezdő "+" előjeleket hangsúlyozásul írtam ki.

Helyettesítsük be az ismert számokat:

+90 N·0,7 m–$\mathbf{F_{CX}}$·1,6 m=0 +$\mathbf{F_{AX}}$·0,7 m–$\mathbf{F_{CX}}$·0,9 m=0 +$\mathbf{F_{AX}}$·1,6 m–90 N·0,9 m=0

Az *eredményül* kapott **F** értékeket mindig pozitívként helyettesítsd be (itt most mind úgy is jött ki), hadd érvényesüljenek az egyenletben levő előjelek! Ez két ismeretlen és három egyenlet, több is, mint amennyi kell. Oldd meg az elsőt, az eredményt helyettesítsd be a másodikba, a harmadikkal pedig ellenőrizheted az eredményt: $\mathbf{F_{CX}}$=39,375 N, $\mathbf{F_{AX}}$=50,625 N. Eddig végül is elég sima ügy, nem? Most csináld meg te is, üres papírra, elölről. Ne less, nem engem csapsz be, hanem magadat, mert azt hiszed, hogy már megy.

A fentiek az erők rúdra merőleges komponenseit adták meg. Az erőket, mint eredőket, a szögek alapján kell kiszámolni. A tankönyv végén levő AZONOS SZÖGEK fejezetben vannak ehhez segítségként használható tudnivalók. Csináltam egy másik rajzot is, ugyanaz, mint a feladat, rajza, csak vonalakká egyszerűsítve. Az α szöget a rúd és a vízszintes közötti szögként ismerjük (zöld), de megjelöltem, hogy még hol van ugyanaz a szög. És a piros? Ugye azt hinnéd, hogy az ugyanennyi? Hoppá! *Semmi* nem támasztja ezt alá. Ha te látsz valamit, ami bizonyítja, akkor nyugodtan használd azt, írd le, de egyébként nem szabad valamit tényként használnod, amíg az nem válik bizonyítható ténnyé. Külön *figyelj fel* az ilyenre, bár nehéz, de így esetleg időben észreveheted a tévedésedet egy hasonló helyzetben. Ehhez sajnos jó matekosnak kell lenni, de *ez sosem jelenti azt*, hogy egy gyengébb matekos nem jöhet rá ugyanarra.



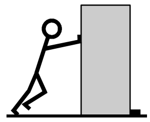
Kiszámoltuk a rúdra merőleges két cián színű vonalat A és C pontoknál, ezek $\mathbf{F_{AX}}$ és $\mathbf{F_{CX}}$. Az α-t ismerjük, 22°, $\mathbf{F_A}$=$\mathbf{F_{AX}}$ / cos α, =54,6 N. A rúd irányú összetevő $\mathbf{F_{AY}}$=$\mathbf{F_{AX}}$ · tg α, =20,45 N. A Pitagorasz-tétellel ellenőrizhetjük. Lehet, hogy most felhördülsz, hogy ezt meg honnan a szutyokból kellene tudnod. De ezért rágom a füledet állandóan, hogy a szögfüggvényeket és a Pitagorasz-tételt úgy kell tudnod, hogy egy ilyen téglalap bármelyik vonalát bármiből bármikor ki tudd számolni. Ha ez nem megy, akkor most megálltál, és lehetetlenség a befejezésig eljutnod, kb. a pontok harmada ugrott. Jó esetben.

Ha visszanézed eddig ezt a feladatmegoldást, remélhetőleg te is azt látod, hogy egyszerűen csak mentünk előre, mindig az egyetlen nyilvánvaló úton. Miután a feladatról elkészítetted magadnak a rajzot – *nem miniatűr méretben, hanem még a szögek és befogók is jól láthatóak legyenek* –, láttad, hogy egy elforduló rúdról van szó, rá ható erőkkel, akkor kiszámolod a forgatónyomatékokat, kiindulva az egyensúlyukból, aztán az erők összetevőihez szokásos derékszögű háromszögek születtek, amiből mindent megtudsz. Eddig csak ennyit csináltunk.

Most jöhet egy csöppnyi furfang. A pirossal jelölt γ szögeket nem ismerjük, csak a rúdra merőleges $\mathbf{F_{CX}}$ oldalt. Mi legyen, mi legyen? Az egyik megoldás alapulhat arra, hogy a három erő hatásvonalának egy pontban kell találkozni, berajzolod, és ebből az $\mathbf{F_C}$ szöge már meg is van. Másik: a rúd nemcsak nem forog, hanem el sem megy sehová. Áll. A törvény erre azt mondja, hogy akkor a testre ható erők eredője nulla. A rúdra merőleges cián színű vektorokra, megsúgom, a forgatónyomatékok egyenlősége miatt ez igaz lesz, a PÁRHUZAMOS ERŐK EREDŐJE fejezetből. A rúd irányában pedig összesen a két sárga erővektor van. A szabály szerint ezek eredője is nulla, mert csak ezek tudnák a rudat a vonala mentén elmozdítani, de az mozdulatlan. Két erő eredője nulla? Akkor ezek egyenlő hosszúak! Mennyi is volt az A pontnál levő $\mathbf{F_{AY}}$? 20,45 N. Akkor az $\mathbf{F_{CY}}$ is ennyi. $\mathbf{F_{CX}}$=39,375 N volt, és már ismerjük is a C-nél levő háromszög(ek) befogóit, akkor az átfogó most már gyerekjáték: a kék $\mathbf{F_C}$, a csuklóban ható erő 44,37 N. Bónuszként kiszámoljuk a γ szöget: például tg γ=20,45/39,375, =27,45°, a rúddal bezárt szög 90–γ=62,55°.

Sajnos ez a megoldás már régen matek és nem fizika. Hát, ezért kell matekot is tanulni, mert az az *eszköz*, a fizika csak az elméletet adja. De őszintén: tényleg annyira veszélyes volt? Csináld meg még egyszer, írd le szépen egy üres papírra, számold ki újra, és hidd el, eszedbe fog jutni, amikor kell.

Fontos, hogy egy ismert helyzetről megfelelő erőtani **vázlatot tudjunk készíteni**, egyszerűsítve az adatokat, mert a számításokat annak alapján célszerű elvégeznünk. Ha viszont a vázlat hibás, hibás lesz a számítás is. Nézzünk meg még egy példát erre az egyszerűsítésre.

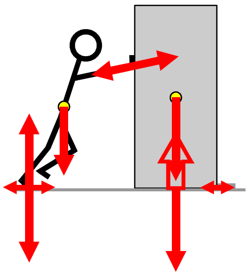


Képzeljük el, hogy nekifeszülünk egy nagy ládának, és fel akarjuk dönteni. A láda alja egy támaszték miatt nem fog elcsúszni. *Készíts vázlatot, ábrázold az összes itt létrejött erőt!* ***Ne** nézd a lejjebb következő ábrát!* **…**

Megcsináltad? A rajzon én egyelőre minden erőt azonos színnel jelölök, hogy maradjon még egy kis homály. Láthatod, hogy általában erő–ellenerő párok jönnek létre, ott, ahol testek érintkeznek. És ahol nem? Látsz ilyen erőt? Hát persze, a mi nehézségi erőnk és a szekrény nehézségi ereje is pár nélkül marad, látszólag. Megvan a párjuk, mindkét erő a Föld tömegvonzásából származik, és mivel mi is tömegvonzzuk a Földet, arra is hat egy ellenerő, csak azt nem szoktuk ábrázolni. Egyébként a Föld tömegközéppontjában lenne az elméleti támadáspontja, az ilyen egyszerű helyzetekben.

A nehézségi erők átadódnak a talajnak, amelyekhez tartozik ellenerő, a szekrényt nyomó kezünknél is erők jönnek létre. Ismerjük, hogy ha kavicsos talajon lennénk, akkor a lábunk hátracsúszna, ezért a lábunknál is kell lennie egy vízszintes erő–ellenerő párnak, mert a hátracsúszást csak erő akadályozhatja. A szekrény aljánál van egy kis zsúfoltság, a harmadik erőt másfajta nyíllal tettem láthatóvá.

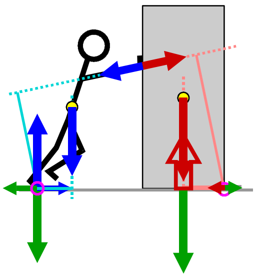
Akár billen a szekrény, akár nem, bármelyik adott pillanatban az egész rendszer **egyensúlyban van**.



Van itt egy kis probléma: mintha a súlyunkat és a szekrény súlyát is két példányban rajzoltam volna be. Az egyik a lábunknál van, a másik a hasunkban. (Egy átlagos testalkatú embernek ott van a tömegközéppontja, főleg ebéd után.) *A te feladatod* tisztázni ezt a kérdést.

Készíts új ábrát, amelyen azonos színnel jelölöd meg az azonos testre ható erőket! Tudod, hogy mennyire fontos, hogy egy-egy test egyensúlyi helyzetét vizsgálva pontosan azokat az erőket vedd figyelembe, amelyek arra a testre hatnak. A rajz célozza elsősorban a forgási egyensúly feltételének, a *forgató-nyomatékok* nulla összegének ellenőrzését! **…**

Én is elvégeztem a feladatot. Az új ábrán megkapjuk a választ az előbbi kérdésre a kétszer berajzolt nyilakról. A nehézségi erőt a Föld hozza létre, és *ránk* hat. Ennek az erőnek a hatására mi nyomjuk a talajt, és az az erő a *talajra* hat. Két különböző test, két erőcsoport.



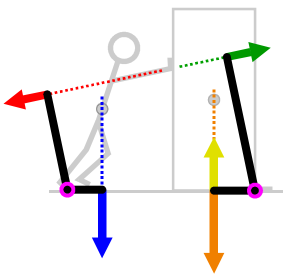
A talajra ható erőket most hagyjuk is, nem érdekesek. Ránk négy erő hat. A nehézségi erő, a talaj alátámasztó ereje, a szekrény nyomóereje és a lábunknál a talaj által az elcsúszás érdekében létrehozott súrlódási erő, erről később bővebben lesz szó. Az utóbbi akkor látszik rendesen, ha a nézetet kinagyítod (az eszköztáron vagy a menükben). A négy erőnek <u>csak egyike aktív erő</u>, csak a nehézségi erőnk értéke biztos, az jön létre a többitől függetlenül. A többi három csak <u>ellenerő</u>, amelyeknek az eloszlása, nagysága (és iránya) szükség szerinti értékre áll be, *igazodva ahhoz a követelményhez, hogy egyensúlyt kell tartaniuk*.

Az eseti (azaz rögzítetlen) forgáspont a hátul levő lábunknál alakul ki; az első lábunkat kicsit megemeljük, vagy a másik mellé tesszük. A lábunknál ható két erő a forgatónyomaték szempontjából érdektelen, a másik két erő hatásvonalait és erőkarjait berajzoltam. Nemcsak forgási egyensúlyban vagyunk, hanem állunk is, ezért a ránk ható erők eredőjének is nullának kell lennie; most csak tegyük fel, hogy úgy is van, a feladat szerint erre nem kell figyelni.

A ládára is négy erő hat: az általunk rá gyakorolt nyomóerő, a nehézségi erő és a talaj alátámasztási ellenereje. Az utóbbi kettő nem egyforma! Ha nem lenne jelen más erő, akkor egyformának kellene lenniük, de itt belépett egy harmadik erő is, a miénk, amely a sarokpont körül forgat, és csökkenti, jó esetben végül szükségtelenné is teszi az alátámasztási erőt.

Ha figyeltél, észrevetted, hogy csak három erőt mondtam el, a negyedik a láda mögött levő kis támasztéktól származó erő, amely nélkül a szekrény alja elcsúszhatna. A támasztékot egyébként a talaj részének vettem, azzal fölösleges volna vacakolni.

Három erő nem megy át a megjelölt eseti forgásponton, abból kettőnek azonos (vagy inkább egybeesik) az erőkarja, a tőlünk származó erőé pedig külön látható.



Ez két önálló, de egymásra ható forgási rendszer, két forgásponttal. Még mindig nem elég tiszta a kép, készítettem egy lecsupaszított vázlatot is, amelyen már csak a forgató erők, hatásvonalak, forgáspontok és erőkarok szerepelnek, másra nincs is szükség. Kihagyom azokat az erőket, amelyek forgásponton mennek át, mert azok nyomatéka nulla, és merev, meghajlított rudakkal helyettesítem az erőkarokat, világossá téve, hogy mi mivel van kapcsolatban. Minden szabályok legfontosabbja: minden erőt eltolunk az erőkarjához, abban a rendszerben, ahol hatnak.

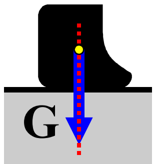
Jól figyeld meg a vázlatosítást. Azonosítsd a forgáspontot és az erőkarokat. Most már láthatod, hogy milyen erők dolgoznak egymás ellen, mekkora forgatónyomatékokkal. Látszik, hogy ha távolabb visszük a nehézségi erők függőlegesét a lábunktól, akkor nagyobb erővel tudjuk a szekrényt nyomni. Az is látható, hogy ha a szekrény szélesebb lenne (de változatlan súlyú), nagyobb lenne a nehézségi erejének az erőkarja, és nehezebb lenne felborítani. És az is látható, hogy ha a szekrényt magasan nyomjuk, nagyobb erőkart tudunk találni az erőnknek, kevesebb erő is elég a billentéshez. Ezeket mind tudtad már, de most már a fizikai magyarázatát is ismered.

*Tisztázzuk: az ilyen erőtani feladatokban mindig **egyensúlyban levő** rendszert vizsgálunk. A cél a szekrény megmozdítása, de <u>nem a mozgását akarjuk leírni</u>, az a következő két témakörben következik. Ha a szekrény már billen, akkor is mindig az adott pillanatban működő erőket nézzük, és a szekrény abban a pillanatban is egyensúlyban van. Vegyük úgy, hogy olyan lassan mozdítjuk el, hogy a mozgása jelentéktelen. **Az erők kiszámítása után azt fogjuk tudni, hogy a további mozdításhoz mekkora erőnél kell egy*** **egészen kicsivel** ***többet vagy kevesebbet kifejteni.*** *Mi a pontosan mozdulatlan határ-*

*helyzetet számítjuk ki. Ha az egyensúlyt fenntartó erők valamelyikét megváltoztatjuk, akkor azzal egy másik egyensúlyi helyzetet hozunk létre. Kivéve, ha a szekrény felborul, de akkor sem nézzük meg a borulás folyamatát, a sebességét, vagy hogy mekkora erővel vágódik a földnek, csak utána **megállapítjuk az új állapot létrejöttét,** egy átmeneti mozgás végén. És ha kell, felvázoljuk az ebben a helyzetben működő, az új egyensúlyt fenntartó erőket.*

Arra koncentrálj, hogy amikor a rendszer mozdulatlan, akkor ott az ehhez szükséges két kötelező feltételt teljesítő erők vannak jelen. Ha az általad felismert erők nem teljesítik a feltételt, akkor valami még hiányzik, mert az egyensúly megvan.

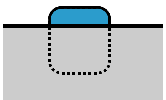
Súlypont



A feladatokban és az egyszerűsített modellekben úgy vesszük, hogy a test súlya a **tömegközéppont**jában hat. A homogén anyagú, szabályos testekben ez a pont a test mértani középpontjával esik egybe, másféle testeknél számítással vagy méréssel adható meg, de erről már volt szó. (A képen sem "középen van.)

Tömegközéppontról elsősorban a testek mozgásának vizsgálatakor beszélünk. Ugyanezt a pontot inkább **súlypont**nak nevezzük akkor, ha a testek egyensúlyát nézzük, és *ha a testnek van súlya* (lásd SÚLY). A mértanban a súlyvonal jelentése ennél bővebb, de itt a **súlyvonal** a súlypontból induló függőleges egyenes, a súlyerő hatásvonala (lásd még FÜGGŐLEGES). Ahogy több, merev rendszert alkotó testnek van közös tömegközéppontja, úgy van *közös súlypontja* és közös súlyvonala is.

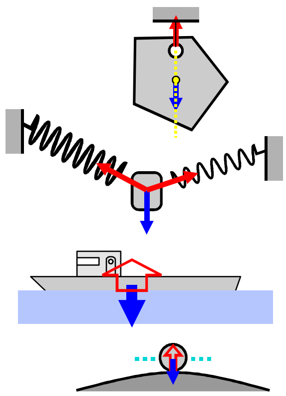
Egyensúly



Az egyensúly fogalmát több értelemben is használjuk, a vizsgált rendszer mindegyikben mozdulatlan. Egyensúly esetén a test(ek)re ható erők kiegyenlítik egymást, az eredőjük nulla. Ez elmondható akkor is, ha egy ládát betonba süllyesztünk, mert az erőegyensúly valóban fennáll. A test mozdulatlan, de *mozdíthatatlan* is. Hasonlóan merev rendszert hozunk létre azzal, ha egy állványzat elemeit egymáshoz rögzítjük, mert az elemek meghajlítása, rongálása nélkül a szerkezet nem fog elmozdulni. Az egyensúly szó ebben az esetben csak annyit jelent, hogy a mozdulatlanság erőtani feltételei teljesülnek. Nem ez a valódi egyensúly.

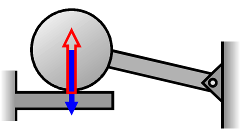
Egyensúlynak az *elmozdítható* testek mozdulatlan helyzetét hívjuk. A mozdulatlanság törvénye kimondta, hogy ekkor a testre ható erők forgatónyomatékainak a forgáspontra vonatkozatott előjeles összege nulla. A forgáspont lehet rögzített vagy eseti. Ha a test mozgása teljesen szabad, akkor a test a tömegközéppontja körül fog elfordulni valamilyen síkban, a kezdeti erők szerint.

Síkidom vagy egy rúd elfordulásának **forgáspont**ja van, három dimenziós test esetében ehelyett **forgástengely**ről beszélünk. Ha a forgás a képernyő síkjában történik, akkor a rajzon a tengelyt csak egy forgásponttal helyettesítjük, elképzelve, ahogy a tengely merőlegesen kiáll belőle. Elfogadható a két szó keverése, amíg az nem okoz zavart.



A **szabadegyensúly** az "igazi" mozgási egyensúly. Ekkor a test mozdulatlan, de már a legkisebb erővel is el lehet mozdítani valamennyire. Egy hatalmas harangot is el tudsz mozdítani kisujjal az egyensúlyi helyzetéből. Nagyon kis erőnél nagyon kis elmozdulás várható, de a nagyon kis elmozdulás is valami.

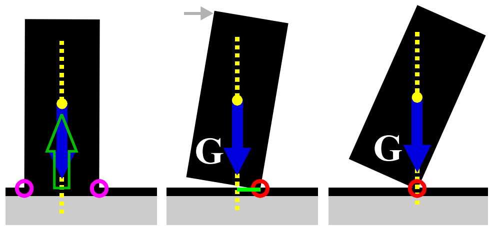
A jobbra látható rendszerek mindegyike szabadegyensúlyban van. Az ötszögű test ingaszerűen viselkedne, ha oldalról egy kicsit megtolnánk. A rugókon felfüggesztett test bármilyen irányban elmozdítható, de a rugók visszaállítanák a jelenlegi helyzetet. A vízen úszó hajót bármilyen kis erővel megemelhetnénk vagy lenyomhatnánk valamennyire. A golyó vízszintes irányban szabadegyensúlyban van. Hogy ez a golyó a legkisebb megmozdításra is elgurul, az már külön téma. *Most még* egyensúlyban van.



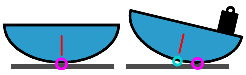
Kényszeregyensúly érvényesül a bal oldali ábrán látható rendszerben. A rendszer törekedne egy szabadegyensúlyi helyzet felé, de azt a polc kényszerereje *akadályozza*. A gömb és a rúd elmozdítható, de csak egy adott értéknél nagyobb erővel. Ha a gömböt mi ennél a tartóerőnél kisebb erővel próbáljuk emelni, akkor az nem mozdul. A rendszer bizonyos határon belül mozdulatlan marad, egymásnak feszülő, de egymást kiegyenlítő erők hatása alatt.

Mi a szabadegyensúly és a kényszeregyensúly közötti különbség? Mik a létrejöttük feltételei?

Merev testek nem teljesen szabad mozgása során a test valamilyen pontja forgásponttá *válhat*, illetve egy azon átmenő egyenesből forgástengely lesz, átmenetileg.



Ha egy ládát megbillentünk, akkor az egyik éle **eseti forgástengely** feladatát tölti be, vagy ugyanezt csak síkbeli rajzon nézve **eseti forgáspont** lett belőle. Ha a másik irányba billentjük, akkor a másik sarka lesz eseti forgáspont. Ha leteszel egy poharat az asztalra, akkor az aljának bármelyik pontjából lehet eseti forgáspont. Csak attól függ, hogy a forgáskor (megbillentéskor) merre mozdul a pohár. A bal oldali ládának két lehetséges eseti forgáspontja meg van jelölve.



Olyan eset is van, amikor a forgáspont a kitérítéskor vándorol, a bal oldali ábrán egy ilyen esetet láthatsz.

Forgási szabadegyensúlyban van a test, ha kis erőtől is el tud fordulni, de most mozdulatlan. Ennek a feltétele a testre ható erők forgatónyomatékainak kiegyenlítettsége az aktuális forgáspontra.

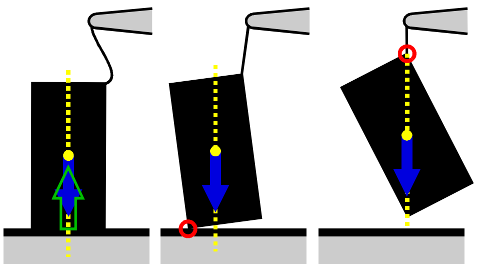
Például kényszeregyensúlyi helyzet az, amikor a fenti láda a talpán áll. Ekkor a súlyerő erőkarja egyik lehetséges forgásponthoz képest sem nulla, de a láda azért nem fordul el, mert a talaj nyomóerőt fejt ki a test aljára, és ezzel a súly forgatónyomatékát bármelyik forgásirányba kiegyenlíti.

A középső láda nincs egyensúlyban, mert a súlypontjában ható G súlyerőnek a kialakult eseti forgáspontra vonatkozó erőkarja nem nulla, így a forgatónyomatékok összege sem nulla. A láda, ha elengedjük, a pozitív irányú forgatónyomaték hatására elfordul, visszabillen a talpára.

Megjegyzés: Tapasztalatból tudjuk, hogy ilyenkor a láda kicsit *átlendül* ezen a helyzeten, és egy ideig billeg, de ez már a mozgások témakörébe tartozik. Itt úgy képzeljük el a dolgot, hogy a test szépen, nyugodtan fordul el, és meg is áll, amikor a forgatónyomatékok nullára állnak be.

Amikor a ládát annyira billentjük meg, hogy a súlypontja pontosan a forgáspont *fölé* kerül, a súlyerejének a hatásvonala átmegy a forgásponton, a forgatónyomaték nullára csökken, és a láda "a sarkán egyensúlyozva" megáll. Egyensúlyban van, és kis erővel is elmozdítható, ez szabadegyensúly.

Mi a súlypont? Mi az egyensúly feltétele?



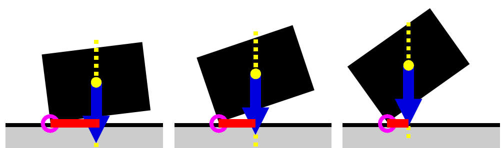
Nézd meg ezt a képet is. A láda először kényszeregyensúlyban a talpán áll. Kimozdítható belőle, de ehhez nem elég bármilyen kis erő. Amikor a daru a sarkát elég erővel húzza, a láda bal alsó sarka eseti forgásponttá válik, a láda elbillen. **Kényszeregyensúlyban** van most is, a kötél erejének forgatónyomatéka ellensúlyozza a súlyerő forgatónyomatékát, de elég nagy erővel ebből mi is tovább tudnánk billenteni.

Miért nem elég ehhez bármilyen kis erő? Hiszen megvan az egyensúly, egy pici erő is forgatónyomatékot hoz létre, amivel a pozitív irányba forgató erők kicsi, de mégiscsak létező fölénybe kerülnének, ami miatt a ládának balra kellene billennie, nem?

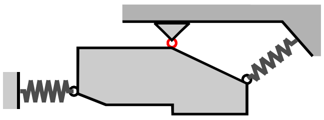
Köszönöm a kérdést. Azért nem, mert **a kötél ereje ellenerő, ami itt azt jelenti, hogy *a terheléshez igazodik***. Annyival húzza a láda sarkát, amennyi ahhoz kell, hogy a súlyerő forgatónyomatékát ellensúlyozza. Ha mi egy pozitív irányba forgató erőt fejtenénk ki a ládára, akkor *a kötélerő csökkenne*, mert kevesebbel kell hozzájárulnia az egyensúlyhoz. A mi erőnknek először át kellene vennie a láda megtartásához szükséges *összes* erőt a kötéltől, és csak a további erő eredményezne elfordulást.

Ha a daru a kötelet továbbhúzza, a láda felemelkedik, a *jobb felső* sarka válik eseti forgásponttá, és a láda **szabadegyensúlyi** helyzetbe kerül.

Mit kellene helyettesítenünk az erőnkkel a mozdulatlanság fenntartásához? Ez egyensúly?



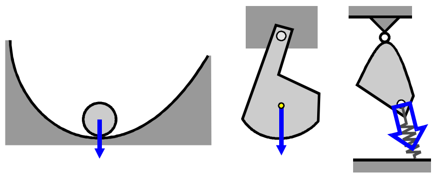
Ezen az ábrán azt figyelheted meg, hogy a felállított láda súlyerejének az eseti forgásponthoz húzott erőkarja egyre kisebb lesz. Ha az erő hatásvonalának iránya ugyanaz (itt függőleges), akkor a forgáskor az erőkar hossza változik. Elérheti a nulla hosszúságú állapotot is, ekkor a forgatónyomaték is nulla lesz, létrejön egy forgási szabadegyensúly. Mivel csökken a súlyerő forgatónyomatéka, ezért a láda billentéséhez szükséges erő is egyre kisebb lesz, ezt már tapasztalhattad.



Annak ellenére, hogy az egyensúlyban részt vevő erőként a példákban a szokás szerint a testek súlyerejét szerepeltetjük, az egyensúlyt másféle erők is létrehozhatják, irányíthatják. A balra látható tökmindegy, hogy milyen alakú testet a rugók teljes súlytalanságban is stabil forgási szabad-egyensúlyban tartják.

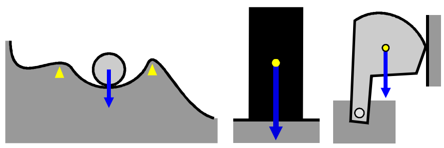
Egyensúlytípusok

Az ábrákon már észrevehetted, hogy az egyensúlyi helyzetekben a rendszer *várható viselkedése* eltérő.



Stabil egyensúlyi helyzetnek azt nevezzük, amikor az abból való bármilyen kimozdítás után a test visszatér az egyensúlyi helyzetébe. Az itt láthatókon kívül stabil volt az egyensúlya az EGYENSÚLY fejezet ábráján a hajónak, a rugókon függő testnek és a lógó ötszögnek is. Elforduló test stabil egyensúlyában a kitérítés során az erők vagy az erőkarok úgy változnak, hogy *az egyensúlyi helyzet felé* tereljék a rendszert. Egy inga súlypontja ilyenkor a forgáspont alatt van.

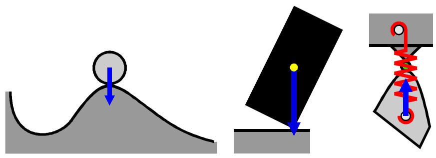
Metastabil helyzetnek az olyan stabil helyzetet nevezzük, amikor a test egy kisebb kitérítésből még visszatér az egyensúlyi helyzetbe. Tovább távolítva a kezdeti helyzettől a test elér egy instabil állapotot, azon túl pedig már a kezdeti helyzettől távolodni próbál, egy új (meta)stabil egyensúly felé törekedik. A távolodás mértéke, jellege nem számít, csak az, hogy a rendszer csak egy határon belül marad stabil. Metastabil az egyensúlya az alján álló ládának, mert ha kicsit kibillentjük, akkor visszabillen. De ha megdöntjük annyira, hogy a súlyvonala túljut az eseti forgáspontján, akkor ellenkező irányú forgatónyomaték keletkezik, ami a ládát felborítja.



Felmerül a kérdés, hogy mikor mennyit tekintünk még "kisebb kitérítés"-nek. Elméletileg egy végére állított szívószál is metastabil, mert egy egészen kis kitérítésből még visszatér. Hogy ezt mi a gyakorlatban már kicsit stabil helyzetnek sem tartjuk, az külön kérdés.

A metastabil helyzetet csak ritkán veszik külön, olyankor, amikor ennek külön jelentősége van. A stabil helyzetek nagy része csak metastabil, mert ritka az olyan szabadegyensúly, amely *minden határon túli* kitérítés esetén is visszaáll. *Ezért gyakran a metastabil helyzetet is stabilnak nevezzük,* ha az instabilitási pont eléréséhez igazán jelentős kitérítésre van szükség.

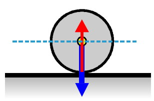
Kényszeregyensúly csak stabil vagy metastabil lehet, mert ezeknél kell egy minimumnál nagyobb erő a rendszer kitérítéséhez.



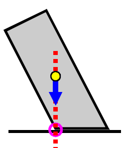
Instabil, más szóval **labilis** helyzet az, amikor a test *a legkisebb* kimozdítás után magától tovább távolodik a kezdeti helyzetétől. A kimozduló test végül megállapodik egy valamilyen más, nem instabil helyzetben. Egy instabil inga súlypontja ilyenkor a forgáspont fölött van.

Tartósan fennálló instabil helyzetet előállítani a gyakorlatban nemigen tudunk. Az instabilitás pont azt jelenti, hogy a legkisebb hatásra is elkezdődik a kitérés. Egy ceruzát a hegyén, egy tojást a csúcsán megállítani csak akkor lehetne, ha a súlypontját tökéletes pontossággal igazíthatnánk a forgáspont fölé. A valóságban mindig marad egy kis eltérés, ami egy gyenge forgatónyomatékot hoz létre, és a test egyre gyorsabban távolodni kezd az egyensúlytól.

Ha ilyenkor az alátámasztást kicsit elmozdítjuk az elfordulás irányába, akkor a forgáspont áthelyeződése miatt a test a másik irányba kezd dőlni. Amikor ezt folyamatosan csináljuk, akkor *egyensúlyozunk*.

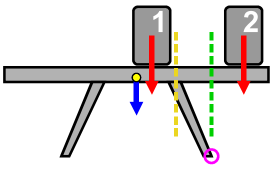


Semleges, más szóval **közömbös** vagy **indifferens** az egyensúlyi helyzete egy vízszintes asztalon levő golyónak, mert ha bármennyit is elmozdítjuk, akkor megmarad az új helyzetében. A semleges viselkedés csak vízszintes elmozdulásra figyelhető meg, minden egyéb elmozdulásra ez a golyó kényszeregyensúlyban van.



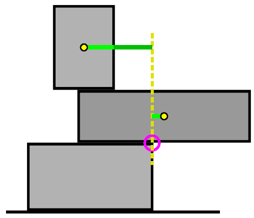
Félstabil a képen látható, asztalra állított test helyzete. Ez egy határeset, jól látszik, hogy a súlyvonal átmegy a test egyik lehetséges forgáspontján. Pozitív irányban (balra) instabil, mert ha a testet bármilyen kis mértékben kitérítjük, akkor egyre növekvő pozitív forgatónyomatéka hatására felborul. Az ellenkező irányban viszont a test kényszerstabil.

Mi az öt egyensúlyi helyzet neve? Mi a különbség a stabil és metastabil helyzet között?



A képen levő pad egy jól ismert példa az egyensúly és a forgatónyomatékok kapcsolatára. Látható a pad és a lábak együttes merev rendszerének súlypontja és súlyereje, és látható rajta két test. Először felemeljük a 2. számú testet. Aztán visszatesszük, és felemeljük az 1. számú testet. Mikor borul fel a pad? Nyilvánvaló, igaz? Csak az erők erőkarjait kell megjelölni, amelyek az eseti forgáspontunkból az erők *hatásvonalára* merőlegesen rajzolandók, mint mindig. Számolni most nem is kell, mert az 1. test súlya hozzátesz a pad súlyához, vagyis a 2. test felemelésének biztosan nem lesz következménye. Ha a 2. test elég nehéz hozzá, akkor legyőzi a pad súlyának forgatónyomatékát, és a pad már billen is.

Pótkérdés: ha a pad súlya nulla lenne (hogy ne zavarjon bele a képbe), akkor a zöld vagy a sárga vonal jelölné-e azt a határt, amelytől jobbra letéve a testet a pad felborul? Válasz: a zöld, mert a pont ide tett test súlyának hatásvonala menne át a lehetséges forgásponton. A zöld vonaltól kicsit balra a test súlya már balra forgat, stabilizál. A vonaltól kicsit jobbra tett test súlyának forgatónyomatéka már felborítja a padot. Az, hogy a pad lába honnan kezdődik, teljesen mindegy, ez egyetlen merev rendszer, *a láb végénél lesz a forgáspont*.

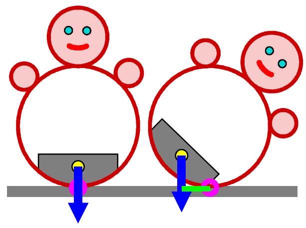


Három testet látunk egymáson. A testek mozdulatlanok. Elemezzük: A középső test súlypontja az alátámasztásán kívül van, negatív irányú forgatónyomatéka van az alsó test élére mint eseti forgáspontra vonatkoztatva. A felső test viszont a másik végére nehezedik, pozitív forgatónyomatékot hozva létre a középső testen. Érzésre látjuk, számolgatás nélkül, hogy ez az erő ellensúlyozza a középső test saját súlyát. *Nem azért, mert a súlya lenne nagyobb*, ami egyébként nem is igaz. Hanem azért mert a felső test a súlyával olyan távol nehezedik a középső testre, hogy nagyobb forgatónyomatékot hoz létre. Csak ez számít. Ha viszont a felső testet levesszük, a középső test felett győz a saját súlyának jobbra forgató nyomatéka, és lebillen.

Nézzük át röviden, amiről eddig szó volt:

- Egy test mozdulatlan, ha a rá ható erők és a forgatónyomatékok is kiegyenlítik egymást.
- Ha egy test el tudna mozdulni, de mozdulatlan, akkor azt mondjuk rá, hogy egyensúlyban van.
- Ha ekkor a testet bármilyen kis erővel el tudjuk mozdítani, akkor az egyensúlya szabadegyensúly, ha pedig csak egy adott erőnél nagyobb erővel, akkor kényszeregyensúly.
- Egyensúlyban lehet elforduló és egyéb módon elmozduló test is. Az elforduló testnek forgáspontja van, amely vagy rögzített, vagy eseti.
- Az egyensúlynak öt típusát különböztettük meg, akár forgó, akár más elmozdulási lehetőségnél: stabil metastabil, instabil, félstabil, semleges.

Próbáljuk ki a tudományunkat három **példafeladat**on.



► A keljfeljancsi egy réges-régi gyermekjáték, ezerféle változatban létezik. Az aljában levő rögzített nehezék miatt az egyébként üres, könnyű test közös tömegközéppontja nagyon alacsonyan van. Az elbillentésekor a baba alján levő eseti forgáspont vándorol. **Milyen típusú a baba egyensúlyi helyzete a jobb oldali képen? …**

Nincs is egyensúlyban. Ha ebben a helyzetben magára hagyjuk, azonnal elfordul, akkor pedig ez nem egyensúly, igaz? A tömegközéppontban függőlegesen ható súlyerőnek van egy nem nulla hosszúságú vízszintes erőkarja, vagyis van forgatónyomatéka, ez fordítja vissza. A *bal* oldali képen látható állapotban a baba egyensúlya stabil szabadegyensúly.

► Fúrunk a falba egy 10 mm átmérőjű lyukat, és 20 mm mélyen belecsúsztatunk egy ugyanilyen vastag, 6 cm hosszú pöcköt. A faltól 25 mm-re felakasztunk rá egy 3 kg tömegű képet, a rendszer egyensúlyban van. **Rajzold le és számítsd ki az erőket! … Ne lapozz! Előbb rajzold le.**

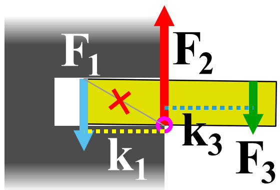
Az egyensúlynak két feltétele van, kezdjük a forgatónyomatékokkal, amelyek összege nulla. A pöcökre hat a zöld erő, amely a kép 30 N-os súlya. A pöcök nyilvánvalóan támaszkodik a falra, és az erő hatására negatív irányba kifordulni próbál a falból, ezt magad is érzed, igaz? Ha nem tartaná vissza más erő, akkor a lila körrel jelölt ponton támaszkodva fordulna kifelé, így tehát ezen a helyen van egy eseti forgáspont. Valamilyen erőnek meg kell akadályoznia az elfordulást.

Ha a pöcök szorosan illeszkedne, akkor az egész szárára hatna egy lefelé nyomó erő, de az illeszkedés nem szoros, leheletnyi elbillenésre van lehetőség, ezért a legbelső ponton hat a pöcök legvégére a kék F_1 ellenerő. A nyomott felület ellenereje mindig merőleges, ezért az erőt itt függőlegesnek vehetjük. Mekkora az erőkar? A pöcök kb. 10 mm magas, ezért egy 20·10 mm-es derékszögű háromszög átlójaként számolhatná ki az, aki nem tanult fizikát, de mi jól tudjuk, hogy az erőkar mindig merőleges az erőre. Ezért az átló nem érdekes, mert a k_1 erőkar itt vízszintes, pontosan 20 mm.

A piros F_2 támasztóerőnek nincs erőkarja, nincs forgatónyomatéka, vagyis az F_1 erő forgatónyomatékát a zöld F_3 erő által létrehozott forgatónyomaték ellensúlyozza. A k_3 erőkar 0,025 m, F_3=30 N, a forgásirány negatív, az F_3-hoz tartozó forgatónyomaték M_3=−0,75 Nm. Az egyensúly fennállása miatt az M_1 forgatónyomatéknak +0,75 Nm-nek *kell* lennie, k_1=0,02 m, ezek szerint F_1=37,5 N.

Mivel a feladat kitért arra is, hogy rajzold be "az erőket", ezért célszerű a megoldásba belefoglalni egy megjegyzést arról, hogy a rajzon csak a pöcök*re* ható erők láthatók, és a pöcök mindegyikre egy azonos nagyságú, ellenerővel válaszol, az F_1 és F_2 ellenerői a falra, az F_3 ellenereje a képre. Ha az ellenerőket is berajzoltad, az egyáltalán nem baj, de írd le egy sorban, hogy a pöcökre mely erők hatnak.

Az egyensúly másik feltétele szerint a pöcökre ható erők eredője is nulla. A három erőből kettőt már ismerünk, keressük az F_2 erőt. Ez egy alátámasztás, ami egy fentről lefelé ránehezedő erőt ellensúlyoz, vagyis a feltámasztó erő függőleges irányú.

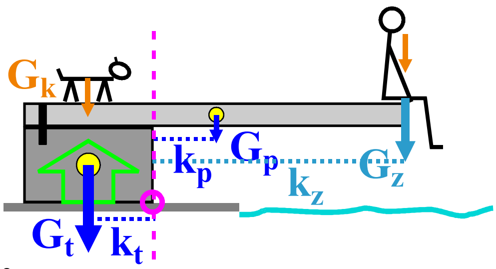


A három erő vektori eredője nulla, ezt tudjuk, mert csak így maradhat a pöcök mozdulatlan. Ha az egymással párhuzamos F_1 és F_3 erőket egy közös eredővel helyettesítjük, akkor annak pontosan ki kell egyenlítenie az F_2 erőt, mert az összegük nulla. Emiatt az F_1 és F_3 eredője elvileg átmegy a forgásponton. Most jön egy kis izgalom: vajon tényleg így van-e, mert ha nem, akkor bajban vagyunk. $F_1 \cdot k_1 = F_3 \cdot k_3$, itt ez az összefüggés érvényes a párhuzamos erők eredőjének helyére. Nem kell egyenletként megoldanunk, csak nézzük meg, hogy a forgáspont helye megfelel-e a kívánalomnak: $F_1 \cdot k_1$ =37,5·0,02=0,75 és $F_3 \cdot k_3$=30·0,025=0,75, tehát valóban, az F_1 és F_3 eredője a forgásponton megy át, azaz egyvonalban van az F_2-vel. (Talán be is tudnád bizonyítani, hogy mindig így is lesz.) A nagysága pedig 37,5+30=67,5 N, akkor ennyi az F_2 nagysága is, és teljesülnek a mozdulatlanság feltételei.

> A feladat felhasználta az erőkről eddig tanultakat, és csak azokat. Légy szíves végignézni az egész levezetést, ebből már *mindent* értened kell. Ha nem első olvasásra, akkor másodikra. Ha bármelyik lépéssel bajod van, akkor most olvass utána, különben nem tudsz továbbhaladni. Dolgozz érte.

► A képen látható építmény végén ülsz. Az egészet csak a súlya tartja, és fel tud billenni. A betontömb egy 80×80 cm alapú, 30 cm magas hasáb, amelynek a sűrűsége 3000 kg/m3. A palló a tömbhöz van rögzítve, a vastagsága 10 cm, a tömege 40 kg, a teljes hossza 3,6 m. A te tömeged 50 kg. Vízbe esel-e, ha odahívod és a karodba veszed a 120 N súlyú kutyádat? …

Ha ez a rendszer felborul, akkor a tömb első élénél lesz az eseti forgáspontja, megjelöltem. Most még *talán* egyensúlyban van, meg kell vizsgálunk, hogy teljesülnek-e ennek a feltételei. Ha igen, milyen típusú az egyensúlya? **…**



Rendes esetben metastabil kényszeregyensúly, mert kisebb kibillentés után visszabillen, és bármilyen kis erő nem elég a kibillentéséhez. Ha jobbra forgató irányba pont most van kiegyensúlyozva, akkor félstabil. Ezek a dolgok a forgatónyomatékok kiszámítása után ki fognak derülni.

Mindenekelőtt számítsuk ki a betontömb $\mathbf{G_t}$ súlyát. A SÚLYERŐ fejezetben az áll, hogy a súly képlete $\mathbf{m \cdot g}$, ahol a $\mathbf{g}$ értékeként használhatunk 10-et, de valójában 9,80665 m/s^2. Hát mi most adjuk meg a módját, számoljunk a pontos értékkel.

A tömb térfogata 0,8·0,8·0,3=0,192 m^3, a sűrűsége 3000, a tömege a kettő szorzata: m_t=576 kg. A súlya egész pontosan $G_t = m_t \cdot g$=5649 N. A rajz nem méretarányos, de azért nagyjából a helyzetet mutatja. Az eredményt úgysem szerkesztéssel kell megtalálnod, hanem az adatokból kell kiszámolnod, vagyis a rajznak nem kell pontosnak lennie, csak segítsen az elképzelésben.

A megoldás nagyon egyszerű: csak kiszámítjuk az erők forgatónyomatékait. Balra forgató erő a G_t, és *átmenetileg* a kutya G_k=120 N súlya, ugyanakkora erőkarokkal. A kutyát hagyhatjuk, az úgyis odébbmegy, mert kíváncsi arra, hogy te mit nézel. Mekkora az erőkar? A G_t támadáspontja a tömb tömegközéppontja, de a tömb tömör beton, homogén, egyenletes sűrűségű, vagyis ez a pont a mértani középpontban van, félúton a két oldala között. Ha a tömb szélessége 80 cm, akkor a középpontja és a lila szaggatott vonal közötti távolság 40 cm. A tömb súlyának forgatónyomatéka $M_t = G_t \cdot k_t$=5649·0,4 =+2260 Nm.

Oké. Miféle erők forgatnak jobbra? Egyszer van a palló saját súlya, amelyről tudjuk, hogy m_p=40 kg, akkor G_p=392 N. Mekkora a lila forgásponthoz viszonyított erőkarja, a k_p? A palló teljes hossza 3,6 m, szintén egyenletes sűrűségű test (mindig ez az alapértelmezés), vagyis a tömegközéppontja középen van, a végétől 1,8 m távolságra. A tömb szélessége 0,8 m, vagyis k_p=1,8−0,8=1,0 m. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka $M_p=G_p \cdot k_p$=392·1,0=−392 Nm. Tudod, negatív irányú nyomaték. És a te súlyod, a G_z nyomatéka? A tömeged m_z=50 kg, $G_z=m_z \cdot g$=490 N, k_z=3,6−0,8=2,8 m. A forgatónyomatékod $M_z=G_z \cdot k_z$ =−1372 Nm. Hogy miért lettél "z"? Nem tudtam, milyen betűvel jelöljelek, és gondoltam, "z" jó lesz. Neked is van egy kis szabadságod az elnevezésekben, de ne legyen zavaró, és figyeld meg, hogy a szövegben és a rajzon is világosan látható, hogy mit jelöl.

Most jön a kérdés: állva marad-e a szerkezet így, kutyátlanul, vagy már eleve borul? A forgatónyomatékok összege $M_{össz}=M_t+M_p+M_z$. Külön fejezetben foglalkoztunk ezzel. Most a számértékek az előjelesek, és az jön ki, hogy $M_{össz}$=**+496** Nm. Fellélegezhetsz, mert egyelőre nem billentél a vízbe, a pozitív forgatónyomaték balra forgat.

Légy szíves pontosan végigszámolni az egész eddigit úgy, hogy az ábrán meg is keresed, mi miért annyi.

Álljunk meg egy szóra. Azt tanultuk, hogy a mozdulatlanság egyik alapkövetelménye, hogy a rendszerre ható forgatónyomatékok összege nulla legyen. Ezzel szemben itt +496 Nm, balra forgató nyomaték. Nem nulla. Akkor a rendszer *nem lehet* mozdulatlan. Mi a magyarázat? **…**

Egy forgatónyomatékot kihagytunk a képből. Egy pontosan −496 Nm-es, jobbra forgató nyomatékot. Ami nemcsak a feltétele a mozdulatlanságnak, hanem *a mozdulatlanság érdekében születik*. A tömb alá odarajzoltam, jelzésszerűen egy felfelé mutató zöld nyilat, ami a talaj által a tömb aljára gyakorolt erő. Honnan lett és miért pont ennyi? A tömb nyomja a talajt, de Newton **III**. törvénye szerint akkor a talaj is nyomja a tömböt. Ez utóbbi egy **ellenerő**, amelynek fontos jellemzője, hogy *az aktív erő nagyságához igazodik*. A talaj szilárd, és akármekkora is a tömbön át érkező erő, a talaj ellenerőt hoz létre. Ha odamegy hozzád a kutya, akkor majd csökken a tömb nyomóereje – nem a súlya! –, ha pedig leugrasz a pallóról, akkor nő. A talaj ellenereje mindig pont akkora lesz, hogy a forgatónyomatékok összege pontosan nullára jöjjön ki. Nem szívességből, hanem csak szilárd testként ellenáll az alakváltoztatására törekedő hatásnak, bizonyos határig. Ha a rendszer pontosan félstabilra ki van egyensúlyozva a lila forgáspont körül, akkor a talaj nyomóerejére nincs szükség, ezért az megszűnik. A tömb nincs a földhöz rögzítve, ezért ha a rendszer már billen, akkor a talaj nem fogja visszahúzni.

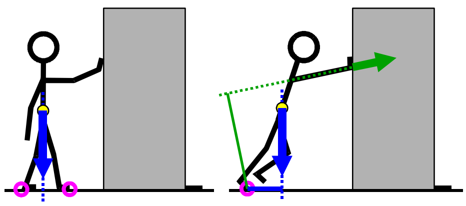
Jöjjön a kutya. A súlya G_k=120 N, az erőkar k_z, mivel a feladat szerint az öledbe veszed, pont azért, hogy a kutya súlya ugyanott hasson, ahol a tiéd. A kutya forgatónyomatéka 120·2,8=−336 Nm. Ha ezt hozzáadjuk a forgatónyomatékok összegére az előbb kapott $M_{össz}$=+496 Nm értékhez, akkor kijön **+160 Nm**. Ez azt jelenti, hogy amikor a kutya is veled van, a rendszer összes forgatónyomatéka még mindig pozitív, balra forgató, ezért a szerkezet nem fog felbillenni, megmenekültél.

2,8 méteres erőkarral a 160 newton azt jelenti, hogy az egyensúlyban 57 newton "tartalék" maradt. Ha a kutya 120 helyett 177 N súlyú lenne, akkor ott ülnél dermedten, és suttogva kérlelnéd, hogy lehetőleg ne csóválja a farkát, mert csak egy hajszál választ el benneteket a vízbe borulástól.

És ha te 60 kg tömegű vagy, a kutya pedig 20 kg, akkor *meddig* mehet el a kutya a pallón, hogy a rendszer ne kezdjen billenni? Próbáld meg önállóan kiszámolni.

Súlypontáthelyezés

Ez a téma valószínűleg nem szerepel a tananyagodban, de ettől még elolvashatod. Nincsenek benne képletek, csak mesélek még néhány dolgot az egyensúlyról.

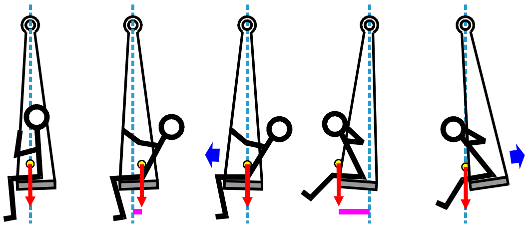


Ha állsz a szekrény mellett, akkor stabil kényszeregyensúlyban vagy, a két lehetséges eseti forgáspontod a két lábad, és a nehézségi erőd mindkét pontra olyan irányú forgatónyomatékot hoz létre, ami a mozdulatlanságot támogatja. Kényszeregyensúly, mert a talaj feltámasztó ereje az, ami az elfordulásodat akadályozza. Kisujjal nem lehet téged ebből a helyzetből kibillenteni. Ha a kezedet ráteszed a szekrényre, akkor ezzel gyakorlatilag elhanyagolható erőt fejtesz ki rá.

Képzeld el – akár ki is próbálhatod –, hogy nagyobb erőt fejtesz ki a szekrényre, mert fel akarod dönteni. Anélkül, hogy a lábaidat elmozdítanád. Érzed, hogy az egyik lábadon nő a terhelés, a másikon csökken? Felemás helyzet alakul ki, de továbbra is egyensúlyban vagy, csak már a szekrény is hozzátesz a téged mozdulatlanul tartó erőkhöz.

Mit teszel, ha igazán nekiveselkedsz, hogy feldöntsd a szekrényt? *Előredőlsz*, a szekrény felé. Ezzel egyidejűleg az egyik lábadat hátrább teszed, arra helyezve a testsúlyodat. Mi történt? Megoldottad azt, hogy a nehézségi erődnek a szekrény felé forgató nyomatéka jöjjön létre, minél nagyobb. Ehhez áthelyezted a forgáspontot, és megpróbálsz minél nagyobb erőkart adni a tömegközéppontban hatónak tekinthető testsúlyodnak. Merev testnek számítasz – meg is feszíted az izmaidat –, és a testsúlyod forgatónyomatéka a válladon és a karodon át a szekrényre ható erőt hoz létre. A kötélhúzás kapcsán a FORGATÓNYOMATÉK fejezetben már olvashattál ilyesmiről.

A súlypont elmozdításának itt az volt a célja, hogy kimozdulj az egyensúlyi helyzetből. Mutatok egy másik ilyen esetet. Ülsz a mozdulatlan hintában, és nincs senki, aki meglökhetne téged. Mit csinálj?



A hinta veled együtt egy olyan elfordulni képes merev rendszer, amely stabil szabadegyensúlyát akarja megtartani. Az ülőke és a váz súlyát, pontosabban súlyeloszlását most nem nézzük, úgysem számít sokat. A tested súlypontjának a helyét megjelöltem, a nehézségi erőd itt támad, aminek a hatásvonala mindig függőleges. A hinta kezdetben úgy áll, hogy a súlypontod pontosan a forgástengely alatt van. Ennek az az oka, hogy így a rendszerre ható egyetlen külső erőnek, a nehézségi erőnek a hatásvonala átmegy a forgástengelyen, és emiatt a forgatónyomatéka nulla. Egyensúly van, ami most nem jó.

Kicsit dőlj hátra. Ezzel néhány centit hátrébb viszed a súlypontodat, ami kilép a forgástengelyen átmenő függőleges vonalról, forgatónyomatékot hoz létre, és ettől a hinta előremozdul, a stabil helyzet irányába. Túl is lendül rajta, inga módjára. Amikor a hinta ennek a mozgásnak a túlsó holtpontján jár, a rendszer közös súlypontja már a függőlegesen túl van. Az inga lengése az egyensúlyi helyzetre szimmetrikus, előre kicsit, hátra kicsit.

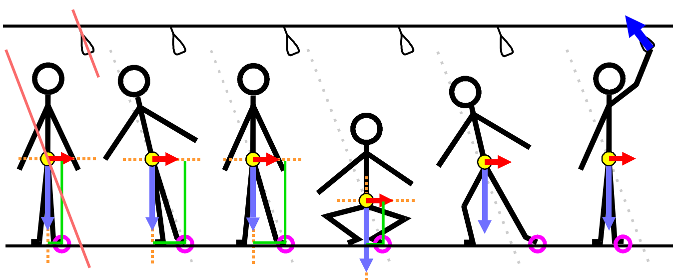
Amikor a hinta az elülső holtpontban van, dőlj előre. A súlypontodat ezzel előreviszed, visszafelé mozdító forgatónyomatékot keltve. Összességében így nagyobb forgatónyomaték mozdítja a hintát hátra, mint amennyi mozgatta előre, emiatt a lendület nagyobb lesz, a kitérés nő. A következő holtponton ismét dőlj hátra, az újabb holtponton előre, és így tovább. A hinta magától mindig szimmetrikusan lendülne, rendes inga módjára, de ha jó ritmusban mozogva mindig egy kis extra forgatónyomatékot adsz neki, a hintát néhány lendülés alatt is be tudod indítani. Ha pedig fordítva csinálod a súlypont-mozgatást, meg is tudod állítani.

Figyeld meg, ahogy a testhelyzeted változtatásával a tömegközéppontod, súlypontod áthelyeződik.

Ha az ingát kitéríted, majd elengeded, nem fog megállni a kezdőhelyzetben, hanem túllendül. Meddig?

Gyakrabban van olyan, hogy az erők megváltozó forgatónyomatékainak összegét *nullán próbáljuk tartani*. Ha a busz, amelyen utazunk, fékez, akkor egy egyelőre tehetetlenségi erőnek nevezett hatás bennünket előre akar lendíteni. A legegyszerűbb ezt megakadályozni azzal, hogy kapaszkodunk, de a szóbeszéd szerint olyan ifjak is akadnak, akik ilyenkor léha egyensúlyozással próbálkoznak. Az "egyensúlyozás" azt jelenti, hogy a testünk **labilis egyensúlyát** próbáljuk megtartani, a forgatónyomatékok, a súlypont igazítgatásával. Nézzük meg egy példán, hogy erre milyen lehetőségek is vannak.

Utaznak a hatos ikrek a buszon, és a buszvezető belelép a fékbe. Mind a hat embernek azonos a tömege, ebből eredően egyrészt azonos a súlyuk, másrészt a tehetetlenség is ugyanakkora erővel lódítja előre a tömegközéppontjukat. Mindegyiküknél a jobb lábuk végénél van az az eseti forgáspont, ami körül a tehetetlenség elforgatni próbálja őket. Mindegyiküknél megnézzük a súlyuk és a tehetetlenségük erőkarjait (zöld vízszintes és függőleges vonalak), ezek alapján mindenkire kiszámítható a rá ható két erő forgatónyomatéka. Ha azt akarják, hogy ne essenek el, akkor gondoskodniuk kell arról, hogy a forgatónyomatékok összege ne legyen negatív irányú (jobbra forgató), különben repülnek. Tehát ha a súlyuk (kék nyíl) forgatónyomatéka egy pillanatra is kevesebb lesz, mint amennyi a fékezés miatt a súlypontjukban fellépő, a tehetetlenségükből származó vízszintes erő (piros nyíl) forgatónyomatéka, akkor repülnek. Négyen **a súlypontjuk elmozdítását** választották védekezésül.



> A piros vonallal, csak érdekességként, megjelöltem, hogy **a fékezés idejére mi lett a függőleges irány**. A kapaszkodó itt egy afféle "függőon", ami mindig hitelesen mutatja a függőleges vonalát. Erről lesz még szó máskor, a FÜGGŐLEGES fejezetben.

Az első iker teljesen elbambul, és a tehetetlenségi erő forgatónyomatéka győz. Jobbulást kívánunk.

A második iker a fékezés erejét azzal egyensúlyozza, hogy **vízszintesen elmozdította a súlypontját**, az ellenkező irányba, ez esetben balra. Ezzel *megnövelte a súlyához tartozó erőkart.* A forgatónyomatékok összege pont nulla, a fickó félstabil helyzetben van, pont az eldőlés határán egyensúlyoz. Biciklin a kanyarban bedőlve pont ugyanezt csináljuk.

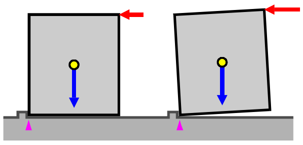
A harmadik iker rafináltabb, ő úgy helyezi át a súlypontját a forgásponthoz képest, hogy magát **a forgáspontot helyezi át**. Kitámaszt. Az eredmény számszerűleg megegyezik az előzővel.

A negyedik iker látszólag hülye, pedig a fizika szempontjából igaza van. A nehézségi erejének az erőkarján nem változtat, az megegyezik az első ikernél láthatóval. *Ő a tehetetlenségi erő erőkarját rövidíti meg*. Magán az erőn nem tud változtatni (ahhoz a saját tömegét kellene csökkentenie), de az erő forgatónyomatékán igen, azzal, hogy **lejjebb vitte a súlypontját**. Bár ebben a testhelyzetben nehéz az erők változására reagálni, más esetekből magát a módszert magunk is ismerjük, sokszor alkalmazzák a stabilitás megnövelésére.

Mi a három egyensúlyváltoztatási módszer?

Stabilitás

Mi mindeddig nem *növeltük* a stabilitást, hanem csak egyensúlyozva megtartottuk a félstabil egyensúlyi helyzetet.



Mit jelent a stabilitás? Tegyél le az asztalra egy dobozt. Az alsó sarkát támaszd meg, hogy ne csússzon el, a másik oldalról pedig nyomd meg egy kicsi erővel. A doboz nem mozdul, az erőd nem volt elég a megbillentéséhez, a doboz kényszeregyensúlyban van. Nyomd a dobozt erősebben, hogy megmozduljon, majd engedd el. A doboz visszabillen, nem borult fel, nem került át az instabilitási ponton.

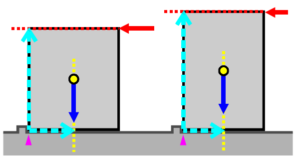
Lehetne még ez utóbbit is stabilitásnak nevezni. Mégis, **a dobozt stabilnak akkor mondjuk, ha az erő hatására *meg sem billen***, hanem tartja a kényszeregyensúlyt. Azért, mert sok helyzetben a megbillenés rögtön folytatódik a felborulásig, lejjebb olvasni fogod. Autóval a kétkerekezés azért nehéz, mert a kocsi megbillentése után az erőből azonnal vissza kell venni, különben a kocsi borul.

A két lejjebb látható test közül a bal oldalinál nagyobb erőre van szükség a kibillentéshez, ez a stabilabb. A stabilitás határát az az erő képezi, amelyik még éppen az elemelkedés határán tartja a dobozt.

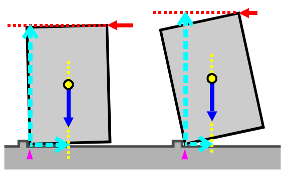
Két test közül azt tekintjük stabilabbnak, amelyik nagyobb kitérítő erőt visel el elmozdulás nélkül.

Figyelj fel rá: a korábbi fejezetekben stabil egy egyensúlyi helyzet volt. Ebben az esetben stabil *maga a test.* A kettő között lényeges különbség van.

A test először azért van egyensúlyban, mert a súlyának az elfordító erejét (mindkét lehetséges eseti forgáspontra) az asztal felfelé mutató tartóerejének forgatónyomatéka ellensúlyozza. Nézd meg újra az EGYENSÚLY fejezetet, ha kell. Természetesen teljesül a mozdulatlanság másik követelménye is, tehát a testre ható erők eredővektora is nulla, de itt mi a test elfordulásával foglalkozunk. Ahogy növeljük a pirossal jelölt erőt, egyre csökken az asztal felfelé ható tartóereje, mert mi vesszük át róla a terhet. Végül elérjük azt az állapotot, amikor már nem az asztal tartja a testet, hanem teljes egészében a piros erő, elértük a stabilitás határát. Ha az erőt egy kicsivel is növeljük, akkor a test már billen.



Ebből tehát az adódik, hogy a félstabilitás határán a súly és az oldalról ható kitérítő erő forgatónyomatékai kiegyenlítik egymást. Emlékeztetlek rá, hogy ez a következő egyenletet jelenti: $M_1 = -M_2$, azaz $F_1 \cdot k_1 = -F_2 \cdot k_2$, ahol F_1 és F_2 a súlyerő és a kitérítő erő, k a hozzá tartozó erőkar. Ahogy az ábrán láthatod, a két testnél mások az erőkarok, ezért a jobb oldali testnél kisebb oldalirányú erőnél érjük el a stabilitás határát, a két erő egyensúlyát, ezért stabilabb az alacsonyabb doboz.



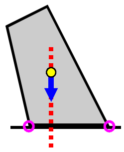
Már volt erről szó, de nézzük meg még egyszer: ha a dobozt megbillentjük, szintén megváltozik az erőkarok aránya, és ha a piros erő nem változna, akkor egyre nagyobb fölényt szerezne a súlyerővel szemben, és a dobozt felborítaná. Az erőből vissza kell vennünk, ha a borulást el akarjuk kerülni. Erős emberek versenyén feladat, hogy egy óriási, fekvő gumiabroncsot átbillentsenek. Ahogy emelik, egyre könnyebb, mert rövidül a súly erőkarja.

Két test stabilitását a gyakorlatban úgy hasonlítjuk össze, hogy a várható kitérítő erő jellegét és hatásvonalának magasságát is figyelembe vesszük. A tehetetlenségi erő a súlypontban hat, a súly is.

Milyen számítással tudjuk meg a stabilitás határához tartozó kitérítő erőt?

Folytassuk az ikrek megfigyelését. Hármójuk mutatványával az a gond, hogy ha a fékezés csak egy pillanatra is erősödik, akkor a súly forgatónyomatéka már kevés lesz az egyensúly megtartásához, mindhárom helyzetben. Elég balról egy pöccintés, és a három ügyeskedő vitéz felborul, hiszen a félstabil helyzetben, a stabilitás határán egyensúlyoznak.

Épp azért, mert a fékezés és más hasonló hatások nem teljesen kiszámíthatóak, kell egy kis *tartalék* az egyensúlyunkba. Ne tudjon bennünket a legkisebb erőnövekedés is feldönteni. Ezért az ötödik iker balra dől *és* a jobb lábát távolabb teszi, egyszerre. A súlypontját és a lehetséges eseti forgáspontjait úgy állította be ezzel, hogy a forgatónyomatékok összege *a stabil helyzet felé irányító érték* legyen. Két forgáspontja is lehet, mert balra is, jobbra is eldőlhet, ha az erők úgy alakulnak. Ezért a súlyvonalát viszi a kettő közé, és ezzel bizonyos mértékű kitérítő erőváltozást alapból ellensúlyozni tud. Ahogy ezen a testen is láthatod. Mindkét irányú kimozdításához bizonyos nagyságú erőre van szükség, vagyis a helyzete tipikus metastabil kényszeregyensúly, vagy ahogy ezt egyszerűbben is mondhatjuk: a helyzet **kényszerstabil**.

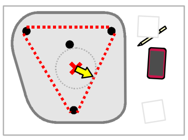


Egy elbillenthető test metastabil kényszeregyensúlyban van, ha a súlyvonala a jelenlegi feltámasztás lehetséges eseti forgáspontjai közé esik. Ha a súlyvonal egy forgásponton megy át, akkor félstabil egyensúly jön létre.

Minden eseti forgáspontra megnézve a súly forgatónyomatéka a jelenlegi helyzet megtartására törekedik. Nézd meg az EGYENSÚLYTÍPUSOK fejezetnél a pad rajzát, és nézd meg még egyszer az ötödik iker helyzetét.

A stabilitás eléréséhez és növeléséhez a három bemutatott súlypontelmozdítási módszer keverhető. Mindjárt nézünk rá példákat.

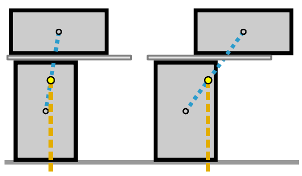
A hatodik ikerrel még nem foglalkoztunk. Mit segít a kapaszkodás? Azt, hogy beviszünk *egy harmadik erőt* a rendszerünkbe. Azzal, hogy a fogantyúra nehezedünk, az is erőt fejt ki ránk, és az a lényeg, ugye, hogy <u>ránk</u> milyen erők hatnak. A fogantyú által kifejtett erőnek is megvan a maga forgatónyomatéka, jó hosszú erőkarral, és ezzel kiegészítve a súlyunk által létrehozható stabilizáló forgatónyomatékot, simán ellensúlyozhatjuk a fékezésből eredő, felbillenteni próbáló erőt.



A stabilitás nem minden irányban azonos. Az ábrán *alul*nézetből látunk egy üvegasztalt, rajta valami nagy tárggyal (fax, gyümölcsprés, mindegy), amelynek a négy lába az asztalon támaszkodik. A súlyvonal most a síkból kifelé, felénk mutat, a piros kereszt a döféspontja. A súlyeloszlás láthatóan nem szimmetrikus. "Gumival" összekötjük a lábakat (piros vonal), megkapva a tényleges alátámasztási felületet. Ha egy ilyen alakú talpa lenne a kis lábak helyett, az teljesen egyenértékű lenne a kis lábakkal. Máris látszik, hogy a negyedik lábnak nincs hatása a stabilitásra, legfeljebb a súlyt segít megtartani. Megkeressük a határvonalnak azt a pontját, amelyik a kereszthez legközelebb van, nyíl mutat rá. Ebben az irányban kell a legkisebb oldalirányú erő a felbillentéséhez, errefelé a legkevésbé stabil ez a tárgy.

Mivel biztosíthatjuk egy test stabilitását?

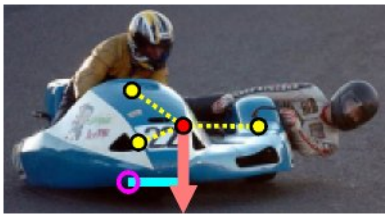
Eddig mindig egy testről beszéltünk, pedig az elmondottak több, egymáshoz mereven rögzített testre is érvényesek. Az egyensúly vizsgálatakor ez esetben **a rendszer közös súlypontját** kell figyelni.



Időnként szükségünk van egy rendszer súlypontjának a forgásponthoz képest történő elmozdítására. Az ábrán azt látod, hogy a rendszer alakját megváltoztattuk, a felső testet egy sínen jobbra toltuk. A közös súlypont, a **centrum** helye az alkotórészek tömegközéppontjai alapján megtalálható, ahogy ez a TÖMEGKÖZÉPPONT fejezetben olvasható volt. **Ha az alkotórészek súlypontjai elmozdulnak, akkor elmozdul a közös súlypont is.**

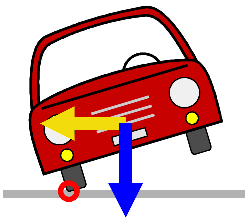
Van, amikor egy rendszer közös súlypontja spontán, nem tervezett módon helyeződik át. Ha ez egy nagy teherhajón elszabaduló konténerek miatt történik meg, például, akkor a hajó eleve nem túl stabil egyensúlya könnyen instabillá válhat, és akkor felborul.

De gyakran van, hogy egy rendszer közös súlypontját szándékosan helyezzük át, egy új egyensúlyi helyzet felvételéhez teremtve meg a feltételeket, illetve a rendszert arra késztetve.



A motorosok közül a vezető a súlypontját nem nagyon tudja oldalra vinni, az oldalkocsin kapaszkodó társa viszont nagyon is. A kanyarban a közös tömegközéppontjukra kifelé ható centrifugális tehetetlenség nyomatékát kell ellensúlyozniuk. Ha felvázoljuk a helyzetet, láthatod, hogy ezzel a vezető, a társa és a motor közös súlypontja oldalra mozdult, megnőtt a súlyerő erőkarja. Az ennek a haszna, hogy megnövelik a rendszer megbillenéséhez szükséges erőhatárt, vagyis a rendszer nagyobb oldalirányú, kifelé ható erőnek is ellenáll a kényszerstabil állapot elvesztése nélkül. Gyorsabban vehetik be a kanyart.

Merre kanyarodnak? Honnan tudod?

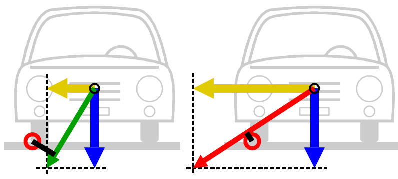


A másik két súlypontáthelyezési módszernek is megvan a gyakorlatban használt megfelelője. Egy átlagos autó elég stabil rendszer, de egy éles (és túl nagy sebességgel megkezdett) kanyarban a tömegközéppontra kifelé ható erő elég nagyra nőhet ahhoz, hogy a forgatónyomatéka felülkerekedjen a súly forgatónyomatékán. A nagyobb sebességű kanyarok bevételére szánt széria sportautónak ennél stabilabbnak kell lennie. De nem lehet a súlypontját vízszintesen tologatni, mint ahogy a motorosok teszik. Ezért lejjebb viszik a súlypontját, pontosabban az alkatrészek *közös* súlypontját, úgy, hogy a nehezebb alkatrészek helyét tervezik alacsonyabbra. Az eseti forgáspont vonalához mérve alacsonyabban levő súlypont kisebb erőkart ad a kanyarban fellépő oldalerőnek, az autó ettől stabilabb. A teherautó, teherhajó rakományát is úgy kell elhelyezni, hogy a nehezebb testek legyenek lejjebb, a rakomány közös súlypontja minél alacsonyabbra kerüljön. (Lásd a TÖMEGKÖZÉPPONT fejezetet.) Függőleges irányban, a súlyuk szempontjából mindegy, de a tömegközéppontjukat oldalra húzó erőknél már nem.

Azért van a versenyautók megengedett legnagyobb keréktávja megszabva, mert a nagyobb keréktávolság is növeli a stabilitást azzal, hogy a forgáspontot visszük távolabb a súlyvonaltól. Ezzel szintén gyorsabban vehetők be a kanyarok. Az ideális versenyautó tehát széles és lapos, a szerkezeti elemeinek közös súlypontja alacsonyan van.

A rendszer stabilitását növelő lehetőségek tehát még egyszer:
- a nehézségi erő <u>erőkarjának</u> növelése: a súlypont és az eseti forgáspont(ok) közötti nagyobb vízszintes távolsággal
- a billentő erő <u>erőkarjának</u> csökkentése: a súlypont alacsonyabbra helyezésével
- extra lehetőség a billentő <u>erő</u> csökkentése, ami egy kanyarodó autó esetében a lassítással érhető el.

És mi van, ha megnöveljük a jármű súlyát? Ha a súlypont ezzel nem mozdul el, akkor az autó stabilitása *nem változik*. A kanyarban vagy fékezéskor fellépő vízszintes billentő erő (centrifugális és tehetetlenségi erő) egyenesen arányos a tömeggel éppúgy, ahogy a súly is. Vagyis a képen a sárga és a kék nyíl ugyanolyan arányban nőne. És az miért baj?



Nézd meg a vázlatot. Gondolj arra, hogy ha egyensúlyról beszélünk, akkor valójában forgatónyomatékokról van szó. A kanyarodó autó tömegközéppontjára hat a nehézségi erő (kék) és a kifelé húzó centrifugális erő (sárga). (Erről később még lesz szó.) A két erő az eredőjükkel helyettesíthető. (Később látni fogod, hogy tulajdonképpen ez az autó pillanatnyi súlyereje.) Ennek az erőnek van egy erőkarja az esetünkben várható forgásponttól, és így van forgatónyomatéka is. Amíg az eredő (a súly) forgatónyomatéka a talaj felé forgat, addig az autó a kerekén marad. Ha épp átmegy a forgásponton, az egyensúly instabillá válik. Amikor pedig az eredő átlépi az instabilitás határát, átkerül a forgáspont rossz oldalára, abból óriási borulás lesz.

Ha a kocsinak kétszeresére növeled a tömegét úgy, hogy a tömegközéppont nem kerül máshová, akkor nemcsak a kék erő, hanem ugyanolyan sebességű kanyarodásnál a sárga erő is kétszerese nő. Így pedig az eredőjük iránya nem változik, a kocsi stabilitása sem változik.

Ha egy nagy ládát sikerült kicsit megbillenteni, utána már könnyebb tovább billenteni. Tudod, miért?

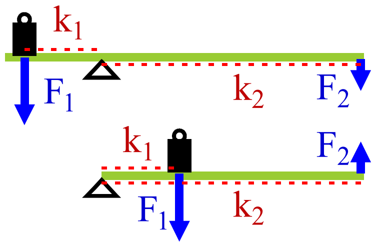
Egyszerű gépek

A következő téma a forgatónyomaték és a mozdulatlanság szabályaira épül. Ez már kötelező tananyag.

A munkavégzéshez szükséges erők irányának és nagyságának szükség szerinti megváltoztatására szolgáló, egyszerű alapelveken működő eszközöket nevezzük egyszerű gépeknek. Ide tartozik: *az emelő, a csiga, a hengerkerék, a lejtő, az ék és a csavar*. Ezek az eszközök szinte minden mechanikai szerkezetben megtalálhatók, valamilyen nem mindig egyszerűen felismerhető alakban.

Emelők

Emelőként most egy nagyon primitív eszközt kell elképzelned, például egy erős rudat, amelyet harmadában betolsz a kocsi alá, és a végét megemeled, amíg az útitársad lecseréli a kereket. Ezzel a "géppel" harmadára csökkentetted az emeléshez szükséges erőt ahhoz képest, mint ha csak egyszerűen megpróbálnád megemelni a kocsi sarkát.



Az emelő az alapelve szerint egy merev, forgáspontban rögzített rúd, amelyre két test a rúdra merőleges irányú erőt fejt ki, pontosabban csak a merőleges erőkomponensekkel foglalkozunk (lásd MOZDULATLANSÁG). Az egyik erő a **teher** ereje, amelynek távolsága a forgásponttól a **teherkar**. A másik erő a teher ellensúlyozásához, elmozdításához **alkalmazott erő**, ennek távolsága a forgásponttól az **erőkar**. Itt sokszor mi vagyunk a "test", ami az alkalmazott erőt kifejti.

Ha a teherkar és az erőkar a forgáspont két oldalára esik, **kétkarú emelő**nek hívjuk, ha pedig az erőkar és a teherkar a forgáspont azonos oldalán van, **egykarú emelő**ről beszélünk.

Vedd észre, hogy az F_2 alkalmazott erő iránya a rajzon eltérő. Ha az emelőn levő súlyt megemelni akarjuk, akkor a kétkarú emelő végét lefelé kell nyomnunk, az egykarú emelőt pedig felfelé húzni.

A gyakorlatban nem mindig *emelni* akarjuk a terhet, és a teher sem mindig a saját súlyával nehezedik a teherkar végére. Két darab egykarú emelő kombinációja például egy diótörő is, ahol a súly nem játszik szerepet. Fizikai szemmel az emelő elve van minden olyan merev testben, ahol egy forgásponttól két távolságra két erő hat, és ezek arányával foglalkozunk.

Annak ellenére, hogy a cél gyakran valaminek a (lassú) elmozdítása, mindig az emelők <u>egyensúlyi helyzetét</u>, az ahhoz szükséges erőket vizsgáljuk, elhanyagolva a mozgáshoz kapcsolódó tényezőket.

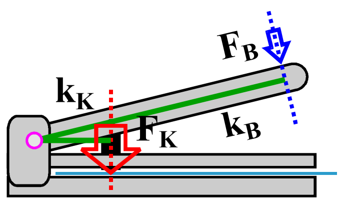
A korábbiak alapján nyilvánvaló, hogy **egy emelő egyensúlyának feltétele, hogy a két erőnek a forgáspontra vonatkoztatott <u>forgatónyomatéka</u> kiegyenlítse egymást.** Tehát

$$F_1 \cdot k_1 = -F_2 \cdot k_2$$

ahol **F** az erők, **k** a karok jele. A negatív előjelnek köszönhetően igaz az is, hogy **egyensúlyban a két forgatónyomaték összege nulla**: $F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2 = 0$.

Mitől kétkarú egy emelő?

Az emelővel *általában* <u>az alkalmazott erőt akarjuk megtöbbszörözni</u> a terhen, vagy <u>a teher erejét akarjuk csökkenteni</u> az alkalmazott erő helyén. Az erők eltérésének mértéke számszerűen is kifejezhető, ahogy az a képletből világosan látszik. De bevezetünk egy új fogalmat kifejezetten erre, ez az **erőáttétel**.



Az ábrán egy lyukasztó vázlatát látod oldalnézetben, ahol az F_B erőt fejtjük ki a szerkezet karjára. A lyukat kivágó kis dugasz a forgásponthoz sokkal közelebb van, emiatt rá a mi erőnk többszöröse hat (F_K), ezzel viszonylag erős lemezen is lyukat tudunk így ütni. A k_B az erőkar, a k_K a teherkar, ha tartjuk magunkat az emelőnél használt nevekhez. A FORGATÓNYOMATÉK fejezetben olvasható erőírás szerint ezek a karok a forgáspontból az erő hatásvonalára merőlegesen húzandók be. Az **erőáttétel** definíciója:

$$m = \frac{F_K}{F_B}$$

ahol $\mathbf{m}$ az áttétel jele (*máshol a tömeget jelöljük m-mel*), $\mathbf{F}_B$ az alkalmazott, **b**efektetett, **b**emenő erő, $\mathbf{F}_K$ a teherkar végén **k**apott, **k**imenő erő. Ha a kapott erő a befektetett erő háromszorosa, akkor az áttétel értéke 3. **Ez a kapcsolat mindenféle emelőre használható**, a tehererő és az alkalmazott erő közötti arány megadására. Az áttétel egy arányszám, nincs mértékegysége.

Ha a két erő arányát a karok méretéből fejezzük ki, akkor

$$m = \frac{k_B}{k_K} \qquad \left(\frac{k_E}{k_T}\right)$$

ahol $\mathbf{k}_B$ a befektetett erő karja (más néven $\mathbf{k}_E$ erőkar), $\mathbf{k}_K$ pedig a kapott erő karja (más néven $\mathbf{k}_T$ teherkar). A karok esetében a sorrend *fordítottja* az erők sorrendjének. A két képlet az emelők fent látható, általános képletéből következik, amely a forgatónyomatékok kiegyenlítettségét írja le.

> Megjegyzés: Félig-meddig rajtunk múlik, hogy egy adott esetben mit tekintünk bemenő és mit kijövő erőnek. Ha egy nagy terhet hosszú erőkarral akarunk megemelni, akkor a mi erőnk a bemenő, és az áttétel 1-nél nagyobb. Ha úgy nézzük, hogy egy nagy teher erejét akarjuk csökkenteni a vállunkon, akkor a teher ereje a bemenő, a vállunkra nehezedő erő a kijövő, és az áttétel 1-nél kisebb. Használd a kifejezéseket értelemszerűen, használj nyugodtan értelemszerű betűjeleket, szükség esetén egy-két szóval tisztázd is, hogy te miként érted, és akkor minden félreértés elkerülhető.

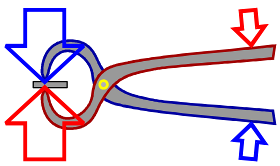
Minden vehető "emelőnek", amiben egy merev erőkar–teherkar párost találsz.

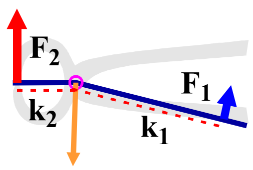
A képlet négy eleméből hármat kell ismernünk, ezeket a feladat mindig megadja. Lehet, hogy trükkösen, más összefüggésben elrejtve. A negyedik elem ezekhez igazodik, és kiszámítható.

Az emelő karjainak és erőinek szabályát levezethetjük abból is, hogy **az emelő egyensúlyban van**.

Az emelő melyik elvi részének felel meg a "kapott erő"?

A harapófogó úgy működik, hogy összenyomjuk a két szárát, és a másik végén a vágóélek egymás felé nyomulnak, ráharapva a drótra. Ez két darab kétkarú emelő egyben. Mindkét kar önállóan is egyensúlyban van. Ennek a feltételeit már korábban megbeszéltük, most alkalmazzuk a tanultakat, megnézve ezen a példán is. A világosság kedvéért egy másik rajzon leegyszerűsítettem a fogó kék karját az erőtani vázlat szintjére, egy hajlított rúd alakjában. Most nem számolunk, csak nézzük meg azt, hogy a mozdulatlanság feltételei hogyan teljesülnek.





Először is az erők vektori eredőjének nullának kell lennie, ez első látásra rendben is van. Ehhez fel kellett venni a forgáspontba is egy nagy erőt, amely azonos nagyságú, ellentétes irányú az F_1 és F_2 eredőjével. (Nem párhuzamosak.) A tengely ezzel az erővel nyomja, tartja helyén a fogó kék szárát. Ahhoz, hogy a két szár ne csússzon össze, erőt kell rájuk kifejteni, a tengelynél. A mozdulatlanság ismert feltételei alapján elkészített vázlatból az derül ki, hogy valójában a legerősebb terhelés a tengelyen van, ezért fontos, hogy egy ilyen fogónak a csuklópontja jó erős legyen.

Az egyensúly második feltételeként a rúdra ható erők forgatónyomatékainak előjeles összege 0. A forgástengelyen átmenő sárga csuklóerő forgatónyomatéka automatikusan 0. A kezünk által a szárra kifejtett F_1 erő forgatónyomatéka pozitív. *De az F_2 miért erre áll*, miért nem lefelé, ahogy az az előző képen is van?

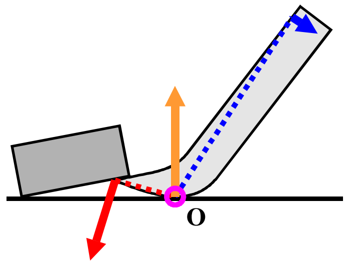
Az a kép csak illusztrálja, amit egy harapófogótól várunk, erőtanilag nem pontos. Ha az erőáttétel értéke alapján a vágóél által kifejtett erőt akarjuk kiszámolni, vagy valami más hasonlót, akkor használhatjuk segítségül a fogó rajzát a nagy nyilakkal, vagy bármit, ami neked tetszik. De mi úgy döntöttünk, hogy az erőket *arra alapozva* számoljuk ki, hogy a fogó szárai mozdulatlanok. Ennek második feltételeként a fogó szára – ez esetben a kék színű – *egyensúlyban* van. Ebből indulunk ki, és ennek megfelelő, pontos erőtani vázlatot készítünk, helyükre tolt erővektorokkal. Csakhogy ha egy test egyensúlyban van (mozdulatlan), és az ehhez tartozó erőket akarod felrajzolni, kiszámítani, akkor nagyon figyelj oda arra, hogy csakis arra a testre ható erőket vegyél számításba, azokból viszont ne felejts ki egyet se.

Ezt már elmondtam párszor, fogom is még, mert ez a dolog igazán fontos. Ha figyelmetlenül csinálod, akkor elrontod. Ha a rúd bal végpontjába berajzolnál egy *le*felé mutató F_2 erőt, akkor lenne két pozitív forgatónyomatékod, a fogó szára elméletileg úgy fog forogni, mint a propeller, a feladatot buktad. A lefelé mutató erő azt mutatná, hogy a fogó vágóéle milyen erővel nyomja a drótot. Tehát a test nyom mást. Nekünk pont *nem* ez kell. Valaminek felfelé *kell* nyomnia a fogónak azt a végét, különben nem lesz egyensúly. A valóságban a fogó piros szárának a vége nyomja felfelé az elcsípendő drótot, és azon keresztül a fogó kék végét. *Jól nézd meg és jegyezd meg ezt az esetet.* Úgyszólván az összes statikai példa helyes megoldása ezen áll vagy bukik.

A mozdulatlan helyzet feltételeinek vizsgálatakor milyen erőket kell vizsgálni?

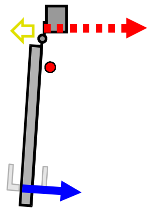
Az emelőket a feladatokban egyenes vonalú rúdként szokás ábrázolni, de ennek mechanizmusát a használt merev test (rúd) valójában **akkor is követi, ha az erőkar és a teherkar egymással nem egy vonalba esik, hanem a forgáspontnál szöget zárnak be**. Az emelőként felfogható testek zöménél ez a helyzet. A két kar szöge nem számít. *Az emelő lényege a kiegyenlített forgatónyomaték.*

Az ábra egy feszítővas vázlatos mechanizmusát mutatja, berajzolva a karok elméleti vonalát és a feszítővasra ható erőket. *Ez is emelő.* Tulajdonképpen ugyanazt látjuk, mint a harapófogónál. Az erők hatásvonala közös pontban metszi egymást és az eredőjük nulla, az **O** forgáspontra vonatkoztatott forgatónyomatékaik előjeles összege is nulla, tehát a rendszer egyensúlyi helyzetben van. Az általunk az egyensúlyhoz kifejtendő erő a nagyobb erőkar miatt kisebb. A sárga ellenerőt itt az alátámasztás hozza létre, de a hatásvonala átmegy a forgásponton, ezért a forgatónyomatéka 0.



A szöget bezáró karok elvének felismerésével rájöhetünk, hogy az egykarú emelő valójában a kétkarú emelő speciális esete, amikor a karok által bezárt szög nulla, a klasszikus kétkarú emelőnél pedig a szög 180°. Emelő az alapelve a papírlyukasztó, sörnyitó, kilincs, krumplinyomó, kézifék működésének, de sok más eszköz alkatrészeiben is megtalálhatjuk. Az sem szükséges, hogy a tárgy hosszúkás legyen, csak legyen egy forgáspont, és két egyensúlyban levő forgató erő.

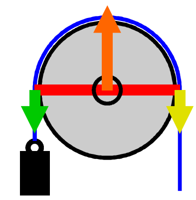
Ezen az ábrán pedig felülről látunk egy lendületesen nyíló ajtót, és egy ajtótámaszt (piros), ami a padlóba van rögzítve. Mi lesz, ha a kettő találkozik? Ez is emelőszerű hatás lesz, kétkarú, a támasz körül. Az alkalmazott erő a nyitáshoz általunk az ajtóra kifejtett elég nagy erő, amelynek az erőkarja a támaszig tart. A "tehererő" az ajtópántnak az ajtót visszatartó ereje, a teherkar pedig ennek a támaszig tartó távolsága. Szorozzuk össze a nyitáshoz használt erőt az erőkarjával, legyen például 200 newton 0,7 méterrel, az 140 Nm. Legyen az ajtópánt és a támasz távolsága 0,1 m. (Eszerint az erőáttétel 7-szeres.) Mi jön ki? Az, hogy az ajtópántnak 140/0,1 =1400 N erőt kell majd kibírnia ahhoz, hogy az ajtó ne szakadjon ki! Ki fog derülni, kibírja-e. Ezért célszerű az ajtótámaszt a pánttól ennél távolabb tenni. Ez is fizika.



Egykarú emelőként nézd meg, hogy mekkora erő nyomja az ajtótámaszt!

Csiga

Az állócsiga kereke **felfogható olyan kétkarú emelőként**, amelynek a teher- és erőkarjai azonos hosszúságúak. A csiga ebből következően nem változtatja meg az erő nagyságát, **az erőáttétel pontosan 1**. A rajta átvetett kötél segítségével *csakis az alkalmazott erő irányát teszi számunkra megfelelőbbé*. Így egy vizesvödör megemeléséhez nem kell a vödör fölött állnunk, mert a kötelet egy csigával oldalirányba is elirányíthatjuk, ahonnan a felemelés munkája kényelmesebben végezhető el.

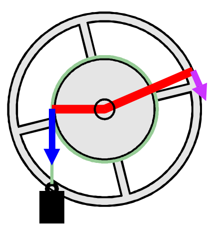


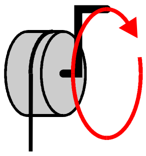
Ha az alkalmazott erő kötélszakasza nem párhuzamos a terhelt szakasszal, akkor csak az az eset áll fenn, ami a feszítővasnál, vagyis a teherkar és az erőkar szöget zár be. (Lásd a KÖTÉLERŐ ábráját.) Tulajdonképpen az erő irányának megváltoztatására az is elég lenne, ha a kötelet átdobjuk egy faágon, de akkor a kötél súrlódása elég nagy lenne, a csiga annál sokkal simábban gördül.

Ha egy feladatban a csiga csak mellékes szerepet játszik, akkor a súlyát, a méretét és a megforgatásához szükséges erőt is nullának vesszük. A mozgócsiga a MUNKAFAJTÁK fejezetben kerül elő.

Hengerkerék

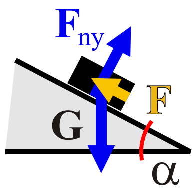
A kötelet a teherrel egy hengerre csavarjuk fel, a hengerhez mereven rögzített, nagyobb átmérőjű kerék forgatásával. **Itt is egy kétkarú emelő elve rejlik**: a henger sugara a teherkar, a kerék sugara az erőkar. A teher felemeléséhez, a henger megforgatásához így kevesebb erő is elég, a két kar arányának megfelelően, **az erőáttétel 1-nél nagyobb**. Mi a kereket forgatjuk, tehát az erőt a kerék bármely pontján kifejthetjük, érintőirányban.





Hengerkeréknek tekinthetjük azt a gyakori megoldást is, amikor egy kereket vagy kötéldobot egy karral mozgatunk. Ilyenkor a kar úgy vehető, mintha a kerékből egy pontot hagytunk volna meg, a kör többi részét leemelve. Kútból vizet emelve, hajó kormánylapátját mozgatva, húsdarálót hajtva, autó emelőjét tekerve hengerkereket használunk.

Lejtő, ék, csavar



A lejtőt testek magasabbra emeléséhez használjuk úgy, hogy ehhez a testet oldalirányban tolnunk kell. A lejtőre tett testre a saját nehézségi ereje és a lejtő által rá gyakorolt alátámasztási erő hat (az utóbbi egy kényszererő). Mivel a kettő nem egy vonalba esik, nem egyenlítik ki egymást, az eredőjük nem nulla, a testet a lejtő mentén lefelé tolja az eredő erő lejtőirányú vektorkomponense. (Ld. Eredő erő.) Ezt az erőt kell kiegyenlítenünk az egyensúly fenntartásához, illetve a test egyenletes felfelé tolásához a sárgával jelölt toló erővel. Ez az erő mindig kisebb a súlyerőnél (ez a lejtő előnye), de cserébe ezt az erőt hosszabb út megtételéig kell fenntartanunk, mint ha csak egyszerűen megemelnénk a testet.

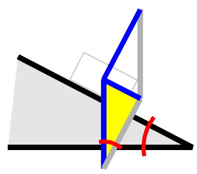
Ha a lejtő meredeksége α, a test súlya $\mathbf{G}$, akkor a felfelé tolásához szükséges $\mathbf{F}$ erő

$$F = G \cdot \sin\alpha$$

ahol az $\mathbf{F}$ erő hatásvonala a lejtő síkjával esik egybe, és ellensúlyozza a súlyerő és a lejtő nyomóerejének eredőjét. A lejtő által a testre gyakorolt $\mathbf{F}_{ny}$ nyomóerő

$$F_{ny} = G \cdot \cos\alpha$$

ahol az $\mathbf{F}_{ny}$ erő hatásvonala a lejtő síkjára merőleges.



A két képlet megtanulása azzal a veszéllyel jár, hogy összekevered őket. **Ehelyett** inkább figyeld meg a vektorok által képzett derékszögű háromszögeket, és a szögfüggvények segítségével mindig magad állítsd elő a képletet, a helyzethez igazodva. Én is így tettem, amikor ezt írtam.

Megjegyzés: a gyakorlatban, sokszor a feladatokban is a test és a lejtő közötti *súrlódás* nehezíti az előrehaladást, többlet erő alkalmazását teszi szükségessé.

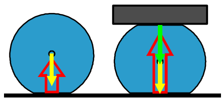
A lejtő esetében a testet toltuk. **Olyan is van, hogy *a lejtőt toljuk* a test alá**, azért, hogy azt elmozdítsuk, megemeljük; ez az **ék**. Ilyenkor az ék lejtős felülete által a testre ferde irányban kifejtett $\mathbf{F}_{ny}$ nyomóerő végzi a munkát. Éket úgy is használunk, hogy a mozgatásának iránya nem vízszintes, ilyenkor eltávolítani, szétfeszíteni akarunk két testet. Ékként működik például a balta feje vagy a véső éle is, de ékekből áll az a kis szerszám is, amellyel a tűzőkapcsokat nyitjuk fel.

Az emelő munkát egy nagyon hosszú, és egy hengerre felcsavart ékkel is végezhetjük, ez a **csavar**. A feladata ugyanaz, csak a csavar a munkát jellemzően összehúzó irányban végzi, tulajdonképpen egy éket tolva a csavaranya menete alá. Hasonló a célja egy dugóhúzó csavarmenetének is.

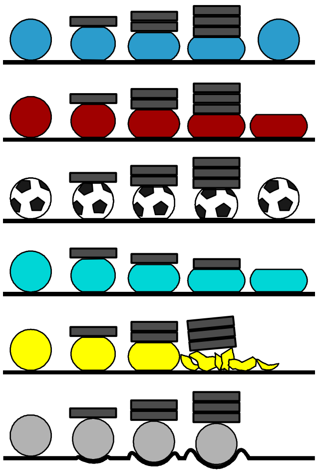
Megjegyzés: Ugyan a lejtő, az ék és a csavar munkáját nehezíti a felületek közötti súrlódás, a csavart és a megszorított csavaranyát végül mégis a nagy erővel összepréselt meneteik súrlódása tartja a helyén, ekkor a súrlódás már hasznos.

Alakváltozások

Ha egy testre egy erő hat, akkor az a test alakjában valamilyen változást okoz. Egy rúd meghajlik, egy golyó összelapul, egy doboz behorpad stb. A többi témához kapcsolódó feladatokban úgy vesszük, hogy a testek az erőhatásokat alakváltozás nélkül közvetítik, de a valóságban ez nem így van.



Ha egy golyót leteszünk az asztalra, akkor hat rá a nehézségi erő, amit a szokás szerint a tömegközéppontjában kezdődő (sárga) nyíllal jelöltem. Ezzel az erővel a golyó nyomja az asztal lapját, és az egy azonos nagyságú ellenerővel válaszol (piros nyíl). Ez az ellenerő a golyó alakját megváltoztatja, a képen látható esetben kicsit benyomja. Például egy vízzel töltött léggömbbel kísérletileg könnyen ellenőrizheted ezt az állítást. Ha a golyóra egy nehezéket is teszünk, akkor a nehezék súlyereje (zöld nyíl) felülről nyomja a golyót, szintén benyomva valamennyire. De a nehezék súlya és a golyó súlya most már együtt nyomja az asztallapot, az előbbinél nagyobb erővel, emiatt a golyó alja jobban benyomódik. Ha a golyó súlya kicsi vagy az anyaga kemény, akkor szabad szemmel nem vehető észre, de egy ilyen helyzetben a valóságban a golyó alja és teteje nem egyforma mértékben nyomódik be. De *mindig* benyomódik.



A bal oldali képen a kék golyót egyre nagyobb erővel nyomjuk össze. A golyó anyaga az erőnek megfelelő mértékű alakváltozást szenvedi el. Amikor a nehezékeket levesszük, az erőt megszüntetjük, a golyó visszanyeri az eredeti alakját. Ez a gumigolyó **rugalmas**.

A barna golyó a terhelés során pontosan az előbbiek szerint viselkedik. Amikor viszont levesszük a nehezékeket, azt látjuk, hogy megőrzi az utolsó terhelés által kialakított alakját. Ez a gyurmagolyó **rugalmatlan**.

Amíg a test a terhelést kapja, szemmel nem nagyon ítélhető meg, hogy vajon az adott alakváltozás rugalmas vagy rugalmatlan. A dolog a terhelés megszüntetése után fog kiderülni.

A kék golyó a nehezékek alatt láthatóan szétterjeszkedett. Az anyaga tömör, valamennyire összenyomható, de az összenyomódás helyett láthatóan inkább az alakjának változását választotta, a test térfogata nem sokat csökkent. A focilabda másképp viselkedik: az összenyomódás során keresztirányban alig változik a mérete. A labda belsejében levegő van, ami sokkal könnyebben nyomható össze, mint amennyi erő a bőr vagy műanyag burok nyújtásához szükséges, ezért az alakváltozás elsősorban a levegőt préselte össze. A labda térfogata így jóval kisebb lett, ideiglenesen. A zárt térben levő levegő rugalmas anyag, és a terhelés megszűnése után az eredeti alakjára nyomja vissza a labdát.

A zöld golyó anyaga kicsit furcsa, ugyanis nem kellett további terheket rátenni ahhoz, hogy tovább deformálódjon. Úgy is nézhetjük, hogy a test lassan enged a terhelésnek, de enged neki.

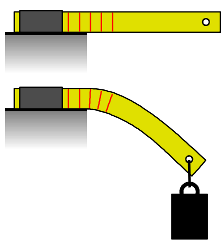
A sárga golyó bemutatta az alakváltozások harmadik típusát, a **törés** vagy **szakadás** esetét, az anyaga egy bizonyos erőnél többet már nem viselt el, a szerkezetében repedés, roncsolódás keletkezett, és ilyenkor hirtelen lecsökken az ellenállása a terheléssel szemben, az alakváltozás átlépett az ún. katasztrófaponton.

A szürke golyó egy másik, az eddigieket *kiegészítő* lehetőséget mutat meg: amikor a golyó anyaga sokkal keményebb, mint az alatta levő felület. Hogy a nehezékek levétele után a felület majd visszasimul-e, azt ez alapján nem tudjuk kitalálni.

Mi az alakváltozás három fő típusa?

Minden *érintkezéses* erőhatás esetén mindkét test alakváltozást szenved.

Az "érintkezéses" itt azt jelenti, hogy a tömegvonzási erő és más erőterek hatása kivételt jelent. A tömegvonzás egyszerre hat a test minden atomjára, ezért ez az erő egymáshoz képest nem próbálja elmozdítani az atomokat.

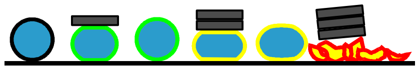


A valóságban *a golyó, a felület és a nehezékek alakja is* eltorzul az összes esetben, csak ez könnyen marad észrevehetetlen akkor, ha a testek szilárdsága nagyon eltérő. Ha leteszel az asztalra egy golyót, akkor *biztos lehetsz abban*, hogy az asztal és a golyó is deformálódott, legfeljebb nem látjuk. Nagyon finom műszerekkel láthatóvá tehető.

Az alakváltozásnak számos formája van. Az előbbi példákon a golyót két erő összenyomta, de lehet egy testet hajlító erőnek is kitenni. Lehet ez a rúd gumiból vagy ólomból is, azaz a nehezék levétele után a rúd visszaállhat az eredeti állapotába vagy megmaradhat a deformált állapotában is, ezt nem tudjuk.

Jellegzetes alakváltozás a nyúlás, a csavarodás (torzió), és az egymással párhuzamos, ellentétes erők hatására létrejövő nyíródás is. Egy csavarrugó működését nagyon közelről megfigyelve észrevehetjük azt, hogy a rugó megterhelésekor a rugót alkotó, felcsavart fémszál valójában elcsavarodik, teljes hosszában, ez adja az erejét.

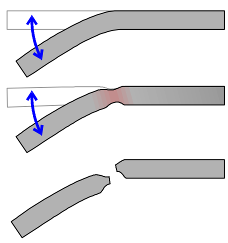
Egy test növekvő erő hatására átmegy a rugalmas, rugalmatlan és szakadásos alakváltozáson.



Nézd meg ezt a rajzot! Ez a golyó egy rátett nehezék súlya alatt kissé összenyomódik, de amikor levesszük róla a nehezéket, visszanyeri az alakját. Ebben az esetben az alakváltozás rugalmas volt. De ha két nehezéket teszünk rá, majd levesszük, akkor kiderül, hogy ez az erő már akkora volt, hogy maradandó, rugalmatlan alakváltozást okozott a golyóban. A tehermentesítés után nem maradt az összenyomott állapotban, de az anyagának a belső szerkezete annyira átrendeződött, hogy már nem az eredeti gömb alak a "természetes" helyzete. Három nehezék alatt pedig már a golyó anyaga szakadásos alakváltozáson ment át, repedések jelentek meg rajta, a szerkezete meggyengült, és darabokra tört. _

Ma már nagyon erős anyagokat tudunk gyártani, az üvegszál- és szénszál-erősítésű *kompozit* mű-anyagok a tömegükhöz viszonyítva sokkal szilárdabbak, mint a legerősebb fémek.

Nézz utána, hogy mi az a grafén!

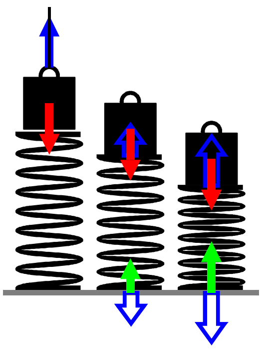


Az alakváltozás a test anyagának részecskéit elmozdítja, kicsit átrendezi. A részecskék összenyomódása hőt termel, felmelegíti az anyagnak azt a részét. Az alakváltozásba fektetett *energia* egy része a termelt hő alakjában, energia-veszteségként hagyja el a rendszert.

Az alakváltozás sokadik ismétlődése után még a rugalmas anyagok részecskéi sem állnak vissza pontosan az eredeti helyükre. Ez a szerkezetváltozás *anyagfáradást* eredményez, és végül szakadást, törést okoz. Ezért a rugalmas anyagoknak is korlátozott az élettartama.

Rugalmassági erő

Bizonyos testek rugalmas alakváltozással reagálnak a rájuk ható erőre, ennek az előnye többek között az lehet, hogy a test az alakváltozás elérésébe általunk fektetett munkát később vissza tudja adni. (Lásd RUGALMSSÁGI ENERGIA.) A mindenféle alakváltoztatásokat, például egy csavarrugó, gázrugó, gumi-pogácsa összenyomását vagy lemezrugó meghajlását nem érdemes külön emlegetni, az sem érdekes, hogy a rugót megnyújtani kell-e vagy összenyomni. A rugalmassági erők tárgyalása során mi állandó példaként egy csavarrugó összenyomását vizsgáljuk. Az itt megtanultak más jellegű rugalmas alakváltozásokra is érvényesek.



Ha egy test erőt fejt ki egy rugóra, akkor ezzel deformálja, azaz **megváltoztatja a rugó alakját, méretét**. A rugóerő az az ellenerő, amivel a deformáló erőre válaszul a rugó nyomja a testet. **A rugóerő az összenyomás mértékétől függ.**

A képen kezdetben a testet felfüggesztés tartja, nem nyomja a rugót, így a rugó sem őt. Ha a testet engedjük süllyedni, akkor a súlyerejével (piros) összenyomja a rugót. A rugó ellenereje (kék) az összenyomással együtt növekszik. Az össze-nyomódás egy ponton már akkora lesz, hogy a rugóerő éppen kiegyenlíti a test súlyát. Ekkor a test megállapodik, **a rendszer mozdulatlanná válik**. A rugó a másik végén is kifejti az erejét, amit ez esetben a föld ellensúlyoz (zöld).

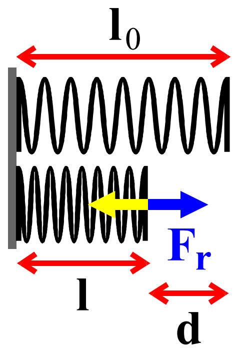
Ha a testet az egyensúlyi helyzetnél lejjebb nyomjuk, akkor a rugóerő nagyobb lesz a test súlyánál, és a rugó a testet feljebb mozdítja.

Ha általánosságban egy testre erőt fejtünk ki, akkor a testben ellenerő ébred. Amíg a test szilárdsága bírja, az erő növelhető, és ahhoz igazodva az ellenerő is nő. A rugó abban különbözik a többi testtől, hogy eközben a mérete rugalmasan megváltozik, és a rugót terhelő testnek ezt elmozdulással *követnie kell*.

A rugóra az összenyomásához erőt (sárga) kell kifejtenünk. Az erők egyensúlyának megtalálásakor ez mindig azonos nagyságú és ellentétes irányú a rugóerővel (kék).

A rugó terheletlen állapothoz mért alakváltozásának mértéke egyenesen arányos a benne ébredő rugó-erővel. Az arányossági tényező neve **rugóállandó**.

$$F_r = D \cdot (l_0 - l)$$



ahol $\mathbf{F_r}$ a rugóban keletkező erő, **D** pedig a rugóállandó. **l** („el”) az összenyomott rugó jelenlegi hossza, $\mathbf{l_0}$ a terheletlen állapotban a rugó hossza. Az összefüggés **lineáris erőtörvény** néven is ismert, mivel az erő és a hossz kapcsolata *lineáris*, azaz egyenes vonallal ábrázolható. A rugóállandó mértékegysége

$$[D] = \frac{N}{m}$$

A feladatok néha a terheletlen (l_0) és terhelt hossz (l) helyett közvetlenül a terheletlen hossztól mért hosszváltozást, az **összenyomás**t adják meg, a jele **d**, és mivel $\mathbf{d=l_0-l}$:

$$F_r = D \cdot d$$

A rugóállandó minden rugónál méréssel állapítható meg, úgy, hogy megnézünk néhány hosszváltozást és megmérjük a hozzájuk tartozó erőket. Ez alapján mérőskála is készíthető a rugóhoz.

Az erősebb rugónak nagyobb a rugóállandója.

Az mit jelent? Mit jelöl az l_0? Miből derül ki a rugóállandó?

Ez a törvény nem minden rugóra igaz. Csak annyit mondhatunk, hogy *ha tudjuk*, hogy egy adott rugóra érvényes, akkor annak a rugónak az erejét, hosszát és a rugóállandót egymásból ki tudjuk számolni, a képlet alapján. A feladatokban te olyan rugókkal fogsz találkozni, amelyekre a lineáris erő-törvény érvényes. A csavarrugók többsége, a gumiszalag, a rugalmas anyagból készült lemez bizonyos határok között valóban lineárisan viselkedik. A gumilabda, a legtöbb spirálrugó, a több darabos lemez-rugó, a gumialátét erőváltozása nem lineáris.

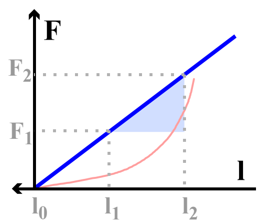
Megjegyzés: A csavarrugó nem spirálrugó. A spirál a középponttól távolodó vonal, a hengerfelületre feltekeredő egyenes vonal viszont egy *hélix*. A csavarrugó valójában *helikális* geometriai forma.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az itt ezután vizsgált rugókra érvényes a lineáris erőtörvény.

Ugye nem felejtetted el, hogy itt mindig egy rugó összenyomásáról beszélek, de másféle rugó másféle alakváltozására is érvényesek az elmondottak?

Ha a rugót összenyomjuk, a keletkező rugóerő visszatolni próbál. Ha ezt a rugót a terheletlen, más szóval *erőmentes* állapotához képest kifelé húzzuk, megnyújtjuk, akkor az $l_0 - l$ hosszváltozás negatív, eszerint az F_r is negatív lesz, a két erő megfordul, a rugó visszahúz. **A rugóerő mindig ellentétes irányú a rugóra gyakorolt erővel.** Ez egyébként minden ellenerőről elmondható.

A rugó mégis egy érdekes kivétel a testek között. *Nem tudunk rá sem kisebb, sem nagyobb erőt kifejteni*, mint amennyi erő a rugóban ébred az adott összenyomódásnál. Nem tudod a szappanhabot 400 newtonnal nyomni, azért, mert "hagyja magát". Ha a nyomó erőd nagyobb, mint a rugó pillanatnyi ereje, akkor a rugó összébb nyomódik, neked pedig *követned kell*, amíg az erőd nem talál elegendő ellenállásra. Ha a rugó az erősebb, hátrálnod kell, amíg az erőtök ki nem egyenlítődik. Az egyensúlyt meg kell találni.



A "lineáris" rugót ha összenyomjuk valamennyi*vel* ($\mathbf{l_1}$ hosszúságúra), kapunk egy erőt ($\mathbf{F_1}$). Ha kétszer ennyi*vel* nyomjuk össze ($\mathbf{l_2}$), kétszer akkora az erő ($\mathbf{F_2}$), ha háromszor ennyi*vel*, akkor háromszoros az erő, ha tízszer ennyi*vel*, akkor tízszeres az erő. Nulla erőhöz tartozik az l_0 hosszúság. Ne mondd azt, hogy háromszor annyi*ra* nyomjuk össze a rugót, mert az nem igaz.

A diagramon halvány pirossal mutatok egy olyan rugót, amelynél a rugóerő az összenyomás és a rugó terheletlen hosszának *arányától* függ. Ha a rugót felére nyomjuk össze, akkor az erő kétszeres, ha harmadára, akkor háromszoros. Az ilyen rugó nem a lineáris erőtörvény szerint viselkedne.

Az összenyomásnak van egy határa, amelyhez közeledve a rugó egyre kevésbé engedelmeskedik az erőnek, majd még nagyobb erő esetén valamilyen rugalmatlan alakváltozás jön létre benne, tovább erőltetve pedig eltörik. Ugyanígy ha a rugót húzzuk, egy határ után az tartósan megnyúlik, majd elszakad. **A lineáris erőtörvény csak korlátozott erőtartományban érvényes.**

Mi történik, ha levágunk egy darabot a rugóból? Eddig az a darab is összenyomódott, részt vett a rugóerő létrehozásában. Ezért ilyenkor megváltozik a rugó viselkedése, megváltozik a rugóállandó.

Miért lineáris az erőtörvény? Mihez viszonyított alakváltozást mérünk?

Tankönyvekben láttam egy kicsit más képletet a rugóerőre:

$$? \qquad F_r = -D \cdot \Delta l \qquad ?$$

Mindenekelőtt: a **Δ** jelet úgy mondjuk, hogy „delta”, és a képletekben a mögé írt dolog *változását* jelenti, a kezdeti és végállapot közötti *különbséget*. Itt a rugó hosszváltozásának értékét.

A negatív előjel azt próbálja jelezni, hogy a rugóerő ellentétes irányú az összenyomó erővel, ám ezt előjel nélkül is tudjuk minden ellenerőről, ezért szerintem fölösleges. De ez nem túl fontos. *A baj az, hogy Δl-lel általában egy hosszúság megváltozását szokás jelölni. A képleten nem látszik, hogy az most kimondottan a **terheletlen állapottól** való távolságot jelenti.*

Nézzük meg példával: A rugó terheletlen hossza 10 cm, a D rugóállandó legyen 300 N/m. Összenyomjuk 8 centire, mennyi a rugóerő? Δl=0,02 m, így F_r=6 N. Oké. Szerintem inkább ne írj −6 N-t, mert arról én azt hinném, hogy a rugót összenyomás helyett húzod.

Másik példa: egy rugó *már kissé össze van nyomva*, a hossza most 12 cm, D=500 N/m. Összenyomjuk 9 cm hosszúságúra, mekkora a rugóerő? Ha azt mondom, hogy írd le: a hossz megváltozása 3 cm, akkor ha egy kicsit is rutinos vagy fizikából, jó eséllyel azt írod le, hogy Δl=3 cm. Tehát $F_r = D\cdot\Delta l$, 500·0,03=15 N, kész is vagyunk. *Rossz!* A Δl-lel a megoldásban a hosszváltozást, a képletben viszont a terheletlen hosszhoz képest vett változást jelöltük, de a terheletlen hosszt itt *nem is ismerjük*. De az, hogy meg van adva a hosszváltozás, könnyen bevihet a bozótba, és mást számolsz ki, mint kellene.

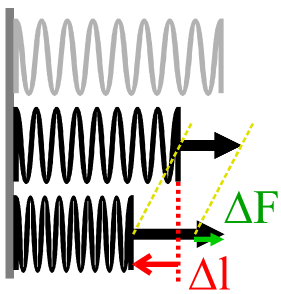
Akkor most megadom, hogy a terheletlen hossz 14 cm. Hoppá, akkor Δl=14–9=5 cm, vagyis a rugó *jelenlegi* ereje valójában 25 N. A feladat kezdetén tehát a rugóban már volt 14–12=2 cm szerint 10 N erő, és a 15 N, amit a téves számításból megkaptunk, csak az erő *változása* volt.

Ez így nem lesz jó, ezt állandóan össze fogod keverni. **Javítsuk ki a képletet!** Azt láttuk, hogy ha a Δl-t minden más fizikai témához hasonlóan a hossz változásaként értelmezzük, akkor a $D\cdot\Delta l$ képlet *a rugó erejének a megváltozását* adta meg. Hát akkor írjuk le ezt!

$$\boxed{\Delta F_r = D \cdot \Delta l}$$

ahol **Δl** a rugó hosszában bekövetkezett bármiféle változás, **ΔF_r** a rugó erejében bekövetkezett *változás*. Ez egy korrektebb képlet, pontosabban fejezed ki vele a jelenséget, mint a megkérdőjelezett változattal. Ha a tanárod ragaszkodik hozzá, akkor pöttyintsd oda a mínuszt is a D elé, ezen kár veszekedni.

Tehát nézzük újra: a rugó jelenlegi hossza 12 cm, D=500 N/m. Összenyomjuk 9 cm hosszúságúra, mekkora a rugóerő? Figyeld az ábrát!

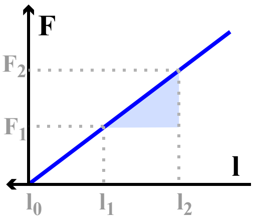


Δl=3 cm, akkor a képlet szerint ΔF_r=500·0,03=15 N. *Azt tudjuk, hogy a rugóerő 15 N-nal nőtt.* A rugónak a 12 cm-es állapotában is volt valamennyi ereje. Összébb nyomtuk Δl-lel, ezzel a rugóerő nagyobb lett. Összemértem a két erőt, a különbség ΔF, a kis zöld nyíl mutatja, ennyivel nőtt a rugóerő. Ha megmondják, hogy mennyi volt a rugóerő a 12 cm-es helyzetben, akkor ezt hozzáadva kiderül a teljes rugóerő, a feladat kérdésére adható válasz.

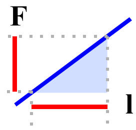
Nézzük meg így még egyszer az első példát: a rugó terheletlen hossza 10 cm, D=300 N/m. Összenyomjuk 8 centire, mennyi a rugóerő? Δl=0,02 m, így ΔF_r=6 N. Megtudtuk az erőváltozást a 10 centis állapothoz képest. Ám most a feladat *kimondja*, hogy az az állapot volt a terheletlen, vagyis az akkori erő **0**, ahhoz képest a változás 6 N, tehát az erő most összesen 6 N.

Érted a különbséget? Ebben a képletben a Δl tényleg a hossz változását jelenti, általánosságban, és nem csak a terheletlen állapottól mérve. Ez a képlet *nincs ellentmondásban* a tankönyvi képlettel, hanem annak megkötéstől mentes, általánosabb alakja, emiatt külön feltétel nélkül használható, és kisebb vele az összekeveredés veszélye. **A képletet általánosabbá tettük**, többféle esetre is érvényessé vált, márpedig egy jó képlet a lehető legáltalánosabb hatókörű, a lehető legkevesebb kikötést kell hozzáfűzni.

Mi az általam adott és a megkérdőjelezett képlet különbsége?

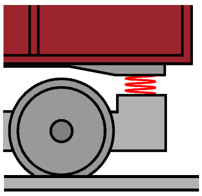


Nézzük meg újra a lineáris erőtörvény szerint működő rugókról már mutatott diagramot. Látjuk, hogy a terheletlen hosszhoz (l_0) 0 rugóerő tartozik, ez így van rendjén. A kék vonal meredeksége a D rugóállandó nagyságáról árulkodik, ez jelöli ki a két hosszhoz tartozó két erő nagyságát.



Nem mindig ismerjük ám az összes adatot. Nézd meg ezt a furcsa diagramot is ugyanarról a rugóról. Ez a balra levő diagramból kiemelt lényegi rész. Csak két rugóhossz *különbségét* ismerjük, a két hozzájuk tartozó erő *különbségét*, valamint a meredekséget, azaz a D rugóállandó értékét. Mennyi a rugó terheletlen hossza, az l_0? *Fontos az egyáltalán?*

Nem mindig. Egy vasúti teherkocsinál a rakományt tartalmazó felépítmény rugókon támaszkodik, csökkentve a menet közbeni rázkódást, kímélve a sínpályát. Tegyük fel, hogy a rugó állandóját ismerjük, mert a gyár a műszaki dokumentációban megadta.



A kocsi tele van rakva szénnel. A tolatásvezető megszemléli a dolgot, és úgy dönt, hogy 1 centivel csökkenteni kell a rugó összenyomódását. De akkor mennyivel kell csökkentenünk az összenyomó erőt, mennyi szenet kell lerakodnunk a kocsiból? Tudjuk, hogy mekkora hossz*változást* szeretnénk elérni, vagyis ismerjük a kék háromszög vízszintes befogóját, a Δl-t. Tudjuk az állandót, legyen $2 \cdot 10^5$ N/m, ez kék vonal meredeksége. $\Delta F = D \cdot \Delta l$, egy szorzással már tudjuk is, hogy az 1 cm rugóhossz-változáshoz 2000 N erőkülönbség tartozik (a függőleges befogó), ami 200 kg súlya. Van a kocsiszekrény alatt, mondjuk, négy ilyen rugónk, akkor összesen 4×200=800 kg szenet kell ledobnunk (egy tele vagon rakománya 6-8 tonna), és máris kész vagyunk, mehet a vonat.

Mennyi volt az összenyomott rugó hossza, az l? *Nem tudjuk*, mert csak egy része látszik ki. Mennyi a terheletlen rugó hossza, az l_0? *Nem tudjuk*. Ahhoz, hogy megmérhessük, szét kellene szerelni a kocsit. Mennyi volt a rugó ereje a kocsi teljesen megrakott állapotában, az F_{r1}? *Nem tudjuk.* Mennyi a rugó ereje most, az F_{r2}? *Nem tudjuk*, mert a szénen kívül tartja még az egész vázat és a kocsiszekrényt is. Hát mit tudunk egyáltalán? Pont annyit, amennyi kell: a két hossz közötti <u>különbséget</u>, a két erő közötti <u>különbséget</u> és a rugóállandót. A diagramon levő két piros szakaszt és a kék vonalat. Ennyi elég is volt. **Ezért javaslom inkább** az általánosabb, a $\Delta \mathbf{F}_r$-es képlet használatát, mert ez olyankor is jó lehet, amikor csak kevés adatot tudunk. Ha pedig olyan feladatot kapsz, hogy ismered a 0 erőhöz tartozó terheletlen hosszt, akkor is remekül működni fog.

Mit fejez ki a képletben a kék háromszög befogóinak aránya?

Van olyan matematikailag lineáris rugalmas alakváltoztatás is, ami nem egy test hosszirányú deformálása. A lineáris (egyenes vonalú) nem az elmozdulás irányára vonatkozik, hanem *a függvénygörbére*. Az ún. **torziós szálak** olyan speciális, vékony huzalok, amelyek a *torzió*, az **elcsavarodás** mértékére válaszolnak <u>egyenesen arányos</u> ellenerővel. Olyan precíziós műszerekben használják őket, mint például a gravitációs eltérések mérésére Eötvös Loránd által kifejlesztett torziós inga.

Nyomás (mechanikai)

Egy test által a másikra gyakorolt nyomóerő nem csak összességében lehet számunkra érdekes. Ha a diódarálót a politúrozott asztal szélére erősítjük fel, akkor a nagymama a szívéhez kap, mert az asztal felülete nem fogja bírni azt a nyomást, amit a daráló a felcsavarozáskor kifejt rá, és ott marad a daráló behorpadó nyoma. Ha viszont felállunk az asztalra, akkor ugyan a mi súlyunk nagyobb, mégsem marad ott a lábunk nyoma.
Az ok egyszerű és jól ismert: a nagyobb súlyunk jóval nagyobb felületen – a talpunkon – oszlott szét, emiatt kisebb volt az asztal egységnyi felületére jutó **mechanikai nyomás**. Amit tehát úgy kell kiszámítani, hogy **a nyomóerőt osztjuk a nyomott felület nagyságával**:

$$p = \frac{F_{ny}}{A_{ny}}$$

az eredmény a **p** nyomás, amelynek mértékegysége a **pascal**.

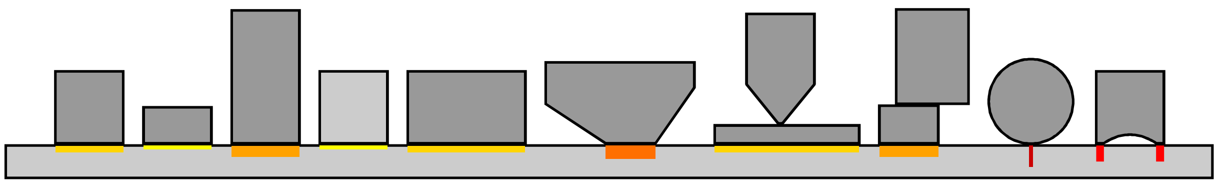
$$[p] = 1\frac{N}{m^2} = 1\,Pa$$

A pascal nagyon kis nyomást jelent, nagyjából egy 10 dekás testtel "préselünk le" egy 1 m^2-es felületet. Mintha egy 1 cm^2-es tollpihére rátennénk egy 1 mg tömegű homokszemet.

(Van hidrosztatikai és termodinamikai nyomás is, azért kell ezt mechanikai nyomásnak hívni.)

> Példa: **Mennyi egy csomag francia kártya nyomása, ha letesszük?** Ami nekem van, annak a tömege 59 gramm, a mérete 58×89 mm, tehát $F_{ny}=m \cdot g=0{,}59$ N, $A_{ny}=0{,}005162$ m^2, p=114,3 Pa.

A testre ható erő mechanikai nyomását csökkenteni tudjuk az erő nagyobb felületen történő "elosztásával", például egy lécet téve a daráló lába alá, sílécet csatolva a lábunkra, párnát téve a fejünk alá. Ha a nyomást növelni kell, akkor szoktuk csökkenteni a felületet, esetleg megélezve, kihegyezve az eszközt. A nyomóerő nem csak a test súlyából eredhet, például a daráló esetében egy szorítócsavarral növeljük annyira, hogy a daráló lába már ne csúszkáljon.



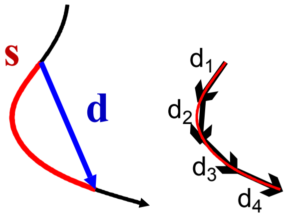
Vigyázz, mert ha a test lábakon áll, vagy egy peremen, akkor **csak az érintkezési felület területét** kell A_{ny}-ként számításba venni.

Mekkora a nyomása egy *golyónak*? Egy gömb és egy mértani sík összesen egyetlen pontban érintkezik, igaz? A pont területe 0, eszerint a nyomás végtelen nagy lenne, olyan pedig nincs. Ha megnézünk a valóságban közelről egy 10 tonnás vasgolyót, akkor látni fogjuk, hogy az alja a saját súlya alatt egy kicsit behorpad, és az alatta levő felületen is kis bemélyedés keletkezik, még a legkeményebb acélon is. Így az érintkezési felület egy pont helyett egy kis folt lesz, amelynek a területe már megmérhető, kiszámítható, és azzal kell a súlyt osztani. Elvileg ugyanez történik egy kis golyónál is, annak az alján sem pontszerű lesz az érintkezési felület, hanem nagyon apró, de mégsem nulla területű pötty, főleg ha a golyó vagy az alátámasztó test anyaga puhább. Az ALAKVÁLTOZÁSOK fejezetben már volt szó ilyenekről.

Haladó mozgás

Amikor valamelyik erő legyőzi a többit.

Út



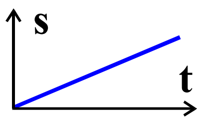
Ez a témakör mozgó testekről szól. A mozgásnak mindig van egy vonala, ennek a vonalnak a neve **pálya**. A pályát a test – a fizikai modelljeinkben, számításainkban sokszor a test tömegközéppontja – járja be. A pályának sokszor megadjuk az irányát is. A számítások során ennek a pályagörbének egy kiválasztott szakaszával foglalkozunk, ez a pályaszakasz a megtett **út**, a jele rendszerint **s**. Az úthoz mindig tartozik egy idő, amely alatt a test az utat bejárta. Ez az idő persze nem lehet nulla.

Egyes esetekben nem számít, hogy a test milyen kanyargós utat jár be, mert a lényeg az út két végpontja közötti távolság, az **elmozdulás**, a jele a rajzon **d**. Ez *mindig* egy egyenes szakasz.

Néha az utat és az elmozdulást valahogy egymással hasonlóvá kell tenni. A MUNKA fogalmának tárgyalásakor fog előkerülni az a probléma, hogy a törvényt az egyszerűség érdekében jó lenne csak a test által megtett elmozdulásra kimondani, de ugyanakkor meg kellene oldani azt, hogy a szabály egy kanyargós útra is érvényes lehessen. A két dolog összehozhatóságának kulcsa az, hogy **az utat rövid elmozdulások összegével közelítjük meg**. Egyenként kiszámítható a munka minden szakaszra, és ezeket összeadva megtudjuk a munkát az egész útra. Hogy ez a gyakorlatban hogyan történhet, most nem érdekes. Annyit jegyezz meg, hogy *elvileg minden út elmozdulások sorozatára bontható.*

Minél kisebb szakaszokra bontjuk az utat, annál pontosabb lesz az azt közelítő elmozdulássorozattal való közelítés, annál közelebb lesz a két hosszúság. A felbontás elméletileg elmehet a végtelenül kicsi szakaszokra bontásig, ami végtelenül kicsire csökkenti az eltérést, de ezt hagyjuk.

Egyenes vonalú egyenletes mozgás



Egyenletes mozgáson azt értjük, amikor a testnek a mozgás kezdőpontjától való távolságában bekövetkező változás és az indulás pillanatától számított időben bekövetkező változás mértéke egymással *egyenesen arányos*, és a hányadosuk állandó. Másképp fogalmazva: **a test által bejárt bármekkora útszakasz és az aközben eltelt idő hányadosa mindig ugyanaz**, ennek az értéknek a neve **sebesség**, a jele **v** (velocitas). Tetszőleges időintervallumra (tetszőleges pillanatok közötti időszakra) felírva a változás arányát

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

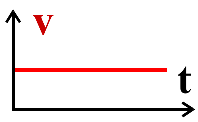
ahol **s** a megtett út hossza, **Δs** ("delta es") az ebben bekövetkezett *változás* mértéke, a mért útszakasz hossza, **Δt** pedig az ezalatt eltelt idő. A mozgás kezdőpontjától és kezdőpillanatától mért teljes értékekre ugyanez az összefüggés

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

a sebesség mértékegysége

$$[v] = \frac{m}{s}$$

Nehogy összekeverd képletet a mértékegységgel!



Egyenletes mozgásnál **a sebesség állandó**. Egyenes vonalú pályán az **út** azonos az **elmozdulás**sal.

Változó sebességgel bejárt útról csak az **átlagsebesség** állapítható meg, amely a végül összesen megtett úthossz és az összesen ahhoz igénybe vett idő hányadosa.

A sebesség **vektormennyiség**, ezért, az erővektorhoz hasonlóan, felbontható két kívánt irányú komponensre, lásd EREDŐ ERŐ.

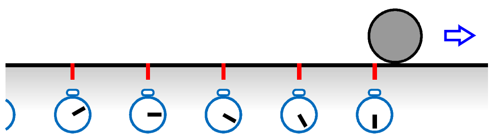
Na itt álljunk már meg egy percre. Mi van? Egyenesen arányos meg intervallum meg delta té? Itt szokott a gond kezdődni, mert az a diák, aki nincs szokva ehhez a nyelvhez, még a második mondatnál tart, amikor a tanár a negyediknél. Eredmény: „Utálom a fizikát."

Ami fentebb olvasható, az színigaz. Ez a tankönyvi verzió, azoknak, akik kevés szóból is értik. De akkor most tegyük egy picit tisztábbá, amíg nem késő.

Az egyenes vonalú mozgást nem kell ragozni, azt mindenki érti. Itt az egyenletességről szól a többi, és elmondja, hogy mit nevezünk sebességnek. Mindannyian tudjuk, hogy mit nevezünk sebességnek, most azt nézzük meg, hogy ezt hogyan határozzunk meg fizikásan, szakszerűen.

Nem kell itt okosság, mondhatod, elindulunk az autóval, elmegyünk valameddig, és megmérjük, hogy ezt mennyi idő alatt tettük meg, a kettőt elosztjuk egymással, és ez a sebesség.

Hát nem így van. Majdnem, de a különbségek döntőek. Először is amikor elindulunk az autóval, akkor kezdetben álltunk, egy idő után pedig már valamilyen sebességgel mentünk. A közte levő időben pedig? Akkor bizony gyorsultunk, növeltük a sebességünket, tehát az nem volt egyenletes, akkor pedig sántít a dolog. Mondhatod azt, hogy az a pár másodperc, amíg beletaposol a gázba, semmi ahhoz képest, hogy aztán milyen sebességgel értél Nagyabonyba. Jó, ez igaz, de a sebesség definíciójának, meghatározásának érvényesnek kell lennie centiméteres távolságokra is. Akkor tehát úgy kell eljárnunk, hogy azt az időt, amíg a kocsi gyorsult, nem számítjuk bele az egyenletes sebességre vonatkozó megfigyelésünkbe. Ezért *is* van Δt és nem csak t. Ez a delta azt jelenti, hogy "változás", talán még inkább "különbség". Vagyis az órát elindítottuk valamikor, megy a *test* (autó, lövedék, tekegolyó, bolygó, versenyteknős, ejtőernyős, teljesen mindegy), és egyszer csak megjelöljük krétával, hogy a test éppen hol van, mi pedig megjegyezzük, hogy az óra pontosan mennyit mutat. A test halad tovább, és egyszer megint húzunk egy jelet, az órát pedig megint megnézzük. A Δt az, amennyi idő közben eltelt, a Δs pedig a két krétajel közötti távolság. Tehát a test már ment egy ideje, az óra is járt, de mi külön megfigyeltünk egy *időintervallumot*, két időpillanat közötti időszakaszt, és kimondjuk, hogy a távolság és az idő hányadosa a sebesség.



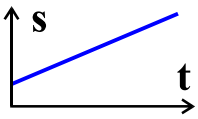
Csakhogy ha a sebességet úgy mérjük meg, hogy amennyit autóztál Nagyabonyig, elosztjuk az addig eltelt idővel, az nem árulja el, hogy közben esetleg egy ideig lassabban mentél, valahol pedig gyorsabban. Így te csak az **átlagsebességet** tudod megmondani. Az **egyenletes sebesség** az, amikor bármikor, bárhol, *bármilyen* rövid időtartamot szemelsz is ki, a két krétajel közötti távolságot és a két időpillanat közötti időtartamot elosztva *mindig* ugyanazt a számot kapod. Tehát a "delta" csak a "különbség"-et jelenti, és nem mondja meg, hogy az a különbség körülbelül mekkora lehet, mert bármekkora lehet. Ha a sebesség egyenletes, akkor az *állandóan* ugyanaz, és nem tudsz olyan időszakot találni, amikor a közben megtett út és az időszakasz aránya ettől eltérne. Ha ez tényleg így van, akkor már megteheted azt az általános megállapítást, hogy az út osztva az idővel a sebesség, a kezdőponttól a végpontig, egyenletesen.

Ha ügyelsz arra, hogy a krétajeleket pontosan azonos időközönként húzd meg, akkor egyszerűsödik a dolog, az állandó arány az állandó Δt következtében állandó Δs-t fog eredményezni, magyarul a jelek távolsága pontosan egyforma lesz, ahogy az ábrán látod. *Bármilyen* időközre, egészen kicsire is. Akkor a sebesség tényleg egyenletes.

Ha már tudod, hogy a sebesség egyenletes, akkor lehet az egyik jel az indulásnál, az óra 0-ról indul. A másik jelnél **t** valamennyi, **s**-t pedig leméred, és a sebesség egyszerűen **v=s/t**.

Az egyenes arányosság pedig, és ezt jegyezd meg, mert máskor is lesz ilyenről szó, azt jelenti, hogy ha veszel egy időszakot, megnézed az utat és időt, elosztod egymással, kapsz egy számot, ez a sebesség, ugye. Ha veszel kétszer akkora időt, veszed a közben megtett utat, elosztod őket egymással, és ugyanazt a számot kapod, mert az út is kétszeresére nőtt, vagyis az út és a sebesség közötti *arány* ugyanaz marad. Ha egy derékszögű koordinátarendszerben az egyik tengelyen van az idő, a másikon az út, és berajzolod azokat a pontokat, amelyek mindig az időhöz tartozó utakat jelölik, akkor ezek a pontok egyenes vonalat hoznak létre, vagyis *az arányosság egyenes*, az összefüggés, a függvénygörbe *lineáris*. Ahogy a fejezet elején láttad.

Mi az átlagsebesség? Mit jelent a Δt?



Nem mindig lesz a függvény egyenese olyan, hogy pont az origótól indul, a (0;0) ponttól. Ha az utat nem nullától, hanem, mondjuk, 3 métertől kezdve számoljuk valamiért, akkor a 0 másodpercben az út 3 méter, tehát a vonal innen indul, a többi már megy szabály szerint. Lehet az is, hogy az idő indul nem nulláról, indulhat akár negatív számról is, teljesen mindegy.

Az $s–s_0$, $t–t_0$ jelöléseket is nézzük meg. Ez a valami$_\mathbf{0}$ mindig a kezdőértéket jelenti, útban, időben, elfordulási szögben, bármiben. A sima **s** pedig azt az utat jelenti, amit a másik mérési pillanatban veszünk annak, azt a pillanatot pedig **t**-vel jelöljük. Bármi lesz is **t** értéke, az **s** az *ahhoz tartozó* **s**. Épp ezért szokás néha úgy is jelölni, hogy az az $\mathbf{s_t}$. Ezt mondják úgy is, hogy az **s** a **t** szerinti **s**. (Bármi legyen is a **t** értéke.) Vagyis a sebesség bevezető definíciója akár így is kinézhet:

$$\frac{s_t - s_0}{t - t_0} = v$$

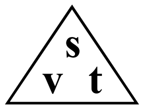
Ha a feladat azt mondja, hogy megmérjük a 3. és 6. másodperc közötti utat, akkor megteheted azt, főleg ha másik út is szerepel még a feladatban, hogy azt írod: $\mathbf{t}_1$=3, $\mathbf{s}_1$= annyi, amennyi. És ezután a $\mathbf{t}_1$-et használod a számításaidban, amikor erre az időszakaszra gondolsz. Bevezethetsz saját jelöléseket, de akkor el ne felejtsd leírni azt, hogy mit jelölsz azzal. Méghozzá az az igazi, ha szöveggel is leírod, elég néhány szó, így elegáns, érthető, és a tanár azt mondja, hogy nohát. Ami azt jelenti, hogy ezt nem is gondolta volna rólad, és ez esetleg picit megbocsátóbb hangulatot ébreszthet benne egy későbbi hibád kapcsán.

Sőt, olyat is megtehetsz, hogy ezt az utat így jelölöd: $\mathbf{s}_{3\text{-}6}$ vagy $\mathbf{s}_{36}$, segít megkülönböztetni más úttól. Márpedig a feladat megoldásakor az az alapvető cél, hogy te magad is megértsd, amit írsz, és a tanárnak se kelljen azon gondolkodni, hogy mit is akartál itt jelezni.

Nos, akkor most azt javaslom, hogy olvasd el ezt az eszmefuttatást még egyszer, aztán ha ez rendben van, kezdd elölről a fejezetet, most már remélhetőleg a tankönyvi verzió könnyebben fogyasztható. Kóstolgasd, szokd, mert az sem baj ám, ha a tankönyvedet is érted.

Aztán pedig térjünk vissza a kicsit fizikásabb nyelvhez.

A **v=s/t** képlet **s=v·t** vagy **t=s/v** alakra is átrendezhető. A megtett út attól függ, hogy mekkora sebességgel mennyi ideig haladt a test. Az útra felhasznált idő attól függ, hogy az utat mekkora sebességgel tette meg, ez utóbbinál a nagyobb sebesség kisebb időt eredményez. Ismered a trükköt a háromszöggel? Akkor csak az egyik képletet kell megtanulnod.



A sebesség másik gyakran használt mértékegysége a km/h:

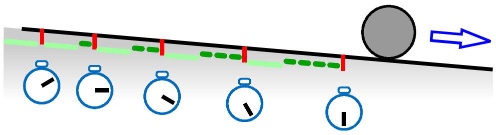
$$1\frac{km}{h} = 1\cdot\frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s} = 0{,}27778\frac{m}{s} \qquad 1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$$

Egy test sebességén az egyszerűbb kinematikai feladatokban a test *tömegközéppontjának*, vagyis a testet helyettesítő **tömegpontnak** a sebességét értjük. Ha a test mozgás közben forog is, akkor ugyan a különböző pontjainak a pályaegyeneshez viszonyított sebessége nem egységes, gondolj egy guruló labdára festett pontokra, de ez az *egész* test haladásának vizsgálatakor nem számít.

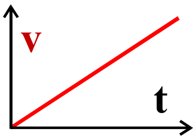
Az egyenes vonalú egyenletes mozgás csak egy alapvető elméleti, kiindulási elv, hajszálpontosan ezt a valóságban soha nem figyelhetjük meg, még a látszólag minden zavartól mentes világűrben sem, mert még a Naprendszer távoli sarkában is észlelhető a Nap gravitációja, ami még ott is megváltoztatja a test haladási irányát. De kisebb távolságokon az űrben, súlytalanságban meglökött test útja, vagy egy márványlapon meglökött súlyos acélgolyó útja bátran tekinthető egyenesnek és egyenletes sebességűnek is. A hétköznapi életben számos mozgást akadályozó tényező működik, ilyenek a súrlódás vagy a légellenállás, a mozgás fenntartásához ezeket is le kell győzni.

Gyorsulás

Gyorsulásnak nevezzük a sebesség változását. Mivel a sebesség vektormennyiség, ezért az megváltozik akkor, ha **a nagysága változik** (nő vagy csökken), de akkor is, ha **az iránya változik meg**. Ezért egy autó, a szót fizikai fogalomként használva, akkor is *gyorsul*, ha a vezető gázt ad, akkor is, ha fékez. De akkor is, ha csak kanyarodik! Mert ekkor a sebesség változik, mivel az iránya változik.



A legegyszerűbb esetben gyorsulásnak nevezzük azt az *egyenes vonalú* pályán történő mozgást, amikor a test által azonos időegységek alatt megtett út mindig ugyanannyival nő. Figyeld meg, hogy itt az óra egyenletesen jár, és minden jel eggyel több hosszúságú, mint az előző. A világoszöld csík az első mért útszakaszt jelzi, a sötétzöldekből pedig mindig eggyel többet kell hozzátenni. Ez az út hossza.



Amikor az út hossza mindig ugyanannyival nő, de az időpillanatok egyenletesek, akkor a sebesség nő, mindig ugyanannyival. **A sebesség egyenletesen nő**. Így tehát itt az egyenletes sebességű mozgás mintájára (hasonlítsd össze) a test által bejárt bármekkora útszakasz *átlagsebességének* és az aközben eltelt időnek a hányadosa mindig ugyanaz, ennek az értéknek a neve **gyorsulás**, a jele **a** (acceleratio). Tetszőleges időszakaszra felírva a változás arányát:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{t - t_0}}$$

ahol **v** a tömegpont sebességét jelenti általánosságban, a **t** pedig az időt. Gyorsuláskor a sebesség változik, és a **Δv** a változást, a kezdeti és végsebesség különbségét jelenti, a **Δt** az órán közben leketyegett időszakasz hosszát.

> Ez a tankönyvi verzió. Ha ennek a megértése nem sikerült, akkor fuss neki még egyszer. És nézegesd az előző fejezetet, tanulgasd a nyelvezetet annak a segítségével. Szükséged van arra, hogy ez ne legyen teljes homály, különben az órákat végig fogod unatkozni, az idődet pazarolva.

A delta, a "változás" jelzésének használata mindig akkor válik szükségessé, amikor a képlettel leírt mennyiség (itt a gyorsulás) *nem egyenletes*, és ezért a folyamatot *kis szakaszokra bontva* kell néznünk. A gyorsulás **a=v/t** képlete ez esetben mindig csak egy ilyen szakaszra érvényes, mert csak egyenletes sebességváltozásra igaz. A képlet deltás alakja elméleti jelentőségű, és ha tudod, hogy a gyorsulás egyenletes, akkor nem kell ezen törni a fejedet.

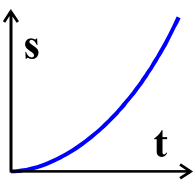
Felírtam ugyanazt másképp is, érthetőbben, egyetlen szakaszra, ahol $\mathbf{v_0}$ és $\mathbf{t_0}$ a szakasz kezdeti pontjában mért sebesség és az óra által mutatott idő, a **t** a szakasz végénél az óra által mutatott idő, $\mathbf{v_t}$ pedig az ebben a pillanatban, a **t** időpontban mért sebesség. A $\mathbf{t-t_0}$ a két pillanat között *eltelt* idő, ez bármilyen rövid lehet. Ha a sebesség növekedése eközben egyenletes volt, akkor az **a** gyorsulás arra a szakaszra a képlet szerint kiszámítható. Az egész út pedig, ha közben a gyorsulás változik, ilyen szakaszokból összerakható.

Ha a kezdőpillanatban az idő és a sebesség is 0, és a sebesség változása egyenletes, akkor:

$$\boxed{a = \frac{v}{t}}$$

a gyorsulás mértékegysége pedig, ahogy az *a képletből is következik:* (m/s)/s, azaz

$$[a] = \frac{m}{s^2}$$



Az egyenletesen gyorsuló mozgásban **az út és az idő egymással négyzetesen arányos**, emiatt a kettő kapcsolatát leíró görbe *parabola*. A *sebesség* és az idő viszont egyenesen arányos, a függvény lineáris, lásd fentebb.

A gyorsulás **vektormennyiség**, ezért, az erővektorhoz hasonlóan, felbontható két kívánt irányú komponensre, lásd EREDŐ ERŐ.

A lassulás is gyorsulás. Hogy ne kelljen állandóan a gyorsulás mellett megemlíteni a lassulást is, ezért tisztázzuk, hogy a gyorsulás, a sebességváltozás értéke, az **a** negatív számértékű is lehet, és ezzel a dolog sokkal egyszerűbbé válik.

$$v = a \cdot t \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{v}{a} \qquad\qquad s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \left(= \frac{v}{2} \cdot t \right)$$

Miért kell a per kettő?! Matematikailag nem jön ki a másik két képletből. A válasz picit homályos lesz: a gyorsulás és a sebesség is egy 0-ról induló mérés *végén* ennyi, az út viszont a mérés *folyamán*, a 0 és a mérési pont között, emiatt a két ponton mérhető sebességet átlagolni kell. A következő fejezet *Átlag-sebesség* szakaszában olvashatsz még erről.

Gyorsuláskor mi lineáris és mi parabolikus?

Gyorsulás kezdősebességgel

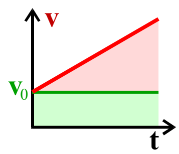
Vannak esetek, amikor a test a gyorsulás megkezdése előtt már egy bizonyos egyenletes sebességgel mozgott. A gyorsulás sebességváltozás, ezért a sebesség a *kezdősebesség*ből indul, és a gyorsulás innen indulva változtat rajta. A gyorsulással álló helyzetből megtehető úthoz mindig hozzá kell adni azt az utat, amelyet a test gyorsulás *nélkül* megtenne. Összesítve

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \leftrightarrow \quad v = v_0 + a \cdot t \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \leftrightarrow \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \qquad \begin{bmatrix} a \rightarrow \\ v_0 \rightarrow \end{bmatrix}$$

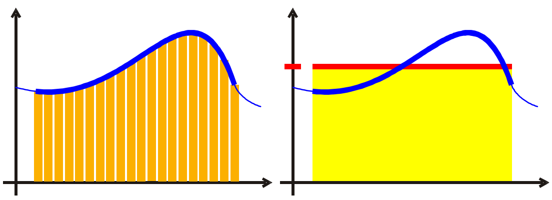
Az $\mathbf{a}$ a gyorsulás, $\mathbf{s}$ a mozgás során megtett út a $\mathbf{t}$ időpillanatig. A $\mathbf{v_0}$ a gyorsulás megkezdődésének pillanatában érvényes sebesség, más szóval a kezdősebesség. A $\mathbf{t}$ a mérés közben eltelt idő (tehát az órát nulláról indítottuk). A korábbi képletetek ezek speciális esetei voltak, amikor a $\mathbf{v_0}$ értéke 0, mert a test álló helyzetből indult. Tanuld meg az összetettebb képleteket, és ha a feladatban a $\mathbf{v_0}$ kezdő-sebesség 0, akkor az majd eltűnik és kész.

Ne tévesszen meg, a $\mathbf{v_0 \cdot t}$ nem a gyorsulás megkezdés*éig* megtett út! Hanem az az út, amit a test az egyenletes sebességgel tenne meg, a képlet másik fele pedig ehhez hozzáadja azt a többletutat, amit maga a gyorsulás okoz. A kettő összege kell nekünk.

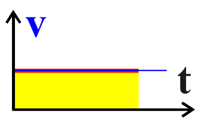


A képletek mögé kitett tett zárójeles dolog arra hívja fel a figyelmedet, hogy a kezdő-sebesség és a gyorsulás iránya azonos. Ezért nem is kell az előjelükkel foglalkozni.

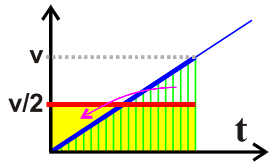
Átlagsebesség



Figyeld meg az ábrát! A kék görbe egy függvény. Ha a függvény értékeinek átlagát akarjuk megtudni egy adott szakaszon, akkor ki kell számolni a görbe alatti terület nagyságát, majd a helyére tenni egy olyan téglalapot, amelynek pontosan ugyanennyi a területe és a széles-sége is. Ennek a téglalapnak a felső széle megadja az átlagértéket, amit a függőleges tengelyen megjelöltem egy piros vonalkával. **Ez mindenféle függvényre igaz, annak bármelyik szakaszára.** A magyarázata nem bonyolult, de nekünk most nem is fontos. Azt, hogy a vizsgált szakasz mettől meddig tart, a feladat ismeretében mi döntjük el. A legtöbbször a nullától kezdjük, olyankor a színezett terület bal széle a függőleges tengellyel esik egybe.



Alkalmazzuk ezt az általános szabályt most a sebességekre. Vegyük az **egyenletes mozgás** idő–sebesség diagramját! Ahogy látod, a sebességet az idő szerint leíró függvény görbéje vízszintes egyenes vonal, jelezve, hogy a sebesség minden pillanatban ugyanannyi. Ennek az átlagát kiszámolni nem nehéz, mert nyilvánvalóan az is ugyanennyi. Egyenletes mozgás áltagsebessége a test mindenkori sebessége (v), ami állandó.

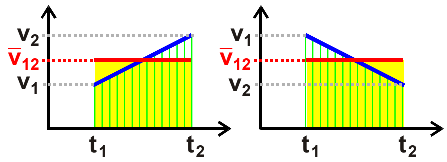


Mi van az **egyenletes gyorsulás**sal? Itt a sebességnek az eltelt idő szerinti ábrázolásakor a függvénygörbe ferde egyenes.

Miért nevezem függvénynek? Mert minden **t** pillanathoz egyértelműen tartozik egy **v** érték, és a kettő közötti kapcsolat láthatóan egy lineáris függvény. Ha ezt még nem tanultad, akkor nem érdekes.

A kiválasztott időszakaszon a kezdősebesség 0, a végsebesség v. Az ez alatti terület a zölddel vonalkázott rész. A kérdés az, hogy *milyen magas* a vonalkázott háromszöggel azonos területű sárga téglalap. Mert az előzőek alapján a téglalap felső (piros) széle mutatja az átlagsebességet. Ha azt a kis háromszögnyi területet a nyíl szerinti helyre képzeljük, akkor az lesz észrevehető, hogy a sárga terület *fele olyan magas*, mint a vonalkázott háromszög. Vagyis az átlagsebesség **v/2**.

Ne felejtsd el, hogy a 0 kezdősebességű egyenletes gyorsulás esetét láttad, ahol ez a számítás egyszerűen adódott.



Jöjjön az általános eset, amikor a test sebessége egyenletesen változik, és a sebességet megnézzük a t_1 és a t_2 időpillanatban, az egyik v_1, a másik v_2. Az, hogy a sebesség ezen a vizsgált szakaszon *kívül* hogyan alakul, nekünk most mindegy. Ezen a szakaszon **a test átlagsebessége a kezdeti és végsebesség számtani közepe**:

$$\overline{v}_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Az ábrán látszik, hogy a számítás szempontjából mindegy, hogy a test v_1-ről v_2 sebességre gyorsul-e vagy lassul.

Ha a sebesség változása nem egyenletes, nem ábrázolható egyenes vonallal, ez a módszer nem jó.

Visszafordulásos gyorsuló mozgás

A kezdősebesség és a gyorsulás iránya lehet ellentétes is. Ilyenkor a v_0 és az a előjele ellentétes. Hogy melyik a pozitív, az végül is csak szemlélet dolga, és ha a feladat nem írja elő, akkor választhatsz. Ha feldobsz egy labdát, akkor érezheted célnak a minél magasabbra dobást, pozitívnak véve a felfelé irányt, és negatívnak a labdát visszafordító, "akadályozó" gyorsulást, aminek hatására a labda egy idő után egyre gyorsabban "hátrál". Vagy veheted úgy, hogy felfelé a labda csak "hátrálva lendületet vesz", és a zuhanás az igazi, a pozitív mozgás. Mindegy. De
1) Írd le a megoldásban, és jelöld be a rajzban is, hogy melyik irányt veszed pozitívnak, mert a tanárnak is tudnia kell róla.
2) Következetesen és szigorúan tartsd magad hozzá az összes számításodban, különben rossz eredményeket fogsz kapni.

Ha $v_0=-3$, $v=8$, akkor mennyi a $v-v_0$? $8-(-3)=8+3=11$!

Ha a kezdősebesség és a gyorsulás iránya és előjele ellentétes, akkor az *út* kiszámítása külön figyelmet igényel. Tegyük fel, hogy feldobsz egy labdát 4 m/s kezdősebességgel. Pozitív iránynak most a felfelé irányt veszem. A (nehézségi) gyorsulás −10 m/s^2, lefelé mutat. Tizedmásodpercenként kiszámítom s értékét: 0,1 másodpercnél 4·0,1+(−5)·0,01=**0,35** m, 0,2: **0,6** m, 0,3: **0,75** m, 0,4: **0,8** m, 0,5: **0,75** m, 0,6: **0,6** m, 0,7: **0,35** m, 0,8: **0** m, 0,9: **−0,45** m, 1,0: **−1** m.

Ezt a vesződséges módszert persze feladatmegoldáshoz használni szamárság lenne, most csak a folyamat nézegetésére adtam meg az értékeket.

Mit mutat a számsorozat? A labda egyre feljebb száll, a megtett útja egyre nagyobb, de eközben a sebessége egyre kisebb lesz, lassul. Aztán 0,4 másodpercnél eléri a tetőpontot, a *holtpontot*, a labda sebessége 0 lesz, majd lefelé fordul, és elkezd lefelé gyorsulni. A számítást a gyorsuló mozgás során az út kiszámítására megadott képlettel végeztem, szabályosan. Nézzük csak tovább: 0,6 másodpercnél az út már csak 0,6 méter, holott a labda már a holtpontig is megtett 0,8 m utat, és most azt folytatja lefelé. Ha 0,8 másodpercnél megkérdezik, hogy a labda mekkora utat tett meg, a képlet szerint az lenne a válasz, hogy *nulla hosszúságú utat*. Ami nem igaz, hiszen valójában oda-vissza megjárt összesen 1,6 métert. Sőt, ez után az útja lefelé folytatódik, és már negatív úthosszokat látunk. Ez így nem lesz jó.

Amíg a test mozgása azonos irányú, az út ismert képlete jól használható, egészen a megállásig. De ha a test az útján visszafordul, onnantól másféle számításra van szükség.

És ha ferdén felfelé, ívben dobom a labdát? Az későbbi fejezet témája, most még mindig csak az egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgásról beszélünk.

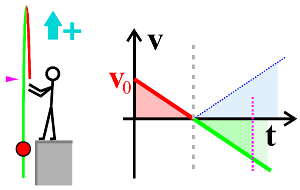
Mit kaptunk az előbbi számításból a labda feldobásakor, ha nem az utat? A kiindulási ponttól való távolságot, más néven az *elmozdulást*. Nézd meg a témakör legelső fejezetét.

Visszafordulásos mozgás során a test sebessége a holtpontban 0, majd a sebesség előjelet vált. Ilyen mozgás esetében *az út képletéből* a test által megtett út (s) helyett a test elmozdulását (d) kapjuk meg.

Mi a helyes módszer az út kiszámítására ilyen esetekben? **Ketté kell bontanunk a mozgást:** az első szakasz tart a holtpontig, a test megállásáig, a második szakasz az ez utáni, ellenkező irányú mozgás. Ha a test újból lelassulna és megállna, ott újabb szakasz kezdődne. Az utat minden szakaszra külön kell kiszámolni, majd azokat összeadni.

Mi van, ha a mozgásnak egy olyan pillanatát kell megnéznünk, amikor a test még nem fordult vissza? Akkor nincs második szakasz, nincs probléma sem. Használjuk a szokásos képleteket.

A diagramon a piros-zöld egyenes a labda sebességét mutatja előjelhelyesen. A sebesség $\mathbf{v_0}$-nál kezdődik, és egyre kisebb lesz. *Gondolkozz el alaposan azon*, hogy **ha felfelé van a pozitív irány, és a zöld pályaszakaszon leeső labda egyre gyorsabban halad, akkor valójában egyenletesen *csökken* a sebessége.** Képzeld magad elé, hogy mit mutatna a labda sebességmérő órája, miközben lefelé "tolat".



Egy olyan diagramon, amely a sebességet ábrázolja, mindig a függvényvonal és a t tengely által közrefogott terület mérőszáma az út. Most a test sebessége előjelet vált, ezért a piros és zöld területek összege minden t pillanatban csak az elmozdulást adja meg. Amíg a piros terület nagyobb, addig az összeg pozitív, vagyis a labda még a kiindulási pont fölött tart, a negatív elmozdulás már a kiindulási pont alatti helyzetet jelzi. Ha az elmozdulásnak mindig az abszolút értékét vesszük, amivel a zöld területet a kék területté tükrözzük, akkor kapjuk meg a területek t pontig tartó összegeként az utat. Ez lenne a jó matekosok verziója, és csak azért mondtam el, hátha jó matekos vagy. Miért is ne lehetnél? *De inkább nézzük a dolgot valahogy érthetően.*

Meddig tart az első szakasz? Nos, ez a lényeg. A test megtett t_1 idő alatt s_1 utat. A szokásos képleteket kell használni, a fogódzó mindig az, hogy a megállás pillanatában $\mathbf{v}=0$.

Mi a helyzet a második szakasszal? Az csak egy szabadesés 0 kezdősebességgel. Vigyázz, annak a kezdőpontja nem a feldobás helye, hanem a holtpont helye, és a test már megtett t_1 idő alatt s_1 utat.

Mennyi idő alatt tesz meg az 5 m/s sebességgel feldobott labda 2 méter utat? Milyen magasan lesz ekkor, ha a feldobás 1,2 m magasról indul?

A mozgást két részre bontjuk, és meg kell tudnunk, hogy milyen hosszú az első útszakasz. A pozitív irány legyen megint felfelé. Az első szakasz egyenletesen lassuló, a gyorsulás a nehézségi gyorsulás, −10 m/s^2. Mennyi *idő* alatt ér a labda a holtponthoz? A sebesség azon a helyen **0**, ezért $t_1=-v_0/a$, nézd meg a gyorsulás alapképleteit. Behelyettesítés után az első útszakasz idejére 0,5 másodpercet kapunk.

Mekkora utat tesz meg a labda ezalatt? $s_1=v_0\cdot t_1+(a/2)\cdot t_1^2$, az eredmény 1,25 m. Valójában kétismeretlenes egyenletrendszerként használtuk a két képletet. Tovább tartott ezt kimondani, mint megcsinálni, igaz? Ennyit a matekozástól való kötelességszerű parázásról.

Megjegyzés: *A gyorsulás nem mindig 10!* Visszafordulós gyorsuló mozgást nem csak a feldobott testnél tapasztalhatunk, a visszahúzó erő lehet egy rugó ereje vagy a vízbe ugró emberre felfelé ható felhajtóerő is, ezek értékét a feladat adja meg.

Az eredmény kevesebb, mint a kívánt 2 méter, ebből tudjuk, hogy a mozgásnak 2. szakasza is van, a labda visszafordul. A kérdés az összidő.

A labda megtett már 1,25 m utat, Az előírt 2 méterig megteendő még 0,75 m. Szabadesés következik, mennyi idő alatt esik ennyit egy test?

$s_2=\frac{a}{2}\cdot t_2^2$, ahol a t_2 a második útszakasz ideje.

$$0{,}75=\frac{-10}{2}\cdot t_2^2 \quad \rightarrow \quad t_2=\sqrt{\frac{0{,}75}{-5}}$$

No, itt van egy kis probléma, *a gyökjel alá negatív szám került*, −0,15 s. Ez kiszámíthatatlan, az eredménye ugyanis nem valós szám. Most egy pici rugalmasságra van szükség. Ebben az útszakaszban, csak az útszakasz hosszának kiszámításában függetlenítheted magad az előjelezéstől. Álló helyzetből esik egy test, a helyzet egyszerű, mi se komplikáljuk, az idő 0,15 gyöke, 0,39 s.

A feladat első kérdésére a válasz: az összes idő 0,5+0,39=**0,89** másodperc.

A feladat második kérdése ez volt: Milyen magasan lesz a labda ekkor, ha a feldobás 1,2 m magasról indul?

A labda indult 1,2 m magasról, felfelé megtett 1,25 métert, aztán lefelé 0,75 métert, vagyis most van 1,2+1,25−0,75=**1,7** m magasan.

Ezen a ponton mennyi a labda *elmozdulása* a kezdőponthoz képest? 1,7−1,2=+**0,5** m.

A visszafordulós mozgásnál tehát az utat két külön kiszámított útszakasz összegeként kerestük meg. Kiszámoltuk az első szakasz idejét, ebből megkapjuk az úthosszát. Ha kiderül, hogy a feladat ennél rövidebb útra vonatkozik, akkor ezt az eredményt dobjuk, majd egyszerűen megoldjuk a feladatot. Ha pedig a mozgás hosszabb, akkor a visszafordulási ponttól egy új, önálló gyorsuló mozgásként kezeljük, és nem felejtjük el az előző szakasz idejét és útját sem.

Másik feladat jön, a számítás egy kicsit nehezebb.

A feldobás után mikor lesz a labda 0,7 méter magasan, a kiindulási ponthoz képest? A kezdősebesség felfelé 5 m/s.

A kérdés most nem az utat tudakolja, hanem az időt, megadva hozzá tulajdonképpen az *elmozdulást*, a kiindulási ponttól mért távolságot. Azt mondtam, hogy visszafordulós mozgásnál az út képlete az elmozdulást adja meg, akkor használjuk azt.

$$(s =)\ \ d = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$0{,}7 = 5 \cdot t + \frac{-10}{2} \cdot t^2$$

ahol pozitívnak vettük a felfelé irányt. Ebből kapjuk a $-5t^2+5t-0{,}7=0$ alakú MÁSODFOKÚ EGYENLETet, amit a Matek témakörben levő fejezet segítségével megoldva t-re *két* értéket kapunk: 0,168 s és 0,832 s. Valóban, a labda kétszer is eléri ezt a magasságot, felfelé, majd lefelé is.

Hol lesz a labda 3 másodperc elteltével?

Figyelj jól: nem azt kérdezem, hogy mekkora utat tesz meg ennyi idő alatt, hanem hogy hol lesz. Más támpont híján nyilván a kiindulási ponthoz viszonyítva. Elmozdulás. Behelyettesítünk a fenti képletbe, kapjuk, hogy −30 méter. A kezdőmagasság alatt lesz, mivel a negatív irány lefelé van. Ellenőrizzük: felfelé 0,5 s alatt 1,25 m, majd onnan lefelé 2,5 s alatt 31,25 m, összesen 30 m. *Gyakorold a számológéped használatát is, további értékek kiszámításával, dolgozatíráskor ne azzal menjen el az időd.*

A tehetetlenség törvénye [redacted]

Ha erőmentes, ideális térben, súlytalanságban egy testet meglökünk, akkor utána az egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, sebességváltozás nélkül, akár az idők végezetéig. **A test magától nem lassul le és nem is gyorsul.** Erről gondoskodik a test **tehetetlenség**e, egy olyan jelenség, amely minden tömeggel rendelkező testre érvényes.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye) kimondja, hogy

Minden pontszerű test megtartja a mozgásállapotát, amíg egy külső erő annak megváltoztatására nem kényszeríti.

A változatlan mozgásállapot az a semleges, erőmentes állapot, amikor a test mozog, de **a mozgása egyenes vonalú, állandó sebességű**. A tükörsima felületen meglökött golyó "nyugodt" állapota, amelyik egyszerűen csak gurul. És ha a test áll? Tulajdonképpen az álló helyzetben levő test is egyenletes sebességgel mozog, *csak a sebessége 0*. Ez először hülyeségnek hangzik, de ha ezt a megközelítést elfogadjuk, akkor megszabadulunk attól a kényszertől, hogy az álló helyzetet mindig külön kezeljük, és ez a feladatok megoldását és a fogalmak továbbgondolását is leegyszerűsíti. Később látni fogjuk, hogy a nulla sebesség csak viszonyítási rendszer kérdése.

A semleges, változatlan mozgásállapotú testre azt mondjuk, hogy **nyugalomban, nyugalmi helyzetben van.** A nyugalmi helyzetben levő testre mondják azt is, hogy „tökéletesen magára hagyott test”.

A mozgásállapotot nem befolyásolja a test *forgása*, a pályán mindig a test tömegközéppontja halad, a példák mindig **pontszerű tömegre vonatkoznak**, ha a feladat a test kiterjedésére külön nem tér ki. Vagyis az űrhajóban lebegő űrhajós, ha ellöki magát a faltól, akkor is egyenes vonalban, egyenletes sebességgel halad, ha közben elkezd szaltózni, mert a *tömegközéppontja* végig ugyanazon a vonalon fog haladni, a mozgásállapota nem változik, és fizikai szempontból nézve nyugalmi helyzetben van.

Ha a nyugalomban levő test mozgásán, mozgásállapotán változtatni akarunk, akkor az ennek ellenáll, ez az ellenállás a test tehetetlenségének a megnyilvánulása.

Amíg a test sebességén (sebességvektorán) nem próbálunk változtatni (gyorsítani, lassítani, kanyarodásra kényszeríteni), addig a tehetetlenséget nem is vesszük észre. **Lehetséges a változtatás, de ahhoz a testre erőt kell kifejtenünk.** Az ERŐ definíciójából következik, hogy ezt az erőt mindig *egy másik testnek* kell létrehoznia, akár közvetlen érintkezéssel, akár egy erőtér közvetítésével, ilyen értelemben erőtérnek számít a tömegvonzás is.

Minél nagyobb a test tehetetlensége és minél nagyobb az elérni kívánt változás, annál nagyobb erőre van szükség. **A test tehetetlensége egyenesen arányos a tömegével.** Úgy is mondhatjuk, hogy **a tehetetlenség a tömeg megjelenési formája**.

Megjegyzés: Az elméleti fizikusok számára fontos, hogy valami univerzális és a többi elmélethez illeszkedő elméletet alkothassanak válaszul arra a kérdésre, hogy mi a tehetetlen tömeg *oka*. A jelenleg legelfogadottabb elmélet szerint a térben mindenfelé ott levő Higgs-részecskékből álló részecskemező "sodrása" adja meg a magyarázatot, és ennek a részecskének (Higgs-bozonnak) a létezésére 2012-ben sikerült kísérleti bizonyítékot is találni.

Inerciarendszer

Egy mozgó test pályáját csak úgy tudjuk megfigyelni és leírni, ha rögzítjük azt a **vonatkoztatási rendszer**t, amelyhez viszonyítva a mozgás megtörténik. **Mozogni mindig csak valamihez képest lehet.** Ha lebegnél a teljesen üres Univerzum közepén, és egyáltalán nem látnál magad körül egyetlen csillagot sem, semmiféle megjegyezhető pontot, akkor valójában nem lenne értelme annak a szónak, hogy te *haladsz* valamerre.

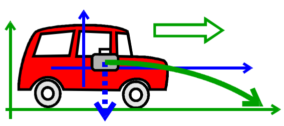
Egy térbeli vonatkoztatási rendszernek van **egy alappontja és három alapiránya**, amelyek a három térdimenzió irányát rögzítik. A koordinátarendszer nem azonos ezzel, mert annak csak az a célja, hogy számszerűen megadhatók legyenek a pálya pontjai és a test helyzete, sebessége, márpedig koordinátarendszerből is van sokféle, derékszögű, logaritmikus, polár, szférikus, hiperbolikus stb. A vonatkoztatási rendszer ezek helyett csak egy megállapodás, egy nézőpont, azért, hogy az "innen oda" mindenki számára érthető legyen.

A vonatkoztatási rendszereknek azt a csoportját, amelyben érvényesül a tehetetlenség törvénye, inerciarendszernek nevezzük (inertia latinul tehetetlenség)**.**

Eddig a tananyag. A többi csak izgalmas. Velem tartasz? Egy inerciarendszerben elfoglalt helyzetet vagy az ott végzett mozgást megfigyelhetjük egy másik inerciarendszerből is, ami ehhez képest máshogy áll, esetleg még mozog is. Ha a test mozgása az egyik rendszerben egyenes vonalú egyenletes mozgás, akkor a másikban is annak fogjuk látni, legfeljebb a sebességének a nagysága és iránya lesz más. Ha egy vonaton utazunk, akkor az elsétáló kalauz mozgását egyenes vonalúnak és egyenletesnek látjuk. Ha pedig valaki ugyanezt a vágány mellett állva nézi, akkor *ő is*. Azért, mert maga a vonat szintén valamilyen egyenes vonalú és állandó sebességű mozgást végez a külső megfigyelő szemével nézve. A kalauz a két megfigyelő szerint más sebességgel halad (talán más irányba is), de egyenesen és egyenletes sebességgel. A két nézőpontot ezért fizikai szempontból egyenértékűnek, *ekvivalens*nek, egymásba egyszerűen átszámíthatónak tekinthetjük.

Sőt, annak a kijelentésnek, hogy egy test "áll", csak annyi az értelme, hogy egy adott inerciarendszer pontjaihoz *képest* áll. A kalauz is állhat a vonaton, de a földhöz rögzített rendszerben ez a kalauz mozog. De az is lehet, hogy a vonaton a kalauz hátrafelé szalad, és ha a vonat pont ugyanakkora sebességgel megy, akkor a sín mellett álló szemlélő azt látja, hogy a kalauz *hozzá képest* áll, pedig az utas azt látja, hogy a kalauz fut. Ugyanígy nincs értelme kijelenteni azt, hogy valaki "jó" irányban áll, mert az attól függ, hogy honnan nézzük. Nekünk a nehézkedés iránya, a gravitáció kijelöl egy praktikus függőleges irányt, de ha eltűnne a gravitáció, akkor kiderülne, hogy ez is csak egy irány a végtelen sok egyformán használhatóból.

Egy test helye és helyzete is viszonylagos. Attól függ, hogy mit választunk a megfigyeléséhez vonatkoztatási rendszernek.



Ha te mész az úton egy autóval, és az ablakon kiejtesz egy pénzzel teli táskát, akkor te az autóból azt látod, hogy a táska egyenes vonalban lefelé esik, mert benne van az autóval felvett vízszintes lendülete, és megy veled. Te a te vonatkoztatási rendszeredben, amit kék koordinátatengelyekkel jelöltem, csak elejtetted a táskát, és elvárható, hogy az egyszerűen leessen, pont ugyanúgy, mint amikor a földön állva ejted el. Az "állás" fogalma már nem abszolút, nem valami speciális, kitüntetett állapot, mert az a megfigyelőtől függő, relatív dolog. Amikor a táskát fogod, akkor hozzád képest a sebessége nulla, és amikor elejted, akkor a táska leesik, függőlegesen lefelé. A leesés az $f(x)=x^2$ függvénnyel leírható, egyenletesen gyorsuló mozgás. A leesés végén a táska hirtelen hátrafelé kezd mozogni.

Az emberrabló, aki az árokból figyeli a táskát, azt látja, hogy az ő (zöld) vonatkoztatási rendszerében az autó vízszintesen mozog, és először a táska is vele azonosan mozog. Majd amikor elejted, akkor ő azt látja, hogy a táska egy hosszú parabolapályán a földre esik. A leesés végén a táska megáll. A parabola is az $f(x)=x^2$ függvénnyel írható le, ezt már tudod matekból. A táska mozgása a két nézőpontból nem azonos, de egyenértékű, csak a mozgás vízszintes összetevője eltérő, a függőleges nem. Egyik sem "igazibb" a másiknál. A kék vonatkoztatási rendszer egyenletes sebességgel mozog a zöld rendszerben, és a táska mozgása ezek különbségével megmagyarázható.

A rendőr, aki a bokorból figyeli az egészet, hiányzott az iskolából, amikor a parabolát tanulták, de szeretné megérteni a táska mozgását. Ezért beleképzeli magát az autóba, és rájön, hogy a táska onnan nézve csak lefelé esett, és a mozgást így sokkal egyszerűbben tudja elmesélni a kollégájának.

Egy mozgás többféle inerciarendszerben, több szemszögből nézve is leírható.

A dolog csak elhatározás kérdése. Ha valamiért azt akarjuk, hogy egy repülőgép ülésére tett laptop a számításhoz használt vonatkoztatási rendszerünkben álljon, akkor rögzítsük a vonatkoztatási rendszert a repülőgéphez. Úgy, hogy elképzeljük, hogy mi a gépen ülünk, és onnan figyeljük a laptopot. Ha azt szeretnénk, hogy a laptop a mi rendszerünkben valamilyen irányba mozogjon, akkor képzeljük magunkat egy másik repülőgépre, amely úgy halad, hogy a laptop mozgása *abban a rendszerben* nekünk megfelelő legyen.

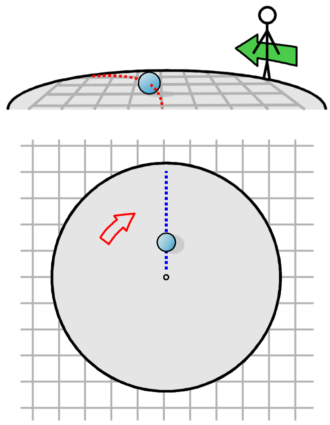
Hogy mi az értelme ennek? A másik vonatkoztatási rendszerben esetleg érthetőbb, egyszerűbben leírható egy újabb test mozgása, ami az előző rendszerben bonyolultabb számítást követelne. Vagyis lehet, hogy egy másik vonatkoztatási rendszer választása számunkra *kényelmesebb*. Nem kell rögtön matematikai formulákra gondolni, egyszerűen csak a megfelelő helyre képzeljük magunkat, és gondolatban onnan nézzük a dolgokat.

Szoktál te is ilyet csinálni. Ha egy sisakkamerával vagy egy autó belső kamerájával készült videót látsz, akkor áthelyezkedsz az ahhoz tartozó vonatkoztatási rendszerbe. A szemed helyett ilyenkor csak az eszeddel tudod, hogy amikor az autóvezető ugrál az ülésen, akkor valójában az út hepehupás.

Mi a közös a kalauz mozgásában az utas és sín mellett álló megfigyelő számára?

Még egy vonatos példa, amivel már te is találkozhattál. A vonat áll az állomáson, te ülsz az ablak mellett, mellettetek áll egy másik vonat. Kicsit sokáig álltok, de aztán végre megindultok, lassan mentek el a másik vonat mellett, majd végleg elhagyjátok, aztán azt látod, hogy az állomás meg nem mozog. Öö, bocs, nem mi mentünk, hanem a másik vonat a másik irányba. Ugye hogy történt veled is ilyen? Ugye hogy teljesen úgy nézett ki, mint amikor a te vonatod megy? Az a kis rándulás az elején, az elmaradt, de erre fel sem figyelünk, annyira meggyőző az, amit a szemünk lát. Azt hitted, hogy te mozogsz a másik vonat és az állomás vonatkoztatási rendszerében, pedig a másik vonat mozgott a te vonatkoztatási rendszeredben. A kettő megtévesztően egyforma is tud lenni.

Az egyenes vonalban egyenletes sebességgel haladó, nem forgó vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Nem azonos, de egyenértékű azzal a rendszerrel, amihez képest mozog.

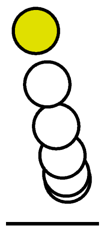


Ha van alkalmad kipróbálni, akkor ülj le egy nagy forgó asztal vagy körhinta közepére. A világ elfordul körülötted, de ne is törődj vele, most csak az asztalra figyelj. Ha egy golyót lassan elgurítasz vagy eldobsz az asztal széle felé, csodálkozva látod, hogy a golyó ívben halad. Ha az asztalon elfordulsz, és másfelé is megpróbálod a gurítást, ott is elhajlik a pálya, pedig a gurítás után a golyó háborítatlanul mozog, a tehetetlenség törvényének érvényesnek kellene lennie rá, mégsem egyenes vonalú a mozgás. Ebből kiderülhet az, hogy a forgó asztalon veled mozgó világ, az a vonatkoztatási rendszer, amelyet te automatikusan létrehozol magad körül, *nem* nevezhető inerciarendszernek. A golyó mozgását valójában irányító Térben és a Föld gravitációs terében a te vonatkoztatási rendszered **forog**. Folyamatosan változik az alapiránya. Ez egy *gyorsuló* vonatkoztatási rendszer.

Ha valaki felülről nézi az egészet, ő azt fogja látni, hogy a golyót elgurítod, aztán te tovább fordulsz az asztallal, eközben viszont a golyó szép egyenes vonalban legurul róla. Szerinte egyenes, szerinted görbe. Akkor viszont a kettőtök nézőpontja, látásmódja, vonatkoztatási rendszere *lényeges* dologban különbözik, vagyis **nem ekvivalensek**, nem egyenértékűek. Azaz ha az egyik rendszerben valami képletekkel meghatározod egy test mozgását, akkor azt nem lehet a másik rendszerben is felhasználni úgy, hogy csak egy-két számot elég megváltoztatni benne.

Mi az inerciarendszer fő kritériuma?

Filmekben van olyan, hogy egy autó belsejét látjuk egy rögzített kamerával, és az autó felborul. Mi, nézők, akik ez esetben kizárólag a szemünkkel érzékeljük ezt a helyzetet, azt látjuk, hogy az autóban levő tárgyak furcsa irányokba kezdenek esni. Amíg a kocsi hempereg, addig a mozgás szabályai szinte nem is követhetőek, a leeső dolgok ívelt pályán haladnak, hol erre, hol arra, szóval a helyzet nem alkalmas arra, hogy egy egyenes vonalban haladó test pályáját meg tudd tippelni. Amikor viszont a kocsi megáll valamilyen helyzetben, onnantól az egyenes ismét egyenes lesz. Csak másfelé. De az elejtett tárgy ezután is egyenes vonalban fog esni, csak az egyenes vonal leírására a fejre állt ember koordinátarendszerében más lesz az egyenes egyenlete. De akkor is egy lineáris függvény marad, csak más irányban. Ezek szerint a fejre állt helyzet szintén inerciarendszer, és egyszerű matematikai transzformációval minden mozgás átszámítható belőle a normális, talpra állt rendszerbe.

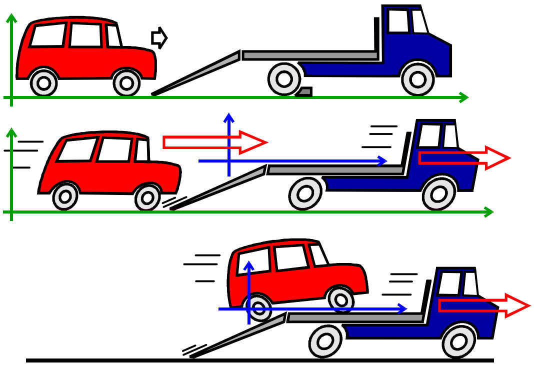


Próbáld ki egyszer, hogy előveszel valami puha tárgyat, egy szivacslabdát, egy zoknit, aztán fejre állsz, és most dobd *fel* a labdádat. A beidegződés miatt lehet, hogy valójában lefelé dobod, ezen elég jókat lehet mulatni, főleg ha te nézed más bénázását. Nehéz eldönteni, hogy ilyenkor merre is van az a "fel". De ebben a rendszerben érvényes marad, hogy ha a labdát elgurítod, akkor egyenes vonalban gurul, az elejtett tárgy pedig valamerre, szintén egyenes vonalban gyorsulni kezd? Érvényes marad. Akkor a fejre állt ember saját vonatkoztatási rendszere is inerciarendszer.

Egy inerciarendszer az elfordítása után is inerciarendszer marad. (Ha már nem forog.)

Ha *olvastad* a Végjáték című regényt (ha nem, akkor miért nem?), akkor emlékszel arra, hogy a gyerekek mindig bemennek egy hatalmas stratégiai gyakorlóterembe, ahol az ellenfelük kapuja a túlsó falon van. De a teremben tökéletes súlytalanság uralkodik, ezért a tájékozódás kicsit zavaros. A legtöbb gyerek megpróbálja megtartani magában azt a fel–le irányt, ami még a folyosón volt érvényes, ezért egy hozzá képest oldalra vagy fejjel lefelé forduló, lebegő társát "rossz" helyzetben levőnek érzi, és ez meg-nehezíti azt, hogy a terem bármelyik irányában rugalmasan szervezhessenek támadásokat. A főhős, Ender Wiggin ráérez egy sokkal praktikusabb látásmódra, és kimondja azt a később jelszóvá vált mondatot, amely egyszerre helyre teszi mindenki agyában az irányokat: „Az ellenfél kapuja *lent* van." Miután mindenki átrendezte magában a tér irányait, megszüntetve a plafon és oldalfalak közötti különbséget, felszabadították magukban azt a képességet, hogy *kényelmesebben* használhassák az irányok fogalmát és a mozgások megnevezését. De a rendszer inerciarendszer maradt, mert amikor a faltól ellökik magukat, egyenes vonalban lebegnek a másik falig.

Ha fejre állsz, az általad látott rendszerben érvényes a tehetetlenség törvénye?



Van, amikor a mozgás maga követeli a vonatkoztatási rendszerek közötti váltást. Ha megfigyeljük, ahogy egy autó felgurul egy teherautó rámpáján, akkor valószínűleg mindenki úgy fogja látni a dolgokat, hogy a teherautó áll, a személyautó mozog. A vonatkoztatási rendszer a földhöz van rögzítve, a zöld tengelyek erre emlékeztetnek. Ebben a rendszerben az autó sebessége legyen 3 km/h. Rögzíthető egy rendszer a teherautóhoz is, amelynek a sofőrje a saját szemszögéből azt látja, hogy a személyautó 3 km/h sebességgel közelít, majd felgurul a platóra. Az autó szerintünk jobbra mozog, a teherautósofőr szerint pedig felé mozog, de a két megfigyelő saját rendszere csak az alapirányban tér el.

A két autó most eljátssza az akciófilmek egyik mutatványát: felgurulás a rámpán menet közben. A külső megfigyelő azt látja, hogy két elmebeteg száguld egymás mögött, elöl egy teherautó 100-zal, mögötte egy személyautó 103-mal. Ha a teherautósofőr ráérne nézelődni, ő azt látná, hogy a személyautó 3 km/h sebességgel közeledik felé, és felhajtani készül a rámpán. A teherautó saját vonatkoztatási rendszere (kék) 100 km/h sebességgel halad a földhöz rögzített (zöld) vonatkoztatási rendszerben. A mozgás átszámítása zöldből a kék rendszerbe ezért –100, a kékből vissza a zöldbe +100 km/h korrekciót jelent. Vagyis ha egy kétségbeesett pók a platón 2 km/h sebességgel mászik előre a kék rendszer szerint, akkor a zöld rendszerben, a földhöz képest 2+100 km/h a sebessége.

Ha a szél előrefelé fúj 10-zel, mekkora menetszél borzolja a pók frizuráját? 92 km/h.

Nincs a rajzon, de nyugodtan rendelhetünk egy harmadik rendszert a személyautóhoz is. Ebben a rendszerben a teherautó sebessége –3 km/h, a földi megfigyelőé –103 km/h, a póké –1 km/h.

Megjegyzés: A relativitáselmélet azzal aratott sikert, hogy következetes magyarázatot tudott adni a *Michelson–Morley-kísérlet* érthetetlen eredményéhez. Kiderült, hogy a fényre nem érvényes ez a számolgatás. A fény sebessége mindenhez képest ugyanannyi.

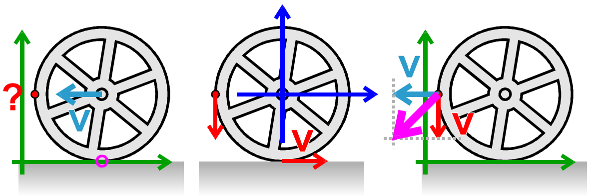
A személyautót vezető akcióhős ha előre néz, azt látja, hogy a teherautóhoz képest 3 km/h-val halad, de ha oldalra néz, azt látja, hogy a fákhoz képest a sebessége 103 km/h. Ahhoz, hogy ezt a sebességet tartsa, nyomni kell a gázt rendesen. Az első kerekek már a rámpán vannak, és elérkezik a pillanat, amikor a kocsi hátsó kereke is eléri a rámpa végét. (Hátsókerék-meghajtású.) A kocsi sebessége elvileg nem változik, az úthoz képest 103 km/h, a teherautó vezetőfülkéjéből nézve továbbra is 3 km/h. De azzal, hogy a kocsi felkapaszkodott a rámpa végére, hirtelen a 3 lett fontos, és elvész a 103 jelentősége. Mert mostantól tökmindegy, hogy a teherautó mennyivel megy, az a lényeg, hogy a kocsi meg tud-e állni a plató végéig. Ha most megkérdezed, hogy a kocsinak mennyi a sebessége, most már mindenki azt fogja mondani, hogy 3 km/h, egyszerűen azért, mert mindenki önkéntelenül is a teherautóhoz kötött vonatkoztatási rendszert veszi alapul, mert most már ez a személyautó környezete.

Ha ez az akciót egy légpárnás hajóval csináljuk végig, akkor ennyivel le is zárhatnánk, így viszont van még egy apró érdekesség. Az autó a forgó kerekével hajtja magát, márpedig a kereke alatt mozgó felülethez képest 103 km/h sebességgel robogott, aztán a felület hozzá viszonyított sebessége ugrásszerűen 3-ra csökkent. De a motor úgy dolgozik, hogy a kocsi 103-mal tudjon menni. Régi vitatéma, hogy a kocsi most megtartja-e a platóhoz viszonyított 3 km/h-s sebességét, vagy a platóhoz képest 103 km/h sebességgel kilő, lekaszálva a vezetőfülkéjét. A motor és a kerék sebességét figyelve az utóbbi lenne az eredmény, de a kocsi képtelen hirtelen 3-ról 103-ra gyorsulni, ehhez a brutális gyorsuláshoz óriási gyorsító erő és motorteljesítmény kellene. Ehelyett a kerék kipörög, mintha lassú gurulás közben a gázba tapostunk volna. Ez ad annyi időt, hogy a fékbe taposva éppen meg lehessen állni a plató végéig.

A teherautó kék vonatkoztatási rendszerében milyen sebességgel mozognak a fák?

Most már belejöttél a vonatkoztatási rendszerek közötti áthelyezkedés trükkjeibe. Mondtam, azért érdemes ez az egészet érteni, mert néha megkönnyíti a dolgunkat a rendszerek közötti váltás. Nézzünk hát egy feladatot, amikor ennek a hasznát látjuk, amikor a segítségünkre van ez a lehetőség.

Az első ábrán egy kerék gurul a földön, **v** sebességgel, *balra*. A kérdőjellel is megjelölt piros pontnak mekkora és éppen milyen irányú a sebessége?



Talán lefelé mozog? Lehet. Mivel a kerék rögtön továbbfordul, nehéz megfigyelni. Hirtelenjében nem is tudjuk, hogyan foghatnánk hozzá.

A kerék középpontja állandó **v** sebességgel balra mozog a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva, amit a zöld koordinátatengelyekkel jelöltem. De megtehetjük, hogy egy másik vonatkoztatási rendszert rögzítünk a kerék középpontjához. Maga a kék vonatkoztatási rendszer állandó **v** sebességgel balra mozog a zöld rendszerhez viszonyítva, a zöld rendszer*ben*. Azért, mert a kerék középpontjához van rögzítve, ami **v** sebességgel mozog. Ebből az következik, hogy a kék rendszerben történt minden mozgáshoz csak hozzá kell adni egy balra mutató **v** sebességet ahhoz, hogy a zöld rendszerben érvényes értéket kapjunk.

Most akkor feledkezzünk el a kerék haladó mozgásáról! Nézzük úgy, hogy a kék vonatkoztatási rendszerbe képzeljük magunkat, mintha ráültünk volna a kerék tengelyére. Ebben a rendszerben a kerék mozgása nagyon egyszerű, hiszen egyenletesen forog, a középpontja nem mozdul. Ha a kerék tengelyén ülve a kereket nézzük, akkor csak azt látjuk, hogy a kerék forog. Ebben az esetben merre mozog a megjelölt pont? Lefelé. Mekkora sebességgel? Annyival, amennyi a kerék külső pontjainak a kerületi sebessége. És az mennyi?

Ehhez egy pillanatra nézzük meg újra az első ábrát. A guruláskor a lenti megjelölt pont a földhöz képest nem mozdul (hiszen a kerék nem csúszik), a tengely viszont igen, **v** sebességgel balra. Ha a tengelyhez rögzítjük magunkat, akkor pedig a pont a földdel együtt mozog, **v** sebességgel jobbra.

Ismét a második képnél járunk, a kék rendszerben. Az alsó pont **v** sebességgel jobbra mozog, de a kerék merev test, ezért a kerület *minden* pontja **v** sebességgel mozog, pozitív forgásirányban. Ebből az következik, hogy a piros pont lefelé mozgása **v** sebességű, vízszintes irányú mozgása nincs.

Helyes, megkaptuk tehát a piros pont mozgását a kék vonatkoztatási rendszerben. Akkor most térjünk vissza a zöld vonatkoztatási rendszerbe, amely a földhöz van rögzítve, a harmadik ábrán. Megegyeztünk, hogy a kék rendszerből visszaállni a zöld rendszerbe úgy lehet, hogy mindenhez hozzáadunk egy balra mutató **v** sebességet. Van tehát a lefelé mutató piros **v** sebességünk a kék rendszerben. Hozzáadunk egy balra mutató kék **v** sebességet. Kiszámítandó a két sebességvektor eredője, ami azt adja eredményként, hogy a kérdezett sebesség pillanatnyi iránya 45° lefelé, a nagysága $\sqrt{2}\cdot$**v**.

Természetesen van más lehetőség is a feladat megoldására, de ez a legsimább. Nem állítom, hogy ez forradalmi újdonságot visz az életedbe. Puszta okoskodással, jó képzelőerővel ugyanígy rájöhettél már a jó eredményre hasonló jellegű feladatoknál magadtól is. Most csak annyi történt, hogy nevet adtunk a fogalmaknak, és jobban kiemeltük a szabályait. Ezután pedig akkor alkalmazod ezt az eszközt, a "ha onnan nézzük, hogy" módszert, amikor majd hasznosnak érzed.

A dinamika alaptörvénye

Newton II. törvénye (a dinamika alaptörvénye) szerint

Egy pontszerű test sebességének megváltozása egyenesen arányos és megegyező irányú a testre ható erővel, és a kettő aránya a tömeg, amely állandó.

A sebesség megváltozása gyorsulás, emlékszel? A törvényből következik az, hogy **a test gyorsításához külső erőre van szükség.** Erő hiányában a test nyugalomban marad, lásd az **I.** törvényt. Minél nagyobb erőt fejtünk ki a testre, legyőzve a tehetetlenségét, annál nagyobb lesz a gyorsulása. **Kis erő kis gyorsulás, nagy erő nagy gyorsulás.** Szintén igaz az, hogy ha ugyanakkora erővel tolunk egy nagyobb tömegű testet, mint egy kisebbet, akkor **a nagyobb tömegű test nehezebben fog gyorsulni**. Gyakorlati példával érzékeltetve ezt a jelenséget: egy kigyúrt óriást nehezebb hanyatt lökni, mint a kisöcsénket. (És kevésbé érdemes.)

Figyeld meg a törvény érdekes vonását: ha feltesszük a kérdést, hogy „Mi az a tömeg?”, akkor a válasz erre lehet az, hogy "a gyorsító erő és a gyorsulás hányadosa". F/a=m. Ezt az alapelvet a tömeg megmérésére is használják olyan körülmények között, amikor a rugós és karos mérlegek nem használhatók vagy túl pontatlanok. Például súlytalanságban, vagy ha a tömeg nagyon kicsi.

A dinamika alaptörvényének kifejezésére a következő, nagyon fontos képletet használjuk:

$$F = m \cdot a$$

ahol **F** a testre gyakorolt erők *eredője*, **m** a test tömege, **a** az erő által létrehozott gyorsulás. A gyorsulás iránya mindig megegyezik a gyorsító erő irányával. A gyorsítást az **m** tömeg tehetetlensége nehezíti, amely az **m**-mel egyenesen arányos. A tömeg állandó (lásd még az 1. témakör TÖMEG fejezetét).

Ennek nyomán az I. és II. (és IV.) törvényt összefoglalhatjuk az **egyesített mozgástörvénnyel:**

Egy pontszerű test akkor és csak akkor tartja meg mozgásállapotát, nyugalmi helyzetét, ha a rá ható erők vektori eredője nulla, ellenkező esetben a test egyenletesen gyorsul.

Emlékeztetlek arra, hogy a 2. témakör MOZDULATLANSÁG fejezetében még nem beszéltünk mozgásállapotról, hanem akkor még csak álló testről. Most már ezt ki tudtuk terjeszteni egyenes vonalú egyenletes mozgásra is, inerciarendszertől független alaptörvényként.

A törvény fontos felhasználási módja az, hogy **ha a test nyugalmi helyzetben van, akkor ez csak úgy lehetséges, ha *a testre ható* erők kiegyenlítik egymást**. Eszerint ha egy feladat elemzésekor úgy találjuk, hogy ezek az erők nem egyenlítik ki egymást, de a testről tudjuk, hogy nem gyorsul (nem mozdul), akkor *egészen* biztosak lehetünk abban, hogy az erők berajzolásakor kifelejtettünk valamit, vagy egy erőt rossz helyre vagy rossz irányba rajzoltunk. Ez az egyenes vonalú egyenletes mozgást végző testre is igaz! És arra is oda kell figyelned, hogy ehhez ne vegyél számításba olyan erőt, amely *nem erre a testre* hat.

> Egyes esetekben, például az emelőkről szóló feladatokban nem kell a nyugalmi helyzethez szükséges összes erőt megvizsgálni és berajzolni, mert ott a feladat a forgatónyomatékokra koncentrál.

Teljesen biztosak lehetünk abban is, hogy **ha a testre egy nem nulla eredő erő hat, akkor az a test meg fog mozdulni, méghozzá az erővel és a tömeggel arányos mértékben gyorsulva**.

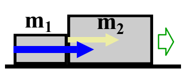
Az is kiderül a képletből, hogy ha egy mozgó testet le akarunk fékezni, akkor a tömeg ismeretében egy adott fékező (a mozgással ellentétes irányú) erőről megmondható, hogy az milyen mértékű lassulást fog okozni, illetve egy adott lassuláshoz – ami a fékútból és a kezdősebességből is megkapható – milyen erőre van szükség.

Hogy szól az egyesített mozgástörvény? Mi szükséges a gyorsuláshoz?

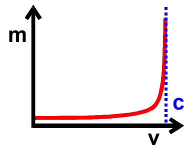
A számos nagy gyakorlati jelentőségű értelmezés között van egy kiemelten fontos: ha egy testre valamilyen erőt fejtünk ki, akkor a tapasztalt gyorsulásból és a test tömegéből kiszámítható, hogy az erő mekkora. Az SI mértékegységrendszerben az erő mértékegysége, **a newton (N) definíciója is a tömegre és a gyorsulásra van visszavezetve**, ezért van az, hogy ahogy az ERŐ fejezetében láttuk,

$$1\ N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

vesd össze a dinamika alaptörvényével. Tehát: **1 newton az az erő, amelyik 1 kg tömegű testen 1 m/s² gyorsulást hoz létre.** Ezt az elvet követve egy test tömege *súlytalanságban*, így a Föld körül keringő űrhajóban is megmérhetővé válik. A SÚLY fejezetben még lesz erről szó.

> Mutatok egy érdekes feladatot. **Az asztalon két test van, amelyek egymáshoz érnek, a tömegük m_1=2 kg, m_2=6 kg. Az ábra szerint kifejtünk m_1-re egy állandó F=40 N erőt. Súrlódás nincs,** ezt nyilván akkor is érted, ha a súrlódási erőt még nem beszéltük meg: ha megtolod a testet, az asztalon az minden akadály nélkül csúszik. **A kérdés: mekkora erő hat az m_2 testre?**
>
> 
>
>
> Kicsit nehéz feladat, mélyen el kell gondolkozni azon, hogy mi mennyire nyom mit. De ha másképp fogjuk meg a problémát, hirtelen nagyon könnyűvé válik. A két egymáshoz nyomódó test olyan szempontból egyetlen testnek tekinthető, hogy az F hatására együtt elkezdenek jobbra gyorsulni, a törvény kötelez, a dinamika alaptörvényéből következően a=F/(m_1+m_2) gyorsulással, 40/8=5 m/s², sima ügy.

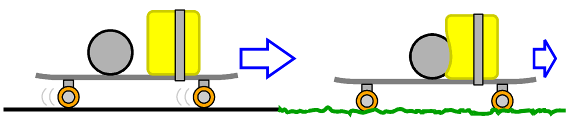
Most jön a két test közötti erő. Halványan berajzoltam, hogy a bal oldali test nyomja a jobb oldalit, mert *ha nem tenné*, a jobb oldali test nem mozdulna el, az pedig nyilvánvalóan lehetetlenség. Nézd meg a könyv elején a mottót: „tanuld meg a törvényt és ragaszkodj hozzá". Az m_2 le sem maradhat, és arra sincs oka, hogy elhagyja az m_1-et, igaz? Akkor az ő gyorsulása is csak 5 m/s^2 lehet. A tömege m_2=6 kg, mi következik ebből? *A gyorsító erőnek 30 N-nak kell lennie, mert csakis ez teljesíti a törvényt.* Hát akkor a válasz 30 N, akkor is, ha az erőkkel nem tudjuk a dolgot kapásból megmagyarázni. Kész. Ragaszkodtunk a dinamika alaptörvényéhez, és az segített nekünk.



Érdekesség: A relativitáselmélet egyik fontos kijelentése szerint a test tehetetlensége valójában *nem állandó*. Ha a tömeg mozog, akkor ha nő a sebessége, nő a tehetetlensége is. Ez a változás még az űrhajóink sebességtartományában (9-10 km/s) is alig mutatható ki, vagyis a hétköznapi világban a tehetetlenséget vehetjük a tömeggel egyenes arányosnak, és kész. De közeledve a fény sebességéhez (300 ezer km/s) a *nyugalmi tömeg* és a *tehetetlen tömeg* közötti eltérés gyorsan nő. A test anyaga nem lesz több, de a tehetetlensége, az F/a arány igen. A dinamika alaptörvénye értelmében ezért a gyorsításhoz egyre több erő kell. Végül a fénysebességre (c) gyorsuló test tehetetlen tömege eléri a végtelen nagyságot, így aztán a további gyorsításához a végtelennél több erő kellene. Mivel ez nem lehetséges, ezért a fénysebességnél nagyobb sebesség elvileg elérhetetlen. Az elméletet a megfigyelések eddig alátámasztották.

Tehetetlenségi erő

Újra egy elméleti téma, és nem baj, ha nem érted meg *teljesen*. Azért próbálkozz meg vele.



Egy gördeszkára kötözöl egy szivacsot, mögé teszel egy nagy vasgolyót, és az egészet ügyesen, együtt meglököd. A tükörsima járdán – hanyagoljunk el minden zavaró tényezőt – ez a rendszer egyenletes sebességgel mozog, nem történik vele semmi érdekes. De aztán a deszka rámegy a fűre, és fokozatosan, de gyors ütemben lelassul, majd megáll. Eközben azt látod, hogy a golyó a tehetetlenségi erőnek engedelmeskedve előremozdul, és benyomódik a szivacsba, majd végül az egész rendszer elnyugszik.

Nyilván nem stimmel valami, egyébként nem magyaráznám ennyire. A tehetetlenségi erő nem stimmel. Ha mi lennénk a golyó helyében, azt éreznénk, hogy a tehetetlenségi erő előrenyom bennünket. Egy fékező autóban ezt érezzük. Ugyanilyen erő nyom hátra bennünket, ha az autóval gyorsítunk, ugyanilyen erő szorít az autó oldalához, ha kanyarodunk. A testünk sebességét az ülés támlája vagy az autó oldala változtatja, és bennünket a tehetetlenségi erő nyom hozzá.

Csakhogy ez nem igaz. Ha igazán pontosan nézzük a dolgokat**:**

A bennünket nyomó tehetetlenségi erő *nem létezik*.

Nincs ilyen erő. Félremagyarázunk dolgokat, tévhitben vagyunk. **Erőt csak másik test hozhat létre**, és nincs ott semmilyen test, amely a lassuló gördeszkán a golyót előrenyomná. A fékező autóban mi sem egy erő miatt nyomódunk előre. Az a *hatás*, jelenség, ami előrenyom bennünket, **maga a tehetetlenség**, a tehetetlen tömeg létezésének, megjelenésének egyetlen lehetséges formája. Csak mi *úgy érezzük*, mintha erő lenne. Itt csak egyetlen erő működik, miután a golyó elérte a szivacsot, az, amivel a szivacs a golyó mozgását megállítja.

A golyót nem egy erő nyomja előre, mindössze szeretné betartani Newton I. törvényét, szeretné megtartani egyenletes sebességét, és hagyják őt békén. Kezdetben egyenletes sebességgel haladt, és szívesen tenné ezt továbbra is. Ezért amikor a deszka lefékeződik (fizikai szempontból "**gyorsul**", tudod, mert változik a sebessége), a golyó csak megy előre, ahogy a tehetetlenség törvénye előírja. Egy inerciarendszerben ez így működik, márpedig a mi földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerünk az.

A szivacshoz nyomódó golyóra hat a szivacs nyomóereje, hátrafelé. Ha lenne a golyóra ható tehetetlenségi erő is, előrefelé, akkor a két erő "kioltaná egymást", *az eredőjük nulla lenne*, és a sebességének nem lenne szabad változnia, igaz? Pedig a golyó végül megáll. Ha lenne tehetetlenségi erő, az megszegné az egyesített mozgástörvényt, tehát ilyen erő nincs, nem lehet. **Csak tehetetlenség van.**

Ha oldalról egy kis kocsiról videóznánk az egészet, úgy, hogy a kamera a golyó sebességével egyenletesen halad, akkor a videón a golyó mozdulatlan lenne. Már beszéltünk ilyenről az INERCIARENDSZER fejezetben. Azután azt látnánk, hogy hirtelen *a szivacs nekimegy a golyónak*, és magával sodorja. Hülyén hangzik, de ebben a rendszerben tényleg a szivacs mozog, méghozzá gyorsulva, végül felgyorsítva a golyót is. *Hátra.* A golyóra így nézve sem hatott előre mozgató erő.

Mi, akik a földön állva az egészet nézzük, egy inerciarendszerben állunk. A világot, a körülöttünk levő mozgásokat többnyire úgy *célszerű* leírni, ahogy ebben az inerciarendszerben zajlanak. Azért fontos ez, mert annak a törvényeit már ismered, ez a "rendes" vonatkoztatási rendszer, és ha tartod magad hozzájuk, nem fogsz eltévedni, nem fognak semmiből támadó erők kerülni az egyenleteidbe.

A golyó kezdeti mozgását melyik törvény határozza meg?

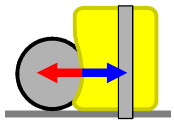
> Lehet nézni másképp is, persze. Rögzíthető az a kamera és az a vonatkoztatási rendszer a gördeszkához is, ami le fog lassulni a füvön, ne felejtsd. A videón ekkor azt látod, hogy a golyó egyszer csak minden látható ok nélkül gyorsulni kezd, előrefelé. Mint egy autó-töréstesztről készült videón, ahol a bábuk hirtelen előrevetődnek az ülésről, pedig nem ők ugranak fel, hanem az autó lassul le körülöttük a bekövetkezett ütközéstől.
>
> Ebben a nézetben a tehetetlenség törvénye nem érvényes, a nyugalomban levő testek mozgása nem marad egyenletes, ezért ez a füvön lelassuló vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer. De ebben a rendszerben *valóban* a golyó indul meg és megy neki a szivacsnak, és **ebben a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben valóban van egy olyan erő**, amely a golyót *külső hatás nélkül* gyorsítja, ilyenkor ezt hívják tehetetlenségi erőnek.

Amikor egy feladat áttekintésekor, a helyzet modellezésekor megérteni próbálod a testek egymáshoz viszonyított mozgását, néha kényelmesebbnek fogod érezni, hogy egy változó sebességű vonatkoztatási rendszerből figyeld a dolgokat. Mint amikor ülsz a buszon, az lefékez, és *a buszhoz képest* te előrelendülsz. Olyankor te a buszhoz kötött vonatkoztatási rendszerben fogod látni magadat, és ekkor, de csak ekkor, megengedhető, hogy azt állítsd, hogy téged a tehetetlenségi erő lökött előre. Ha viszont te kívülről látod, ahogy egy fékező buszban az utasok előrelódulnak, akkor csak *hasonlatként* beszélhetsz tehetetlenségi erőről. És ez utóbbi a "rendes" eset.

A test képzelt tehetetlenségi erejével a számításokban *jelképezhetjük* a test tehetetlenségét.

Ha feltételezünk egy tehetetlenségi erőt, akkor azt úgy vehetjük, hogy a testre annak **tömegközéppontjában** hat. Így tettünk a 2. témakörben is az egyensúlyról szóló fejezetekben.

A gördeszka vonatkoztatási rendszere milyen mozgást végez a mi inerciarendszerünkhöz képest?



Tudjuk, hogy *valamilyen* erőnek kell itt lennie, mert a szivacs mégiscsak benyomódik valamitől. Az lehet a kérdés, hogy melyik az aktív erő és melyik az ellenerő. Csak azért lehet ez érdekes, mert az ellenerő igazodik az aktív erőhöz, vagyis a nagyságukat az aktív erő határozza meg. Nos, ha a földi, az "igazi" inerciarendszerben a golyó van nyugalomban (Newton I. törvénye), és a szivacs megy neki, akkor a szivacs hozza létre az erőt (piros), ami a golyó mozgásállapotának megváltoztatásához szükséges (Newton II. törvénye), és a golyó a tehetetlenségének következtében ennek ellenáll, és ellenerőt (kék) gyakorol a szivacsra. **Ez az inerciarendszerhez illő leírása az eseménynek**, ezen az úton haladva fognak jól kijönni az egyenletek, ez a profi nézőpont. Az, hogy a szivacs miért indul meg hátrafelé, az mellékes, egyébként azért, mert a gördeszka, amihez rögzítve van, a füvön lassulni kezd, és a dinamika alaptörvénye alapján erre is elvégezhetők a számítások.

A tehetetlenségi erő kifejezést használhatjuk egy *valódi* erőre, ha akarjuk. Rákötünk egy madzagot egy téglára, és jó erősen megrántjuk. Azt várjuk, hogy a tégla gyorsulni kezd a rántás irányába. Lehet, hogy úgy is fog történni. De ha elég erősen rántjuk, akkor a madzag elszakad. Mi tépte el? Hát mi magunk, a mi erőnk. De milyen *erő* hatott a madzagra a másik irányban? Mert valaminek húzni kellett a madzagot abba az irányba is. A tégla tehetetlensége volt az, ez a jó válasz. Ellenállt a gyorsító erőnek, nem engedelmeskedett neki elég gyorsan, elég könnyen. A sebességváltozáshoz elég ideig tartó elég erő kell. A számításokban erőkkel és sebességekkel dolgozunk, ezért mond*hat*juk azt, hogy a másik erő a tégla tehetetlenségi *ereje*. A szivacsot a golyó tehetetlenségi ereje nyomta be. A gyorsító erő ellenereje, ami az ábrán a kék nyíl. (Jelölhetjük $\mathbf{F}_\mathrm{T}$-vel.) Ami **a golyó *tehetetlenségéből ered*.**

Tehetetlenségi erőnek hívhatjuk azt az erőt, amelyet a tehetetlen test fejt ki az őt sebességváltozásra kényszerítő testre.

Látod a különbséget? A golyó*ra* nem hat tehetetlenségi erő, csak úgy érzi. De a tehetetlensége következtében **a golyó hat egy erővel arra**, ami a sebességét változtatja, a szivacsra. A téglára nem hat tehetetlenségi erő, de a tégla a tehetetlenségi erejével szakítja el a madzagot. Fékezéskor a te tehetetlenségi erőd feszíti meg a biztonsági övet. Vigyázz, hogy ha használod a szót, akkor jól használd.

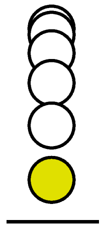
Mennyi a 20 kg-os test tehetetlenségi ereje? Válasz nem adható, a test által az őt akadályozó testre kifejtett erő attól függ, hogy mekkora lassulásra kényszerül. Az IMPULZUS fejezetben lesz szó erről.

Szabadesés, nehézségi gyorsulás [redacted]

A 2. témakörben már olvashattad a **nehézségi erő** meghatározását. Azt az erőt hívjuk így, amellyel a Föld (vagy más égitest) gravitációs ereje a testet vonzza. A jele $\mathbf{G}$.

Amikor egy testre csak a saját nehézségi ereje hat, akkor ennek az erőnek a hatására zuhanni kezd, egyenletesen gyorsul, az őt vonzó tömeg (tömegközéppontja) felé. Ezt az állapotot hívjuk **szabadesés**nek. Alapesetben ilyenkor a test mozgását az egyenes vonalú, egyenletesen gyorsuló mozgásra vonatkozó képletekkel írhatjuk le. (Általános esetben pedig a pálya mindig egy parabola része.)

Szabadesés az a mozgás, amikor a testre csak az égitestek tömegvonzási erői hatnak.



Földi körülmények között a szabadesést nehéz megvalósítani, mert a légellenállás (lásd később) a szabadesést fékezi, emiatt a testre már nem csak a saját nehézségi ereje hat. Ebből az következik, hogy nagy légellenállású testek, mint egy papírlap, falevél a normál környezetben lassabban esnek, de *csak a levegő fékező ereje miatt*. Az Apollo 15 űrhajósa, David Scott elvégzett a Hold felszínén egy szabadeséses kísérletet: egyszerre leejtett egy kalapácsot és egy külön ezért odavitt madártollat. A légüres tér miatt a tollat sem akadályozta semmi, és a két tárgy egyszerre ért talajt, a YouTube-on meg tudod találni ezt az érdekes videót.

A legenda szerint Galilei a pisai ferde toronyból egyforma méretű, de más anyagból készült, más tömegű golyókat ejtett le, amelyek egyszerre értek földet, bizonyítva, hogy a légellenállás különbségét kiküszöbölve az eltérés eltűnik. A történészek szerint a legenda nem igaz, inkább csak gondolatkísérlet lehetett, de a kísérlet valóban ezt az eredményt hozta volna. (Erre azért még visszatérünk.)

Azért, mert ha felírjuk a dinamika alaptörvényét, a Föld gravitációs erejének behelyettesítésével:

$$f \cdot \frac{m_F \cdot m_T}{r^2} = m_T \cdot a$$

észrevehető, hogy a test tömege (m_T) egyszerűsítéssel *eltűnik az egyenletből*. A következtetés: **a szabadesés gyorsulása nem függ a test tömegétől.**

A szabadeséskor megfigyelhető gyorsulás neve **nehézségi gyorsulás**, mert a test a saját nehézségi ereje hatására gyorsul. A jele $\mathbf{g}$.

A nehézségi erő forrása a Föld gravitációja, és így függ a Föld tömegközéppontjától való távolságtól (r), tehát annak a helynek a magasságától, ahol a szabadesés történik. A Föld tömege (m_F) és a gravitációs együttható (f) állandó, tehát ***azonos magasságon* (állandó r-nél) a nehézségi gyorsulás mindenhol és minden testre ugyanaz**. A mérések alapján megállapított szabvány szerint tengerszinten

$$g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

> Megjegyzés: Ebbe a szabványértékbe már Föld forgásának módosító hatása is bele van kalkulálva, és a $\mathbf{g}$ ezért a 45. szélességi fokra vonatkozik, de a különbség nem sok.

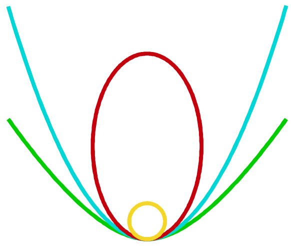
Ha a szabadesést magasabb helyen figyeljük meg, akkor a Föld és a test valamivel nagyobb távolsága miatt a gravitációs erő és a nehézségi gyorsulás kicsit kisebb, a magashegységekben 1-2 ezreléknyivel. Ezt a számításokban el szoktuk hanyagolni, a test nehézségi erejét állandónak tekintjük, ezért megengedett az egyenletes gyorsulás képleteinek használata. Ennek ellenére jegyezd meg, hogy **a nehézségi gyorsulás pontos értéke csak az adott helyre (és magasságra) érvényes**. A feladatokban általában megengedett, hogy a $\mathbf{g}$ értékeként 10 m/s^2-et használj.

A nehézségi gyorsulás az, ami létrehozza a test súlyát.

Kérdés: egy golyót ágyúval kilövünk a Föld irányába, szabadesés-e a golyó mozgása? Igen, mert a golyóra csak a Föld tömegvonzása hat, és az nem számít, hogy a test sebessége vagy kezdősebessége mennyi. Ha a kezdősebesség nagyon nagy, akkor a levegő lefékezi a testet. Mi?? Levegő fékezi? Akkor *nem* szabadesés, mert már nem csak a tömegvonzás ereje hat a golyóra, hanem egy másik erő is, ez esetben a légellenállás. Ha az ágyúgolyót a világűrből lőjük ki, ott még szabadesés.

És szabadesés-e az, ha a golyót a világűr légüres terében nem pont a Föld felé lőjük ki, hanem félig-meddig oldalra, vagy esetleg felfelé? Igen, mert a Föld tömegvonzásán kívül nem hat rá más erő, és csak ennyi a lényeg. És ha úgy lőjük ki, hogy körpályára áll a Föld körül? Az is szabadesés, ugyanazért. Akkor ha egy űrhajó a hajtóművével a Föld körüli pályára áll, az szabadesés? Nem, mert a gravitáción kívül hat rá a működő hajtómű által kifejtett tolóerő. A *kikapcsolt* hajtóművel keringő űrhajók viszont már mindig szabadesésben haladnak, pontosan ezért és nem másért van bennük súlytalanság.

Azokat a kozmikus méretű mozgáspályákat, amikor a testre csak a környező égitestek tömegvonzási ereje hat, **tehetetlenségi pályák**nak nevezik. Ezeken a test szabadesésben és súlytalanságban van. Ha egy egyenes kúpot egy sík felülettel bármilyen irányban kettévágunk, akkor a vágási felület négy görbetípus valamelyike lesz: kör, ellipszis, parabola, hiperbola. Minden tehetetlenségi pálya ezek egyikének egy szakasza, ezért ezeket a pályákat **kúpszeletpályák**nak is hívják. Az űrhajók a hajtóművükkel mindig csak a végtelen sok tehetetlenségi pálya egyikéről térnek át egy másikra.



Súly, súlytalanság

A súly az a jelenség, ahogy egy test a Föld vonzásából eredő nehézségi erő hatására leesni *próbál*. Ha a testet alátámasztjuk, akkor a szabadesésben megakadályozzuk, ezért az alátámasztásra nyomóerőt fejt ki. **Ez a nyomóerő a súlyerő.** Vagyis **a súly *az alátámasztás miatt* jön létre.** (Ugyanígy érvényesek a továbbiak alátámasztás helyett felfüggesztésre is, legfeljebb az erő támadáspontja van máshol a testen.) Nézhetjük úgy is a dolgot, hogy van a test és van a Föld, amelyek egymást vonzzák, és egymás felé (!) akarnak mozogni. Mi pedig közéjük teszünk egy mérleget, tulajdonképpen egy rugót. Az összenyomódó rugó mutatja azt az erőt, amennyivel a test és a Föld vonzzák egymást. Végső soron ez az erő a test súlya, ami a test tömegével egyenesen arányos.

A dinamika alaptörvénye tisztázza, hogy **ha egy testre összesen egy erő hat, akkor az a test gyorsul**. Ha ez az egy erő a nehézségi erő, akkor a test gyorsulása a helyi nehézségi gyorsulás, ami megmérhető. Ha pedig a gyorsulást és a tömeget ismerjük, akkor megkapjuk az erőt, F=m·a. **A nehézségi gyorsulás és a tömeg szorzata megadja a testre ható nehézségi erőt.**

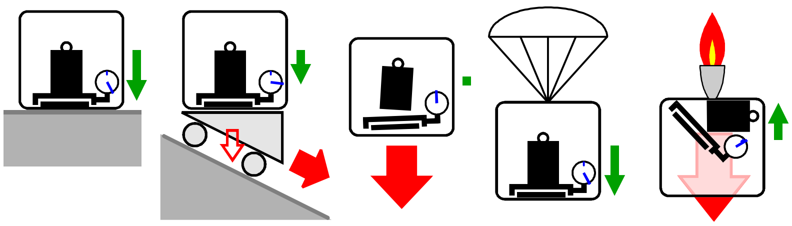
$$\boxed{G = m \cdot g}$$

ahol $\mathbf{m}$ a test tömege, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás. Ahhoz, hogy a test ne essen le, nekünk egy ezzel ellentétes irányú, azonos nagyságú erővel kell tartani. Ezt az erőt az alátámasztás, a mérleg fejti ki rá, és a kijelző mutatja, hogy mekkora is az a rugóerő, ami az egyensúlyt megvalósítja.

Az az erő, amivel a test a nehézségi ereje hatására az alátámasztást nyomja, a test súlyereje.

Most tegyük be a testet és a mérleget egy dobozba. Ha ezt a dobozt egy lejtőre tett kocsin legurítjuk, akkor az a lejtő irányában egyenletesen gyorsul. Azért, mert az egész szerkezetre ható nehézségi erő és a lejtő kényszerereje együtt egy ilyen irányú eredőt hoz létre, ezt már többször láttuk. A rendszerünk gyorsuló mozgásba kezd. Lassabban, mint a szabadesés, de mégiscsak egyenletes gyorsulás. Egy nyugalomban levő test szabadon esni próbál. Mi most *egy kicsit* hagyjuk esni. Szeretne még gyorsabban esni, de a mérleg és a kocsi még visszatartja valamennyire. De a mérlegnek már csak a különbözettel kell a testet tartania, már csak a hiányzó gyorsulásból származó erő nyomja. Akkor viszont ez azt jelenti, hogy a test súlya csökken, mert kisebb az a gyorsulás, amivel *a mérleghez viszonyítva* esni próbál.

Ezt a dolgot te magad is megfigyelted már, amikor a hullámvasúton egy meredek lejtőn zúgtál lefelé. Amikor ez a zuhanás kialakult, jött a csiklandós érzés, annak a jeléül, hogy a belső szerveid kevésbé nyomódnak egymásra, a vér is könnyebben áramlik felfelé, mint máskor. Mindennek *csökkent* a súlya.



A súly kiszámítására ilyenkor használható képlet a következő:

$$\boxed{F_G = m \cdot (g - a_f)}$$

ahol $\mathbf{F}_G$ a test súlyereje, $\mathbf{m}$ a tömege, $\mathbf{g}$ a helyi nehézségi gyorsulás, és $\mathbf{a}_f$ a test *függőleges* gyorsulása.

Vegyük ki a lejtőt is a doboz alól, hadd essen szabadon. Tegyük fel, hogy valahogy sikerül kiküszöbölnünk a légellenállást, akkor a doboz, a test és a mérleg is egyforma gyorsulással fog esni. Azonos pályán, mindig egymással azonos sebességgel haladnak, így egyik sem gyakorol erőt a másikra. A test nem nyomja a mérleget? Akkor bizony a súly megszűnt, és a *rendszeren belül* **súlytalanság** jön létre. *Nem tűnt el a testek **nehézségi ereje***, nem tűnt el a gravitáció, de a test és a mérleg egymás alatt lebeg, nem nyomják egymást. Addig, amíg el nem érik a földet, ami megállítja őket, és újra létrehozza a súlyukat. **A súlytalanság szabadesés alatt jön létre.** Mi, akik ezt kívülről megfigyeljük, nem vagyunk közben szabadesésben, ezért ránk nem érvényesül a súlytalanság, az csak a két tárgy között létrejött kölcsönös erőmentesség. *A súly relatív (viszonylagos) jelenség.* Az $\mathbf{a}_{\mathrm{f}}$ értéke egyenlő lett a $\mathbf{g}$-vel, így $\mathbf{F}_{\mathrm{G}}=0$. Ugyanakkor még mindig $\mathbf{G}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{g}$, a nehézségi erő nem változott.

Ha bezárkózunk egy dobozba a testtel és az alá tett mérleggel, majd a dobozt nagy magasságból leejtik, akkor azt fogjuk megfigyelni, hogy a mérleg és a test is lebegni kezd, és mi is lebegünk dobozhoz képest, nem nehezedünk rá. Ez esetben a szabadon eső rendszernek mi is része vagyunk, a súlytalanság ránk is érvényesül. A dobozból nem látunk ki, ezért a zuhanást nem *látjuk*, hanem csak azt vesszük észre, hogy lebegni kezdünk a tárgyakkal együtt.

Mennyi a nehézségi gyorsulás megszokott értéke? A tömeggel összeszorozva mit kapunk?

Amikor az ejtőernyő egyenletesre fékezi a sebességünket, visszaáll a megszokott **nehézkedés**, mindennek ismét egyforma irányba mutató súlya lesz. Ugyanannyi, mintha a doboz a földön állna, mert most is igaz, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó inerciarendszerekben a jelenségek ugyanúgy zajlanak le.

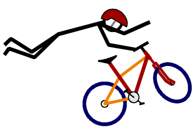
Nyugalomban levő rendszeren belül a súlyerő azonos a nehézségi erővel. A súlyerő függ a test mozgásától, a nehézségi erő nem.

És ha nem csak szabadon esik a doboz, hanem egy rakétával még gyorsítjuk is lefelé? Az eddigieket végigvezetve logikus a válasz: felfelé lesz lefelé, a tárgyak a plafonra esnek, a súly iránya felfelé mutat. A nagysága attól függ, hogy a rakéta milyen gyorsulást hoz létre, a szabadeséshez képest. Ha a képletbe az $\mathbf{a}_{\mathrm{f}}$ helyére $\mathbf{g}$-nél nagyobb számot helyettesítesz, negatív súlyt kapsz.

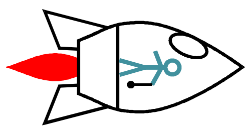
A tömegvonzás, a nehézségi erő, a tehetetlenség a test összes pontjára egyszerre, "belül" hat. Ezeket csak az egyszerűség kedvéért vesszük úgy a számításainkban, hogy a test tömegközéppontjában hatnak. **A súlyerő egy kívülről ható nyomóerő miatt jön létre, és a test pontjai ezt az erőt egymásnak adják tovább.** Egy gyurmagolyó az asztalra letéve a feltámasztó erőtől belapul.

> Megjegyzés: Földi körülmények között a kísérlet megvalósítását akadályozza, hogy a doboz zuhanását hátráltatja a légellenállása, ami viszont ránk a dobozban nem hat, emiatt a doboz gyorsulása valamivel kisebb, így mi a tárgyakkal együtt kicsit a doboz aljára fogunk nehezedni, lesz valamennyi súlyunk. Az űrhajósok kiképzése során rendszeresen használnak egy repülőgépet, amelyet a pilótája olyan pályára irányít, mint amit a szabadon eső test a levegő akadályozása nélkül tenne meg, emiatt kb. negyven másodperc idejére az utastérben súlytalanság lép fel, és lehetőséget ad a helyzet megismerésére, a műveletek gyakorlására.
>
> A súlytalanságot szimulálni szokták vízzel telt medencében való *lebegéssel*, azért, hogy az űrhajósok begyakorolhassák a lebegő helyzetben végzendő munkát. De ez nem igazi súlytalanság, mert a testüket a víz felhajtóereje tartja vissza a szabadeséstől, lényegében alátámasztást hozva létre. A belső szerveik továbbra is lefelé törekednek, a vérkeringésük a megszokott, míg valódi súlytalanságban ezeknek is megszűnik a súlya. A súlytalanság ehelyett a vízben lebegés helyett az a kicsit felkavaró érzés, amit olyan vidámparki játékon érzünk egy másodpercre, amit magasból ejtenek le. A súlytalanság tartós *elviselését* az űrhajósok hosszú tréningen tanulják meg.

***A súlytalanság nem a világűrhöz kötődik*, hiszen a súly nem a levegő miatt keletkezik.** A világűrben a *tehetetlenségi pályán*, például a Föld körül haladó űrhajóban van súlytalanság, de ha az űrhajót megállítanánk a pályáján, akkor a *nehézségi erőnek* engedelmeskedve lezuhanna, bizonyítva, hogy az



egyáltalán nem tűnt el. A Föld tömegvonzása semmilyen távolságban sem csökken pontosan 0-ra. A Holdon nincs levegő, de van súly, az űrhajóban van levegő, és fellövéskor van súly, a keringési pályán már nincs súly. A repülő bringás körül van levegő és nincs súly, és ha elengedi a kormányt, a bringa akkor is ott repül vele együtt, mert súlytalanságban vannak.



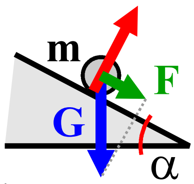
> Megjegyzés: A mozifilmekben mindig azt látjuk, hogy az űrhajókon a szereplők a megszokott módon járkálnak, súlyuk van. Ez a valóságban csak úgy lenne megoldható, hogy folyamatosan működne a hajtómű, gyorsító erőt kifejtve az űrhajóra. Ekkor az emberek a tehetetlenségük miatt a hajtómű felőli oldalra nehezednének, egy *álgravitáció* hatását észlelve. A megszokott súlyhoz szükséges

egyenletes gyorsulás értelemszerűen 10 m/s^2 lenne, 1 g. De a valóságban az űrhajók csak néhány percre elegendő üzemanyagot tudnak magukkal vinni, és az út nagy részén a hajtóműveket kikapcsolva tartják, az űrhajósok pedig lebegnek. A mesterséges gravitáció feltalálására egyelőre még reményünk sincs.

Mozifilmekben látjuk azt is, hogy amikor az űrhajós súlytalanságban van, akkor szééépen laaassan mozog, hogy lássuk, hogy ő most súlytalan. Ez csak egy régi filmes hagyomány. Valódi felvételeken sokszor láthattad már, hogy az űrhajósok a súlytalanságban is teljesen normálisan mozognak, mert nem az idő lassult le vagy valami hasonló, mindössze a tárgyak nem esnek le. Ha valamit meglöknek, az elrepül, ezért néha *óvatosabban* mozognak, de nem úgy, mint egy zombi.

A 3 g gyorsulású űrhajón mennyi a súlya 40 kilogrammnak?

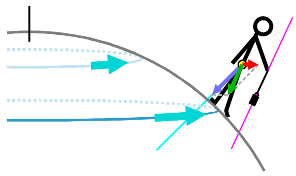
Lejtő (újra)



A lejtővel egyszer már foglalkoztunk, mint testek megemeléséhez használt egyszerű géppel, lásd 2. témakör LEJTŐ fejezetét. A lejtő ismert tulajdonsága az is, hogy ha valamit elengedünk, akkor a lejtőn az legurul vagy lecsúszik. Ez azért történik így, mert a testre hat a saját nehézségi ereje és a lejtő által kifejtett alátámasztási kényszererő, de a kettő egymással szöget zár be, és egy nem nulla nagyságú eredő erőt hoznak létre. Az **eredő erő**, ahogy láthatod, a lejtő vonalával párhuzamos, és a testet ez gyorsítja. Bejelöltem neked a derékszögű háromszög harmadik oldalát. $F = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, ahol $\mathbf{F}$ a gyorsító erő, $\mathbf{m}$ a test tömege, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás, $\mathbf{G}$ a kettőből kiszámítható nehézségi erő, $\boldsymbol{\alpha}$ a lejtő szöge. *Ellenőrizd!*

Látszik a képletből, hogy az $\mathbf{F}$ eredő erő a lejtő meredekségével együtt (szinuszosan) csökken. α=0 esetben a test nem mozdul. Galilei a lejtőt használta a szabadesés "lelassításához", a gyorsuló mozgás megfigyeléséhez, mert a leguruló golyó "kicsit szabadesésben van", és méréseket lehet rajta végezni.

Függőleges



Komolytalan dolognak tűnhet azzal foglalkozni, hogy merre mutat a függőleges irány. Hát lefelé. Igen, de merre van a lefelé? A Föld középpontja felé, nem? Nos, valóban, ez a **geometriai függőleges** iránya. A Föld alakja kicsit szabálytalan, de a középpontja azért nagyjából középen van.

De a Föld belseje sem tökéletesen szimmetrikus, ezért a *tömeg*középpontja nem pontosan a mértani középpontjában van. Ráadásul a Föld felszínén haladva különféle sűrűségű anyagrétegek fölött megyünk el, amelyeknek a tömegvonzása nem egészen egyforma. Ha egy gránithegy és egy tó között állunk, akkor a hegy nagyobb sűrűsége egy kis oldalirányú tömegvonzást is okoz. Eötvös Loránd az érzékeny torziós ingával ezt az egyenetlen tömegvonzást tette mérhetővé, amit aztán a geológiában és a föld alatti lelőhelyek kutatásában hasznosíthattak.

Szóval ha a Föld *tömeg*középpontjába húzzuk a vonalat, korrigálva a helyi gravitációs elhajlással, akkor ezzel megadtuk a **helyi gravitációs függőleges** irányát. Helyi, hiszen a tömegvonzás oldalirányú ingadozása mindenhol más.

A tankönyvekben a forgó mozgásokról szóló lecke végén mindig van egy feladat, amely felhívja a figyelmünket a Föld *forgása* által okozott hatásra is, ami a *szabadesés* által követett függőleges irányt eltéríti a gravitációs függőlegestől. Így igaz, a Föld forog, majdnem 24 óra alatt megtéve egy kört a tengelye körül. A földön álló ember szintén megteszi ezt a kört a Föld tengelye körül, mintha csak körhintán ülne. A CENTRIFUGÁLIS ERŐ fejezetben majd olvashatod részletesebben is, hogy a tehetetlenség a kör középpontjából kifelé ható erő érzetét kelti. A fenti ábrán (nagyíts rá) látod, hogy az ember tömegközéppontjára hat a Föld tömegvonzási ereje (kék), és hat ez a kifelé ható *centrifugális* erő is (piros), amit erősen eltúlozva rajzoltam be. A nehézkedés, a súly irányát *a kettő eredője* hozza létre, a zöld nyíl által jelzett "ferde" irányban. A függőón zsinege ezt az irányt követi, és a hozzánk viszonyítva álló helyzetből elengedett test is ebbe az irányba esik. Függőleges iránynak általánosságban ezt szokás tekinteni. Talán mondjuk úgy, hogy ez a **földi függőleges**.

A kifelé térítő erő a körpálya sugarától függ, ezért a szabvány nehézségi gyorsulás értékét nemcsak a tengerszint magasságához, hanem a 45. szélességi fokhoz is kötik, a 9,80665 m/s^2 ezen a szélességi körön érvényes. Itt a függőleges irány a helyi gravitációs függőlegestől kb. 0,3° elhajlást mutat az Egyenlítő felé, ami a hétköznapi életben teljesen jelentéktelen mértékű.

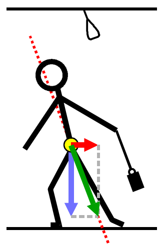
Képzeljük el, hogy van egy asztalunk, amelynek a lapja hajszálpontosan a helyi gravitációs függőlegesre merőlegesen van beállítva. A gravitációs erő alapján azt mondhatnánk rá, hogy vízszintes. Ha letennénk rá egy golyót, és teljesen ki tudnánk kapcsolni a súrlódást, akkor a golyó nagyon lassan gurulni kezdene dél felé. A tehetetlenség törvénye nem működik! A nyugalomban levő testnek erő nélkül nyugalomban kellene maradnia! Ehelyett engedelmeskedik annak a gyenge hatásnak, a centrifugális tehetetlenségnek, ami a Föld forgása miatt a függőleges irányt is kicsit eltéríti. Ebből következik, hogy az a vonatkoztatási rendszer, amit e pillanatban, mozdulatlan helyzetben magad köré képzelsz, valójában *nem inerciarendszer*. Ennek az az oka, hogy a Föld felszíne veled együtt folyamatosan elfordul, azaz fizikai értelemben gyorsul. A függőón zsinege által mutatott irányt valójában mindig "kanyarodás" közben nézzük.

Annak ellenére, amit itt olvashattál, az egyszerűség kedvéért egy álló inerciarendszernek tekintjük azt, ami téged most körülvesz, mert a különbséget csak műszerekkel tudjuk kimutatni.

A lemezjátszón pörgő kiscica saját vonatkoztatási rendszere inerciarendszer?

A SÚLYPONTÁTHELYEZÉS fejezetben buszon utazó ikrek egyikét nézzük meg még egyszer. A történet szerint a buszvezető a fékbe tapos, a busz lassul, és az emberke tömegközéppontjára egy "tehetetlenségi erő"-nek hívott valami hat. Ezt megbeszéltük a TEHETETLENSÉGI ERŐ fejezetben.

De ha a vonatkoztatási rendszerünket az utca helyett a buszhoz és saját magunkhoz rögzítjük (automatikusan így teszünk a buszra szállva), akkor azt látjuk, hogy amikor ez a rendszer az utca inerciarendszerében "gyorsul" (ez esetben a sebességét csökkenti), akkor a busz belsejében a függőleges irány a szokásoshoz képest megdől. Megváltozik az az irány, amerre a kapaszkodó és a függőón mutat, amerre az elengedett tárgy esik. Ha nem látnánk ki a buszból, ha nem tudnánk, hogy ez egy fékezés eredménye, és ha ez az állapot hosszú ideig fennállna, akkor csak tudomásul vennénk, hogy a függőleges irány a padlóhoz képest kicsit ferde. És áthelyezkednénk úgy, hogy az érzékszerveink szerint az éppen érvényes függőleges irány nekünk lefelé mutasson, arra, amerre a függőón lóg. Ezután megállapíthatnánk magunkban, hogy ki lehetett az a hülye, aki a busz padlóját ferdén szerelte be, így utazáskor egy lejtőn kell állnunk.



Mondhatjuk tehát, hogy a fékező buszon valójában *a függőleges irány változik meg*. Ez a mi **saját függőleges** irányunk. Ebből eredően a test (emberke) súlyvonalának az iránya is megváltozik, mert az mindig követi a függőlegest. Így általánosan *érvényes maradhat* a stabilitás fogalmának az a meghatározása, hogy a súlyvonal a feltámasztási pontok, a lehetséges eseti forgáspontok közé mutat, és csak a súly forgatónyomatéka számít.

Ha csakis a Föld tömegvonzása számítana, akkor a Föld körül keringő *űrhajón is* lenne "lefelé" irány. A Föld tömegközéppontja felé mutató vonal. Pedig nincs olyan űrhajós, aki ez hívná lefelé iránynak, merthogy ott nincs súly, nincs leeső test, a függőón a levegőben kóvályog. Az űrsiklónak sokszor a tetejét fordították a Föld felé, hogy jól láthassák. Eszerint ők fejen álltak? Nem, a súlytalanságban nincs értelme a függőleges irány keresésének.

Összefoglalva: függőleges iránynak nevezhetjük a helyi gravitációs függőlegest, ami a világűr minden pontjáról nézve ugyanazt jelenti, vagy nevezhetjük annak a földi függőlegest, amely egy inerciarendszeren kívüli hatást is magába foglal; vagy nevezhetjük annak minden pillanatban a mozgásunk által is befolyásolt, saját függőleges irányunkat, amit mi mindig az egyensúlyszervünk vagy egy függőón alapján tudunk megmutatni. Az EGYENSÚLY fogalma csakis ez utóbbihoz köthető.

A saját függőlegesünk, ha a földhöz viszonyítva nem mozgunk, azonos a földi függőlegessel. Épp ezért ha egy példában csak annyit írnak, hogy "függőleges", akkor a földi függőlegesről van szó.

Súly és tömeg

Tipikus hiba azt mondani, hogy egy autó megtolásához azért kell akkora erő, mert az autónak *nagy a súlya*. Nem! Az autót nem akarjuk felemelni, akkor hogy jönne ide a súlya? Az autót csak *megmozdítani* akarjuk. Tény, hogy a kerekek enyhén belapulnak, és ez egy kicsit nehezíti a kocsi gurulását, de ez most nem érdekes. Ha egy szuperfinom görgősoron akarsz eltolni egy dög nehéz gőzgépet, vagy a vízen megtolni egy bárkát, akkor sem lesz a test megmozdítása könnyebb.

A hétköznapi szóhasználatban megengedett és megszokott dolog a nagy tömeget a nagy súllyal összekapcsolni, sőt, azonosként kezelni, hiszen arra kérdésre, hogy mekkora a súlyod, megadod a tömegedet kilogrammban. Megszoktuk azt, hogy egy kilogrammnyi tömegnek mindenhol egy "kiló" a súlya, és ez az egyszerűsített információ általában elég is. De egy fizikapéldában, fizikaórán eszedbe se jusson ilyesmi. Fordíts figyelmet arra, hogy *ezt a hibát nehogy elkövesd*. Az autót te gyorsítani próbálod, nulláról néhány km/h sebességre. És amikor meg akarod állítani, akkor hasonló erővel kell nekifeszülnöd a másik irányba. Te a test tömegét hozod mozgásba vagy állítod meg, az erőt ezért kell kifejtened. Ha összekevered, a mozgástani számításaid sehogy sem fognak kijönni.

Keresd meg a törvényt, ami a test lefékezéséhez szükséges erőt írja le!

Az űrhajósok hamar megtanulják a különbséget, amikor átrakodják a szállítmányt az űrállomáson. Ott minden test lebeg, súlytalanság van, egyetlen testnek sincs *súlya*. De a tömegük nem tűnt el, ezért amikor egy élelmiszeres konténert visznek egyik helyről a másikra, erő kell ahhoz, hogy megmozdítsák. És ha valamelyikük elfeledkezne a tömeg és a súly különbségéről, majd rájön, amikor a konténert csak úgy félkézzel akarja megállítani, és az a falhoz nyomja, mert a dinamika minden körülmények között megszeghetetlen alaptörvénye a nagy tömeg mozgásának megváltoztatásához nagy erőt ír elő.

A kikötőkben a hajók kapitányai is azért olyan különösen óvatosak, mert ha a hajó kicsit rossz irányba indul meg, akkor nem lehet olyan egyszerűen másfelé kormányozni, mint egy autót. Ha egy hatalmas utasszállító kikötéskor nekimegy a mólónak, akkor hiába megy csupán egy sétáló ember sebességével, kaviccsá aprítja a fél kikötőt, mire azt az óriási tömeget az ütközés ereje megfékezi. És ennek semmi köze ahhoz, hogy a hajó a vízre mekkora súllyal nehezedik. Hasonló jelenet van a Jedi visszatér végén, nem sokkal a Császár halála után: az egyik csillagromboló letér a pályáról és a gigantikus űrhajó az orrát lassan belefúrja a Halálcsillagba, anélkül, hogy ez lelassítaná, mert ekkora tömeg nem áll meg egy ütközéstől sem, pedig *súlya* egyáltalán nincs.

Mennyi a keringő űrhajón a 120 kilogrammos élelmiszeres konténer súlya?

A fizikusok, csillagászok semmi jelét nem találták annak, hogy ez a dolog a Világegyetemben bárhol másképp működne.

Hát persze, hogy nulla.

Fajsúly

Ezt a fogalmat ma már leginkább csak folyadékok és gázok mechanikájánál használjuk. **A fajsúly az egységnyi (1 m^3) térfogatú anyag súlya, ami a sűrűségével egyenesen arányos**. Csak mivel a gravitáció és a súly *helyi* fogalom, ezért a fajsúly főleg egy adott helyen a különböző anyagok és testek súlyának összehasonlítására alkalmas. *Helyette inkább a sűrűséggel számolunk*, mert az a tömeghez hasonlóan állandó. A test fajsúlyának kiszámítása előtt megállapítjuk a térfogatát, megmérjük a súlyát, ebből kiszámítható a fajsúlya. Összetett testnek, például egy hajónak csakis egy átlagos fajsúlya mondható meg. A hajótestet alkotó vas fajsúlya sokkal nagyobb a vízénél, de a hajó belsejében sok levegő van, ezért az egész hajó plusz a rakomány átlagos *faj*súlya kisebb, mint a vízé, ezért marad fenn rajta.

$$\gamma = \frac{G}{V}$$

ahol γ (gamma) a fajsúly, $\mathbf{G}$ a test súlya, $\mathbf{V}$ pedig a térfogata. A mértékegysége

$$[\gamma] = \frac{N}{m^3}$$

Ha γ a fajsúly, ρ a sűrűség és $\mathbf{g}$ a helyi nehézségi gyorsulás, akkor

$$\boxed{\gamma = \rho \cdot g}$$

Sűrűségből fajsúly kiszámítása: 1 m^3 vas sűrűsége 7800 kg/m^3, 1 kg tömeg súlya kb. 10 N, ekkor a vas fajsúlya kb. 78 ezer N/m^3. Fajsúlyból súly: Mennyi a súlya 2 dm^3 vasnak? Ez 0,002 m^3. Ennek a súlya 0,002·78000=156 newton. (Ami abból is kijönne, hogy 2 dm^3 vas tömege 15,6 kg.) Az alumínium fajsúlya kb. 27 ezer N/m^3, a víz fajsúlya kb. 10 ezer N/m^3, lásd a sűrűségnél. Azért kb., mert a nehézségi gyorsulás is csak kb. 10.

Megjegyzés: a fajsúly tárgyalásában a súly helyett tulajdonképpen végig a *nehézségi erőről* van szó, csak a tankönyvek ezt az általános szóhasználatnak engedve lazán kezelik. Mivel a fajsúly mérésekor rendszerint nyugalmi helyzetben vagyunk, nincs közöttük eltérés.

Mozgást akadályozó erők

A tehetetlenség törvénye értelmében egy meglökött test megtartja egyenes vonalú egyenletes mozgását. Vagyis ha elütünk egy golflabdát, akkor a végtelenségig kellene repülnie. De nem így történik, a Föld gravitációs ereje a labdát visszahúzza a földre. Rendben, ezt értjük, a tömegvonzás ismert dolog, egy test, a Föld vonzása megváltoztatja a mozgásállapotot. De akkor a földön a golyónak körbe-körbe kellene gurulnia, nem? Nincs semmilyen test, ami ebben akadályoz, pedig a labda már a levegőben is lelassult, aztán a földön gurulva is lelassul, majd megáll.

Természetesen tudjuk a választ, a golflabda és minden más test mozgását, nemcsak haladó, hanem forgó mozgását is erők lassítják. Van, amelyik nagysága állandó, ezért a test egyenletesen lassul, de van másfajta erő is, ami miatt a test sebességváltozása jóval összetettebb. A mozgást akadályozó külső mechanikai erők, vagyis a **súrlódás**, a **gördülő-ellenállás** és a **közegellenállás** egyes esetekben hasznunkra vannak, máskor pedig jobb lenne, ha nem lennének. Vegyük őket sorra.

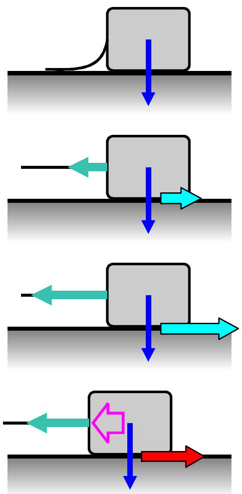
Súrlódási erők

A mozgást akadályozó külső erők legismertebbike a súrlódásból származik, a két érintkező felület egymáson való elcsúszását nehezítő jelenségből. A mindennapi életben számtalan módon *használjuk* a súrlódást, a járástól a tárgyak megfogásán át a bevert szögekig és fékpofákig. Súrlódás hiányában minden lecsúszna az asztalról. Sok más esetben pedig megszabadulni próbálunk tőle, mert a mozgás fenntartásához több erőt tesz szükségessé, és a felületeket koptatja és felhevíti.

A súrlódási erő ($\mathbf{F}_S$) összesen két dologtól függ: a két súrlódó felületet összenyomó erőtől ($\mathbf{F}_{ny}$), és a felületekre jellemző, mérésekkel megállapítható, mértékegység nélküli **súrlódási együttható**tól, amelynek a jele $\boldsymbol{\mu}$ (mű). Bár a tapasztalatainkkal ez talán ellentétben állónak látszik, mégis tény, hogy a súrlódási erő *nem függ a felületek nagyságától.*

$$\boxed{F_S = \mu \cdot F_{ny}}$$

A súrlódási erővel a felület a testre hat, mindig a mozgást hátráltató irányban. A test ugyanekkora súrlódási erővel hat a felületre, ellentétes irányba. Az ábrán a nyilak a test*re* ható erőket jelzik.



A súrlódási erőknek két típusa van: a **tapadási** és a **csúszási súrlódás** ereje. A tapadási súrlódás akkor érvényesül, amíg a két felület még nem mozdul egymáshoz képest. Amikor a felületek már megmozdultak, a csúszási súrlódás jut szerephez.

A **tapadási súrlódási erő** a mozdulatlan testek közötti erőegyensúly egyik lehetséges összetevője. Ellenerő, mivel csak olyan mértékben keletkezik, amekkora erővel leküzdeni próbáljuk. De nem tud egy bizonyos értéknél magasabbra nőni, erre utal a "max" jelzés:

$$F_{tS\,max} = \mu_t \cdot F_{ny}$$

Példa: A nyomóerő 10 N, a μ értéke 0,4, a test nem mozog. Mi történik, ha a testet 3 N-nal húzzuk? Válasz: A tapadási súrlódási erő maximuma $\mu \cdot F_{ny}$, 10·0,4=4 N. A húzóerő 3 N. Ha a súrlódási erő 4 N lenne, akkor a két erő eredőjeként a testet hátrafelé gyorsítaná egy 1 N nagyságú erő. Tehát áll a test, mi meghúzzuk, erre az elindul a másik irányba? Ilyen természetesen nem történik, mert a súrlódási erő ***legfeljebb*** 4 N, és *igazodik* az elmozdításra törekvő erőhöz. Ez esetben a súrlódási erő nagysága is 3 N, és a húzással ellentétes irányba mutat.

Amikor az elmozdítás érdekében az erőt növeljük, és átlépjük a tapadási súrlódási erő maximumát, akkor a felületek "megcsúsznak", mozogni kezdenek, a helyzet megváltozik.

Amikor a felületek mozognak egymáson, akkor már a **csúszási súrlódási erő** (piros nyíl) az, ami a mozgást nehezíti, és annak fenntartásához erőt tesz szükségessé.

$$F_{csS} = \mu_{cs} \cdot F_{ny}$$

A csúszási súrlódási erő már nem ingadozik, hanem pontosan egyenlő a képlet szerintivel, de egy másik μ értékkel kell számolni, a csúszási súrlódási együtthatóval, jelöljük μ_{cs}-vel. **A csúszási súrlódási együttható többnyire kisebb a tapadásinál**, vagyis ha már sikerült a testet megmozdítani, akkor a továbbiakban kisebb erő is elég lesz az egyenletes mozgás fenntartásához, az előző ábrán a piros nyíl rövidebb is a maximális tapadási súrlódási erőnél.

Megjegyzés: amikor a pezsgősüvegből ki akarjuk húzni a dugót, csavargatni kezdjük. Ez azért segít, mert ha csavarással sikerül a dugót megmozdítani, akkor a tapadási helyett már csak a csúszási súrlódás tartja, emiatt kifelé is könnyebb húzni.

Ha a megcsúszást meg akarjuk előzni, akkor magasabbra kell emelnünk a tapadási súrlódási erő maximumát. Ehhez vagy "durvább" felületre van szükség, amelynek nagyobb a μ együtthatója, vagy erősebben kell összenyomni a két felületet. Ha viszont kisebbíteni akarjuk a határértéket, a megcsúszáshoz szükséges erőt, akkor vagy az összenyomás erejét kell csökkenteni, vagy a μ-t, az utóbbira való a gépolaj és más síkosító anyagok.

Melyik súrlódási erő igazodik a helyzethez és melyik állandó?

A felületeket összenyomó erő az, amennyivel *az egyik test* nyomja a másikat. Az ellenerő nyilvánvalóan ugyanekkora, mert kiegyenlítik egymást.

Példa: a nyomóerő 10 N, a μ_t értéke 0,4, a μ_{cs} értéke 0,25, a húzóerő 3 N. Mozog a test? Nem, mert a súrlódás 4 N-ig képes ellentartani, lásd fent.

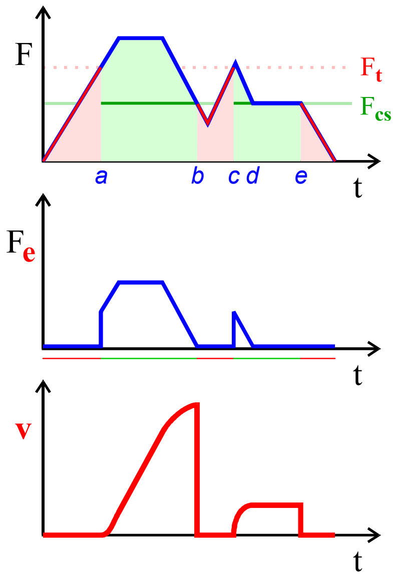
Most óvatosan megbökjük a testet, mi történik? Megmozdul és mozgásban marad, gyorsul. Miért? Mert a megmozdításakor a tapadási helyébe a csúszási súrlódás lépett, ami 10·0,25=2,5 N. A húzóerő 3 N, vagyis a testet 0,5 N erő egyenletesen gyorsítja.

A testet megállítjuk, majd elengedjük, mi történik? A test állva marad. A megállításakor ismét a tapadási súrlódás jelentkezett, ami 4 N-ig ellenáll a húzásnak, a testet pedig csak 3 N húzza.

Másik felületre tesszük a testet, 5 N-nal húzzuk, de az nem mozdul. Mennyi a μ_t? A súrlódási erő jelenleg pontosan 5 N, mivel az erők egyensúlyban vannak. Eszerint az együttható **legalább** 0,5. Akkor fog pontosan kiderülni, ha a húzóerőt fokozatosan növeljük, és egyszer a test megmozdul.

A mozgató erő ritkán azonos nagyságú a csúszási súrlódási erővel. Ha kisebb, akkor a súrlódási erő felülkerekedik, a két erő eredője nem nulla, és a mozgás folyamatosan lassul, majd megáll. Ha nagyobb, akkor a mozgató erő felülkerekedik, a két erő eredője nem nulla, és a mozgás folyamatosan gyorsul, lásd a dinamika alaptörvényét. Ezért a gyakorlatban egy súrlódó test mozgatásának a sebessége sosem állandó, csak esetleg egy állandó érték körül ingadozik, kisebb-nagyobb kitérésekkel, ha a mozgató erőt mindig a szükségeshez igazítjuk. Amikor egy szánkót húzunk, akkor nem nagyon vagyunk tudatában, de a húzóerőnket folyamatosan szabályozzuk.

Ha érdekel, nézzünk végig együtt egy kísérletet egy sík felületen húzott testtel.



A felső diagram azt mutatja, ahogy egy testre különféle egyenletesen **változó erőt** fejtünk ki (kék). Méghozzá úgy, hogy amikor a test megmozdul, akkor az erővel mi "követjük", továbbra is húzva a testet. A piros pontsor azt mutatja, hogy a tapadási súrlódási erőnek mi a *maximuma*, a piros vonal pedig azt, hogy ebből mikor mennyi érvényesül. Tudod: a tapadási súrlódási erő soha nem lehet nagyobb, mint a húzóerő, különben a test hátrálna.

A középső diagram a húzóerő és a tapadási erő **eredőjét** mutatja. Ez nem lehet negatív, mert akkor a test hátrálna. Itt már jól látható, hogy amikor az erőt növelve elérjük a tapadási erő maximumát (*a*), a test megmozdul, ezzel a súrlódási erő ugrásszerűen csökken, mert a csúszási együttható vált érvényessé. Az erők eredője ennek megfelelően megugrik. A test növekvő sebességgel halad, az alsó diagramon lehet a **sebességet** követni. Amikor az erők eredője változik, akkor a gyorsulás is változik, tehát a sebesség-görbe parabolikusan ívelődni kezd.

Ahogy újra csökken a húzóerő, a súrlódás a tapadási alá esik, de az már nem érdekes, a mozgás egészen addig folytatódik, amíg a húzás ereje a csúszási súrlódás erejénél kisebb lesz (*b*). A test hirtelen megtorpan, hatni kezd a tapadási súrlódás. Az erőt ismét növeljük, a test újra megindul (*c*), ezután már csökkenthetjük a húzóerőt, mert ismét csak a csúszási súrlódás hátráltat. Addig csökkentjük a húzóerőt, hogy pontosan egyenlővé válik a csúszási súrlódással (*d*), de a test még mozog, az erők eredője nulla, a sebesség egyenletes. Végül az erőt csökkentjük, a test azonnal megáll (*e*). Keresd meg a szövegben leírtak értelmét a diagramokban, egy kis agytorna.

A csúszó test sokszor látott szakadozott mozgásának tehát az az oka, hogy a mozgási állapotnak megfelelően hol a tapadási, hol a csúszási súrlódás lesz meghatározó, váltakozva.

A test súlya *csak az egyik* lehetséges forrása a felületeket összenyomó erőnek, sok más forrása is lehet. Ha egy tárgyat satuba fogunk, akkor a felülete és a satu felülete közötti súrlódási erő fogja megakadályozni a tárgy elmozdulását. Ha mégis elmozdul, húzunk egyet a satun, növelve a nyomóerőt. Ha a tárgy ezt nem bírja ki és megreped, akkor rájövünk, hogy egy közéjük tett ronggyal vagy smirglicsíkkal is próbálkozhattunk volna, a nyomóerő helyett a μ együtthatót növelve.

Ha egy pohár vizet megfogunk, akkor azért tudjuk felemelni, mert a kezünk és a pohár fala között tapadási súrlódás van, a szükséges nyomóerőt a kezünk szorításával hozzuk létre, ilyenkor a pohár súlya a súrlódási erőt pont leküzdeni próbálja. Erről meggyőződhetünk, ha beolajozott kézzel emeljük fel a poharat. (Lehetőleg olyan helyen, hogy a szilánkok összesöprése ne legyen nehéz.)

Gördülő-ellenállási erő

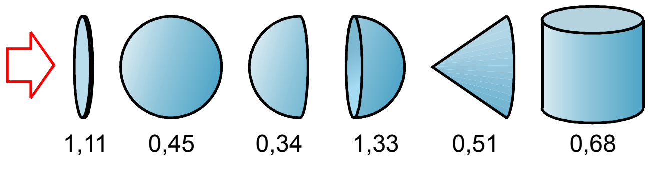
Kézenfekvő ötlet, hogy a mozgás megkönnyítéséhez a felületek közé görgőket, golyókat, kerekeket tegyünk. (Kézenfekvő? A maják állítólag csak gyerekjátékokon használtak kereket, a munkához nem.) Annak is van valamekkora ellenállása, a **gördülő-ellenállás** (néha gördülő súrlódásnak is mondják, bár ez nem igazán jó kifejezés), ami abból ered, hogy a görgők a felületek érintkezési pontjainál benyomódnak. Ezt egy acélgolyónál szabad szemmel nem fogjuk látni, de erős nagyításban nézve bizony ott van az a belapulás. A másik ok pedig az, hogy a görgő picit beül a felületek apró recéi közé, ezen a felület felcsiszolásával, kisimításával lehet javítani. A **gördülő-ellenállási erő** a fenti két társához hasonlóan számítandó ki, csak egy harmadik fajta együtthatót kell elővenni, a szintén méréssel kideríthető μ_g-t. Általában

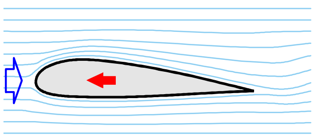
$$\mu_g < \mu_{cs} < \mu_t$$

Közegellenállási erő

A mozgó testre, hacsak nem vákuumban történik az a mozgás, a környező anyag szintén egy lassító erővel hat. Ez az "közeg" egy ágyúgolyónál, repülőnél, ejtőernyősnél a levegő, egy hajónál vagy torpedónál pedig a víz. A közegellenállásnak is van hasznos változata, például a vitorlába kapaszkodó szél, a vízimalom lapátjaiba ütköző víz ellenállása, de inkább akadályozó tényezőként szoktunk vele foglalkozni. A közegellenállás folyamatos legyőzésére kell a repülőkbe, hajókba motor.

A közegellenállás ereje több paramétertől függ. A legismertebb a **közegellenállási tényező**, más néven **formatényező** (a képletben **c**-vel jelölve), amit úgy közelíthetünk meg, hogy így számszerűsítjük a test "alakját". A szélerősség-mérő kanala vagy az ejtőernyő azért olyan alakú, mert az ilyen homorú formának nagy a légellenállása, és ezeknél ez a cél. Egy lapos felületnek, az áramlásra merőlegesen, valamivel kisebb a közegellenállási tényezője, még kisebb egy gömbfelületé, a legkisebb pedig azoké az *áramvonalas* testeké, amelyek kifejezetten a közegellenállás minimalizálására vannak kitalálva. Ezek jellemzője, hogy az áramlást lassan választják ketté, az elejük csúcsszerűen hegyes. A hajónak, rakétának az eleje ezért hegyes.





Vannak olyan áramvonalas testek is, amelyeknek az eleje gömbölyű, a vége hegyes, "cseppszerű". Ez azért lehet hasznos, mert az is befolyásolja az ellenállást, hogy az áramlás hogyan hagyja el a testet. Az örvénylésbe kezdő közegnek nagyobb a visszahúzó ereje, mint a sima vonalban távozó áramlásnak. A rajzon egy repülőgépszárny profilját látod, a körülötte örvénymentesen (laminárisan) áramló levegővel.

A test ellenállása függ a **homlokfelület**ének a területétől is (**A**). A test homlokfelülete az a síkidom, aminek a test látszik az áramlás irányából nézve. A fenti ábrán az első öt test homlokfelülete kör, az utolsóé téglalap alakú. A szélesebb tárgy közegellenállása nagyobb, mint egy keskeny tárgyé.

Függ az erő a **közeg sűrűségé**től is (ρ, rhó, *ne téveszd össze a kis p-vel*), a ritkább levegőnek kisebb a közegellenállása, ezért kapaszkodnak olyan magasra a repülőgépek, üzemanyagot áldozva az emelkedésre, de megtakarítva utána a kisebb ellenállással. A folyadékok sűrűségét állandónak tekinthetjük, ezért ott ennek nincs gyakorlati jelentősége, csak a különböző folyadékok összehasonlításakor érdekes. (Folyadékoknál bejöhet a képbe a *viszkozitás* is, például a méz sokkal viszkózusabb, mint a víz.)

A legfontosabb: *a közegellenállás négyzetesen függ az áramlás* ***sebességétől*** (v). Ha megkétszerezzük a sebességet, négyszereződik az ellenállás ereje. Csak ezért történhet meg az, hogy az ejtőernyős sebessége állandósul, pedig először szabadeséssel, gyorsulással indul. A légellenállás ereje – *ellentétben a csúszással és gördüléssel* – a sebesség növekedésével együtt emelkedik, és egy bizonyos sebesség elérésekor kiegyenlíti a test nehézségi erejét, egyenletes mozgás jön létre.

$$F_{kö} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot A \cdot \rho_{kö} \cdot v^2$$

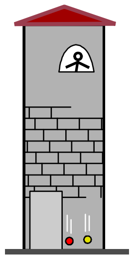
Egy feladatban nem mindig szükséges egyenként megadni a **c**, **A** és **ρ** értékeit. Ezek a test mozgása során nem változnak, csak a sebesség. Ezért közölhetők egy adatként, ez az **áramlási szorzó**, a jele **Z**, és ekkor a képlet egyszerűsödik:

$$F_{kö} = Z \cdot v^2$$

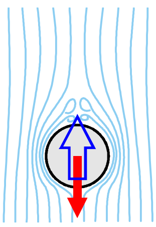
$$\left(Z = \frac{1}{2} \cdot c \cdot A \cdot \rho_{kö} \right)$$

Van egy papírsárkányom, a tengerparton az áramlási szorzója Z=0,51. Nem általában a papírsárkányoké, hanem ezé a sárkányé, tengerszinti légnyomásnál. **Hány km/h sebességű szélben szakad el a zsineg, ha a teherbírása 550 N?** $550=0{,}51 \cdot v^2$, ebből v=32,8 m/s, azaz 118 km/h. **A sárkány sík lap, a szélre merőleges. Mekkora a területe?** A számítás a megadott Z-ből indul ki, a képlet szerint. Keresd meg a függvénytáblázatodban a levegő sűrűségét! A sík lap formatényezője az előző ábra szerint c=1,11. A sűrűségre azt találtad, hogy $\rho=1{,}293$ kg/m³, ebből $A=2Z/(c \cdot \rho)=0{,}71$ m².

A SÚLYTALANSÁG fejezetben szó esett Galilei (meg nem történt) kísérletéről **a leejtett golyókkal**. Azzal, hogy azonos méretűek voltak, elvileg kiküszöbölte a légellenállás befolyását az eredményre. Csakhogy a dolog *valójában* nem így működik. Ha leejtünk egy fémgolyót és egy pontosan ugyanakkora szivacsgolyót, azt látjuk, hogy *nem egyszerre érnek földet*. Az egyforma alakkal ugyanis csak a **c**-t, a közegellenállási tényezőt tettük azonossá. A képletben nem szerepel a test tömege, mégis számít. No, rájössz, hogy mi a probléma? Gondolkozz ezen egy kicsit, próbaképpen. **…**



A leejtés során a testre csak a nehézségi ereje hat, ezért szépen el is indul lefelé ugyanazzal a nehézségi gyorsulással, bármiből is van, bármekkora is a tömege. A közegellenállás ezt az esést fékezi, és ahogy a test sebessége növekedik, az ellenállás ereje is növekedik. <u>A nehézségi erőt végül kiegyenlíti a közegellenállási erő</u>, és a test onnantól egyenletes sebességgel esik tovább, mert a rá ható két erő eredője nulla.



Kiegyenlíti. De hol? A testet a nehézségi erő húzza lefelé, az pedig *csak a tömegétől függ*. Tehát a légellenállásnak nem mindig ugyanakkora nehézségi erőt kell kiegyenlítenie. Szivacslabdánál kicsit, fémgolyónál nagyot. A légellenállás pedig *csak a sebességtől függ*. A szivacslabdánál a légellenállás már korábban, kisebb sebességnél egyenlővé válik a nehézségi erővel, a fémgolyónál ehhez nagyobb sebességre van szükség. Tehát a fémgolyó egyrészt előnyt szerzett azzal, hogy később állandósult a sebessége, hosszabb ideig gyorsulhatott, és előnyt szerez azzal, hogy nagyobb sebességnél állandósul az esése, tehát a kiegyenlítődés után is nagyobb a sebessége.

Nem a légellenállás függ a tömegtől, nem is a gyorsulás, hanem a nehézségi erő, amivel a légellenállásnak meg kell küzdenie.

Mi volt a szándék azzal, hogy azonos méretű és alakú golyókkal végzünk kísérletet?

Akkor Galilei tévedett? Nem valószínű. Ő valójában *lejtőn legurított golyókkal* kísérletezve figyelte meg a tömegtől független gyorsulást, kis sebességnél. És **a nehézségi gyorsulás tényleg egyforma**, légüres térben ezt sokszor igazolták is. Hogy mi lett volna látható, ha elvégezte volna az ejtést az 57 méteres pisai ferde toronyból? Az a kérdés, hogy ekkora úthosszon a levegő lassító ereje okozott volna-e látható eltérést. A válasz: igen. Ha érdekel, az alábbi részben elolvashatod, hogyan lehet ezt számításokkal kideríteni, és hogy mi az előbbi leírásnál még pontosabb igazság.

Számítsunk ki egy ejtést két 10 cm átmérőjű gömbbel, az egyik fából, a másik vasból van. A gömb közegellenállási tényezője 0,45. A sűrűségük 700, illetve 7800 kg/m^3, a tömegük eszerint 0,37 kg és 4,08 kg (ellenőrizd!), a légnyomást ezen a kis magasságon belül vegyük állandónak, akkor a levegő sűrűsége legyen 1,293 kg/m^3. A golyók nehézségi ereje (m·g) 3,63 N és 40,06 N. Mekkora sebesség kell a nehézségi erőkkel azonos légellenállási erők létrejöttéhez?

A képletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{c \cdot A \cdot \rho_{kö}}}$$

A test homlokfelülete az a síkidom, aminek a test látszik az áramlás irányából nézve. Egy gömb esetében ez egy kör. 10 cm-es átmérő esetén a területe A=0,0079 m^2. c=0,45, ρ=1,293. Azt az állapotot nézzük, amikor a golyó már egyenletes sebességgel esik, és az a kérdés, hogy ez a sebesség mekkora. A sebesség azért egyenletes, mert az F közegellenállási erő ekkor kiegyenlíti a golyó nehézségi erejét, vagyis egyenlő vele, F=m·g. Behelyettesítve az adatokat, a fagolyó kiegyenlített esési sebessége 39,74 m/s (143 km/h), a vasgolyóé 132,03 m/s (475 km/h).

Nincs az eredményben csalás, mert *a két golyó légellenállása azonos sebességnél tényleg ugyanannyi*. Amikor még lassan esnek, akkor nincs is közöttük eltérés. De amikor a két golyó együtt zuhanva eléri a 39,74 m/s sebességet, a fagolyó sebessége nem nő tovább, mert a légellenállás pont annyi lett, mint a fagolyó nehézségi ereje, a fagolyóra ható két erő eredője ezzel 0 lett, és nyugalmi helyzet, egyenletes sebesség jött létre. Az előbbi kis ábrán ezt az állapotot mutatom. Ez a légellenállási erő viszont jóval kisebb a vasgolyó nehézségi erejénél, ott az erők eredője nem nulla, hanem lefelé mutat, a vasgolyó tovább gyorsul, növeli a sebességét, és lehagyja a fagolyót.

Ha a golyókat nagy kezdősebességgel dobnánk lefelé, akkor a légellenállás eleinte nagyobb lenne a golyók nehézségi erőinél, a rájuk ható erők eredője felfelé mutatna, a golyók lassulnának. A kiegyenlített erőállapot ebből az irányból is ki tud alakulni. Ezért van az, hogy amikor az osztrák Felix Baumgartner 2012-ben 39 km magasról kiugrott a kabinjából, a ritka légkörben először sikerült 1342,8 km/h rekordsebességet elérnie, de lejjebb érve végül ő is lefékeződött a szokásos 200 km/h körüli sebességre, amennyivel az ejtő-ernyősök általában zuhannak, *mielőtt* az ernyőjüket kinyitják. Az ejtőernyő formatényezője és homlok-felülete sokkal nagyobb, ezért a sebesség végül 15-20 km/h-ra csökken.

Nekiugorhatnánk kiszámolni azt, hogy a kiegyenlített zuhanási helyzet mennyi *idő* alatt jön létre a két golyónál, hiszen ismert a gyorsulás, a sebesség. Csakhogy így elfelejtkeznénk arról, hogy a golyót a nehéz-ségi erő és a légellenállás különbsége gyorsítja. A légellenállás viszont folyamatosan nő, négyzetesen, akkor tehát *a különbségük, a gyorsító erő, a gyorsulás folyamatosan csökken*. (Nem is egyformán.) A változó gyorsulással való számoláshoz durvább matek kell, mint amit érdemes megtanulnod, ezért itt a dolgot akár be is fejezhetnénk.

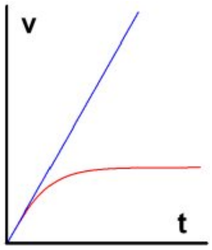
Képletet nem tudunk adni, de a számítógép mire való, ha nem erre? Nem kell hozzá speciális program, elég egy Excel vagy más táblázatkezelő is. Kiszámíttatjuk vele *az aktuális gyorsulásokat nagyon kis idő-szakaszokra*, majd ezeket összegeztetjük a programmal. Felosztjuk az időt apró szakaszokra, olyan aprókra, hogy az az alatt történő mozgásváltozásoknak az egyenletes gyorsulások kiszámítására szolgáló képletekkel való kiszámításai kellő pontossággal meg fogják közelíteni a valóságot, és ezeket összerakva külön képlet nélkül is megismerjük a zuhanás adatait. Mondhatjuk úgy, hogy a sebességváltozás görbéjét apró egyenes szakaszokkal helyettesítjük, amelyek ha elég rövidek, számunkra elegendő pontossággal adják meg az igazi, általunk nem ismert és képlettel meg sem adható görbét. Érdemes kipróbálnod, érdekes lesz. (A numerikus analízis nevű matematikai szakág foglalkozik az ilyen közelítések elméletével.)

Írd be az Excel megadott táblázatcelláiba a következő értékeket: **A2:**0,37; **B2:**0,45; **C2:**0,0079; **D2:**1,293; **E2:**9,81; az értékeket nyilván felismered. Azért írjuk külön cellákba, és nem közvetlenül bele a képletekbe, hogy egyszerűen változtathass rajtuk, ha gusztusod támadna kiszámítani a dolgot ólomgolyóra, ejtő-ernyősre, vagy éppen a Mars felszínére. Föléjük odaírhatod, hogy mi micsoda. Ha nálad a tizedesvesszőt ponttal kell jelölni, akkor csináld aszerint. **F2**-be a nehézségi erő képlete kerül: =A2*E2. Tovább: **A5:**0; **F5:**0; **G5:**0.

Az időegységek hossza **G2:**0,1. **A6**-ban az időt léptetjük: =A5+G$2 . **B6**-ban lesz a légellenállás ereje *az előző* időszakaszban érvényes sebesség alapján: =0.5*B$2*C$2*D$2*F5*F5 . Itt van a módszer lényege, tehát az, hogy mindig az előző értékből számolunk tovább. **C6**-ban lesz a nehézségi erő és a légellenállási erő különbözete, mint eredő gyorsító erő: =F$2-B6 . A pillanatnyi gyorsulást ez idézi elő a testen:

$$a = \frac{F_e}{m} = \frac{G - F_{kö}}{m} = \frac{m \cdot g - F_{kö}}{m}$$

Nehogy egyszerűsíteni próbálj m-mel! Összeg egyszerűsítésekor minden tagot ugyanazzal kell osztani, akkor pedig az $F_{kö}$-t is osztanod kellene m-mel.



A képlet részeit más cellákba már beírtuk, így **D6**-ban a pillanatnyi gyorsulás képlete egyszerűbb: =C6/A$2 . **E6**-ba kerül a sebesség változásának értéke, tehát az, hogy az aktuális időszakaszban az éppen érvényes gyorsulással mennyit nő a sebesség: =D6*G$2, itt számít az, hogy az időt mekkora szakaszokra daraboljuk. Most pedig jöjjön a kulcslépés: **F6**-ban a sebességváltozást hozzáadjuk az előző pillanatban érvényes sebességhez, =F5+E6 . És ha már hozzáfogtunk, akkor **G6**-ban számítsuk ki azt is, hogy ebben az időszakaszban mennyivel nőtt a megtett út teljes hossza: =G5+F6*G$2 .

Az **A6:G6** tartományt másold lefelé akárhány sorba, az Excelben ezt a műveletet lefelé kitöltésnek hívják, előtte ki kell jelölnöd egy nagyon sok sor magasságú tartományt. Így végül kapsz egy hosszú számoszlopot az F oszlopban a változó sebességekkel, a G oszlopban pedig minden pillanatra az addig megtett útról. A $ jelek gondoskodnak arról, hogy csak a szükséges cellaadatok változzanak a másolással.

Kész. Ha megnézzük a táblázatunkat, azt látjuk, hogy a sebességváltozás mértéke 12 másodperc elteltével már 0,01 m/s alá csökken, eddigre a fagolyónk 369 métert tett meg. Végül a sebesség 31,6 másodperc elteltével, 1147 méteres zuhanás után már 5 tizedesjegy pontossággal beáll a 39,74 m/s értékre, ahogy azt korábban mi magunk is kiszámítottuk. Csináltam belőle egy diagramot is, a piros görbe a zuhanási sebesség levegőben, a kék vonal a légüres térben, az első 1 perc alatt.

A táblázat tetején levő paraméterekkel nyugodtan kísérletezhetsz, amíg a program bírja a számítási pontossággal. Minél kisebb a test sűrűsége, annál kisebb sebességen áll meg a gyorsulás.

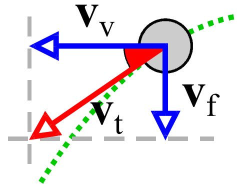
Ezt a kis lépésenkénti újraszámítgatásos, közelítő módszert **iteráció**nak hívják, és így meg lehet kerülni az ún. differenciálszámítást és még annál is sokkal kétségbe ejtőbb dolgokat. Elárulom, hogy a bolygópályák és műholdpályák számításakor is ilyesmit használnak a profik is, mert a sok égitest folyamatosan változó tömegvonzási hatását, zavarását ma még senki nem tudja képletekkel kifejezni. Eredetileg erre és ehhez hasonló célokra találták ki a "számító"gépet.

A táblázattal megtudhatjuk azt, hogy a pisai ferde toronyból a fagolyó 3,6 s, a vasgolyó (a tömegét A2-be írva) pedig kevesebb mint 3,4 s alatt érne földet. A különbözet, megismételt próbák során, felismerhető lett volna, tehát bizony, ha Galilei elvégezte volna a kísérletet, **látta volna a légellenállás okozta eltérést**. Galilei zseniális tudós volt, így aztán még az is lehet, hogy tudott a problémáról, és ezért is kísérletezett lassabb, guruló golyókkal.

Hajítások

Hajításnak hívjuk azt, amikor egy testet valamilyen kezdősebességre ($\mathbf{v}_0$) gyorsítunk valamilyen irányban, aztán szabadesésben magára hagyjuk. Az indítás szöge a függőlegesen lefelé iránytól a függőlegesen felfelé irányig terjedhet, bármilyen ferdeségben is. A szögnek megfelelően van vízszintes (0°) és függőleges (−/+90°) hajítás, az összes többi irány pedig ferde hajítás.

A test sebességének vektora minden pillanatban felosztható egy **v**ízszintes és egy **f**üggőleges irányú összetevőre, ezután **a két irány szerinti mozgást külön kezelhetjük**, de nem egymástól függetlenül. A test vízszintesen egy egyenes vonalú egyenletes sebességű mozgást mutat be, ehhez pedig *hozzátevődik* a függőleges irányú egyenletesen gyorsuló mozgása, adott kezdősebességgel. A légellenállást a számítások egyszerűsége érdekében figyelmen kívül hagyjuk.



Mindkét mozgásnak megvan a saját képlete, amelyekkel bármelyik $\mathbf{t}$ időpillanatra ki lehet számítani a test helyzetét. Ehhez kell egy koordinátarendszer, **origóként általában a test pályájának kezdőpontját választjuk**. Vízszintes irányban a test mozgási iránya a pozitív, függőleges irányban pedig lefelé pozitív a gyorsulás, a sebesség és az elmozdulás is. Ragaszkodj az így adódó előjelek következetes használatához.

A képletek felállítása során biztos pont, hogy **a két mozgás képletében az idő megegyezik**, hiszen ugyanabban a pillanatban nézzük meg a vízszintes és a függőleges irányú mozgást is. A repülés idejét a feladatokban gyakran az határozza meg, hogy az adott magasságból a test szabadesése mikor ér véget, ezért a függőleges mozgásösszetevő kiszámításával kapott időt kell a vízszintes mozgáshoz felhasználni, és akkor derül ki a test vízszintes elmozdulása a kezdőponttól. Mivel a pálya pontjainak koordinátái között négyzetes összefüggés van, ezért a pálya alakja *parabola*. A pillanatnyi sebesség vonala mindig *érintője* a pályagörbének.

A test $\mathbf{t}$ pillanatban vett sebessége $\mathbf{v}_t$ (vagy csak $\mathbf{v}$). Az összetevőivel való kapcsolatát a szögfüggvények és a Pitagorasz-tétel árulják el. (Nézd meg a *Matek* témakört.)

Függőleges hajítás

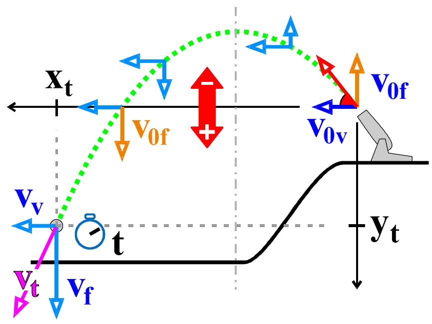
Itt vízszintes irányú mozgás nincs. A $\mathbf{v}_0$ vagy $\mathbf{v}_{0f}$ a kezdősebesség, ami felfelé negatív, mert a nehézségi gyorsulás lefelé mutat. A testet lefelé is "ki lehet lőni", ekkor a kezdősebesség pozitív. A függőleges sebesség ($\mathbf{v}_f$) egyenletesen növekszik. Ha felfelé indul, *akkor is*. (−4, −3, −2, −1, ez növekedés.) A gyorsulás a nehézségi gyorsulás, vagyis az általános mozgásképletekben $\mathbf{a}=\mathbf{g}$.

A GYORSULÁS KEZDŐSEBESSÉGGEL fejezetben megtanulhattad, hogy az olyan mozgásnál, amelyben a test sebessége előjelet vált, vagyis a test visszafordul, a megtett út és a testnek a kezdőponttól mért távolsága között lényeges eltérés van. Függőlegesen a test **y** koordinátája adja meg a test helyét, az origóhoz viszonyított elmozdulást, ez lehet negatív is. Az **x** koordináta 0.

Vízszintes hajítás: olyan ferde hajítás, amelyben α=0, a mozgás vízszintesen indul, a függőleges összetevő pedig egy 0 kezdősebességről induló szabadesés.

Ferde hajítás

Az $\boldsymbol{\alpha}$ a $\mathbf{v}_0$ kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge +90° és −90° között, az előjele a függőleges tengelyhez igazodik. (Vagyis a felfelé 30 fok −30°.) A mindenkori sebesség vízszintes összetevője állandó, ezért az origótól vízszintes irányban mért távolság, az $\mathbf{x}$ (vagy $\mathbf{x}_t$, "az adott $\mathbf{t}$ időhöz tartozó $\mathbf{x}$") egyenletesen nő, megegyezik az egyenletes mozgás úthosszával. A függőleges sebességösszetevő a függőleges hajítás szabályai szerint alakul, az $\mathbf{y}$ (vagy $\mathbf{y}_t$) koordináta a függőleges elmozdulás. Az x és y képletei az út ($\mathbf{s}$) korábbi képleteivel egyeznek meg.



A pálya szimmetrikus, vagyis a felszálló és a leszálló ágban *bármelyik* magasságra a sebesség nagysága azonos, a vízszinteshez mért szöge pedig az előjelben különbözik. A narancs színű vektorok kezdőpontjainak magassága azonos, a vektorok nagysága azonos, egyébként a hozzájuk tartozó vízszintes vektorösszetevők, és emiatt a pályairányú eredővektorok nagysága is azonos.

A hajítások mozgásegyenletei az egyenletes és a gyorsuló mozgások már ismert képleteiből állnak:

$$v_{0v} = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad v_{0f} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

$$x = v_{0v} \cdot t \qquad y = v_{0f} \cdot t + \frac{g}{2} t^2$$

$$v_v = v_{0v} \qquad v_f = v_{0f} + g \cdot t \quad \rightarrow$$

$$t = \frac{x}{v_v} \quad = \quad t = \frac{v_f - v_{0f}}{g}$$

Impulzus, lendület

Bizony látok olyan középiskolai tankönyvet, amelyben ez a téma nagyrészt egymásból levezetett egyenletekből és képletekből áll, mintha ez mondana valamit annak, aki nem szereti a fizikát. Te szereted? Nem? Hát így nem is csodálom. Valójában az impulzus témája rendkívül érdekes, mindenhol ott van körülötted, rengeteg más fizikai dolog következik belőle, és egyáltalán nem kell hozzá sok matek. *Nagyon hosszan* fogunk vele foglalkozni, de megéri meghallgatnod. Apránként.

Két mozgó test vizsgálatakor összehasonlíthatjuk a sebességüket, és elsősorban a gyorsításukkal kapcsolatban foglalkozhatunk a tömegükkel is. De az eddig leírtak alapján még nincs olyan módszerünk, amivel, mondjuk így, az "erejüket" mérhetnénk. Azt mindenki érzi, hogy nehezebb útját állni annak a testnek, amelyik nagyobb tömegű és amelyik gyorsabban megy. Erre a tulajdonságra vezették be a **lendület** fogalmát. Régebben **impulzus**nak hívták, ma is sokfelé találkozhatsz ezzel a nevével, és én ebben a könyvben szintén így fogom hívni, mert kevésbé félreérthető. Érzékletes, szintén inkább régebben használt szó rá a **mozgásmennyiség**. Ez az érték nem azonos a testben levő mozgási energiával, ami azt árulja el, hogy a test a lassulása során mekkora munkát tudna végezni. Az impulzus ehelyett, ha hasonlatot kell keresnünk, azt fejezi ki, hogy a testtel való **ütközéskor** a test "mekkorát üt".

Az impulzus képlete igen egyszerű: az értéke **egyenesen arányos mind a tömeggel, mind a sebességgel**, ezért

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v}$$

ahol $\mathbf{I}$ az impulzus (lendület), $\mathbf{m}$ a test tömege, $\mathbf{v}$ a pillanatnyi sebessége. A mértékegysége

$$[I] = \frac{kg \cdot m}{s} = N \cdot s$$

Tehát két egyforma tömegű testből nagyobb az impulzusa annak, amelyik gyorsabban megy, és két azonos sebességű testből nagyobb az impulzusa annak, amelyiknek nagyobb a tömege.

A nagyobb impulzusú testet nehezebb megállítani. Mozgó test impulzusa sosem 0.

Az impulzusnak két mértékegységét látod megadva. Az első alak a képletből közvetlenül adódik. Éles szeműek észreveszik benne a newton mértékegységhez való hasonlóságát (ld. A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezet), amiből kis átalakítással következik a második mértékegység. A két mértékegység egyenértékű, ugyanazt jelentik, csak máshogy vannak leírva. Rögtön visszatérünk erre.

A sebesség, tudjuk, vektormennyiség, eszerint **az impulzus is vektormennyiség**, a nyíl erre emlékeztet, és az iránya a sebességgel esik egybe. De a képlet nyilak nélkül is használható.

Mi az az impulzus? Milyen kapcsolatban van a test sebességével?

Newton II. törvénye így kezdődik: "Egy pontszerű test sebességének megváltozása", ebben a könyvben és általában mindenhol. Maga Newton viszont a saját könyvében (*A természetfilozófia matematikai alapjai*) eredetileg a sebesség helyett a test impulzusáról írt, amelynek adott idő alatt bekövetkező változása adja meg az impulzusváltozást létrehozó erőt:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

A képlet ebben az esetben azt fejezi ki, hogy ha egy test (vagy testekből álló rendszer) impulzusa megnő, és megmérjük, hogy ez mennyi idő alatt történt meg, akkor megtudjuk azt, hogy a testre (rendszerre) mekkora erő hatott annak érdekében, hogy az impulzus nőjön. Ha a tömeg eközben nem változik, akkor az impulzus változása a sebesség megváltozását jelenti, tehát végül is csak arról van szó, hogy ha egy testet erővel tolunk, akkor annak növekedni fog a sebessége.

Mintha már hallottunk volna ilyesmit, nem igaz? Úgy van, a dinamika alaptörvényéről van szó (már megint). Bontsuk fel a képletben a számlálót, és láthatod megjelenni a törvényt:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot a$$

mivel a GYORSULÁS fejezetből már tudnod kell, hogy $a=\Delta v/\Delta t$.

A tanulság tehát az, hogy az előző képlet valójában a dinamika alaptörvényét írta le, csak kicsit másképp. Tehát a tömeg gyorsításakor a gyorsító erőt kétféleképpen is meg tudjuk határozni:

$$F = m \cdot a = \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Ha egy **m** tömegű testre **F** erőt fejtünk ki, akkor attól változik a test sebessége. Vagy magát az **a** gyorsulást, a sebességváltozást kapjuk, vagy azt, hogy másodpercenként mennyit változik a test **I** impulzusa, ami szintén a sebességgel van összefüggésben. Egy feladatban valószínűleg a szövegből ki fog derülni, hogy neked melyik megközelítést érdemes kiindulásul választanod, melyik képletből tudsz egyszerűen továbbhaladni.

Nem fogom mindig ismételgetni, elmondom most, és jegyezd meg: ahol egy képletben a testre ható erőről van szó, de a testre több erő hat, akkor ott **a testre ható erők eredője** értendő. Vagyis **F** helyett $\mathbf{F_e}$. Ha esetleg még nem láttad a 2. témakör EREDŐ ERŐ fejezetét, akkor elmondom, hogy az erők eredője az erők vektori összege, a többit lásd ott.

Keresd meg Newton IV. törvényét. Használd a fájlnéző programod kereső funkcióját.

A fenti képlet impulzusos változata átrendezhető úgy, hogy a Δt-t áttesszük a másik oldalra. Ezzel leírjuk azt, hogy az impulzus *hogyan* változtatható meg: a testre valamennyi ideig egyenletesen valamennyi erőt fejtünk ki. Ezt úgy hívjuk: **erőlökés**.

$$\Delta \vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Az erőlökés az erőnek és az erőkifejtés idejének a szorzata. Írhatjuk egyszerű $\mathbf{F \cdot t}$ alakban is, csak ne felejtsd el, hogy a **t** annak az ideje, ameddig az erő hatott. Az erőlökés **mértékegysége Ns** (newton-szekundum), amit már láthattál, mint az impulzus másik mértékegységét. A szó ne vezessen félre, az erő"lökés" tarthat percekig vagy napokig is. Ha az erő nem egyenletes, akkor a folyamatot kisebb szakaszokra bontjuk, ilyenről már beszéltünk.

A erőlökés valójában "egy adag impulzus", ezért jelölhetjük ΔI-vel, az impulzusváltozás jelével.

A tankönyvedben van egy másik, hasonló képlet, amely külön kihangsúlyozza a következőt: ha a testre több erő hat, akkor az impulzusváltoztatást azok *vektori összege* (eredője) végzi. Ez valójában már következik Newton IV. törvényéből is. Ezt a változatot **impulzustétel** néven kell megtanulnod:

$$\Delta \vec{I} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta t$$

A Σ (szigma) kiejtése itt "szumma", a képletekben a mögötte levő, i-vel indexelt dolog összegzését jelzi. $\mathbf{\Sigma F}$ tehát azt jelenti, hogy az erők összege, a nyilak a vektorságra emlékeztetnek. A $\mathbf{\Delta t}$ az erőkifejtés alatt eltelt *időszakaszt* jelenti.

Egy test impulzusa nem változik, amíg a testre ható erők eredője nulla. Ez az impulzustételből következik. Ha $\mathbf{\Sigma F}$ = 0, akkor nincs impulzusváltozás. A testre ható erők *eredőjének* nagysága érdekes, nem az erők egyenként. Ha valamit kétfelől húztok, és az erők kiegyenlítik egymást, akkor Newton mindenféle törvényei szerint az erőlökés 0, nincs mozgás, sem impulzusváltozás.

Az impulzus változásához a testre ható külső erő szükséges. Ennek akkor lesz majd jelentősége, amikor több testből álló rendszer impulzusáról beszélünk, amelyben a testek egymás impulzusát meg tudják változtatni, de az nem lesz hatással a rendszer teljes összimpulzusára.

Az impulzus megváltoztatásához idő szükséges. Nem lehet 0 ideig erőt kifejteni. Ha belerúgsz egy labdába, kilősz egy nyilat vagy becsapódik egy puskagolyó, akkor lassított felvételeken mindig látszik, hogy a sebesség- és impulzusváltozás mindig eltartott valamennyi ideig.

Ha egy testet 20 N erővel megböksz, akkor nem tudod megmondani, hogy mennyivel változott az impulzusa, amíg valahogy meg nem állapítod, hogy az erő mennyi ideig érte a testet. Ha 0,2 másodpercig, akkor az erőlökés 20·0,2= 4 Ns nagyságú volt, a test impulzusa ennyivel változott, ugyanezt írhatjuk 4 kg·m/s formában is. Szokás az erőlökés mértékegységeként a Ns-ot, az impulzus mértékegységeként pedig a kg·m/s-ot használni, de ne felejtsd el, hogy *a kettő teljesen ugyanaz*.

A 4 Ns impulzusváltozás egy 1,6 kg tömegű testnél azt jelenti, hogy a sebessége 4/1,6=2,5 m/s-mal nőtt. ($I=m\cdot v \rightarrow v=I/m$.) Nem tudjuk, hogy menny*ire*, csak azt, hogy menny*ivel*. Ekkora impulzusváltozást értünk volna el azzal is, ha 4 másodpercig 1 N erővel toljuk a testet, vagy 0,01 másodpercig 400 N erővel, az erőlökés $\mathbf{F\cdot t}$ szorzata ugyanannyi.

Csak tisztázzuk: nincs itt semmi misztikus, semmi komplikált. Azt már eddig is tudtad, hogy egy erővel megváltoztatható egy test mozgása, megtanultad a képleteket is, ki tudod számolni a gyorsulást. Azt is tudod, hogy az erő, a tömeg és a gyorsulás milyen kapcsolatban áll. Most csak ugyanazt néztük egy kicsit másképp, és az impulzusban összekapcsoltuk a sebességet a tömeggel.

Az impulzus megsemmisíthetetlen. Részben vagy egészben átadódhat más testeknek, de eltűnni nem fog. Ha egy mozgó testet elégetünk, akkor a füstjének a részecskéi vagy molekulái fogják a test impulzusát tovább hordozni. (Lásd még a tömegmegmaradás elvét.) A füstöt a légáramlatok persze másfelé terelik, de a világűrben a füst haladna tovább a test eredeti útját folytatva.

Mi a test impulzusának *iránya*?

Az impulzus változásához erőlökés szükséges. Azaz egy ideig a testre ható erő. Ez alapján kijelenthetjük, hogy egy test impulzusa *megmarad*, amíg valamilyen erő nem változtat rajta. Ha csak egy picit is figyelsz, akkor látod, hogy az utóbbi megállapítással csak újra feltaláltuk a tehetetlenség törvényét.

A test impulzusa erőlökésekből rakódik össze. Az impulzus növelhető, csökkenthető, más irányba fordítható, különféle adagokban. Ez történik egy igazi űrhajóval is: amikor bekapcsolja a hajtóművét, akkor változtat a sebességén, attól függően, hogy a hajtómű merre áll. Emlékezz: az impulzus is vektor, aminek lehet, hogy az iránya változik, nem a nagysága, de az is impulzusváltozás.

Ha a test mozgásának az iránya (is) megváltozik, akkor kénytelen leszel vektorok szerkesztésével vagy számításával foglalkozni, két vagy három dimenzióban is (síkban vagy térben). Ha a test mozgásának iránya nem változik, mert például sínen halad, akkor az impulzusok összeadása és kivonása leegyszerűsödik. *Negatív* erőlökésnek a mozgással szembe mutató, lassító erőlökést szokás hívni.

Eddig állandóan az impulzus változásáról volt szó, itt végre kimondtuk, hogy ez mit is jelent. Testnek csak azért lehet impulzusa, mert azt **erőlökésekből kapta**. Megváltoztatni is csak egy újabb erőlökéssel lehet, és változtatás az is, ha a testet megállítjuk. A testet érő erőlökéseknek sem a nagyságát, sem a gyakoriságát, sem a számát, sem az összes időtartamát nem korlátozza semmi.

Ha egy testet erőlökések érnek, akkor ezek és csak ezek megváltoztatják a test impulzusát. Az impulzusváltozás ezeknek az erőlökéseknek a vektori összege. Erőlökés nélkül a változás nulla. Nem tudok arról, hogy ennek a tételnek lenne valami önálló neve, de mi mondjuk azt, hogy ez az **erőlökések tétele**. Adok egy képletet is hozzá:

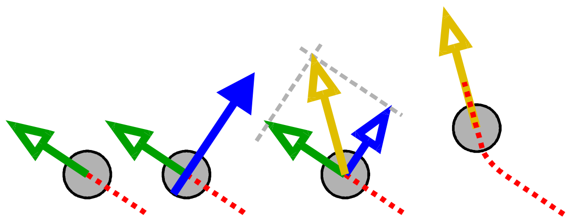
$$\boxed{\Delta\vec{I} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \Delta t_i)}$$

Hasonlítsd össze az impulzustétel képletével! Ott azt láttad, hogy az erők összege van megszorozva egy idővel, és ennyi az az egy impulzusváltozás. Az erőlökések tétele azt mutatja meg, hogy ha minden erőt a hozzá tartozó időszakasszal összeszorzunk, akkor ezeknek az önálló erőlökéseknek az összege adja meg a több részletből összejövő impulzusváltozást. Mint amikor egy űrhajó a hajtóművét be-bekapcsolva finoman kormányozza magát új pályára. "Erőlökdösés".

A képletekben mindig az erőkifejtések időhossza szerepel. Az, hogy a változást mi mennyi idő elteltével nézzük meg, teljesen mindegy.

Mi az eltérés az impulzustétel és az erőlökések tétele között?

Az impulzus fogalmának leggyakoribb alkalmazása az ütközések vizsgálata, ezért az impulzustételnek nézzük meg ezt az értelmét: **amikor a test nekimegy valaminek, akkor lassulni fog, és csökken az impulzusa**. A leadott impulzus egy erő és egy idő szorzata, egy *negatív* erőlökés. A negatívság abból jön ki, hogy az erő a mozgással ellentétes irányú, –F.



Szó volt arról, hogy az impulzus vektormennyiség, ezért impulzusváltozás síkban (vagy térben) is történhet. Nézzük meg, hogyan is megy egy ilyen erőlökés. A golyó a zöld nyíl irányába halad. A nyíl nem a sebességét ábrázolja, hanem az *impulzusát*, ami a sebesség és a tömeg szorzata. Vektormennyiség, vagyis egy nyíllal ábrázolható. Az nem derül ki ebből, hogy mennyi a sebessége, mert a test tömegét nem tudjuk. De ez nekünk nem is kell.

Miközben gurul, keresztirányban egy erővel hatunk rá, erőlökést fejtünk ki rá, a kék nyíl szerint. Például megfújjuk, vagy pár pillanatra megdöntjük az asztalt. A kék nyíl az *erőt* mutatja, és bizonyos **t** ideig ezzel az **F** erővel toljuk a guruló golyót a kék nyíl irányába. Az erőlökés és az impulzusváltozás (**ΔI**) pontosan **F·t**. *Az erővektort nem adhatom össze a zöld impulzusvektorral!* A harmadik képen berajzoltam azt a kék nyilat, amely már azt az *impulzust* mutatja, amit ez az erőlökés erre a testre létrehoz. Hogy a nyíl hosszát mi alapján állapítottam meg, azt most hagyjuk, most nem érdekes. A lényeg az, hogy már van egy zöld impulzusvektorunk és ehhez hozzáadódik egy kék impulzusvektor. A jó öreg parallelogramma-szabállyal megszerkesztjük az eredő impulzusvektort (sárga), tehát ez lesz a golyó új impulzusa. És persze a mozgásának új iránya.

Az impulzusváltozás mindig valamennyi ideig tart, az erőlökés része az idő, ezért a golyó pályája nem hirtelen, szögben változik meg, hanem ívben. Ennek az ívnek a meghatározását sosem fogják tőled kérni, nem is érdekes. (Parabola.) Annyi a lényeg, hogy a két impulzusvektor (zöld és kék) egymással szöget zár be, ezért nem lehet azokat pusztán számszerűen összeadni, hanem meg kell szerkeszteni a vektoriális összegüket, az eredőjüket. A szerkesztés számítással is kiváltható, derékszögű vektorok esetében ez nem bonyolult, Pitagorasz-tétel, lásd az utolsó témakörben.

Az impulzustétel nem mondhat ellent a dinamika alaptörvényének. Egy adott helyzetben mindkettőnek érvényesnek kell lennie. Nézzük meg egy példán.

Ha egy testet 3 másodpercig 4 newtonnal tolsz, mennyit változik a sebessége? Az erőlökés $\Delta I = F \cdot t = 4 \cdot 3 = 12$ Ns, vagy 12 kg·m/s, az impulzus ennyivel nő. A test tömege legyen 2 kg. $I = m \cdot v$, akkor $\Delta I = m \cdot \Delta v \rightarrow \Delta I / m = \Delta v$. Az impulzusváltozás $\Delta I = 12$, a tömeg $m = 2$, eszerint a sebesség $12/2 = 6$ m/s-mal nőtt, állítja az impulzustétel. Nem tudjuk, hogy mennyi*ről*, csak azt, hogy ennyi*vel*.

$F = m \cdot a$, feleli erre a dinamika alaptörvénye, $\rightarrow a = F/m$, $4/2 = 2$ m/s^2. $v = a \cdot t$, a gyorsítással töltött időszakasz $t = 3$ s, a gyorsulás $a = 2$ m/s^2, a sebesség*változás* tehát $\Delta v = 2 \cdot 3 = 6$ m/s. Minden rendben van, a két törvény ugyanazt eredményezi. Emlékezz erre. Egy feladatból majd adódni fog, hogy neked melyik törvény alapján kell számolgatnod, de *mindkettő igaz*.

Megütsz egy golflabdát, a tömege 44 g, a sebessége 32 m/s lett, az ütő 0,05 másodpercig érintette a labdát. Mekkora volt az ütő által kifejtett átlagos erő? $\Delta I = 0{,}044 \cdot 32 = 1{,}408$ Ns, $= F \cdot 0{,}05$, $F = 28{,}16$ N.

Az impulzus haladó mozgásokban érvényesülő fogalom. Forgó mozgásokra érvényes megfelelője a **perdület**, más néven impulzusmomentum, és önálló fejezet szól róla.

Miért adhatsz össze egy impulzust egy erőlökéssel?

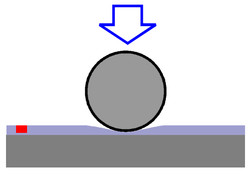
Az **impulzus** (lendület, mozgásmennyiség) a tömeg és a sebesség szorzata.
Impulzusa mozgó testnek van. Az impulzus leginkább testek ütközésekor vagy megállításakor válik érdekessé. A dinamika alaptörvénye továbbra is érvényes.
A test mozgásán és impulzusán **erőlökés**sel lehet változtatni. Az erőlökés egy erő és a hatás idejének szorzata. Az erő lehet több erő eredője is, ezt írja le az **impulzustétel**.
Az erőlökés hozzáadódik az eredeti impulzushoz. Az impulzus erőlökésekből adódik össze. Az erőlökés gyorsíthatja, lassíthatja vagy eltérítheti a testet.
Az impulzus és az erőlökés is vektormennyiség. Őket összeadni is csak vektorként szabad. Kétféle mértékegységet szoktunk nekik adni, de a kettő valójában ugyanaz.
Az impulzus a gyorsító erő és a gyorsítás ideje alapján, vagy a tömeg és a felvett sebesség alapján is kiszámítható, attól függően, hogy milyen adatokat ismerünk.

Test megállítása

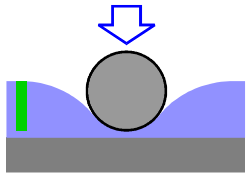
Amikor egy testet megállásig fékezünk, akkor a test impulzusát 0-ra csökkentjük. Egy test fékezése közben a test nyomja az őt fékező testet. Az viszont ugyanekkora *ellenerőt* fejt ki a lefékeződő testre, Newton III. törvénye szerint. **Vagyis a rövid megállási idő azt jelenti, hogy a megálló testre nagy megállító erő hat.** Ha a lassulás hosszabb ideig tart, a fellépő erő kevesebb.

Ha megy egy test, adott sebességgel, adott impulzussal, akkor a megálláshoz a $-F \cdot t$-nek ezzel kell egyenlőnek lennie, hogy a változás végén 0 impulzus maradjon. Kis F-hez nagy t-nek kell tartoznia, nagy F-hez kis t-nek, csak így maradhat a szorzat értéke mindig ugyanaz.

Már volt szó a testek "tehetetlenségi erejéről". Mennyi a 20 kg-os test tehetetlenségi ereje? *Nincs jó válasz.* A tehetetlenség csakis a sebesség megváltozásakor lesz észrevehető. Az erő a változás (az impulzusváltozás) mértékétől és időtartamától függ. $\mathbf{\Delta I=F \cdot t}$, az $\mathbf{F}$ csak a másik két adat birtokában lesz megadható. Egy mozgó testnek nincs tehetetlenségi ereje, amíg nem próbálnak hatni rá.



Ha egy tojást leejtesz az asztalon egy szalvétára, szétloccsan, mert rendkívül rövid idő alatt kellene a sebességét nullára csökkentenie, a szalvéta vékony, és az ezzel járó nagy negatív gyorsulást, az impulzusváltozásból eredő nagy erőt a tojás nem bírja ki. Ha a tojást egy szivacsra ejted, akkor a benyomódó szivacs már korábban elkezdi a tojás *lassú lefékezését*, így a megállás tovább tart, **az erőlökés képlete szerint a hosszabb idő kisebb fékező erőt jelent**, amit a tojás már kibírhat.



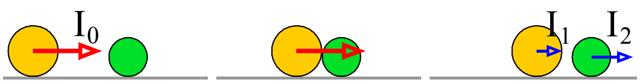
A tanulság különösen fontos, amikor te vagy az a tojás. A bukósisak egy ütközéskor behorpad, a biztonsági öv pedig pár centit megnyúlik a nagy erőtől, ezzel **többszörösére elnyújtja az ütközés idejét**, csökkentve a testre ható lassító erőt, és a tojás nem loccsan szét. Egy tized másodperc egy század helyett élet–halál különbség. Ezzel szemben ha a tojás elrepül és változatlan sebességgel egyenesen a földre érkezik, az a tojás számára nagyon peches napot ígér.

Egy ütközés után a kocsi biztonsági övét azért kell újra cserélni, mert a régi már megnyúlt, a következő esetben nem fogja tudni a szükséges lassító megnyúlást produkálni, az ütközés ideje nagyon rövid lesz, többszörös bordatörés és átszúrt tüdő a következmény, jó esetben. Emellett a kocsikat ma úgy tervezik, hogy a kocsi orra irányított módon gyűrődjön össze, újabb századmásodperceket szerezve. Márpedig ha az $F \cdot t$-ből a t bármivel nagyobbá tehető, akkor kisebb lesz az F, ennyiről van csak szó.

Bungee jumping közönséges kötéllel és gumikötéllel: világos a különbség?

Impulzusmegmaradás

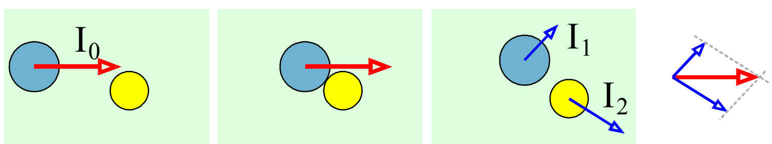
Egy testre már kitárgyaltuk az impulzust. De mi van, ha *több* testet nézünk egyszerre, együtt?



Van két golyó egy asztalon, a sárga gurul. Megmérjük a sebességét, ismerjük a tömegét, kiszámítjuk az impulzusát – m·v –, ezt elnevezzük $\mathbf{I}_0$-nak, kezdőimpulzusnak. A golyó egyenesen nekimegy a másiknak. Nem meglepetés, hogy a zöld golyó is gurulni kezd, de a sárga sem áll meg, ilyen is van, amikor a golyók nem egyformák. De *csökken* a sebessége, az impulzusa is. Kiszámítjuk mindkét golyó jelenlegi impulzusát, az egyik $\mathbf{I}_1$, a másik $\mathbf{I}_2$. Az eredmény: $\mathbf{I}_0=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2$. Ez <u>mindig</u> így lesz. Ha az első golyó állva marad, akkor az ő impulzusa 0-vá válik. Ha visszafelé kezd gurulni, akkor negatív. **De az összeg mindig egyezni fog.**

Közös rendszerben levő testek az impulzusaikat ütközések révén egymás között megoszthatják.

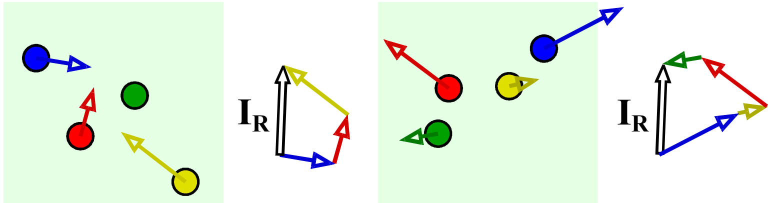
A közös rendszer csak annyit jelent, hogy a testek hatással tudnak lenni egymásra, nincsenek elkülönítve egymástól. Mi az, hogy az impulzust megosztják? Ez azt jelenti, hogy az egyik az impulzusából át tud adni a másiknak. Persze ez csak úgy történhet, hogy a két test találkozik, és **erőt fejtenek ki egymásra, erőlökés jön létre**. A találkozás általában valamilyen ütközést jelent, de amikor két kisbolygó elmegy egymás közelében, és csak a tömegvonzásuk, a gravitációs erőterük révén hatnak egymásra (lásd ERŐ), akkor is változnak az impulzusaik. De mi maradjunk az ütközéseknél.



Az előbb külön megemlítettem, hogy a golyók "egyenesen" ütköznek, azaz a tömegközéppontjuk mindvégig egy egyenesen marad. Ezt hívják **centrális ütközés**nek. Most akkor nézzünk egy *nem* centrális ütközést. Nem meglepetés, hogy az ütközés után a két golyó eltérő irányba mozog. (A két irány szögére is van szabály, de hagyjuk.) Jobb oldalt azt láthatod, hogy a két új impulzusvektornak épp az összege az eredeti impulzus. $\mathbf{I}_0=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2$. **Vektorként is.** Tulajdonképpen az előbb is vektorként adtuk össze, csak kihasználtuk, hogy a vektorok egy egyenesbe estek. A VEKTORMŰVELETEKről az utolsó témakörben külön olvashatsz.

Ha ütközéskor egy test erőlökést ad egy másik testnek, akkor az erőlökés vektora a test impulzusából kivonódik, a másik test impulzusához hozzáadódik.

Hogy az átadott impulzus mekkora és milyen irányú, arról a tétel nem mond semmit, de a második test impulzusához <u>pontosan</u> annyi fog adódni, amennyi az elsőéből levonódott.



Képzeld el, hogy egy nagy márványasztalon áll négy golyó. A példáinkban vegyük úgy, hogy egyáltalán nincs súrlódás. Három golyót meglökünk valamerre, és tegyük fel, hogy innentől az asztal zárt rendszerként működik. Kiszámítjuk mindegyik golyó impulzusát, a sebességből és a tömegből, és összeadjuk őket. Láthatod, hogy az összeadást most úgy csináltam, hogy egymáshoz illesztettem a vektorokat, így is lehet. De lehet a parallelogramma-módszerrel vagy a derékszögű összetevők összeadásával is csinálni, ennek nincs semmi jelentősége. Az összeg a teljes rendszer összimpulzusa, egy $\mathbf{I}_R$-rel jelölt vektor. Az összeadásban a zöld vektor impulzusa is benne van, csak mivel ez a golyó éppen állt, az impulzusa nulla.

Az asztalon a golyók gurulnak, ütköznek, és valamivel később megdermesztjük az időt, hogy szemügyre vehessük az új helyzetet. Nem tudjuk, hogy a golyók miért ott vannak, ahol, miért arra gurulnak, amerre, ez számunkra most nem érdekes. De újra összeadjuk a mostani impulzusaikat, és azt fogjuk látni, hogy a vektorok összegének ugyanaz az $\mathbf{I}_R$ jött ki. **Az összimpulzus nem változott.**

Miből származott a rendszer impulzusa? Mennyi a lendülete az álló golyónak?

Mi az a **zárt rendszer**? Ha egy vagy több testet együtt vizsgálunk, akkor szükségessé válhat, hogy határt húzhassunk körülöttük, elméletben elszigeteljük őket a világ többi részétől. Ennek az a célja, hogy így a számításokból kizárjunk minden más fölösleges, zavaró tényezőt. Nem kell ehhez valódi korlátot, falat emelni, sőt, néha pont a korlát lehetne zavaró tényező. A "zártság" csak elvi kifejezés. Azzal, hogy kijelentjük egy törvényről, hogy az egy zárt (más szóval elszigetelt, izolált) rendszerre érvényes, akkor azt jelentjük ki, hogy ha valami más, *kívülről* érkező egyéb hatás is belekavar, akkor a törvény már nem lesz igaz. A tehetetlenség törvénye is csak zárt rendszerre igaz. Ha az egyenletesen haladó testre valami külső erő is hatni kezd, például a test nekimegy valaminek, vagy a légellenállás hat rá, akkor az egyenletes mozgás már nem várható el tőle. A törvény csakis zavarmentes rendszerben kötelez.

Amikor egy golyó zavartalanul, egyenletes sebességgel gurul, akkor a rá ható erők eredője nulla, a tehetetlenség törvénye szerint. Mivel a helyzet teljesen nyugodt és *erőmentes*, esetleg elkövethetjük azt a tévedést, hogy ennek a rendszernek az impulzusát nullának hisszük. Nem, ahol mozgás van, ott impulzus is van.

A kezdőpillanatban a négy golyó állt. A rendszer összimpulzusa ekkor **0** volt. Ha nem avatkozik be semmi, akkor ez így is maradt volna. De a golyókat meglöktük, mi adtuk a golyóknak azokat az erőlökéseket, amelyek a rendszer teljes $\mathbf{I}_R$ összimpulzusát adják. A rendszert ez után hagytuk magára és vettük zárt rendszernek, amikor három golyóban már volt egy nem nulla impulzus. Az $\mathbf{I}_R$-t ekkor számítottuk ki. Mivel a rendszer zárt maradt, a rendszer impulzusa később nem változott.

Zárt rendszeren belül impulzus nem vész el és a semmiből nem keletkezik, de a testek között átadódhat.

Amikor egy biliárdasztalon a golyó lelassul, majd megáll, akkor az impulzusát valami nullára csökkentette. *Kellett valaminek lennie*, ami az impulzust megváltoztatta, mert a golyó különben nem lassulna le. Ez a valami most persze az asztal gördülő-ellenállása, amit a példáinkban nem létezőnek szoktunk venni, hogy a számítások és képletek ne váljanak komplikálttá. Ha bárhol azt látjuk, hogy a testek "indokolatlanul" lassulnak vagy gyorsulnak, változik az összimpulzus, akkor ott külső erőnek kellett beavatkoznia, például a súrlódás vagy közegellenállás erejének.

Egyenletesen guruló golyónál mi nulla és mi nem nulla?

Az eddigiekből megfogalmazható **az impulzus megmaradásának törvénye**:

Pontszerű testek zárt rendszerén belül a testek egyenkénti impulzusainak vektoriális összege mindig állandó marad. A rendszer összimpulzusának változásához külső, a rendszeren kívülről érkező erő hatása szükséges.

Miért kell a testeknek **pontszerű**nek lenniük ahhoz, hogy a törvény kimondható legyen? Azért, mert ha egy test az ütközéstől forogni kezd, akkor az impulzus egy része ebbe a forgásba lesz fektetve, ami látszólag felbillenti a mérleget. Pontszerű testek nem forognak, és akkor ez nem is okozhat gondot. A testeket a számításokban ezért tömegpontokkal helyettesítjük (ld. TÖMEGKÖZÉPPONT).

Én ezek szerint csupa rossz példát sorolok, mert a golyók mindig forognak, gurulnak? Az a gond, hogy ütközések nézegetéséhez nehéz más, könnyen elképzelhető példahelyzeteket találni. Az alap-törvényekkel való ismerkedéshez mi egy ideális, minden ide nem tartozó tényezőtől megszabadított elvi biliárdasztalt vagyunk kénytelenek elképzelni. A törvényt így kell megtanulnod, és a feladatokban, ha kell, a test forgását külön tényezőként veszed majd számításba, amikor már tanultál a PERDÜLETről.

Hogy az impulzus megmaradása mennyire komolyan veendő, **minden körülmények között érvényes szabály**, arra mondok egy példát. Ha egy darab gyurmát leejtesz, akkor az nem pattan fel, igaz? De hová lett az impulzusa? *Egyetlen válasz lehetséges: átadta a Földnek.* Két test ütközött, és az erre vonatkozó szabályt az előbb olvastad. Akkor bizony a Föld impulzusának kellett változnia, a Föld egy parányit abba az irányba tért el, amerre a test az ütközés előtti pillanatban haladt. Hogy ez az eltérés mérhetetlenül apró, az nem indok arra, hogy elfeledkezzünk róla. Ha egy kisbolygó esik a Földre, annak az eltérítő hatása már mérhető, márpedig elméletileg a két dolog lényege megegyezik.

Mi az impulzusmegmaradás két megnevezett feltétele?

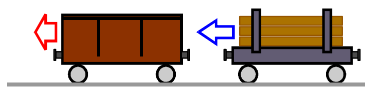
Amikor majd az energiáról fogsz tanulni, látni fogod, hogy a mozgási energia sokféle módon tud elfogyni, pontosabban mássá átalakulni, például alakváltozássá és az ütközéskor keletkező hővé. A gyurmadarab energiájával is ez történt. Az impulzus más. **Az impulzus nem alakul át, csak átadódhat.** A csillagászok körülbelülre kiszámolták a galaxisunk égitesteinek összimpulzusát, és annak, ha *külső*, a galaxison kívüli hatás nem szól bele, akkor évmilliárdok során sem szabad változnia.

Ha sok testről van szó, akkor az impulzusok összegére egyszerűbb egy általános képletet használni:

$$\vec{I}_R = \sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot \vec{v}_i)$$

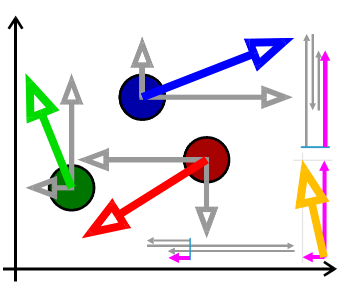
Ha **i** helyére 1-től a rendszerben mozgó testek számát jelölő **n** értékig minden természetes számot behelyettesítünk („szumma i egyenlő 1-től n-ig…”), ezt a különféle tömegek és sebességek indexelésére, megszámozására használjuk, akkor ez azt jelenti, hogy minden test tömegének és sebességének a szorzatát összeadva a rendszer összimpulzusát kapjuk. Vagyis csak rövidebben írtuk le azt, hogy $I_R=m_1 \cdot v_1+m_2 \cdot v_2+m_3 \cdot v_3+\ldots$, egészen $m_n \cdot v_n$-ig.

Ha három golyó sebessége 1, 2 és 4 m/s, a tömegük 3, 2 és 1 kg, akkor gyorsan kiszámolhatod, hogy az impulzusok összege 1·3+2·2+4·1, összesen 11, pedig egy frászt, mert *vektorokat nem így adunk össze*. Ha a golyók sebességeinek nem ismerjük az irányát is, akkor nem tudjuk az összegüket kiszámolni. Erre nem győzlek figyelmeztetni. Ha *tudjuk*, hogy a mozgás kivételes módon egy közös egyenesen zajlik, például egy sínen, az más, akkor egyszerűsödik a számolás.



Egy tehervagon gurul a sínen 3 m/s sebességgel, a tömege 1 t. Utoléri egy másik vagon, a sebessége 4 m/s, a tömege 0,7 t. A találkozáskor a két vagon automatikusan összekapcsolódik. Mekkora sebességgel gurulnak tovább? Nos, a feladat csak tömeget és sebességet emleget, ezért elég esélyes, hogy a választ az impulzusok számolgatásával találjuk meg. Az első vagonnak mennyi az impulzusa? 3000 kgm/s. A másodiké? 2800 kgm/s. Amikor összekapcsolódnak, az impulzusaik összeolvadnak, az eredmény 5800 kgm/s, azért, mert a vektoraik egy irányba mutatnak. Mennyi az egyetlen testté vált két vagon együttes tömege? 1700 kg. Akkor mennyi az új sebességük? I/m, 5800/1700=3,41 m/s.

Ezen az ábrán három golyó gurul, és a színes nyilak mutatják az impulzusvektoraikat. Mennyi a rendszer összimpulzusa? Természetesen a három vektor összege. Az mennyi? Az előbb összeillesztéssel adtam össze őket, most a komponenseik használatával fogom, *figyelj jól*, lépésenként elmondom. Minden vektor felbontható két komponensre, két összetevő vektorra, ahogy az már az EREDŐ ERŐ fejezetben is olvasható volt. *Úgy döntöttem*, hogy a komponensek derékszöget zárjanak be egymással. Ha számolni is kellene, így lenne a legkönnyebb. Minden színes vektor a két szürke komponens eredője, ez a felbontás lényege.

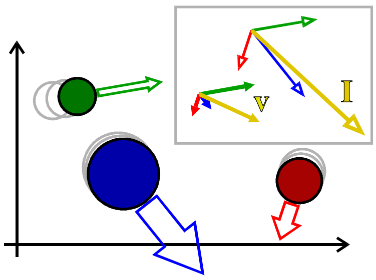


Mindhárom vektor felbontása után összeadtam külön a vízszintes és külön a függőleges szürke komponenseket, alul és oldalt mutatom az összeadásokat, az eredmény két lila összegvektor. (Kinagyítva jobban láthatod.) Ezeket összeadva megkapom a három színes impulzusvektor összegét. (Összegeket összeadva a teljes összeget kapom, igaz?) A sarokban összeillesztettem őket, hogy a parallelogramma-szabály használható legyen az összeadásukra, és megkaptam a sárga vektort, ami tehát a zöld, kék és piros vektorok összege. A három golyó impulzusának összege, a vektori eredője. $\mathbf{I_e=I_1+I_2+I_3}$.

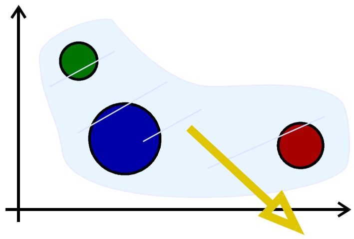
Mekkora tömeg tartozik ehhez az összimpulzushoz? A három golyó tömegének összege. De akkor a sárga impulzusvektorból megkapható sebesség minek a sebessége? Hát, az a golyók közös tömegközéppontjának, a *centrumának* a sebessége, és erről külön fejezetben fogok beszélni.

A testek *súlya* szóba sem került. A vagont nem megemelni akarjuk, hanem csak meglökni, igaz?

Ha a golyók térben is elmozdulnak, akkor már három-három összetevővel kell számolnunk.



A biliárdasztalon a golyók egyformák, és ez nem teszi láthatóvá a sebesség és az impulzus eltérőségét. Ezért nézzünk meg egy másik ábrát is, amelyen *különböző tömegű* golyók mozognak különböző sebességekkel. A kék golyó lassan mozog, de nagy a tömege, ezért nagy az impulzusa. A keretben láthatod a sebességek (v) és a hozzá tartozó, a tömeget is tartalmazó impulzusok (I) vektorait. A kék golyó impulzusában nagy szerepet kap a tömeg, ezért a sebesség és az impulzus nagysága nagyon eltérő. A zöld golyónak kicsi a tömege, de gyorsan mozog, neki ezért van nagy impulzusa. A piros golyó közepes tömegű és nem túl gyorsan mozog, ezért az impulzusa kisebb. Összeadtam a sebességek vektorait, de ennek itt valójában nincs sok haszna. Jóval érdekesebb, ha az *impulzusok* vektorait adjuk össze. Láthatod, hogy az impulzusvektorok mennyire más arányúak, ezért nem lehet meglepő, hogy a sebességek összegéhez viszonyítva az impulzusok összegvektorának (sárga nyilak) nem csak a nagysága, hanem *még az iránya is eltérő*!



Azt gondolhatnánk, hogy ha a három biliárdgolyót hirtelen összefagyasztanánk egyetlen jégtömbbe (vegyük úgy, hogy maga a jég teljesen tömegtelen), akkor a golyók megállnak ott, ahol vannak. Nem, *ez nem történhet így*, mert akkor az impulzusok összege nullára változna, az impulzusok valahová eltűnnének, az impulzusmegmaradás törvénye sérülne. *A valóságban a jégtömb mozogna,* arra, amerre az összimpulzus vektora mutat. A szabály szerint **az impulzus iránya a sebesség iránya**. Ez a golyók mindegyikére igaz is, egyenként. **A rendszer együttes sebessége viszont az együttes impulzussal esik egybe.**

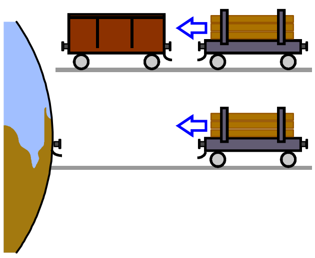
Nem számít, hogy a golyók egyenkénti sebessége merre mutatott, az sem, hogy merre mutat a sebességek eredője, mert a tömb közös sebességét *a közös impulzus iránya* dönti el. Sokszor a sebességből tudjuk meg az impulzust, de olyan is van, hogy az impulzusból derül ki a sebesség. Mint most. A vagonos feladatban is így volt. A feladatokban ez az impulzusmegmaradás felhasználásának leggyakoribb típusa.

Jó, de ha nem jégbe fagyasztjuk a golyókat, ami talán csúszni kezd az asztalon, hanem rádobjuk a télikabátunkat, akkor a golyók mégiscsak megállnak, nem? Ez igaz, a télikabát valószínűleg nem kezdene hosszabb vándorútba. Akkor a törvény nem igaz? De bizony igaz, minden körülmények között. Akkor most mi van? Emlékezz vissza a földre ejtett gyurmára. Hova lett az impulzusa? Úgy van, a golyók átadják az impulzusaikat a kabátnak, a kabát az asztalnak, az asztal pedig a Földnek. A súrlódási erők, amelyek megakadályozzák ezeket a tárgyakat a mozgásban, közvetítik az impulzust, és a Föld impulzusa, űrbéli pályája, forgása fog megváltozni, újra csak jelentéktelen mértékben, de az *elv* nem ismer olyat, hogy jelentéktelen. A számításokban valami lehet elhanyagolható, de az elvben egy apró eltérés is óriási horderejű lehetne.

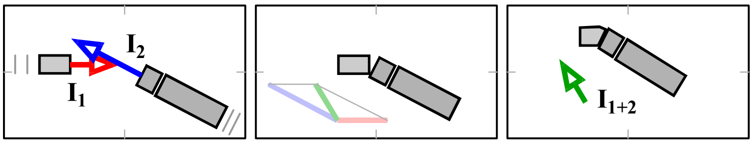
És mi történne, ha ezután egy pillanat alatt megolvasztanánk a jégtömböt? Akkor mindhárom golyó folytatná a tömb részeként felvett új mozgását, egyforma irányba, egyforma sebességgel. Merthogy a golyók *nem emlékeznek* a korábbi impulzusukra. :-D

Mekkora tömeg tartozik a sárga impulzusvektorhoz?

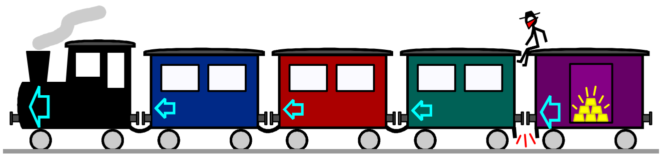
Fontos elvi kérdés: repül egy ágyúgolyó, és becsapódik a várfalba. Hová tűnt az impulzusa? Átadódott a várnak. A vár hátracsúszik? Igen is, meg nem is. Ő átadta ezt az impulzust a Földnek, ami *a várral együtt* megmozdult, bár nem látható mértékben. Mennyi lett az ágyúgolyó sebessége? Nem, NEM NULLA. Ha a vár és a Föld az ágyúgolyó lökésétől megmozdul, a golyó sebessége pedig nulla, az azt jelentené, hogy a golyó állva marad a levegőben, és a várfal lassan elhátrál tőle. A fal erőlökést kapott a lövedéktől, az egy adag impulzus, és mozgás következik belőle. *Ha a lövedék a falban marad*, akkor a sebessége megegyezik a fal sebességével. A Föld óriási tömege miatt ez a sebesség nem látszik, annyira kicsi, de elvileg nem nulla. Csak nullának tekintjük. Ha a Föld tömege csak kisbolygónyi lenne, mérhetővé válna a jelenség. Amikor egy guruló vagon ütközik *és rákapcsolódik* egy álló vagonra,



akkor tudjuk, hogy közös sebességet vesznek fel. Ha az álló vagon akkora, mint a Föld, a jelenség akkor is így zajlik le, csak a közös sebesség nagyon kicsi. Ez elvi kérdés, és egy feladatnál gondold át, hogy a közös sebesség elég kicsi-e az elhanyagoláshoz. Ha az impulzus a Földnek adódva nyelődik el (és nem valami kozmikus ütközésről van szó), akkor igen. Ha egy puskagolyó egy lengő homokzsákba fúródik, akkor már ne hanyagold el.



A gyurmás példa szerint az impulzus megmaradása a nem tökéletesen rugalmas, sőt a teljesen rugalmatlan ütközések esetén is működik. Ha két autó összeütközik, akkor rugalmas ütközés esetén lepattannának egymásról, mint a biliárdgolyók. Ehelyett ez a két autó szinte összeragad, "összekapcsolódik" (ez fontos). A mozgási energiájuk felemésztődik az ütközésben, a kocsik anyagának összegyűrésében, és nullává változik. **Az impulzus soha nem tűnik el**, és pontosan kiszámolható az autók közös impulzusa, amiből a haladási irányuk és sebességük is előre megmondható. A személyautó gyorsan jön, a kamion lassabban, de a kamion tömege sokkal nagyobb, ezért az impulzusa is nagyobb. A két impulzus összeadásának (lásd a középső képen) eredménye az a vektor, ami a két összeragadt autó közös impulzusa. Végül csak azért állnak meg, mert a kocsikra az úttest által *kívülről* kifejtett súrlódás hat. De a csúszás nyoma elárulja a közös impulzus irányát és nagyságát, ami alapján a szakértő meg tudja mondani mindkét kocsi sebességét.



Az impulzus nem csak **összeadódni** tud, hanem **osztódni** is. Van egy vonat, négy kocsiból. A mozdony tömege 2,5 t, az első három kocsié 1-1 t, a negyedik kocsié 2 t, mert benne van az arany. A sebesség 20 m/s. Jön a rabló, és menet közben lekapcsolja az utolsó kocsit. Mi fog történni?

Természetesen *semmi*, ugyanis a tehetetlenség törvénye azt mondja, hogy amíg erő nem hat egy testre, addig az megtartja a sebességét. Annak, hogy a kocsik össze vannak-e kapcsolva, csak akkor van szerepe, ha a mozdony gyorsít, és a kocsikat húzni kezdi. Az, hogy a két kocsit összekötő bilincset a rabló szétnyitja, még nem erő. A bilincs nem is volt feszes, mert a kocsik anélkül is szépen mentek a mozdony után, egyforma sebességgel. Így aztán a lekapcsolt utolsó kocsi továbbra is gurul a vonattal. Ha a kerekek és a sín közötti gördülő-ellenállás nem szólna közbe, ez így is maradhatna. De közbeszól, ráadásul a rabló behúzza a kocsi fékjeit, így az végül megáll.

Mennyi volt a vonat impulzusa? 2,5+1+1+1+2 tonna, 20 m/s, az összesen **150** ezer kgm/s. Ebből az utolsó kocsié? 2·20=**40** ezer. A vonaté az utolsó kocsi nélkül? 5,5·20=**110** ezer. Összesen **150** ezer.

Világos? Az egész szerelvény összes impulzusa két (vagy több) részre osztható, és az a tömeggel arányosan oszlik meg. Az egész vonat impulzusa a vonat részeinek saját impulzusaiból adódik össze. A kocsi lekapcsolásakor **egy közös impulzus vált ketté**. De az összimpulzus megmarad. Ha a rablót bántani kezdi a lelkiismerete, és gyorsan visszakapcsolja a kocsit a vonat végére, akkor a vonat tömege 5,5 t helyett újra 7,5 t lesz, de a vonat *impulzusa is* a tömeg arányában nő újra 150 ezerre. Együtt vagy csak egymás mögött, ez most mindegy, mert a részek sebessége azonos. Amikor a rabló behúzza az utolsó kocsi fékeit, csak akkor lesz lényeges, hogy a kocsit leakasztotta-e már a vonatról.

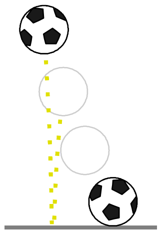
Amióta az impulzussal foglalkozunk, többször is elmondtam, hogy az impulzus a sebességgel arányos, mert a tömeg nem változik. Nos, ahogy látod, valójában a tömeg is tud változni, de azzal arányosan változik az impulzus is. **Ha két tömeget összefogunk, akkor az impulzusuk egyesül. Ha egy tömeget kettéosztunk, akkor az impulzusa arányosan kettéoszlik.** $I_1/m_1=I_2/m_2=v$. Ha az arányosság nem maradna meg, akkor a két rész sebessége nem lehetne azonos.

Három golyó egy jégtömbbe fagyasztva csúszik az asztalon. Egy pillanat alatt felolvasztjuk a jeget. Mekkora lesz a golyók impulzusa? A tehetetlenség törvénye még mindig érvényes, egy sebesség nem változik meg erő nélkül. Ha eltűnik a jég, az nem erő. A közös impulzus fog három felé osztódni, a golyók tömegének aránya szerint. Ha a kék golyó $\mathbf{m}_k$ tömege kétszerese a piros golyó $\mathbf{m}_p$ tömegének ($\mathbf{m}_k=2\cdot\mathbf{m}_p$), úgy ha ennek arányában oszlott meg az impulzus is, akkor $\mathbf{I}_k=2\cdot\mathbf{I}_p$. (Van még egy $\mathbf{I}_z$ is.) És a sebességük? $\mathbf{v}=\mathbf{I}/\mathbf{m}$, és mert az 1/1 és a 2/2 ugyanannyi, ezért a $\mathbf{v}_k$ és a $\mathbf{v}_p$ azonosra jön ki. A harmadik golyóra ugyanígy. A golyók tehát együtt fognak mozogni. El is vártad tőlük, igaz?

Miért kell külön fékezni az utolsó kocsit, miért nem áll meg a lekapcsoláskor?

A fejezet lezárásául **nézzünk meg négy egyszerű példát**, amelyekben az olvasottak hasznosíthatók.

► Egy 0,43 kg tömegű focilabdát elengedünk 1,2 m magasból, ami aztán pattogni kezd, egyre kisebbeket, végül 8 másodperccel később teljesen megáll. Mennyi volt a labdára ható átlagos erőlökés?



Ha jól sejtem, a kérdéssel megleptelek. A példa nem nagyon hasonlít az eddig tárgyalt jelenetekhez. A labda sebessége állandóan változik, "magától", ráadásul egy csomó ütközés történik, még azt sem tudjuk, hogy hányat pattan. Az impulzus megfigyelésében az a nagyon jó, hogy ha megnézel egy kezdeti állapotot, majd egy későbbi állapotot is, akkor ha impulzusváltozást tapasztalsz, megtalálható az ok lényege akkor is, ha egyébként gőzöd sincs arról, hogy a két megfigyelés között mi minden zajlott. Nekiállhatnánk a szabadesés sebességével, idejével, a rugalmassági erővel, effélékkel számolgatni, türelmesen és hosszasan, talán sikerülne is kideríteni a választ. De erre nincs semmi szükség, sebesség és tömeg megadja az impulzust, az az idővel együtt megadja az erőlökést.

Az impulzus megváltozott? Hát persze, hiszen a labda először mozgott, aztán megállt. Mi okozta a változást? Megállította a föld. Az lehet neked szokatlan, hogy nem egy menetben állította meg, hanem több, egymást követő erőlökéssel. "A test impulzusa erőlökésekből rakódik össze", ezt már olvashattad. *Negatív* erőlökésekkel is igaz ez, ekkor az impulzus csökken, egészen elfogyasztható, nullára. (És még tovább is.) A negatív erőlökés, ezt is olvashattad, a mozgással ellentétes irányú. Vagyis már mindent tudsz, ami a megoldáshoz kell.

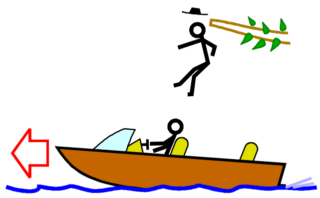
Sajna az erőlökések mértéke ismeretlen módon változik, de nem baj, mert a kérdés az átlagos erőlökést kéri. Vagyis összeadható a sok, egyre kisebb erőlökés, és majd *elosztjuk az idővel*. Lássuk: mennyi a kezdeti impulzus? Sebességszer tömeg…

Itt van egy apró döccenő, a sebességet nem ismerjük. Az biztos, hogy az erőlökés során a labda a földdel érintkezik, ezért az a sebesség kell nekünk, amennyi *abban* a pillanatban érvényes. Megkaptuk, hogy milyen magasról ejtjük le a labdát, innen már az ovisok is tudják folytatni a GYORSULÁS fejezet alapján. Na, most kell az, amit alapszabályként emlegetek, kapásból tudnod kell a képleteket. Ha nem tudod a sebességet kiszámolni, gyakorlatilag nem tudod megoldani az egész feladatot. Ha tudod a gyorsuláshoz tartozó összes képletet, akkor leírhatod magadnak külön helyre, és kiválaszthatod azokat, amelyek most jók lesznek. A sebességre $\mathbf{v=a\cdot t}$, ebből $a=g$, a nehézségi gyorsulás, v-t keresed, a t-t kell kifejezni valami másból. $\mathbf{s=(a/2)\cdot t^2}$, $s=1{,}2$ m, $a=g=10$, t=gyök(1,2/5)=0,49 s. Akkor $v=g\cdot t=$4,9 m/s.

A kezdeti impulzus, amikor a labda először érinti a földet, $\mathbf{m\cdot v}$=0,43·4,9=2,107 kgm/s. A labda legvégső impulzusa nulla, a változás 2,107–0=2,107, ennyi az erőlökések összege is ($\Delta\mathbf{I}=\Sigma\mathbf{F\cdot t}$). Ez nyolc másodperc alatt jött össze a feladat szerint, akkor a másodpercenkénti átlag 2,107/8=0,263 Ns. (Azaz ha 0,263 N erőt fejtünk ki a labdára 8 másodpercen át, akkor megállítjuk a labdát.)

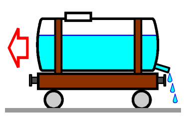
Kövesd végig újra a levezetést! Minden egyes lépést értened kell.

► Megy egy motorcsónak 10 m/s sebességgel, a tömege 400 kg. A víz fölé hajló faágról beleugrik a 80 kg tömegű rabló. Mi fog történni?



Vízszintes irányban a rabló nem mozgott, a csónak igen. A beugrott rablót fel kell gyorsítani valamilyen vízszintes sebességre, ehhez a csónaknak kell a rablóra erőt kifejteni. A rabló a tehetetlenségével pedig ellenerőt fejt ki a csónakra, lassítva azt. Próbálkozhatnánk az erők és gyorsulások számítgatásával, de tök fölösleges, mert sokkal egyszerűbb észrevenni, hogy a csónak és a rabló "ütköztek", és a két test összekapcsolódott, az impulzusuk egyesült. Ez a feladat kulcsa. A pattogó labdánál a függőleges irányú mozgás volt lényeges, itt viszont a csónak vízszintes mozgása. A csónak eredeti impulzusa $\mathbf{I}_{cs}$=10·400 =4000 kgm/s. A rabló *vízszintes* impulzusa $\mathbf{I}_r$=0. A közös impulzus $\mathbf{I}_{cs}+\mathbf{I}_r$=4000. Az új közös tömeg 400+80=480 kg. Ebből kijön az, hogy a kettőjük közös sebessége 4000/480=8,33 m/s-ra csökken. A motor ezután újra fel tudja gyorsítani a csónakot 10 m/s-ra, de a beugráskor a sebesség hirtelen lecsökken. (*Ha egy feladatban km/h van, ne felejtsd el átváltani!* 36 km/h=10 m/s.)

► Gurul a sínen egy tartálykocsi, a tömege 1 t, és benne van 7 t víz. A sebességük (mindkettőé, hiszen a víz is annyival megy, amennyivel a kocsi) 15 m/s. A tartály csapja hátul véletlenül kinyílik, és gurulás közben lassan elfolyik 2 t víz. Mennyivel nő a kocsi sebessége?

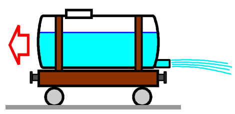


A kocsi impulzusa vizestül 8·15=120 ezer kgm/s. A tömege 6 tonnára csökken. Ezek szerint a sebessége 120/6=20 m/s-ra nő, követve az impulzusmegmaradás törvényét? Gyorsulás történne erő nélkül?? A tehetetlenség törvénye ilyet nem enged meg. "*vágd be a képleteket és törvényeket… és ragaszkodj hozzájuk.*" Akkor tehát benéztünk valamit.

Amikor a víz kifolyik hátul, az olyan, mint amikor lekapcsoljuk az utolsó kocsit. A víz 15 m/s sebességgel haladt, és azzal, hogy *lassan* kicsorog a csapon, nem fejt ki erőt, rá sem fejt ki erőt a kocsi, a sebessége nem változik. Vagyis valójában 2 tonna vizet cseppenként "lekapcsoltunk". Tény, hogy a víz nem fog a levegőben a kocsi mögött úszni, hanem ott áll a sínek között, tócsában. Igen, mert a légellenállás, majd pedig a föld lefékezte a vízcseppeket, amelyek végül megálltak. De a tartályból éppen kicsordulva a sebessége még annyi, mint a kocsié (és ha tudná, a levegőben követné a kocsit). Csak *azután* jön a légellenállás. Vagyis a 2 tonna víz *sebességváltozás nélkül* levált a kocsiról, a tömeggel arányosan magával hozva a saját impulzusát, és csak ez után, külső erők hatására áll meg, ami viszont már másik történet. A 8 tonnából 2 tonna elfolyt, de a 2 tonna impulzusa is elkülönült. Tehát maradt a 6 tonna az összimpulzus 6/8 részével, 90 ezer kgm/s-mal. Ebből a sebességre még mindig 15 m/s jön ki.

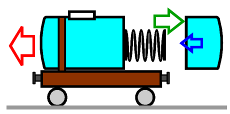
Extra pontért: a 2 tonna víz impulzusa 30 ezer kgm/s, ami nem semmi. Ha varázsütésre átkerülne egy 75 kilós emberbe, akkor az ettől 400 m/s, szuperszonikus sebességgel kezdene száguldani. Node a víz végül ott áll, tócsákban. Hová lett ekkora impulzus? :-) Igen, még mindig. Részben a levegőt mozgatta meg, részben pedig a Földet. **Az impulzus szó szerint megsemmisíthetetlen.** Ha a tartálykocsiban atombombát robbantanánk, az impulzusa valahol akkor is megmaradna.

Amikor a menekülő rabló lelöki a száguldó teherautóról az aranyat, akkor mennyi sebességet nyer ezzel? *Szinte semennyit.* Csökkent a teherautó és a teher össztömege, de a ledobott arany közvetlenül az elválás után *még majdnem az autó sebességével repül*, a rabló nem tud egy rakás aranynak nagy sebességet adni. Tehát az arany magával vitte a saját impulzusát, ezért az autó sebessége nem nő. Nyerni azzal tud a rabló, ha az aranyat az előtt dobja ki, mielőtt a kocsit *gyorsítani* akarja, mert a dinamika alaptörvénye szerint F=m·a, a kisebb tömeget könnyebb gyorsítani. A kanyarodásban vagy a megállásban is lehet előnyös, ha nincs nagy teher a kocsin. Ha viszont át akarja törni a kerítést, akkor éppen jól jöhet neki a nagyobb össztömeg, a nagyobb tehetetlenségével. De egyenletes sebességgel haladva a teher "lekapcsolása" nem jelent előnyt. A gyártók csak azért próbálnak minél könnyebb autókat csinálni, mert az autót valójában állandóan felgyorsítjuk, minden fékezés után, ekkor fogyaszt egy könnyű autó kevesebbet egy nehéz autónál.



► Tegyük fel, hogy a 15 m/s sebességű vízszállító vasúti kocsi nem csak elfolyat 2 tonna vizet, hanem hátrafelé kilövi azt. Úgy, hogy a víz sebessége a kocsihoz képest 11 m/s legyen. Változik-e a kocsi sebessége?

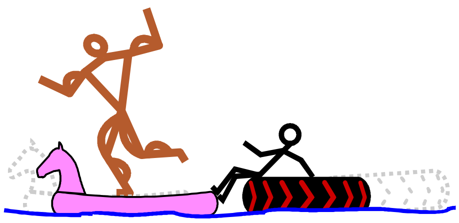
Aha, itt már nem csak kettéválik a tömeg, hanem az egyik tömeg ellöki magától a másikat, lassítva azt. Ha *egyben* hátradobja a 2 tonna vizet, akkor mi történik? Annak az adagnak a sebessége ezzel a földhöz képest 15–11=4 m/s-ra csökken. Eltávolodik a kocsitól (zöld nyíl), de még mindig előrefelé halad (kék nyíl). A saját impulzusa csak 4 m/s · 2 t =8 ezer kgm/s lesz, ennyit visz magával. *A többi a kocsiban maradt*, hiszen máshová nem kerülhet, és az összimpulzus nem változhat, ez a törvény. A tele kocsi impulzusa mennyi volt? 15 · 8000 =120 ezer. Kirepült 8 ezer, akkor a most már csak 6 tonnás kocsiban maradt 112 ezer. Eszerint a kocsi új sebessége 112 / 6 =18,67 m/s lesz. Felgyorsul!



És ha nem egyszerre dobja ki a vizet? No nézzük meg ezt a dobálózást alaposabban.

Akció és reakció

Hozzá vagyunk szokva ahhoz, hogy ha egy test áll, akkor az nem is fog megmozdulni mindaddig, amíg valami meg nem löki. A tehetetlenség törvénye ezt így is írja elő. Ám ha *több* test áll mozdulatlanul, nulla impulzusú zárt rendszert alkotva, akkor bizony létrejöhet mozgás külső beavatkozás nélkül is, "belső erőt" alkalmazva. Ez a belső erő persze nem valami ezoterikus fogalom, fizikáról beszélünk.



Képzeld el, hogy gumimatracon ringatózol a tó vizén (vagy jégen állsz, légpárnás autón ülsz), súrlódás nélküli, nyugalmi helyzetben, és ekkor ellököd magadat egy másik hasonló kísérleti alanytól. A tapasztalat: mindketten mozogni kezdtek, ellentétes irányban, a mozgásotok sebessége pedig fordított arányban áll a tömegeitekkel. Ha az öcsédet lököd el magadtól, akkor ő gyorsan és messzebbre halad, te pedig lassabban. Ha egy kigyúrt óriással teszel egy vakmerő kísérletet, akkor a nyugalom megzavarására alkalmas képsorok következnek, de előtte még meg tudod figyelni, hogy ő fog lassan haladni, te pedig gyorsabban távolodsz a kiindulási pontodtól. **Az egyik test hatása a másik testre volt az "akció", a másik test visszahatása rá a "reakció".**

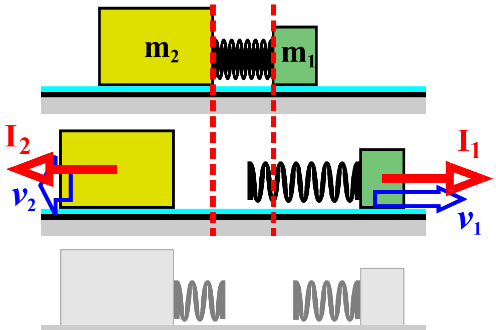
Miféle "belső erő" kell az ilyesmihez? A gumimatracon az izomerődet használtad fel, ami veled volt, a következő ábrán összenyomott rugót látsz a két test között, lehet a két test közé dinamitot tenni, lehetnek maguk a testek rugalmasan összenyomva, és kitalálható még számos más technika.

Mennyi volt kezdetben a két alany sebessége? És az impulzusuk?

A két nyugalomban levő embert együtt egy zárt rendszerként, tehát más hatásoktól elszigetelten kezelhettük. Azért, mert a kísérlet során egyikőtökre sem hatott semmilyen más erő, mint a másik alany nyomóereje. A mozgást is súrlódásmentesnek vesszük. A víz persze elég rövid távon lefékezi a matracot, de el tudjuk képzelni, és hihetőnek is látszik, hogy ha a víz nem lassítaná le a matracot, akkor a két alany akadálytalanul távolodna egymástól, egyenletes sebességgel.

„A másik alany nyomóereje”? Csak te nyomtad a másikat, nem? Nem, mert a hatás–ellenhatás törvénye, Newton III. törvénye szent, és a te erőd ellenereje az, amivel ő nyomott téged. Igaz, hogy a te erőd a "hatás", az "akció" is az volt, hogy te rúgtad el a másikat, de a "visszahatás", a "reakció" velük azonos mértékű.

Az ábrán felül a kezdőhelyzet van, két test, közöttük egy összenyomott rugóval. Ez a rendszer minden más hatástól elkülönülten, nyugalomban van a súrlódásmentességet biztosító jégrétegen. Valami ugyan összenyomva tartja a testeket, de azt a valamit most varázsütésre eltüntetjük. És megindul a mozgás. Az előző felállás szerint itt te vagy a zöld $\mathbf{m}_1$, és ez a test a hozzá tartozó rugóval egy erőlökést fejt ki a sárga $\mathbf{m}_2$-re. Tehát egy $\mathbf{F}$ erőt $\mathbf{t}$ időn keresztül. Ez az $\mathbf{F \cdot t}$ hozzáadódik az $\mathbf{m}_2$ kezdeti impulzusához, minden pontosan úgy történik, ahogy azt korábban kitárgyaltuk.



Megjegyzés: Csaltam kicsit, mert az erőlökésben állandó F erőt feltételezünk, a rugóerő viszont egyre gyengül, ahogy nő a hossza, az erőmentes állapotáig. (Lásd RUGALMASSÁGI ERŐ.) De az F legyen most a rugóerő egyenletes átlaga, ilyen majd a rugalmassági MUNKA kapcsán is csinálni fogunk, nem is kell vele foglalkoznunk, hiszen a példában más lesz a lényeg.

Ha az **egyikük erőt fejt ki a másikra, akkor a másik ugyanakkora erőt fejt ki az egyikre**, ez Newton III. törvénye. Ez az erő felgyorsítja mindkettejüket, **a gyorsulás és a végsebesség fordítottan arányos a tömegükkel**, ez Newton II. törvénye. Ha pedig a rendszerben levő impulzusok összegét bármikor megnézzük, azt változatlannak találjuk, ez meg az impulzusmegmaradás törvénye. A két test által megszerzett impulzusok összege *minden pillanatban* megegyezik a rendszer kezdeti impulzusával:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 \;=\; \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_R$$

ahol m a tömeg, v a sebesség jele, és $\mathbf{I}_R$ a rendszer összimpulzusa. Kezdetben az egész rendszer állt, emiatt az $\mathbf{I}_R$ értéke pontosan 0 volt, akkor pedig 0 most is. Ugye kezd összeállni a kép?

Az $\mathbf{m}_1$ test (a részének tekintett rugóval) egy erőlökéssel megmozdította az $\mathbf{m}_2$ testet, adott neki egy $\mathbf{I}_2$ impulzust. Csakhogy az összimpulzusnak nem szabad változnia (mert a rendszer zárt), ezért tudjuk, hogy ha az $\mathbf{m}_1$ impulzusát nevezzük $\mathbf{I}_1$-nek, akkor $\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_R$, bármikor nézzük is meg. $\mathbf{I}_R=0$, ezért $\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2=\mathbf{0}$. Eszerint $\mathbf{I}_1=-\mathbf{I}_2$, ez következik az egyenletből, teljesen tisztán. Az $\mathbf{m}_1$ impulzusa is megváltozott. A negatív előjel a mozgásirány ellentétességét jelzi.

Az akció–reakció jelensége tehát azt eredményezi, hogy az ellökött test ($\mathbf{m}_2$) megszületett impulzusával egyenlő nagyságú, ellentétes irányú impulzus keletkezik az ellökő testben is ($\mathbf{m}_1$). A sárga test ellökésével a zöld test is megmozdul.

Fontos, hogy az egyenlet a két test impulzusát határozza meg. Azaz a kapott sebesség a tömegtől is függ, az $\mathbf{m \cdot v}$ szorzat szerint. Tehát a te sebességed nagyobb lett, ugyanakkora impulzusból, mert a tömeged kisebb. Egyszerre indultatok, és egy adott időpillanatot megnézve azt látod, hogy a kezdőponttól te jutottál távolabb.

Az erőlökés gyorsulást eredményez. Meddig tartott a gyorsítási szakasz?

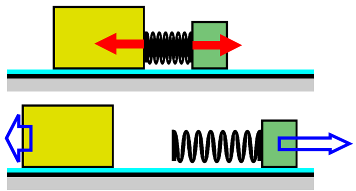
Te rúgtad el a másik matracot, tehát "veled volt a rugó". Ha az óriás esetleg azt mondja, hogy "Még egyszer!", és most már egyszerre rúgjátok el egymást, akkor a rugó egy-egy darabja a testekkel megy, így is felfoghatjuk a dolgot. Ezek között a helyzetek között nincs érdemi különbség.

Az **akció–reakció jelenség** tehát a következő: két rögzítetlen test közös zárt rendszert alkot, az egyik test erőt fejt ki a másik testre, az emiatt megmozdul, de ennek következményeként az első test is megmozdul, az ellenkező irányba.

Ez a fogalom nem valami új dolog az eddig tanultakhoz képest. Ez csak egy gyakori előfordulása az impulzusmegmaradás már megismert törvényének. Ha egy feladatban vagy helyzetben ráismersz erre a sémára, akkor azzal most már egyszerűbben tudsz boldogulni.

Figyelj oda, mert össze szokták keverni az akció–reakció jelenséget a hatás–ellenhatással, ami Newton III. törvénye.

A jelenséget kétféleképpen is meg tudjuk magyarázni, két ismert okból is következik.



1. Egy test (a zöld) erőt fejt ki egy másik testre. Az erőt a rugóból ered, de tekinthetjük úgy, hogy a segítségével a test nyomja a másikat. A dinamika alaptörvénye alapján a másik testnek (sárga) ettől gyorsulnia kell. A zöld testnek van egy tehetetlen tömege, ez a "támasz" megakadályozza, hogy piheként lökje el magát a sárga testről anélkül, hogy azt megmozdítaná. A **gyorsulás** addig tart, ameddig a gyorsító erő fennáll (a rugó kinyúlik), és a nagysága az erő és a sárga test tömege alapján kiszámítható. A zöld test által kifejtett erő a sárga testben ellenerőt hoz létre, ami a zöld testre hat, és a dinamika alaptörvénye szerint ennek a testnek is gyorsulnia kell, az ellenerő irányában, tehát a saját erejével ellentétesen. **A két testre azonos ideig azonos erő hat**, ezért a gyorsulás ideje egyforma, a felvett sebesség a tömegekkel fordítottan arányos. A magyarázat A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezet köré épült.

2. Egy test (a zöld) **erőlökést** ad a másik testnek (sárga), vagyis adott ideig adott erőt fejt ki rá. Az erőlökés a sárga test impulzusává válik, az erőlökések tétele szerint, emiatt a test elmozdul. A két test zárt rendszert alkot, mert figyelmen kívül hagyunk minden más tényezőt. Zárt rendszerben az összimpulzus állandó, eszerint a zöld test impulzusának is meg *kell* változnia, ellentétesen. Ennek eredményeként a zöld test is elmozdul, az ellenkező irányba. A gyorsulás ideje az erőlökés időtartama, a felvett sebesség az impulzusokból következik, a tömegekkel fordítottan arányos. A magyarázat az IMPULZUSMEGMARADÁS fejezet köré épült.

A két leírás egyenértékű, és ugyanazt a jelenséget magyarázza meg kétféle nézőpontból indulva.

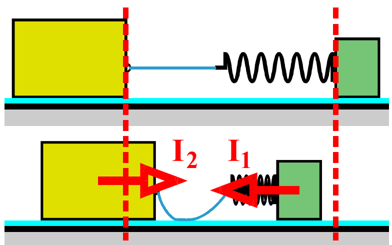
Korábban a dinamika alaptörvénye le lett vezetve az impulzusváltozás képletéből. Keresd meg!

Az erőlökés impulzus*változást* okoz, az IMPULZUS fejezetben megbeszéltük, vagyis az erőlökések hozzáadódnak a test impulzusához. A két test most is csak egyszerű erőlökést fejt ki egymásra, ezért az akció–reakció jelenség akkor is működik, ha a kiinduláskor a két test *már mozog*. A fenti egyenletekben ez csak annyi változást eredményezne, hogy az $\mathbf{I}_R$ nem nulla. Ez alapján fogalmazzuk meg az **akció és reakció** jelenségének *általános* szabályát:

Ha zárt rendszert alkotó két test erőt fejt ki egymásra, akkor ez a testek impulzusának megváltozását eredményezi. A két impulzus változása azonos nagyságú és ellentétes irányú.

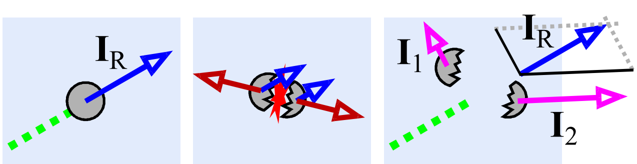
$$\Delta I_1 = -\Delta I_2$$

Figyelj fel arra a fontos kikötésre, hogy a két testnek kell egymásra hatnia. Ha a rugó *nem* a két testnek feszül, hanem az egyik test csak valamiért, valahogyan megindul, akkor a másik test ettől nem fog megmozdulni. **A két testnek el kell rúgnia magát a másiktól. Vagy egy kötéllel maguk felé kell rántaniuk a másikat.** Az "egyik test által kifejtett erő" irányáról nem volt szó, tehát lehet toló vagy húzó is.



Ha a rugó toláskor nincs egyik testhez sem rögzítve, illetve ha húzáskor mindkét testhez csak kötél rögzíti, akkor kinevezheted bármelyik testet "akciótestnek", és a rugót veheted ahhoz tartozónak, de igazság szerint *a rugó helye egyáltalán nem érdekes*. A rugó helyett mindenféle más is elrúghatja egymástól a két testet. Az a lényeg, hogy két test között egy olyan közös és egyforma erő szülessen, amely elmozdulást, gyorsulást tud okozni.

Ha az egyik test nyomja a másikat, akkor a másik is az egyiket, ellenirányba. Mi mondja ezt ki?



Repül a levegőben egy lövedék, majd a pályája egy pontján kettérobban. Mi zajlik le?

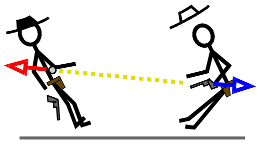
Először is a lövedék két részre válik szét. Ez a mozzanat hasonlít a vonatról lekapcsolt kocsi esetéhez, tehát a lövedék kezdeti $\mathbf{I}_R$ impulzusa a két lövedékdarab tömegével arányos módon kettéosztódik (kék vektorok).

Ugye nem gondoltad, hogy a két rész egyforma tömegű? Jó, mert a feladat ezt nem is mondta. Az egyik legtipikusabb hiba olyan adatot is felhasználni, amit csak mi képzelünk a feladatba.

Ettől függetlenül pedig a robbanás során a két darabot egy közös erő kétfelé veti. A robbanással mindkét darab elrúgja magát a másiktól, hiszen a közéjük szoruló égésgáz rugóként löki szét őket (minden robbanás erre alapul), közvetlen kapcsolatban mindkét testtel. Így a két lövedékdarab saját impulzusához hozzátevődik az akció és reakció által létrehozott impulzus (vörös vektorok). Mindkét darab kék és vörös impulzusvektora összeadható, az eredmény az $\mathbf{I}_1$ és $\mathbf{I}_2$ eredő impulzus. Ez határozza meg a két lövedékdarab további haladásának irányát, és további sebesség nagyságát, a tömeggel fordítottan arányosan. De $\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_R$ ezután is, mert külső erő nem hatott, a rendszer kezdeti összimpulzusa *nem változhatott*.

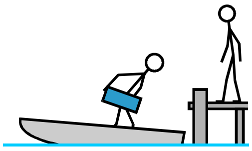
Megjegyzés: Miért nem változott az impulzus, hiszen egy jókora robbanás történt, annak az ereje nem számít? De igen, számít, ez az erő határozza meg a lövedékdarabok <u>egyedi</u> impulzusváltozásának nagyságát. A született két impulzusváltozás viszont kiegyenlíti egymást. Két hatalmas erő eredője is lehet nagyon kicsi, vagy akár nulla is. Ha a testek közös rendszerként ellökik magukat a másiktól, az impulzusok *előjelesen* összeadódnak, és ez is lehet akár nulla is. A törvény megnyugtat bennünket afelől, hogy *külső* erő hiányában a rendszer <u>közös</u> impulzusában nem lesz változás.

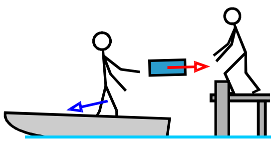
Mivel magyarázható, ha egy rugó feszül a falnak, és kilő egy testet?
A rugó miért nem repül hátra? Hová lett a reakció impulzusa? :-)



A Mythbusters sorozatban elővették azt a mozis mítoszt, amikor a rosszfiút lelövik, és az ettől kirepül az ablakon. A kísérletet lelkiismeretesen elvégezték, de a végén elmondták, hogyan lehetett volna a kérdést rövid úton eldönteni. A golyó az impulzusát a kilövéskor kapja meg, a pisztolytól. A jófiú–pisztoly–golyó rendszer kezdetben állt. A pisztoly akciója (a kilövés) elkerülhetetlenül a golyó reakcióját hozza magával, tehát ekkora ellenimpulzust kap a pisztoly és az erősen belekapaszkodó jófiú együttes rendszere is. (Visszarúg a fegyver, ahogy mondják.) Márpedig ha a golyó impulzusa akkora, hogy az hanyatt lök egy embert, akkor a pisztolyban és jófiúban hagyott ellenimpulzus is ugyanilyen erős, és szintén hanyatt lök egy embert, pisztolyostul. Ahogy a Rendőrakadémia 4-ben Mrs. Feldman mutatta be a lőtéren. Cáfolva.

Ilyesmikre jók az olyan törvények, mint az impulzusmegmaradási törvény. Kísérletezés nélkül, pusztán a törvényre támaszkodva kapunk egyértelmű válaszokat. Amikor a jelenségeket megpróbálod megérteni, amikor a feladatokat megpróbálod megoldani, szigorúan tartsd be a törvényeket, mert azok igazak. Addig kell a dolgokat tologatnod, amíg nem teljesül minden szabály. Lehet, hogy attól még tévedsz, de ha valahol felbillen az egyensúly, akkor *biztos*, hogy tévedsz. A fizika a Világegyetem könyvelése; összeadunk-kivonunk mindenfélét, és ha a végén az utolsó rubrikába nem nulla kerül, akkor valaki büntetést fizet. Ez szerintem egy nagyon okos mondás volt tőlem …

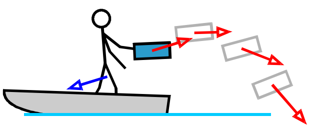




A fegyverek visszarúgása is gondot okoz, de az akcióra válaszul kapott reakció máskor sem mindig jön jókor. Csónakkal érkezel, a stégen a barátod vár, és te kidobod neki a láda sört, amit hoztál. Sajnos elfelejtetted a csónakot kikötni, ezért az akadálytalanul el tud mozdulni, amikor a ládának megadod a szükségesnek vélt erőlökést. A dobáskor nem kalkuláltad be **a láda reakcióhatását**, aminek következtében a csónakkal alkotott közös rendszeretekre azonos nagyságú **ellenerőlökés** hat, és a csónakkal te elkezdesz távolodni a stégtől. A láda gyorsításának szakaszában már hátrafelé mozogsz, a lendítéskor ezt nem egyenlíted ki plusz erővel, a láda ezért nem ér el a barátod kezéig, hanem a vízbe esik. Aki sört akar inni, az tanuljon fizikát.

A láda reakcióimpulzusát te kaptad, de továbbadtad a csónaknak. A tiéd nulla lett?

Az akció–reakció mechanizmus létrejöttének feltétele, hogy az egymásra ható két test vagy két rendszer együtt egy nagyobb és **zárt rendszert alkosson**. Zárt rendszerben az összimpulzus változatlan marad. Nézzük csak meg még egyszer a csónakos katasztrófát! A csónak–te–láda rendszert zárt rendszernek



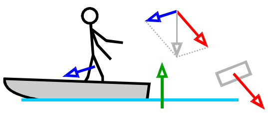
tekintjük, vagyis érvényes az impulzusmegmaradás törvénye. Csakhogy amikor a ládát eldobod, akkor az nem egyenes vonalban mozog, hanem a ferde hajítás szabályai szerint a tömegközéppontja bejár egy parabolát. Te elmozdulsz a másik irányba, de ez most nem érdekes, te a ládát magára hagytad, nem hat rá erő, és mégis változik a mozgásának iránya. Az impulzus a mozgással azonos irányú, tehát **a láda impulzusa változik**, folyamatosan. Valami már megint nem stimmel, merthogy a megmaradási törvény igaz, ez biztos. Gondolkozz rajta, mielőtt tovább olvasod. **…**

Hiába döntünk úgy, hogy a csónak–te–láda rendszert zárt rendszernek tekintjük, ha egyszer nem az. Az ilyesmi nem puszta elhatározás kérdése. *Hat rá erő*, egy kizárhatatlan külső erő. A gravitáció. **A tömegvonzás árnyékolhatatlan, kizárhatatlan erőhatás.** Amikor a testek egy vízszintes felületen mozogtak, elhanyagolhattuk a testek súlyának és függőleges mozgásának problémáját, de ebben a példahelyzetben már nem tudunk úgy csinálni, mintha nem lenne ilyen.

A HAJÍTÁSOK fejezetből megtanultad, hogy a mozgás szétbontható egy vízszintes és egy függőleges összetevőre, ez az impulzussal is megtehető, és ha függőleges mozgás is van, akkor nem feledkezhetünk el a gravitáció erejéről. Ami tehát egy erő, amely a repülő ládára folyamatosan **függőleges irányú erőlökést fejt ki**, emiatt a láda saját impulzusának függőleges összetevője növekedik. A vízszintes összetevő nem, a két összetevő eredője pedig a képen látható módon változik.

> Megjegyzés: feltűnt, hogy a kék vektor kicsit lefelé mutat, nem pedig vízszintesen? Akkor a csónak elsüllyed? Ugyan a csónak valóban kicsit lefelé indul el, de a víz felhajtóereje ezt lefékezi, utána a csónak visszaemelkedik az előző magasságáig. És mindeközben halad balra.

Van itt még egy tanulság. A láda impulzusa lefelé fordul, igaz? A képen látható pillanatban már szinte derékszöget zár be a két vektor, és ha tovább esne a láda, az impulzusa egyre közelebb lenne a függőlegeshez. Csakhogy a kezdőpillanatban a csónak, a láda és te egymáshoz képest álltatok, vagyis <u>az impulzusotok nulla volt</u>. Emlékezve az előző tanulságra a vizsgált rendszerbe bevesszük a Földet is, mert a jelenség nyilvánvalóan kapcsolódik a gravitációhoz. Hozzád képest a Föld is állt, az ő impulzusa is nulla volt. Az impulzusmegmaradás törvénye kimondja, hogy a zárt rendszer összimpulzusa nem változik, és a csónak–te–láda–Föld valóban vehető zárt rendszernek, aminek **az összimpulzusa tehát még mindig a kezdeti**, vagyis nulla. Ha viszont a kék és a piros vektort összeadjuk, az eredőjük egyáltalán nem nulla, akkor mi van már megint? **…**

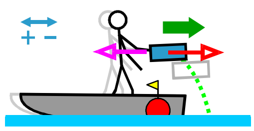


Itt <u>egyetlen</u> válasz lehetséges, csak mernünk kell kimondani: a Föld is mozog. A láda eldobása után annak is van egy impulzusa, akkora, hogy **a két másik vektorral összeadva az eredőjük** mindig a kezdetire (nullára) jöjjön ki. A zöld nyíllal be is jelöltem a szükséges harmadik vektort, ami a Földnek az ebben a pillanatban érvényes impulzusát mutatja. Ahogy a láda impulzusa lejjebb fordul és növekszik, a Föld impulzusának is növekednie kell! Csak így maradhat igaz a törvény. Még visszatérünk erre.

Ez újabb példa arra, ami az egész tankönyv mottója: *ragaszkodj a törvényekhez*. Te jársz jól vele. Eszünkbe sem jutna, hogy a láda eldobásával a Föld is mozogni kezd. De ha megnézzük a rajzunkat, a nyilakat, látjuk, hogy a Földnek mozognia *kell*, nincs más válasz a kérdésre. A zöld impulzusvektor elég nagy. Viszont $I=m\cdot v$, a Föld tömege gigantikus, akkor pedig a felfelé mozdulás sebessége megmérhetetlenül apró. De nem tökéletesen nulla.

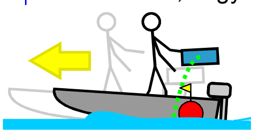
> Ha elkapsz egy pillanatot egy megszokott jelenetből, és elkezded boncolgatni, *szórakozásból*, akkor érdekes kérdések tudnak felbukkanni. Számolni sem kell hozzá. És nagyon kellemes érzés, amikor bizonyítékát kapod annak, hogy nem is vagy hülye a fizikához. És a fizika sem hülyeség.

Gyakorlásképp elemezzük azt az esetet, amikor te hátradobod a ládát a csónakból. Te vagy 70 kg, a csónak 80 kg, a láda 12 kg. A láda sebessége hozzád képest 2,5 m/s, jobbra. <u>Te erőlökést adsz</u> a ládának, visszahatásként az erőlökést ad neked, aminek egy részét a csónaknak adod, hogy ő is jöjjön veled. Tehát a jelenet egy akció–reakció párosra alapul. A továbbiakban tekintsük pozitívnak a bal, negatívnak a jobb irányt. Pontosan mekkora lesz a sebességed a láda eldobása után?

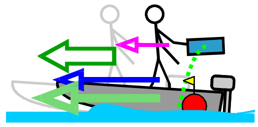


A feladat nem szól kezdősebességről, tehát **a csónak a bója mellett áll**. A láda végsebessége a zöld nyíl irányába 2,5 m/s lesz, az impulzusa a piros vektor, $2{,}5\cdot 12=30$ kgm/s lesz, jobbra mutat. Az akciód visszahatásaként tehát a láda 30 kgm/s-os, balra mutató erőlökést ad neked (lila vektor), és rajtad keresztül a csónaknak is. $v=I/m$, felveszel a csónakkal együtt egy $30/(70+80)=$**<u>0,2</u>** <u>m/s</u>-os sebességet, balra. **Ezt az adatot még felhasználjuk.** A láda a bója <u>mögé</u> esik.

> Jegyezd meg: **nem a ládának adott 30 kgm/s impulzus mozdít el téged balra!** Ugyanaz a helyzet, mint az erő–ellenerő párok kezelésével az erőtani számításokban. *Az az impulzus a ládáé*, **te a reakcióból származó, ellenkező irányú ellenimpulzust kapod meg tőle**, rád a láda ereje hat, ami itt balra mutat, és téged balra mozdít. Ez nem öncélú precízkedés, ez segíthet elkerülni egy nehezebb feladatban is, hogy összekuszálódjanak a szálak a megoldásod gondolatmenetében.

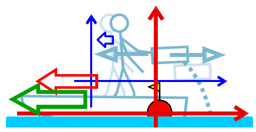


Mi van, ha a csónak már <u>halad</u>, +3 m/s sebességgel? A ládát akkor dobod el, amikor elhaladsz a bója mellett. Te kisebb sebességgel dobtad el a ládát, mint amennyivel a csónak megy, a láda kicsit *előrefelé* esik, és a bója elé érkezik. A kocsiból kidobott pénzestáskához hasonló eset.



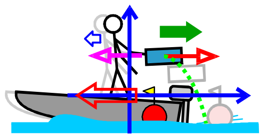
A számítás nem nehéz. De több lehetőség, több nézőpont is van, amelyek mind ugyanazt az eredményt adják, és most nézzük meg azt, hogy szőrszálhasogató aprólékossággal és következetességgel hogy is jutunk el az eredményig. Egy ilyen egyszerű feladat még jól átlátható, de amikor már nem látjuk át a feladatot, akkor kell az aprólékos következetességbe kapaszkodva, tapogatózva eljutni a célig. Ezért figyeld meg gondosan ezt a hosszadalmas példát, **az eddig tanultak összefoglalásául**. Próbálok a rajzokkal segíteni, de ha a nyilak zavaróak, akkor elég, ha csak a lényegre összpontosítasz.

1 – Tudjuk, hogy ha egy INERCIARENDSZERben egy test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, akkor a testhez köthetünk egy másik inerciarendszert, és **a két rendszerben mért adatok egymásba előjeles összeadással átszámíthatók**. Hasonlóan ahhoz, amikor a kocsi ablakából kidobtad a pénzestáskát, és a földhöz és a táskához rendelt két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képest mozgott. Akkor most hozzárendelünk egy inerciarendszert a csónakhoz, a kék tengelyekkel. A csónakhoz képest a csónak nem mozog, ugyebár, ezért a kék rendszeren belül felhasználhatjuk az *álló helyzetre* korábban kapott eredményt, anélkül, hogy azt itt pontosabban elemezgetnénk, annak a rajzát itt csak felidézem. Ott azt kaptuk, hogy a csónak eredeti helyzetéhez, a kék rendszer origójához képest +0,2 m sebességgel kezdtetek el mozogni, balra, a kis kék nyíllal ezt jelzem.

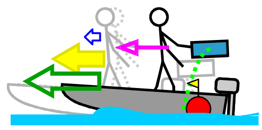


A bójához kötött, számunkra álló, piros tengelyekkel jelölt rendszerben kezdetben a csónak, és a hozzá rendelt inerciarendszer +3 m/s sebességgel haladnak (balra). Most előjelesen összeadjuk magának a kék rendszernek a mozgását az azon belüli mozgással, és megkapjuk a kettő eredőjeként a zöld nyíllal jelölt 3+0,2=**3,2** m/s eredményt. Az előjelességgel azt hangsúlyozom, hogy ha például a kék rendszeren belül a mozgás negatív, jobb irányú lenne, mert nagyobbat lendítesz a ládán, akkor ezt a negatív értéket adnánk a +3 m/s-hoz. Ebben a megoldásban valójában nem számított, hogy milyen jelenségről van szó, mi csak a sebességet *transzponáltuk* egyik rendszerből egy másikba, és egy mondattal is elintézhető lett volna az egész.

2 – Az **akció–reakció** által okozott impulzus*változásokra* már van egy képletünk: $\Delta I_1=-\Delta I_2$. Az álló helyzetre végzett számításból tudjuk, hogy te a ládának adtál −30 kgm/s erőlökést (jobbra), az impulzusa ennyivel változik. A képlet szerint +30 kgm/s-mal változik a te impulzusod, ellentétes irányba (balra). **A reakció által okozott impulzus*változás* a rendszer kezdeti sebességétől független.**



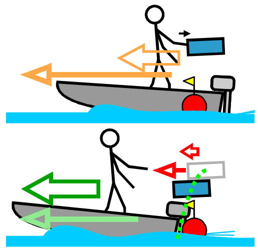
a) A csónak +3 m/s-mal halad a bójához viszonyítva, te a csónakban állva azt látod, hogy a bója mozog jobbra. Egy olyan inerciarendszerben, amely hozzád és a csónakhoz van rendelve (a kék tengelyek jelzik), a kezdeti sebességetek nulla, vagyis a kezdeti impulzusotok is 0. Tudjuk, hogy az impulzusváltozás +30 (lila vektor), tehát az új összimpulzusotok 0+30=30 kgm/s. Ebből kiszámítható a közös sebességetek, $v=I/m$, 30/(70+80)=0,2 m/s, **a mozgó inerciarendszerben nézve**. Az 1. változatban is láthattad, hogy ez a rendszer a bójához képest +3 m/s-mal mozog (piros nyíl), de te ezen belül is +0,2 m/s-mal haladni kezdtél (kék nyíl). A két érték összeadása után kapjuk, hogy a bójához képest a sebességed +**3,2** m/s lett. Az impulzusváltozásból kiszámoltuk a sebességváltozást a mozgó rendszerben, majd az 1. változathoz hasonlóan átszámítottuk álló inerciarendszerbe.



b) Ha a bójához rögzített vonatkoztatási rendszerben nézzük a jelenetet, vagyis a szokásos módon, akkor a csónak, te és a láda kezdetben 3 m/s sebességgel mozogtok balra. A ládától megkapod a +30 kgm/s-os erőlökést (lila vektor). A ládát eldobtad, vagyis maradtál te és a csónak, az együttes impulzusotok +30-cal nő. Az együttes tömegetek 70+80=150 kg, tehát 30/150=0,2 m/s a sebességetek *növekedése* (kék nyíl). Az eredeti sebességetek +3 m/s volt (sárga nyíl), hozzáadódik a +0,2, az összesen +**3,2** m/s (zöld nyíl). A láda impulzusát nem kellett kiszámolnunk, mert az ismert reakcióimpulzusból számított sebességnövekedést használtuk fel. Ahogy látható, a láda leesik a bója elé.

c) A ládától megkapod a +30 kgm/s-os erőlökést (lila vektor). A ládát eldobtad, vagyis maradtál te és a csónak, és az együttes impulzusotok ezzel a +30-cal nő. Nem kell számolgatni, hogy ez mekkora sebességváltozást eredményez, az a fontos, hogy ez az impulzus beolvad a már meglevő kezdeti impulzusotokba. A sebességetek a bójához rendelt álló vonatkoztatási rendszerben eredetileg 3 m/s volt, vagyis a csónakkal vett közös impulzusod a közös tömegetek alapján kezdetben 3 m/s·(70+80)=450 kgm/s (kék vektor). Ez nő az erőlökéssel 450+30=480-ra (zöld vektor). Ebből megkapod az új sebességeteket: $v=I/m$, 480/(70+80)=**3,2** m/s (zöld nyíl). A közvetlen sebességváltozás helyett az új sebességet az ismert értékkel megnövelt impulzusból számoltuk ki.

3. – Az eddigi módszerek az akció és reakció által létrejövő impulzusváltozást használták alapul, ez a módszer viszont a rendszerben bekövetkező **sebességváltozást figyeli**, a bójához rendelt, szokásos vonatkoztatási rendszerben, és a három testből álló rendszer **összimpulzusának megmaradására** alapoz. Kezdetben te, a csónak *és a láda* még *közös rendszer vagytok*. A sebességetek a bójához rendelt viszonyítási rendszerben 3 m/s (üres sárga nyíl), a tömegek 70+80+12=**162** kg. Az impulzusotok



$I=m\cdot v$, 3·162=**486** kgm/s, ebből az alapállapotból indulunk ki. Ezután a ládát meglendíted és kidobod hátrafelé, a kezdeti 3 m/s-os **sebességét 2,5 m/s-mal csökkentve**. A láda sebessége most már csak 3−2,5=0,5 m/s-ra (üres piros nyíl). Csökkent a láda sebessége, akkor viszont automatikusan csökkent az impulzusa is, már csak 12 kg·0,5 m/s=6 kgm/s (piros vektor).

A láda része volt, és *most is része* a te–csónak–láda zárt rendszernek. Nem magától vagy egy külső hatásra lassult le, hanem te hatottál rá úgy, hogy a sebessége megváltozzon, **ez nagyon fontos**. A rendszer összimpulzusa 486 kgm/s volt (sárga vektor), és az impulzusmegmaradás törvénye szerint még most is annyi, csak **megoszlik a rendszer elemei között**. A láda jelenlegi impulzusa, 6, a maradék 480 kgm/s tehát benned és a csónakban van (zöld vektor). Csak így lehetséges, hogy az összimpulzus *ezután is* 486 kgm/s, erre a törvényre lehet támaszkodni. A láda elkülönült, nem foglalkozunk vele, járja a saját útját, mi már csak a csónak–te alrendszer tömegét és impulzusát nézzük. $v=I/m$, a sebességek most már 480/(70+80) =**3,2** m/s (zöld nyíl).

Az összimpulzus nem változott, de láda a rendszerből elvonulva valamennyi impulzust magával vitt. Csakhogy kevesebbet, mint amennyi kezdetben arányosan neki jutott, egy részét bennetek hagyta. Nektek "fejenként" több impulzus maradt így. **Ezért a sebességetek összességében nő.** Nézd meg ezt a számításban, nehogy félreértsd. A csónak sebessége és a te sebességed összehangoltan, azonos mértékben nő, egyébként elmozdulnátok egymáshoz képest. Az új sebességet az ismert értékekkel csökkentett impulzusból és tömegből számoltuk ki.

Ahogy megfigyelhetted, **az összes itt bemutatott módszer elvezetett a jó eredményhez**. Ha tudod, értsd meg mindet, aztán választhatsz neked tetszőt. Az 1. megközelítés az impulzussal igazából nem is számol, csak átveszi az álló helyzethez kapott sebességet. A 2a a mozgó kezdőállapotot segíti állóvá egyszerűsíteni, márpedig az akció erőlökése az álló helyzetből jön ki a legtisztábban. A 2b módszer a "bizakodó", mert arra alapoz, hogy az impulzusváltozásból kiszámítható sebességváltozás mindig hozzáadható a kezdeti sebességhez. A 2c a "gyanakvó", mert a sebességváltozást előbb átszámítja impulzusváltozássá, hozzáadja a másik impulzushoz, majd visszaszámítja sebességgé. Hátha a 2b változat valamiért nem igaz. (Megtörténhet, a helyzet félreértelmezése miatt.) És a 3. módszer a "leltározó", ami különösen akkor jön jól, amikor *nem értjük*, hogy a rendszer elemeinek a sebessége *miért* változik, de az összeg nem változhat, vagyis ami kijön, annak jónak kell lennie.

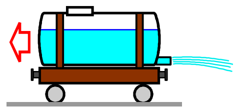
A 12 kg-os láda impulzusa 6 kgm/s volt. Milyen vonatkoztatási rendszerben? És a −30?

Gyakoroljunk még, villámkérdésekkel. **1)** Mennyi a teljes rendszer kezdeti tömege? **2)** Az álló csónakban mennyi a kezdeti összimpulzusotok? **3)** Miért változik a láda impulzusa? **4)** Ha a ládát egy daruval elveszik a kezedből, akkor mekkora a reakció impulzusa? **5)** Minek nevezzük azt, ha a sebesség változik? **6)** Meddig tart a gyorsítási szakasz? **7)** Miután a ládát eldobtad, mekkora a csónak gyorsulása? **8)** Miért? **9)** Valamid a csónakéval egyforma: a tömeg, a sebesség, a gyorsulás vagy az impulzus? **10)** Mennyivel nő a csónak sebessége, ha téged helikopterrel kiemelnek belőle? **11)** És ha egy katapultülés kidob hátra? **12)** Miért inerciarendszer a csónakhoz rögzített vonatkoztatási rendszer? **13)** Mennyi ideig tart a láda kidobása? **14)** Mekkora erő kell a láda kidobásához? **15)** Mekkora erő gyorsítja a csónakot? **16)** Mekkora a láda gyorsulása? **17)** Honnan tudjuk a láda tömegét? **18)** Mennyi a csónak–te–láda rendszer összimpulzusa a dobás után? **19)** Miért nem marad csak benned a ládától kapott impulzus? **20)** Hogy történne mindez a világűrben?

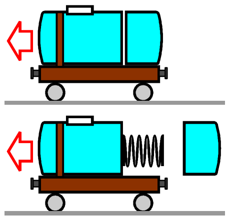
Válaszok: **1)** 70+80+12=162 kg. **2)** Ha áll, a sebessége nulla, akkor az impulzusa is nulla. **3)** Mert megváltoztatod a sebességét. **4)** Nulla, mert a ládára nem fejtettél ki erőt az elmozdítása érdekében. Levált a rendszerről, mint a lefékezett aranyvagon. **5)** Gyorsulásnak. **6)** Ameddig erőt fejtesz ki a ládára, lényegében ameddig el nem engeded. **7)** Semennyi, nulla. **8)** Ha nem hat rá erő, akkor nem változik a sebessége, ez a tehetetlenség törvénye. Ha a ládát már eldobtad, nem fejtesz ki a csónakra újabb *vízszintes* irányú erőt. **9)** A sebességed, különben valamelyikőtök lehagyná a másikat. És a gyorsulásod is, mert azonos idő alatt éritek el ugyanazt a sebességet. A tömegetek nem egyforma (70 és 80), és azonos sebesség esetén az impulzusotok a tömeggel arányos, vagyis szintén nem egyforma. **10)** Semennyivel, a rendszeretek *kölcsönhatás nélkül*, "magától" kettéválik. A tömegetek arányában megosztoztok az impulzuson, és a sebesség nem változik. Mint az aranyvagon lekapcsolásánál. **11)** Akkor a csónak fejt ki erőt a te elmozdításodra, pont mint ahogy te tetted ugyanezt a ládával. A csónak sebessége a te kidobásod sebességétől függő mértékben nő (mert hátrafelé dob ki). **12)** Ha a csónakban elgurítasz egy golyót, az egyenes vonalban egyenletesen mozog, magyarul a csónakban érvényes a tehetetlenség törvénye. Ez a feltétel. **13)** Nem tudjuk. A számításhoz nincs rá szükség, ha a sebességet és a tömeget ismerjük. **14)** Nem tudjuk. Az eldobás időhosszát kellene ismernünk, hogy a $\Delta I=F\cdot t$ alapján kiszámolhassuk. **15)** A ládára kifejtett erőre válaszul a láda is erőt fejt ki rád és a csónakra, Newton III. törvénye szerint. A mértékét nem tudjuk, de annyi, amennyivel te gyorsítottad a ládát. Egyébként könnyen lehet, hogy az erőd nem volt egyenletes, vagyis átlagolni kellene. **16)** Nem tudjuk. Kellene hozzá vagy az idő, vagy a gyorsítás közben a láda által megtett út hossza. **17)** Kíváncsiságból rátettem egy mérlegre, mielőtt beszálltam a csónakba. **18)** Amennyi a dobás előtt volt, ez benne a jó. *Külső erő* nem avatkozott a rendszerbe. **19)** Akkor csúszni kezdenél a csónakban előre, mert a sebességetek már nem lenne azonos. A tapadási súrlódásnak köszönhetően a csónakot felgyorsítod annyira, magadat pedig lelassítod annyira, hogy az impulzusotok aránya és a sebességetek összehangolódjon. Mint amikor a két vagon összekapcsolódott. **20)** Az űrben súlytalanság van, de a tömeg és a sebesség ugyanúgy működik, mint a földön. Vagyis a láda eldobásakor ugyanúgy megkapnád a reakcióimpulzust a ládától. De mivel nem nyom a súlyod a csónak fenekéhez, nincs közöttetek súrlódás, ezért a csónak ott marad, te pedig elrepülsz. Nagyobb sebességgel, mert az impulzus most csak téged gyorsít.

Jó volt? Fújd ki magad. Eleged lehet a ládákból és csónakokból.

Az előző fejezet egy kérdéssel ért véget. Mi van, ha a 8 tonnás kocsiból *adagonként* lövünk ki 2 tonna vizet úgy, hogy a kocsihoz képest a víz sebessége mindig 11 m/s legyen? Amikor egyben lőttük, akkor nőtt a kocsi sebessége, **18,67 m/s**-ra. Ha érdekel, akkor elmondom.



Mi a <u>elvi</u> különbség 2 tonna és 2 gramm víz között? Semmi. Az ellökött tömeg nagysága csak egy szám, ami bármi lehet. Eddig mi mindig egyetlen lökést, dobást, lövést vizsgáltunk. Ebben a vízkilövős esetben viszont az a más az eddigiekhez képest, hogy *a tömegek ellökése ismétlődik*. Valójában folyamatos, de vehetjük sok apró ellökés sorozatának. Minden adag víz kilövése növeli az impulzust. Minden adagra érvényes a képlet, amely szerint $\Delta \mathbf{I}_1=-\Delta \mathbf{I}_2$, ahol I_1 a továbbhaladó kocsi impulzusa, I_2 a kilőtt vízadag impulzusa, és a kettő változása azonos nagyságú. Azért mínusz, mert a sebességváltozás, az impulzusváltozás ellentétes irányú. Számoljunk.



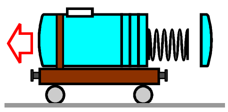
Először ellenőrizzük, hogy ha az adagot 2 tonnának vesszük, akkor ugyanazt kapjuk-e a kilövős (akció–reakció) felfogásban, mint amennyit a "lefékezős" felfogásban kaptunk korábban. A víznek a kocsihoz mért sebessége 11 m/s. Akkor az akcióba fektetett erőlökés impulzusa m·v=22000 kgm/s. A reakció impulzusa ugyanennyi, tehát ennyivel fog megnőni a kocsi impulzusa. Mennyi a kocsi tömege? <u>Az akció–reakció úgy zajlik</u>, hogy először csendben **elkülönítjük a kilökni szánt tömeget**, kettéosztjuk a kocsit, mindkét rész őrzi a saját impulzusát, a lekapcsolt aranyvagon mintájára. És *ez után* löki el a már csak 6000 kg-os kocsi a 2000 kg-os adagot. A te tömegedet sem adtuk össze a kigyúrt óriáséval, mert csak a te tömeged fog gyorsulni azzal, hogy az ő tömegét ellököd. A kocsinak van egy kezdősebessége és ebből egy **impulzusa ($\mathbf{I}_1$), amihez hozzáadódik az az erőlökés**, amit a másik tömeg ellökésével szerzünk ($\mathbf{I}_2$). Ahogy a láda kidobásakor is láttuk, orrvérzésig. A kocsi sebessége kezdetben 15 m/s, az impulzusa 6000·15=90 ezer, ehhez adódik 22 ezer, az összesen **112 ezer**. Ebből a kocsi új sebessége 112/6=<u>18,67 m/s</u>. Helyes, tehát kétféleképpen is megnéztük, és mindkét módszer ugyanazt az eredményt hozta, amikor a 2 tonna egyben lökődik el. Reméljük, hogy az eredmény akkor is ez, amikor a víz kisebb adagokban távozik.

Akkor most legyen egy adag 500 kg, így gyorsan végzünk az ellenőrzéssel. A feladat szerint a víz sebessége a kocsihoz képest *mindig* 11 m/s, eszerint a kilövés impulzusa mindig 5500 kgm/s. A víz reakciója ekkora erőlökéssel növeli a kocsi impulzusát. Az első adag ellökésekor a kocsi tömege 7500 kg, a kocsi sebessége most még <u>15 m/s</u>, az impulzusa 7500·15=112500, ehhez adódik az 5500, összesen 118000, ebből az új sebessége 118000/7500=<u>15,733 m/s</u>.

Következő adag. Reakció-impulzus 5500, a kocsi tömege *7000 kg*, a sebességből az impulzusa 110133 kgm/s. Ehhez jön 5500, összesen 115633, ebből osztva 7000-rel az új sebesség <u>16,519 m/s</u>. Látod? A sebesség minden kilőtt adaggal szépen nő. Rövidítve a folytatás: 16,519·6500=107734, +5500 =112874, /6500 =<u>17,36 m/s</u>. ·6000=104191, +5500=109691, /6000=<u>18,28 m/s</u>.

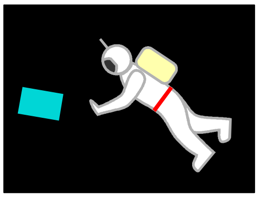
Hm, *ez kevesebb*, mint ami a 2 tonnás adaggal kijött. Ha a KÖZEGELLENÁLLÁSI ERŐ fejezetének végét megnézed, látsz egy példát egy másik folytonos sebességváltozás *iterációs*, apró lépésekben történő kiszámítására Excelben. Csináltam egy táblázatot erre az esetre is, és az derült ki, hogy amikor 1 kg méretűre csökkentjük a kilőtt adag méretét, akkor a kocsi végsebessége már csak **18,165 m/s**. És az impulzusa ennek megfelelően csak **109 ezer**, nem 112 ezer.

De miért van így? Ugyanakkora tömeget lökünk ki ugyanakkora sebességgel, csak nem egyszerre. Miért lesz kevesebb a kapott impulzus? Hol van az elvi különbség?

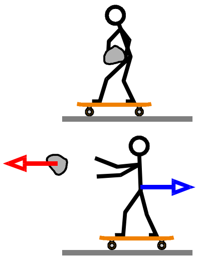


Igazság szerint nem a kapott impulzus kevesebb, hanem *amennyi megmarad* belőle. Törd egy kicsit rajta a fejedet. Nem könnyű felismerni a probléma okát, de csak logikus gondolkodásra van szükség hozzá. Adok hozzá egy pici segítséget ezzel a rajzzal. Ha megfejted, arra már büszke lehetsz. (Esetleg csinálhatsz belőle egy kiselőadást?) Ha megfejted, akkor megtudod, hogy mi keserítette el azokat, akik bő százhúsz évvel ezelőtt már azon agyaltak, hogyan lehetne ezt a jelenséget használni is valamire. Folyt. köv.

Reaktív hajtás



Van, amikor az akció–reakció jelenség nem kényelmetlenséget okoz, hanem hasznot hajt. Például jármű meghajtására is lehet használni. A legegyszerűbb "jármű" lehet rögtön egy űrhajós, aki a súlytalanságban véletlenül olyan helyen maradt, ahol nincs semmilyen kötél, kapaszkodó, semmi olyan, amivel a helyét meg tudja változtatni. Ilyenkor az űrhajós nem sokat tehet, hiszen ha csak hadonászni, forgolódni kezd, a *tömegközéppontja* akkor sem változtatja meg a helyét, mert nincs másik test, ami hatna rá, vagyis a mozgásállapota nem változik. De ha van nála valami szerszám, doboz vagy nélkülözhető ruhadarab – minél nagyobb tömegű, annál hatásosabb –, és azt nagy erővel eldobja magától, akkor a tárgy a sebességének és tömegének szorzatával kiszámítható impulzust szerez. De ennek az impulzusnak az "ellenpárját" az űrhajós kapja. Ha ezt elosztjuk az űrhajós tömegével, akkor megtudjuk, hogy ő mekkora sebességgel fog az ellenkező irányba megindulni. Az "akcióra" a "reakció" volt a válasz.

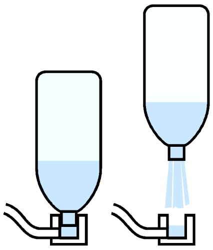


Kipróbálhatod a jelenség működését magad is, gördeszkán vagy görkorcsolyán. Ha veszel egy nagy követ és nagy erővel eldobod, akkor a másik irányba fogsz gurulni. Ha ezt egy jó nagy gördeszkán csinálnád, amit előtte megpakolsz még néhány kővel, akkor újabb lendületet is tudnál venni újabb adag "hajtóanyag", újabb erőlökések felhasználásával. Ráadásul a deszka minden eldobott kővel könnyebb lenne, az $\mathbf{m{\cdot}v{=}\Delta I}$ képletben az $\mathbf{m}$ egyre kisebb, emiatt egyre nagyobb $\mathbf{v}$ nyerhető egy újabb dobással.

Egy űrhajó az űrben, a tehetetlenségi pályán, súlytalanságban haladva szintén nem tud semmibe kapaszkodni, még víz vagy levegő sincs körülötte, és felszálláskor is gyorsan kikerül a még használható sűrűségű levegőburokból. Csak az akció–reakció jelenségét hívhatják segítségül. Az előző példákból tanulva az űrhajó magával visz egy hatalmas tömegű tárgyat, és azt jó erősen ellöki. Ezzel az űrhajó sebességre tesz szert az ellentétes irányba.

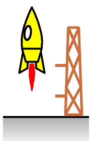
Csakhogy az űrhajónak nagyon nagy erőlökésekre van szüksége. A Föld körüli pályán maradáshoz majdnem 8 km/s kell, ami 28800 km/h! Ekkora sebességek eléréséhez bitang nagy tárgyat kell ellökni óriási sebességgel, nagyon rövid idő alatt. Ez még robbanóanyagokkal sem fog sikerülni. De az űrhajósokat sem tehetjük ki egy robbanásszerű gyorsulás túlterhelésének. A megoldás ott van a vizet kilövellő vasúti kocsiban vagy a gördeszkában: a nagy testet "kis darabokban" kell ellökdösni.

A kő impulzusa pontosan ugyanakkora lesz, mint a tiéd. És a sebessége?



PET palackból remek rakétát lehet fabrikálni. Körülbelül harmadáig vízzel megtöltjük, valami egyszerű szerkezettel megfogjuk lefordítva úgy, hogy a víz ne folyjon ki belőle, és levegőt lehessen a palackba pumpálni. A benyomott levegő a víz feletti térben gyűlik össze, és amikor a palack elszabadul, a vizet erős sugárban kifújja. A víz adja azokat a "kisebb testeket", amelyeket a rakétának a gyorsuláshoz hátra kell dobálnia. Egy ilyen palack vagy 20 méterre is képes felemelkedni, főleg ha a légellenállását is csökkentjük.

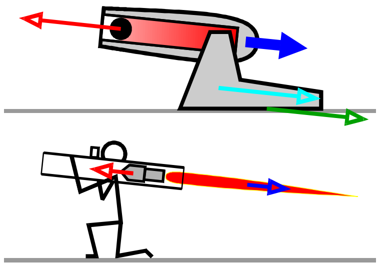
Ez a megoldás nagyban persze nem működne. Nem a vízzel van baj, hanem a kívánt impulzussal. Az űrhajónak a vizet különlegesen nagy sebességgel kellene kifújnia, és erre alkalmas szivattyú, pumpa nem is nagyon képzelhető el. Ellenben ha valami más anyagot visz magával az űrhajó – azért kell magával vinnie, mert percek alatt kell azt kidobnia, elnyújtva a gyorsulást, csökkentve az űrhajósok terhelését –, valami gyúlékonyat, akkor azt egy szűk helyen el is lehet égetni, és akkor majd kifújja saját magát, külön gép használata nélkül is. Az égés, ha sikerül kellően hevessé tenni, megadja a hátul kilövellt anyagnak a szükséges sebességet. Igaz, hogy a kidobált "testek" csupán az égésgáz molekulái, de ezek nagy mennyisége és nagy sebessége létrehozza az űrhajó által felvenni kívánt jókora impulzust. A "sok kicsi sokra megy" szólás tökéletes példája.



Annak ellenére, hogy a rakéta hajtóműve az ereje, a hőség, a dübörgés miatt semmihez sem hasonlíthatónak érződik, a lényegét nézve mégis azonos a gördeszkáról dobált kövek módszerével. Ezt a módszert nem csak az űrrakéták használják, hanem minden rakéta, a tűzijátékokat is ideértve, de a repülőgép és a jet-ski hajtóművei is.

Megjegyzés: van olyan rakéta is, ami még a gázmolekuláknál is kisebb testeket lövell ki, ez az ionhajtómű. A kilőtt protonok össztömege viszonylag kevés, emiatt a rakéta gyorsulása is csekély, de mivel a protonokat nagyon nagy sebességre gyorsítják, sokkal kevesebb hajtóanyag elég az útra. Egy kísérleti űrszonda már eljutott vele a Holdig, egy másik pedig egy üstökösig.

Miért viszi magával a felszálló rakéta az üzemanyagot ahelyett, hogy egyszerre kilőné?



Lássunk még egy példát arra, hogy az akció–reakció mikor hogyan működik. Ha egy ágyúból kilövünk egy ágyúgolyót, akkor a felrobbanó lőpor rugóként ellöki egymástól a golyót *és az ágyúcső végét*. Hiszen ez a két test az, aminek ez a rugó nekifeszül. Az ágyúcső vége nem kezd önálló életbe, hanem az egész ágyúcső a rá ható erő és a golyó kilökődésének ideje szorzatával kiszámolható erőlökést kap. Ha nem lenne rögzítve, akkor előírásszerűen megindulna hátrafelé, az erőlökésből és a tömegéből kiszámítható sebességgel. (Néha megesik ilyen, ezért nem áll a tüzér az ágyúcső mögé.) Ámde a cső rögzítve van az ágyútalphoz, az erőlökés így arra is hat, de az ágyútalp rögzítve van a földhöz, vagyis az erőlökés a Földre is hat. Ezek együttes tömege akkora, hogy az ágyú, ha a rögzítés szupermerev és nagyon erős lenne, meg sem rezdülne. Nem elvész a kilövés "reaktív" impulzusa, hanem végül a Földbe vezetődik át, amint azt már jól tudod, csak annak a tömege azt észlelhetetlenné teszi.

Ezzel szemben a vállról indítható rakétát egyetlen ember is ki tudja lőni, és a lövedék által felvett jókora impulzus mégsem dönti le őt a lábáról. Azért, mert a lövedék *nem fejt ki erőt* az emberre. A cső csak azt a célt szolgálja, hogy amíg a rakéta felgyorsul, addig irányban tartsa, ezért a hátsó vége is nyitott. A rakétalövedék impulzusát a hátrafelé kifújt égésgáz összes impulzusa adja ki, a heves égés által a gáz molekuláinak adott nagy sebesség és a néhány kilogrammos tömeg szorzata. *Itt is van akció–reakció.* A rakéta hátralövelli az égésgázt, ez az akció, a gáz pedig nekifeszül a lövedéknek, erőlökést ad neki, ez a reakció. A cső és az ember kimarad ebből a zárt rendszerből! Rendszeren kívüli tényezők. Ezért nem fejt ki erőt a rakétalövedék egyikre sem, ezért nem kell a kilövéshez masszív támaszték.

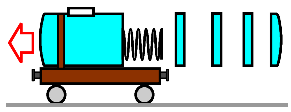
A pisztoly, puska, aknavető, katapult, íj mind az ágyú csoportjába tartozik, mert a lövedéket **a kilövőszerkezet gyorsítja fel** valahogy. Itt is történik akció és reakció, de az elrepülő testek a sebességüket jellemzően nem más testek ellökésével szerzik meg, hanem őket lökik el. Az impulzus és ellenimpulzus megakadályozhatatlan kapcsolata persze itt is létezik, de a célunk ilyenkor valójában az lenne, hogy az egyik "test" mozdulatlan maradjon, a Földhöz kapcsolva, és csak a másik test kezdjen mozogni.

A **reaktív hajtás** azt jelenti, amikor egy szerkezet önálló rendszerként **saját magát gyorsítja**, más testek nagy erővel való ellökéséből szerezve az impulzusát. Az ellökött test ellenkező irányba történő mozgását nem gátoljuk, és minden egyéb, mi magunk is a lövedék és "ellenlövedék" rendszerén kívül maradunk.

Egy ágyú elsütésekor hol van a testek közötti "rugó"?

Tartozom a magyarázattal az előző fejezetben lógva hagyott problémára. Nyilván látod, hogy az is a reaktív hajtás egy fajtája. Sőt, tanpéldája annak, hogy a rakétáknak mi a leggyengébb pontja. Ha érdekel, tanulhatsz belőle, a magyarázatból azt is figyeld meg, hogy mindezt *hogyan* számolom ki.

A számítások során azonos eredményre jutottunk, amikor azt néztük meg, hogy egy adag víz kilökése után mennyi impulzus marad a kocsiban, és amikor azt, hogy a víznek adott impulzus reakciója mennyit ad hozzá a kocsi aktuális impulzusához. Az első nézetben a víz sebessége 4 m/s-*ra* csökken, a másodikban 11 m/s-*mal* csökken. A következő adagoknál a víz sebessége mindig 11 m/s-mal kisebb a kocsinál, de a kocsi sebessége eközben egyre nagyobb. Ezért a 4 m/s helyett nagyobb lesz a vízlöketnek a földhöz viszonyított sebessége. Négy adag kilövésekor, fél tonnás adagokkal a kocsi kezdeti 15 m/s-os sebessége így nő: 15,733 - 16,519 - 17,36 - 18,28. Ha ebből levonogatjuk a 11-et, amennyi a löketnek mindig a kocsihoz mért sebessége, akkor a földhöz viszonyított sebességük 4 - 4,733 - 5,519 - 6,36 m/s. Ha a lelökött vízadagok nem esnének a földre, hanem megtartanák a sebességüket, akkor azt látnád, hogy a kocsit négy, *egyre nagyobb* sebességű vízcsomag követi. Ez lesz a fontos: a négy vízadag sebessége nem egyforma. Amikor egyetlen 2 tonnás csomagot vizsgáltunk, akkor ez a fontos tényező nem volt észrevehető.



Mit számít ez? Két különböző módszert használtunk a kezdeti számításokhoz. Mindkettő megbízható volt, vegyük hát újra elő az első módszert: a leválasztott vízcsomag mennyi impulzust hagy a kocsiban. A kocsi összimpulzusa kezdetben 8000·15=**120** ezer kgm/s. Az első adag földhöz viszonyított sebessége 4 m/s, a tömege 500 kg, vagyis 2000 kgm/s impulzust "visz magával", amikor a kocsit elhagyja. A többinek a kocsiban *kell* maradnia, mert máshová nem tűnhet el. Épp ezért nő a kocsi sebessége. De mennyi maradt? 120–2=118 ezer. Remélem, hogy követtél, mert most jön a lényeg.

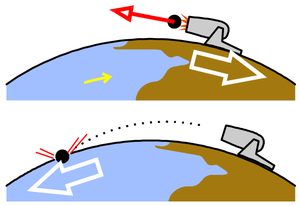
A következő löket földhöz viszonyított sebessége 4,733 m/s, ezt az előbb megállapítottuk. Nem 4. Ennek az adagnak az impulzusa 500·4,733=2366,5 kgm/s. Nem csak 2000. A kocsiból tehát *több impulzust visz magával*, itt "vész el" az, amit keresünk. A harmadik löket sebessége már 5,519 m/s, impulzusa 2759,5, a negyediké 6,36 m/s, 3180 kgm/s. Tehát amikor a 2 tonnát egyszerre dobtuk ki, az elvitt 2000·4=8000 kgm/s impulzust, így viszont elment 2000+2366,5+2759,5+3180, összesen 10306 kgm/s! A végül 6 tonnára fogyott kocsiban az először gondolt 112 ezer helyett marad 109694 kgm/s, a sebessége eszerint 18,28 m/s. A víz hátralövellése tényleg gyorsítja a kocsit, de kevesebbel, mint hinnénk.

Ha lemegyünk 1 kg tömegű vízlöketekre, akkor 2000 lépés után a végsebesség csak 18,165. Mindez tehát azért van így, mert a ledobott vízadagok a kocsihoz képest ugyanakkora sebességgel távolodnak, de az összes impulzust mi a földhöz képest állapítottuk meg, és a vízadagok a földhöz képest mindig nagyobb sebességet vesznek fel. Mondhatjuk úgy is: nem szabad kevernünk az inerciarendszereket.

A problémánkra, vagyis hogy vajon hol tűnik el a szemünk elől az impulzus egy része, egyszerűbb válasz is adható. Amikor egy vízlökettel a kocsi gyorsítja magát, ott várakozik a kocsin a többi vízlöket is. A kidobással kapott impulzus *a később kidobandó adagokat is gyorsítja*. Fölöslegesen, mert azokat később kidobáljuk, kár a gyorsításukra erőt pazarolni. Sajnos a rakéták mindig kénytelenek az üzemanyagot magukkal cipelni, és bizony, a rakéta az erejének nem kis részét arra fordítja, hogy gyorsítsa a hamarosan kidobandó többi üzemanyagot is. A probléma megkerülhetetlen. A megoldás az lenne, hogy a rakéta az üzemanyag következő adagjait onnan venné fel, ahol éppen van, de a világűrben sajnos ma még nem tudunk semmi üzemanyagnak használhatót felszippantani.

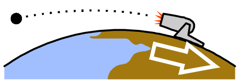
Kérlek, hogy ne felejtsd el észrevenni a példában, hogy arról szó sem esett, hogy a vízadagok hátralökése **mennyi idő alatt** zajlott le. Az impulzus és a sebesség szempontjából ez *mindegy*. Amire hatással van, az a gyorsulás. Az űrhajósok szervezetét 6-8 g-nél nagyobb folyamatos terhelésnek nem tehetik ki, ez az oka annak, hogy űrhajóval a gyorsulást percekre elnyújtják. Gazdaságosabb lenne, ha rögtön az elején jól odadörrenthetnének, de ez a temetkezésnek egy nagyon drága fajtája lenne.

Miért gyorsabb minden kilökött adag a földhöz képest?

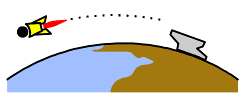


Felbukkan néha az ötlete annak, hogy változtatnunk kellene a Föld forgási sebességén, most mindegy, hogy minek. Tegyük fel, hogy építünk egy hatalmas ágyút, amiből vízszintesen, nagy sebességgel kilövünk egy hatalmas ágyúgolyót, azzal a szándékkal, hogy a golyónak adott óriási impulzus ellenhatásaként az ágyú, valamint a Föld felszínének az a pontja az ellenkező irányban elmozduljon. Az ágyú és a Föld együtt egy zárt rendszer – és ez most nagyjából igaz is –, az akció–reakció jelenségnek működnie kell. Az ötlet elméletileg nem teljesen halott, tekintsünk el a részletkérdésektől meg az okozott szuperföldrengésektől, és kilőjük azt az ágyúgolyót. Valóban, az ágyú ellenirányú erőlökést kap, és mivel a földhöz van rögzítve, magát a Földet mozdítja meg egy kicsit. Az emberiség ujjong, győztünk a természet felett.

Aztán az ágyúgolyó földet ér. Nagy sebességgel lőttük ki, de nem elég naggyal ahhoz, hogy körpályára álljon. Nem baj, a tömege jó nagy, az impulzusa $m{\cdot}v$, elég volt ahhoz, amit akarunk. Nade mi történik, amikor a golyó a földbe fúródik? Megáll, az történik. Az impulzusa nullára csökken. Az **impulzusát átadja a Földnek** egy olyan erőlökéssel, ami pont ugyanakkora, mint amennyit a golyó a kilövéskor felvett. Vagyis a Föld forgása néhány másodpercig valóban megváltozott, de aztán visszaállt az eredeti állapot. Előbb nyertünk, aztán vesztettünk, a mérleg nem változhat. Én megmondtam előre: az ágyú és a Föld együtt egy zárt rendszer. :-)

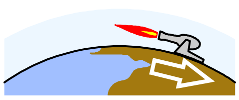


Mit kellene tennünk, ha tényleg változtatni akarnánk a forgási sebességen, ezzel a módszerrel? Az ágyúgolyónak adott impulzusnak *nem szabad visszajutnia* a Földbe, ki kell jutnia a világűrbe. Ugyan az impulzus így sem fog elpárologni, de kikerült az ágyúgolyó–ágyú–Föld rendszerből, és az impulzusok összege ekkor már csak az egész Naprendszeren belül lesz állandó.



Nehéz olyan ágyút építeni, amely megadja a körpálya eléréséhez szükséges 8 km/s végsebességet. Rakétát viszont már tudunk csinálni, mi lenne hát, ha rakétahajtással adnánk meg az erőlökést az ágyúgolyónak? *Semmi sem lenne*. A rakéta saját magát gyorsítja, az előbb láttuk vállról indítva, ezért a gyorsításkor *nem fejt ki ellenerőt* a Földre. Állvány is csak arra kell, hogy a rakéta ne boruljon fel. A Földnek nincs akciója, a rakétának nincs rá reakciója.

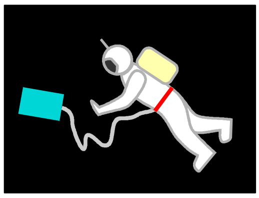
Mi lenne, ha nem ágyúval mozdítanánk a Földön, hanem egy hatalmas rakétahajtóművel? Az hosszabb ideig is üzemeltethető, nagyobb erőlökés érhető el vele. Az ötlet nem rossz, de nem is elég



jó. A rakéta sem művel csodát, ott is csak aprócska "ágyúgolyókat", égésgázmolekulákat lő ki a hajtómű. Ezeket végül lefékezi a levegő, vagyis az impulzus a légkörbe adódik át, abban kelt áramlatokat. A légkör és a Föld felszíne hatással vannak egymásra, bár nem alkotnak merev rendszert.

Mégis, elméleti úton arra következtethetünk, hogy a rakétahajtómű által nyert impulzus ellenimpulzusa a megmozgatott, de lassan lefékeződő levegőből végül feltehetőleg "visszaszivárog" a Földbe, mert máshová nem tud menni. Ha a légkör nem lenne, akkor az égésgáz kitörhetne a világűrbe is, és akkor már kiemeltük és elkülönítettük ezt az impulzust a Földből, a forgási sebesség változása tartós maradna. Kisbolygóval egyszer talán ki is fogjuk próbálni.

Az ábrák csalóka érzetet keltenek a méretekről és az esélyeinkről. Ha a Földet egy 1 m átmérőjű körrel jelöljük, akkor egy 120 méter *magasságú* szuperágyú a rajzon 0,01 mm magas lenne.

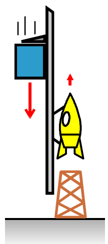


A gondatlan űrhajós, aki ott maradt lebegve az űrben, mert a rakétapisztolyt nem vitte magával, kitalálta, amivel a fejezetet kezdtük, vagyis hogy ellöki magától a nála levő szerszámos ládát. A láda is löki az űrhajóst (a reakció), aki így a láda impulzusával megegyező impulzussal megindul a másik irányba, ahol remélhetőleg már meg tud kapaszkodni. Az űrhajós viszont azt gondolja magában, hogy olyan jó kis szerszámos láda ez, kár lenne kidobni az űrbe, inkább köt rá egy kötelet. Ráadásul ha így visszahúzza a ládát, akkor kidobhatja megint, így akár közlekedhet is az űrben, nem kell neki ehhez rakétapisztoly.

Úgy is tesz. A láda repül, de mivel az űrhajós tömege elég nagy, ezért csak kis sebességgel vánszorog az ellenkező irányba. Sebaj, majd csak odaér. Nade amikor a kötél kiegyenesedik, a láda ránt egyet rajta. Az ellökés előtt a rendszer összimpulzusa nulla volt, és akkor annyi is marad. Amikor a ládát a kötél megállítja, akkor a másik végén megáll az űrhajós is. Sőt, amikor a rugalmas kötél visszarántja a ládát, és a mérges űrhajós még ránt is rajta egyet, akkor az akció–reakció jelenség újra bemutatkozik, a másik irányba, és elég gyorsan közeledni kezdenek egymás felé. A törvény nem korlátozza azt az erőt, amivel az űrhajós a ládát maga felé rántja, ezért akár gyorsabban is megtehetik az utat visszafelé, mint odafelé. Ha aztán az űrhajós elfelejti elkapni a felé rohanó ládát, és az lepattan róla, akkor megint távolodni kezdenek egymástól és a kezdeti kiindulási pontjuktól, míg a kötél megfeszülése újra egymás felé rántja őket, a többiek pedig betegre röhögik magukat, amíg ez a szerencsétlen tikitakizik az űr sötétjében. Amikor pedig végül elkapja a ládát, akkor még mindig pontosan ott lebeg az űrhajós lihegve, ahol az egész elkezdődött.

Támadt egy ravasz ötlete. Amikor a kötél elkezd megfeszülni, akkor finoman lefékezi, hogy a végén ne rántson rajta. Sajnos a lassú fékezés ugyanúgy egy erőlökés, mint a hirtelen rántás, és ahogy a láda lassul, az ellenerőtől lassulni kezd ő maga is. Hát, talán mégis leveszi a ládáról azt a kötelet.

Példafeladat



Képzeljük el, hogy rakétahajtómű helyett a reaktív hajtás egy másik módszerével akarnak egy űrhajót fellőni. A rakéta most is egy nagy tömegű tömböt lök hátra, de egyben. **Felszerelnek a rakétára egy hosszú kilövősínt, és azon csúsztatva gyorsítanak fel egy jókora tömböt, lefelé, valami erős szerkezettel. A rakéta elérendő végsebessége most is 8 km/s. Legyen a rakéta tömege 9 tonna, a hátralökött tömbé 100 tonna.** Tudod, hogy minél nagyobb a test, annál kisebb sebesség kell egy adott impulzus felvételéhez. **A kilövősín hossza 100 méter, a tömege 1 tonna, ennél hosszabb pályát a rakétára erősíteni nemigen lehet. A váratlan kérdés: az induláskor mekkora terhelés éri az űrhajósokat?**

Miféle terhelésről van szó? A tehetetlenségről, amely a gyorsuláskor az ülésbe szorítja az utast. Láthatod, hogy itt pusztán az impulzusok számolgatása nem elég, annál ez összetettebb feladat. Ha gondolod, vegyél elő papírt, és csináld a megoldást szabályosan az általam mutatottak alapján.

Tehát: tudjuk, hogy **az űrhajót fel kell gyorsítani egy ismert végsebességre, és a gyorsulást akarjuk tudni.** Ha a gyorsulás egyenletes, akkor $v=a\cdot t$. És mennyi a t, mennyi idő alatt éri el a rakéta a kívánt sebességét? Amennyi idő alatt a tömb végigszáguld a sínen. És az mennyi? **…** (Gondolkozz rajta.)

Annyit tudunk, hogy a tömböt egy erővel gyorsítjuk lefelé, a hatás–ellenhatás törvénye szerint ugyanekkora erő nyomja a rakétát felfelé. Ha ez az erő elég nagy és elég ideig tart, akkor elég lesz a rakéta felgyorsítására, de az idő legfeljebb annyi, amennyi idő alatt a tömb a sín végére ér. Ez így önmagába ér vissza, ez nem jó az idő megtalálásához.

Egy erő egy ideig? Nem ismerős? **…**

Dehogynem ismerős, hiszen ez nem más, mint az erőlökés definíciója, $\Delta I=F\cdot t$. Szóval ha a rakétának adunk egy megfelelő erőlökést, akkor körpályára tud állni a 8 km/s sebességével. Jó, de nem ismerjük sem az erőt, sem az időt. Valami más kell. Abból, amit tudunk. **…**

Az erőlökés az impulzust növeli, azt pedig meg tudjuk mondani, hogy *összesen* mekkora impulzus kell. A rakéta és a sín együtt 10 tonna, a gyorsulás végére 8 km/s lesz a sebességük, az 80 millió kgm/s. A reaktív hajtás alapelve szerint ehhez a tömbnek lefelé ugyanekkora impulzust kell adni. A szükséges erő és idő ebből fog kiderülni.

A tömbnek a 80 millió kgm/s impulzus eléréséhez, 100 tonnás tömegével, $v=I/m$=800 m/s kell. (Ez nem meglepetés, tízszer akkora tömb, tizedakkora sebesség.) Mivel folytassuk? **…**

Megtudtuk, hogy a tömbnek mekkora lesz a sín végén a sebessége. Egész pontosan ennyinek *kell* lennie ahhoz, hogy az űrhajó elérje a kívánt sebességet. Még mindig a gyorsulást keressük, a $v=a\cdot t$ képletből, v-t ismerjük, és még mindig a t idő a kérdéses. *Na most figyelj jól*: v-t ismerjük? És mennyi? 800 vagy 8000?

Hoppá, *itt két v van*. A gyorsulás az űrhajó gyorsulása lesz, ezért a képletben a v az űrhajó sebessége. A reaktív impulzusból viszont *a tömb sebességét* tudtuk meg, és épp most kevertük volna össze őket. Ezért kell a megoldást most azonnal kijavítanod, amíg még nem mentél be mélyen az erdőbe.

Pont az ilyen keveredések elkerülésére kell a képleteket a célhoz igazítva használni, és szokd meg, hogy ezt lehet és szabad. A felhasználandó egyik képlet: $v_r=a_r\cdot t_r$, ahol a betűk a rakéta adatait jelölik. (Igazság szerint ezt az űrhajót pont nem rakétával gyorsítjuk, hanem a tömb gyorsításával, de az *ű* betűk nehezebben olvashatók ilyen kicsiben.) A gyorsított testre vonatkozóan szintén kell ugyanez a képlet, amit így írunk le: $v_t=a_t\cdot t_t$. Nagyon jegyezd meg ezt, ezért rágom a füled kezdettől a képletek kapcsán az "ahol"-lal, és azzal, hogy használj megkülönböztető jelzéseket. Oldalra leírhatod magadnak, hogy $v=a\cdot t$, de a levezetésben már a megkülönböztetett képleteket használd. Amint észreveszed, hogy egy betűt már két különböző jelentéssel használsz, azonnal kapcsolnod kell, és visszamenőleg kiegészítened.

Keressük a_r-t. Tudjuk, hogy szükséges v_r=8000 m/s. $m_{r+s}=10^4$ kg, $m_t=10^5$ kg, a leendő $I_r=8\cdot10^7$ kgm/s. Az akció–reakció miatt az impulzus mindkét testre azonos, $I_t=I_r$, ebből megtudtuk, hogy v_t=800 m/s. Szükségünk lenne a t_r-re, mert $a_r=v_r/t_r$. Honnan fogjuk megtudni? **…**

Az akció–reakció párban az egyik pontosan addig tart, mint ameddig a másik. Nincs késleltetett reakció és hasonlók. Egy test impulzusának változásához az kell, hogy változtasson a másik test impulzusán. Amint abbahagyja ezt, az impulzusok állandósulnak. Amint újrakezdi, azonnal megindul a kölcsönös változás. Ez akkor is így van, ha az érintkezés csak pikoszekundum hosszú. Szóval $t_r=t_t$, ahol t_t a tömb gyorsulásának időtartama, t_r az űrhajóé.

A tömb mozgásából tudjuk a tömeget, a végső impulzust, a végső sebességet, és még mit tudunk? **…**

Úgy van, a gyorsuló mozgás úthosszát, ami s_t=100 m. Tegyük fel, hogy ezt a kilövéskor az utolsó centiig kihasználjuk, és hogy a testet nem tudjuk tovább gyorsítani, amikor a sínről lerepült. Kellene egy képlet, amelyben van v, s és t. Mivel a jeligémet elfogadva az összes képletet kapásból vágod, gyorsan ki-kerested magadból az $s=(v/2)\cdot t$ képletet, ami pont megfelel az igényünknek. Ez esetben $t_t=2s_t/v_t$ =2·100/800=**0,25** másodperc. Azért ez pusztító látvány lehetne, amikor egy hatalmas tömb negyed másodperc alatt lesüvít 100 méterről. Már az is bravúr lenne, ha az egész szerkezet nem szakadna le az űrhajóról.

Megjegyzem, mindezzel még nem tettünk semmit a légellenállás legyőzésére, és arra sem, hogy az űrhajó teste képes legyen a levegő ütésének és a keletkező súrlódási hőnek az elviselésére. A célnál vagyunk: $t_r=t_t$=0,25 s, $a_r=v_r/t_r$, az űrhajó gyorsulása 8000/0,25=32000 m/s^2.

A nehézségi gyorsulás az, ami a tömegnek súlyt ad, ezt már megbeszéltük. A nehézségi gyorsulás a Földön g=9,80665≈10 m/s^2. Vagyis a rakéta negyed másodpercig 3200 g-vel gyorsul. Ez azt jelenti, hogy erre az időre egy 50 grammos gyűrű súlya 160 kilogramm földi súlyával lenne egyenlő.

Az a kifejezés, hogy ettől palacsintává lapulnál, szépítése a valóságnak. A látvány ugyanaz lenne, mint a körülbelül 300 km/h sebességű érkezés betonra. Kiképzett harci pilóta negyed másodpercig súlyosabb sérülés nélkül kibír 40-50 g-t, ha az szemből éri, és ő egy megfelelő ülésben felkészülten várja. Önkéntessel kipróbáltak fékezést is, tehát hátulról érkező terhelést, és a szeme teljes egé-szében fekete lett a vérömlenytől. Hát ez az, amiért Verne kalandos meséje az ágyúból kilőtt űrhajóval csak egy kedves mese, mert egy űrhajó felgyorsítását a felszálláskor kb. 4 perc hosszúságúra kell széthúzni. Hiába csinálnánk erősebb hajtóművet, ha a nagyobb gyorsulást nem lehet kibírni.

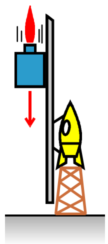
Ez az, amiért a fokozatos gyorsításra képes, folyékony üzemanyagú, többlépcsős rakéta kifejlesz-téséért annyi éven át küzdött az a rengeteg kutató, néhányan az életüket veszítve egy-egy robba-násban. És ez az, amiért a 2. világháború végén az amerikaiak szó szerint kilopták az ugyanezt tervezgető szovjetek elől Wernher von Braun mérnököt és társait a nácik hatalmas kutatóbázisáról, mivel von Braun működőképes rakétákat tudott építeni, amiket a V1 és V2 (fau egy és fau kettő) ballisztikus rakétabombákban a nácik végül eredményesen használtak. Egyébként von Braun később nélkülözhetetlen résztvevője volt az amerikai űrprogram megvalósításának, az Apollo űrhajókat is ideértve.

Felteszek még kérdéseket a feladathoz.

Mi lenne, ha a tömb a sín végéhez érve nem repülne le róla, hanem megállna? … Pont ugyanaz, mint az oktondi űrhajóssal. A tömb a sínnel fékezné magát, a sín pedig az űrhajóhoz van kötve, ezért az űrhajó is megáll, egy borzalmas rántással, majd a maradék egyszerűen visszazuhan.

A tömb leszaladása után a 9 tonnás űrhajó ledobja az 1 tonnás gyorsítósínt. Mennyivel növeli ez az űrhajó sebességét? … Amikor a rabló lekapcsolta az aranyvagont a vonatról, akkor csak kettéosztotta a haladó testet, arányosan kettéosztva az összimpulzust. A következmény az volt, hogy a vagon ment a vonat után, mint a kisbárány, hiszen nem hatott rá a súlyán kívül semmilyen erő, ezért a sebessége sem változhatott, a tehetetlenség törvénye így diktálja. A sín is repül az űrhajó mellett, egyikük sebessége sem változik. (És még súlytalanságban is vannak, mint az ugratón repülő bringás.) A $8\cdot10^7$ kgm/s impulzusból $0{,}8\cdot10^7$ a sínben marad, $7{,}2\cdot10^7$ az űrhajóban. Ha elosztod a tömegükkel, változatlanul 8 km/s sebességet kapsz mindkettőre. Mindemellett érdemes megszabadulni a síntől, mert a későbbi gyorsuláskor, irányváltoztatáskor csak fölösleges teher lesz.

Mekkora utat tesz meg az űrhajó a gyorsítási szakaszban? … Ez nem okozhat fejtörést, $s=(a/2)\cdot t^2$, vagyis $16000\cdot0{,}25^2=1000$ m.



Tegyük fel, hogy a tervezők az űrhajót még nem tudják rakétahajtással az űrbe juttatni, de azt megoldják, hogy a tömböt egy rakétahajtómű gyorsítsa lefelé. Meg is építik, az űrhajós beszáll, a személyzet távozik, a nézők izgatottan hallgatják a visszaszámlálást. Elérkezik a *zéró*, a hajtómű beindul, a száz tonna kétszeres hangsebességgel bevágódik a földbe, és? **…**

És az űrhajós kinéz az ablakon, hogy mi van már. Merthogy az űrhajó nem emelkedett fel egy méternyit sem. Emlékszel a vállról indítható rakétára? Ott a cső csak arra kellett, hogy a lövedéket irányban tartsa, itt éppígy van a sínnel. A tömb most nem azért száguldott lefelé, mert őt az űrhajó valamilyen szerkezet által tolta, a tömb a hajtóművel saját magát gyorsította. Ha az űrhajó nem nyomja lefelé a tömböt, akkor a tömb sem nyomja felfelé az űrhajót, a felszállás elmarad.

Centrum [redacted]

A centrum a testek közös tömegközéppontja. A centrum mozgásáról, tehetetlenségéről, impulzusáról szóló fejezetek az impulzusmegmaradás törvényének kiteljesítését mutatják be. Az órákon valószínűleg nem merültök bele, de nagyon érdekes és elgondolkodtató téma.

A mozgástani szabályok és jelenségek egy része egyetlen pontszerű tömegre vonatkozik, például a tehetetlenség törvénye is. Nem pontszerű, kiterjedt test esetében a testet *pontrendszer*ként fogjuk fel, és az egyszerűség kedvéért a pontok közös tömegközéppontjába, a test tömegközéppontjába képzelt tömegponttal helyettesítjük. Ennek a pontnak a tömege megegyezik az egész pontrendszer tömegével. Ha több testet vizsgálunk, közös rendszerként, együtt, akkor azokat a testek közös tömegközéppontjába képzelt, a testek együttes tömegét hordozó tömegponttal helyettesítjük, ez az adott testek **centruma**.

Hogy ez a helyettesítés megengedett, és a pontszerű tömegre érvényes mozgástani szabályok a közös tömegközéppontra, a centrumra azonosan alkalmazhatók, ezt mondja ki a **tömegközéppont-tétel**.

> A centrum valójában csak egy pont, a közös tömegközéppont, egy mértani pont a térben. A mozgástani szabályok egy olyan tömegpontra vonatkoznak, amelyek tömege a rendszer össztömege, *a helye* pedig a rendszer centruma. *De az egyszerűség kedvéért* a két definíciót összefogva ilyenkor **csak centrumot mondok, amelynek ezek szerint tömeget tulajdonítok**, és értsd így a leírtakat.

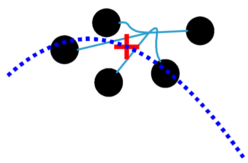
Hosszú fejezetek óta a testek impulzusával foglalkozunk, és ennek során, például az impulzusmegmaradás tételében is hangsúlyoztam, hogy **pontszerű testekre** kell szorítkoznunk a szabályok érvényesítésekor. A kiterjedt test ugyanis forogni is tud, ami újabb tényezővel, a *perdülettel* bővíti a helyzetet, és ennek a perdületnek a *változása* beavatkozik az impulzusmegmaradásba. Ezt legalább eleinte ki kell zárnunk valahogy, hogy ne váljanak a feladatok túl bonyolulttá. Kivesszük tehát a testek, testrendszerek forgásának lehetőségét a feladatainkból, és ekkor **a korábban megismert szabályok a centrumra alkalmazhatók maradnak**.

Amikor az ábrákon különféle téglatestek mozogtak, akkor csak a középpontjukra figyeltünk, és tudtuk, hogy ez elég is. A láda elhajításakor sem volt kétséges, hogy a *tömegközéppontja* egy parabolapályán fog repülni. A tömegközéppont-tétel birtokában nyugodtan élhettünk ezzel az egyszerűsítéssel.

Hadd idézzem fel a két tömegpontról és a centrumukról szóló mérleghinta-szabály elvét: ***Ha a három pontból bármelyik kettőt ismerjük, akkor abból kiszámolható a harmadik pont is*.**

Mi a probléma a kiterjedt testek impulzusának megmaradásával?

Nézzünk egy kevésbé egyszerű esetet. Képzeld el, hogy veszünk néhány súlygolyót és egy-egy zsineget kötünk rájuk. A zsinegek végét összecsomózzuk, és ferdén felfelé elhajítjuk az egész csomagot. Ha egyetlen testet dobnánk el, akkor elvárnánk tőle, hogy az egy parabolapályán repüljön. A súlyok viszont összevissza fognak kóválygni, de a zsineg egy csomóban tartja őket.



Ha valaki oldalról videóra veszi a mutatványt, akkor utólag elemezni lehet ennek a "rendszernek" a mozgását. Azért rendszer, mert a súlygolyók együtt indultak, és hatnak egymásra, a zsineg által. Minden képkockán egyenként kiszámítjuk és megjelöljük a kóválygó testek pillanatnyi centrumát – ez sok testtel is lehetséges –, piros kereszttel, majd most már folyamatosan visszanézzük a felvételt. (Jól jönne egy animáció, de sajnos ide azt nem tudok betenni. A jó képzelőerő a fizikatudás egyik oszlopa.) Azt fogjuk látni, hogy a piros kereszt, a centrum szépen megtett egy parabolát. *Ez* az a pont, amelyik megteszi az egyetlen tömegpont számára előírt parabolát, mintha az összes golyó anyagát összegyúrnánk és összepréselnénk egyetlen kis golyóba. Azt is látni fogjuk, hogy eközben a súlygolyók szabadon kavarogtak, és nagyon nehéz lenne bármelyikük pályáját megrajzolni, főleg megmagyarázni.

Mindegy, hogy az egyes súlyok mindeközben hogyan mozogtak, egymáshoz képest hol voltak. Előre tudhatjuk, hogy a repülés közben a súlygolyók pont úgy kóválygnak, hogy a centrumuk viselkedik szabályosan elhajított testként.

A centrum egy olyan pont, amely a testek helyétől és tömegétől függ, azokhoz igazodik, a mérleghinta-szabály alapján számítható ki a helye. De eközben azt tudjuk, hogy biztosan megmarad a parabolapályán, és a golyók ennek megfelelően helyezkednek. Tulajdonképpen azt állítom, hogy *a centrum van hatással a golyó mozgására*, a befőtt teszi el a nagymamát. Ha négy golyó helyét ismerjük, és ismerjük a centrum helyét is, amely követi az előírt pályát, akkor ebből meg tudjuk mondani, hogy az ötödik golyónak *hol kell lennie*. És a golyó ott is lesz.

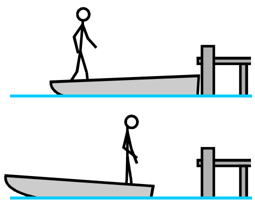
A jelenség látszólag tényleg igaz, de valójában nem a befőtt teszi el a nagymamát. A rendszerben levő golyók azért mozognak így, mert az egymással való időnkénti ütközésük és a zsinegek időnkénti megrándulása révén **egymásra vannak hatással pont úgy, hogy a centrumuk megtartsa a helyét**. Az okot és okozatot tehát mégsem kell felcserélnünk. A centrum nem hatással van a testekre, hanem mindig a testek mozgásának vannak olyan okai, amelyek *eredményeként* a centrum mozgása a lenyűgöző szabályosságot mutatja.

A Földet a Holddal összekötő egyenesen van egy pont, Lagrange-pontnak hívják. (Minden holdnak és bolygónak van több ilyen pontja is.) Ha megnézzük az űrnek ezt a pontját, akkor azt látjuk, hogy nincs ott semmi. Szemre semmi nem különbözteti meg az űr más pontjaitól. Mégis, ha egy űrszondát oda kormányozunk, azután kikapcsoljuk a hajtóművét, a szonda ott fog maradni. A Hold kering a Föld körül, és a szonda közöttük ott lebeg a világűrben, nem esik le. Sőt, a szonda *keringeni* is tud ekörül a pont körül, mintha lenne ott valami, ami vonzaná, holott nincs ott semmi. *Több* szonda is tud keringeni egy Lagrange-pont körül. Csoda történik? A valóság az, hogy a Hold és a Föld vonzásának és a mozgásukból következő egyszerű hatásoknak az összjátéka tartja a szondát azon a helyen. Ha elmozdul onnan, akkor ezek a külső hatások terelik vissza oda, azt az érzetet keltve, mintha annak az üres pontnak lenne valamilyen vonzása. Hasonlóan megtévesztő a centrum viselkedése, ami valójában csak más hatások érdekes eredménye.

A golyók által fellépő erőket, a mozgásukat folyamatosan kiszámítani izzasztó feladat volna. A golyók helyett a centrum figyelése épp ezért tud nagyon nagy segítség lenni. **Nem kell tudnunk, hogy a golyók miért mozognak a rendszeren belül úgy, ahogy.** Nekünk elég azt tudnunk, hogy a centrumuk minden pillanatban betartja a szabályokat, követi az előírt pályát. És ha az öt golyóból négy helyét ismerjük, akkor anélkül tudjuk megmondani az ötödik helyét – támaszkodva a közös súlypont kiszámításának módszerére –, hogy tudnunk kellene, a golyó *miért* kerül oda.

Keresd meg a tömegközéppont-tételt!

Az egyenes vonalú egyenletes és gyorsuló mozgások szabályaival egyszerű mozgások pályaelemeit, a testek helyzetét ki tudjuk számítani. Egyes esetekben, például amikor két test ellöki magát, ez túl komplikált lehet, de ekkor felhasználhatjuk az impulzus fogalmát és szabályait. *Amikor már az impulzus számítása is túl bonyolult*, néha kapóra jöhet a centrumra vonatkozó szabályok valamelyike.



Nézd meg ezt a klasszikus példát. Az ember a kikötetlen csónak elejéből a végébe ment, eközben a csónak előrement valamennyit. Ha visszamegy a csónak orrába, akkor az visszacsúszik a kikötőhöz. Megint hátramegy, a csónak megint eltávolodik. Az ember nem tud kiszállni a csónakból. Ez tényleg így történik a valóságban is. Keress rá magyarázatot! **…**

A lépések során az ember *vízszintes irányú erőket* fejt ki a csónak fenekére, és a vízen a csónak mozgását semmi sem akadályozza, ezért mozdul el. De mennyi az elmozdulás, mi a szabály? Az erőnek és a csónak tömegének az ismeretében a dinamika alaptörvénye és a gyorsuló mozgások képletei alapján kiszámíthatnánk az erő hatására elmozduló csónak sebességét és az általa megtett utat. Csakhogy ez az erő nem egyenletes, hanem viszonylag szabálytalanul hullámzó, vagyis a kiszámításáról ne is álmodjunk.

Próbálkozzunk az ember és a csónak impulzusának egyensúlyt tartó változásaival? Ha erőlökéseket akarunk számítani, akkor ahhoz kell az erő és az erőkifejtés ideje, de mondtam, az erő ingadozik, az időről pedig még csak szó sem esett. Akkor talán vegyük elő az akció–reakció jelenségének szabályait, hiszen az ember maga alatt tulajdonképpen ellöki a csónakot, és ő ezzel (?) halad előre. A végén viszont megtorpan, és ugyanúgy megállítja a csónakot, ahogy a kilőtt ágyúgolyó adja vissza a Földnek a kapott impulzusát.

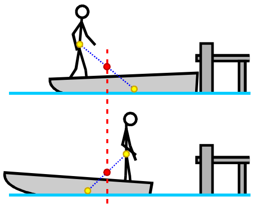
Az ezzel a baj, hogy nullánál nagyobb impulzusa csak mozgó testnek van. **Az ember és a csónak egy ideig valóban mozog, ingadozó impulzussal, ismeretlen ideig**, de az egész legvégén *az ember és a csónak is áll*. Vagyis nem csak az összimpulzus maradt változatlan, a törvényt betartva, hanem a két test kezdeti és végső impulzusa is nulla. Ha az ember kiugrana, és a csónak ezután a másik irányba mozogna, azzal már elboldogulnánk, de mihez fogjunk két *álló* testtel?

Mi tiltja, hogy a séta végén a csónak mozgásban maradjon?

<u>Most lép színre a centrum</u>. A két test centruma az, amellyel a tömegközéppont-tételt követve a két test helyettesíthető. **Newton I. törvénye** pontszerű testről azt állítja, hogy a mozgásállapota külső erő nélkül nem változik. A centrum egy pontszerű test, azaz: **a centrum külső erő híján nyugalomban marad**. Ha kezdetben az ember és a csónak állt, akkor a centrumuk is állt. Hatott rájuk valami külső erő? Nem

hatott. Akkor a centrum most is áll? Úgy bizony. Nem csak áll, hanem *ugyanott* áll. Nem mozdulhatott el, mert akkor a mozgásállapotának időlegesen változnia kellett volna, az pedig nem történhetett meg.

Mi is a centrum? Itt az ember tömegközéppontjában levő, az ember tömegével azonos tömegű tömegpont és a csónak tömegközéppontjában levő, a csónak tömegével azonos tömegű tömegpont közös tömegközéppontja, illetve az oda helyezett, a két test közös tömegével azonos nagyságú tömegpont. (Hát ezért jobb centrumnak hívni.) Nézd meg az ábrán, megjelöltem mindhármat.



A közös tömegközéppont mindig rajta van a két egyéni tömegközéppont közötti egyenesen, és a mérleghinta-szabály szerint számítandó ki a helye. Én most úgy vettem, hogy a csónak és az ember tömege nagyjából azonos, vagyis a piros pont félúton van a sárga pontok között, de másképp is lehetne. A piros pont a két test centruma. **Ez a pont a jelenet során nem változtathatja meg a helyét, mert ahhoz egy külső erő kellene.** Amikor tehát az ember a csónakban hátramegy, akkor a tömegközéppontját áthelyezi a centrumhoz képest, és a csónak tömegközéppontjának úgy kell elmozdulnia, hogy eközben **mindvégig megtartsa az egyensúlyt a centrum körül**. Az ember nem maradt ugyanott, előrébb jutott, de a csónak is elmozdult. A centrum maradt mozdulatlan.

Nem kell tehát tudnunk azt, hogy az ember milyen sebességgel mozgott, milyen ütemben, mekkora erőt kifejtve a csónakra. Nem kell az erőlökések és reakció-impulzusok folyamatosan változó értékeit számítgatni. Elég annyit tudni, hogy **a két <u>kapcsolatban levő</u> test közös, ilyen szempontból zártnak tekinthető rendszerének centruma megtartotta a helyét**. Vagyis ha ismerjük az egyik test helyét és a centrum helyét, akkor minden pillanatban meg tudjuk adni a másik test helyét. Mint a levegőben kóválygó súlygolyóknál.

Minél kisebb a csónak tömege, annál látványosabb az előre-hátra mozgása. A nagyobb tömegű csónakhoz közelebb van a centrumuk, és ha lerajzolod magadnak, láthatod, hogy akkor az ember ugyanakkora elmozdulása a csónak tömegközéppontjának kisebb elmozdulásával jár.

Milyen törvény alapján tudhatjuk, hogy a centrum nem mozdult el?

Ne veszítsd szem elől azt a feltételt, hogy **ezek a testek közös rendszerben kapcsolatban vannak egymással**. Ez azt is magában foglalja, hogy a testek hatással vannak egymásra.

Ha fél marék borsót eldobsz, akkor kezdetben a borsószemek egy közös rendszer részeiként lettek pályára téve, a markodban még közös rendszer voltak. Ezért amikor eldobod őket, akkor úgy is vehető, hogy te a centrumukat dobod el, ezután pedig nem éri őket semmilyen külső hatás. A borsószemek végig úgy fognak repülni, hogy a centrumuk megtartja az előírásos, a dobás irányából és erejéből kiszámítható (parabola)pályát.

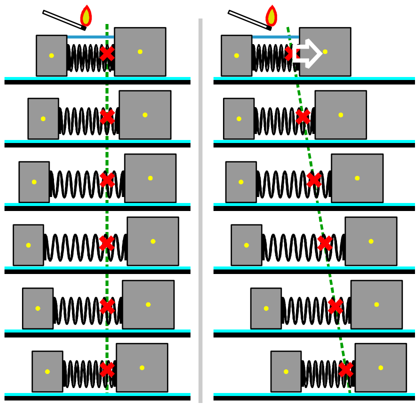
Hatással van egymásra ez az egyszeri halász és a csónakja is. Az ember úgy ment a csónak végébe, hogy a csónak fenekén lépdelt. Tehát amikor előremozdult, akkor ennek az ereje a csónakra is kihatott. Ha nagy leleményesen egyetlen nagy ugrással akarna a csónak végébe jutni, a csónakra akkor is erőt fejtene ki, az eredmény ugyanaz lenne. Ha az ember úgy menne hátra, hogy a csónakra nem fejtene ki erőt, hanem kis pillangó módjára hátralibegne, akkor a két test a változás idején nem lenne kapcsolatban egymással, és ekkor már nem lesz érvényes a centrum mozdulatlanságának szabálya.

Kétségtelenül felmerülnek itt még kérdések, de ne bonyolódjunk bele ennél jobban.

A centrum tehetetlensége

Lássunk egy kísérletet, két testtel, egy jégpályán. Nézzük az alábbi ábra bal felét! Két testet összekapcsolunk egy rugóval, letesszük a jégre, kicsit összenyomjuk, majd összekötjük őket, összenyomott helyzetben, egy zsineggel. Az egész csomag áll a jégen. Ezután egy gyufával elégetjük a zsineget, ezzel a trükkel úgy engedve szabadon a két testet, hogy közben biztosan nem lökünk rajtuk.

A két testet a rugó szétlöki, de ahogy a rugó az erőmentes helyzetén túljut – mert a felgyorsított testek mennek tovább –, a rugó nyúlni kezd, lelassítja a testeket, végül azok megállnak, azután közeledni kezdenek. A rugó erőmentes állapotán túljutva a rugó összenyomódik, végül egy holtpont után – és ekkor a testek távolsága ugyanaz lesz, mint kezdetben – távolodni kezdenek. Ez a vég nélkül ismétlődő mozgás egy elég világos, még képletekkel is leírható jelenség, nyilván te is jól látod magad előtt, a periodikus mozgások között tanulni fogod jövőre.



Videóra vettük az egészet. Ezután kockánként megnézzük, és minden képkockán megjelöljük azt a pontot, amely a két test közös TÖMEGKÖZÉPPONTja, centruma. Az erről szóló fejezetben láthatod, hogy ez a két test tömege alapján mindig megtalálható, a **mérleg-hinta-szabály** szerint, tehát a két test tömegközéppontjának távolságát a tömegekkel fordított arányban osztja ketté. ($m_1 \cdot k_1 = m_2 \cdot k_2$, a k a centrum és a test tömegközéppontjának távolsága.) A rendszert mindig ennél a pontnál feltámasztva lenne a két test egyensúlyban. Megjelöltem én is a centrum helyét a képkockákon.

A képsoron azt látod, hogy a két test hullámszerűen mozog, de a piros kereszt mindig ugyanott van. *Nem azért, mert én így csináltam a rajzot, hanem így történik a valóságban is.* A két test ráncigálja egymást, de közben mintha külön vigyáznának arra, hogy a centrumuk el ne mozduljon. Elmozdulhatna, hiszen a kereszt helye minden képkockán *számítás* eredménye, a testek tömege és távolsága alapján, a rendszer nincs ennél a pontnál rögzítve. De a videó azt mutatja, hogy **a rendszerben épp a centrum marad egy helyben**. Kerülhetne ez a pont mindig máshová, de nem, mi azt látjuk, hogy a két test tánca ekörül a pont körül folyik, kényszer nélkül.

Megismételjük a kísérletet, de úgy, hogy az összekötözött csomagot finoman meglökjük oldalirányba, és ez után égetjük el a zsineget, ügyelve a rendszer érintetlenségére. Elkezdődik a tánc, de másképp, a testek egymást rángatva araszolnak jobb felé. Ezt is videóra vesszük, kockánként kiszámítjuk és megjelöljük a rendszer centrumát, majd megnézzük, mi az eredmény. A képeket folyamatosan lejátszva azt látjuk, hogy a testek mozgása nagyon hasonló, de **a centrum lassan mozog jobbra, egyenletes sebességgel**.

Igazság szerint számíthattunk erre az eredményre, hiszen ismerjük az INERCIARENDSZEReknek azt a tulajdonságát, hogy egymással egyenértékűek, ha az egyik a másikhoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Amikor az összekötözött testeket meglöktük, akkor a hozzájuk rendelt inerciarendszernek adtunk egy egyenletes sebességet a jéghez rendelt, számunkra álló inerciarendszerhez viszonyítva, amelyben a testek mozgását az előbb megfigyeltük.

Mit jelöl a piros kereszt?

1. - A tehetetlenség törvénye tömegpontra (pontszerű tömegre) vonatkozik.
2. - A centrum az a pont, ahová a két testet helyettesítő egyetlen tömegpontot elhelyezhetjük.

Ergo: **A tehetetlenség törvénye a centrumra is érvényes.**

Következmény: Ha a rendszert alkotó testekre nem hat rendszeren kívüli erő, akkor a rendszer centrumának mozgásállapota nem változik, **egyenletes sebességgel halad**. (Ami lehet 0 is.)

A csónakban ténfergő ember esetében a centrum sebessége mindvégig nulla volt. A rugóvégen csúszó testek centrumának a sebessége az első kísérletben szintén nulla volt, a másodikban egyenletesen mozgott. Követték a tehetetlenség törvényét. Merev testekre már megtanultuk és megszoktuk ezt, de mostantól tudd, hogy **a szabály akkor is igaz, ha a rendszer összefüggő, de nem merev**. Igaz, hogy *a testek távolsága változik*, de a centrumuk, a testeket helyettesítő pontszerű tömeg tartja magát a szabályokhoz. Ezentúl építhetsz erre.

Ha a centrumnak tehetetlen tömege van, akkor igaz rá a dinamika alaptörvénye is. Ez azt jelenti, hogy ha a rendszer elemeire egységes külső erő hat, akkor a testek gyorsulni fognak oly módon, hogy a centrumuk pontosan az $F=m \cdot a$ képlet viselkedik, ahol m a rendszer össztömege.

A centrum impulzusa

A rugó végén levő két test mozgását elemezhetnénk olyan szempontból is, hogy mikor mennyi a testek pillanatnyi sebessége. Persze hullámzó értékeket kapnánk, és azt is megfigyelhetnénk, hogy a nagyobb test a centrumhoz viszonyítva mindig lassabb a másiknál, kevesebbet mozog. A két test úgy mozog, hogy *az impulzusuk minden pillanatban pontosan kiegyenlíti egymást*. Ennek köszönhetően a két test impulzusának előjeles összege minden pillanatban a kezdőlökéstől függő állandó érték, ezt az impulzus-megmaradás törvénye kötelezővé is teszi egy zárt rendszer számára. Ez a két test és a rugó zárt rendszer, még külön vigyáztunk is arra, hogy külső erővel ne zavarjuk meg a mozgásukat.

Ha nagyon messziről néznénk az egészet, nem is látnánk a két testet, nem látszana, hogy a két test össze van-e ragasztva, egy zsineg két végén pörög vagy egy rugó két végén táncol. Csak az, hogy az egész egyenletesen halad. A centrum sebességét meg tudjuk mérni, a tömegeket is ismerjük, így aztán gyorsan kiderül, hogy ez az állandó szám ***a centrum impulzusa***.

Elismétlem, amit az előző fejezetben írtam: tudom, hogy a centrum eredetileg csak egy mértani pont, de egyszerűbb centrumnak nevezni azt a pontszerű tömeget is, amelyet ide kell képzelnünk, és amelyek helyettesítik a testeket. Ez a kis lazaság belefér a fogalmazásba, mert nem okoz keveredést. Az előbb a centrumnak szintén tömeget és tehetetlenséget tulajdonítottunk, egyszerűsítve a fogalmakon.

Az **impulzusmegmaradás törvényét** most már átfogalmazhatjuk általánosabb érvényűre, úgy, hogy a nem merev rendszert alkotó testek esetére is egyszerűen alkalmazható legyen:

Egy zárt rendszeren belül a pontszerű testekre egyenként jellemző impulzusok vektoriális összege mindig állandó marad, és egyenlő a rendszer centrumának impulzusával.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right) = \vec{I}_C \quad \text{(állandó)}$$

A képlet csak leírja n darab test esetén a törvényben olvashatókat, én pedig leírom ugyanezt két testre:

$$\boxed{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v'}$$

ahol $\mathbf{m_1}$ és $\mathbf{m_2}$ a két test tömege, $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{v_2}$ a sebességük az adott pillanatban, és **v'** (vé vessző) a rendszer centrumának egyenletes sebessége, amelyhez a két test együttes tömege tartozik. A centrum sebességének iránya mindig csak akkor derül ki, amikor a testek impulzusait vektoriálisan összeadod, ahogy az a jégbe fagyasztott golyók kapcsán is látható volt. Az pedig, ami **v'** sebességgel halad, a testek centruma, közös tömegközéppontja. Változatlan tömeg mozog változatlan sebességgel: **a centrum impulzusa állandó**. Az egyenlet alapján bármelyik négy adat ismeretében megadhatod az ötödiket.

A rendszer összimpulzusa azonos a rendszer centrumának impulzusával.

Keresd meg az eltérést az impulzusmegmaradás törvényének mostani és korábbi alakja között!

A két test $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{v_2}$ sebessége folyamatosan változik. De az egész rendszer egybevéve megtartja nyugalmi helyzetét. Csak így lehet igaz az, hogy az összefüggő rendszer, a rugóval összekötött testek rendszere egyenértékűen helyettesíthető egy tömegponttal, mert arra érvényesülnie kell Newton törvényeinek. Nyugalmi helyzetben a sebesség egyenletes, emiatt a **v'** állandó.

A testek centrumáról az előbb megállapítottuk, hogy érvényes rá a tehetetlenség törvénye, és a testek tömege itt összpontosul. Ha a centrumnak tömege van, akkor a dinamika alaptörvénye is érvényes rá, a centrum gyorsításához meghatározott erő kell. Ha a centrumnak van tömege és van sebessége is, akkor van impulzusa is, amely külső erő hatása nélkül mindig állandó marad. Mindezek érvényesek voltak pontszerű tömegre, és most már érvényesek tetszés szerinti testek rendszerének centrumára is.

Most zárult kerek egésszé a haladó mozgások szabályrendszere.

A centrum impulzusmegmaradásának alkalmazásai

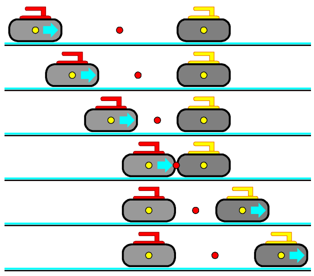
A centrum impulzusának állandósága a **sebességének állandóságát** jelenti akkor, ha a centrum által képviselt testek **össztömege állandó** marad. Hogy mi történhet, ha a tömeg változik, azt már az összekapcsolódó vasúti kocsiknál és a motorcsónakba ugró rablónál megbeszéltük. Ha kapsz egy feladatot, akkor neked kell felismerned benne, hogy a testek hatással lehetnek-e egymásra, vagy egymástól függetlenek. Ha leteszel az asztalra két poharat, majd az egyiket odébbtolod, attól a másik nem fog megmozdulni. Közvetlenül nincsenek hatással egymásra. A centrumuk persze eltolódik, de ez nem sokat segíthet egy példa megoldásában, mert látszólag nem alkotnak közös rendszert.

Közvetve a két pohár mégis hatással van egymásra. Az eltolt pohár rajtad, a széken, a földön, végül az asztalon keresztül kapcsolatban van a másik pohárral. Mintha egy bonyolult állvány két végén lennének. Csak ez az összeköttetés, ez az "állvány" olyan hatalmas tömegű, hogy ehhez képest a poharak tömege szinte kifejezhetetlenül kicsi, ezért a tömegközéppontjuk áthelyeződése is abszolút jelentéktelen. Ha a föld helyett az asztalod és a széked egy könnyű tutajon állna, amely zavartalanul el tud mozdulni, és a pohár húsz kilós lenne, akkor már nagyon is mérhető lenne a hatása annak, hogy a rendszer egy eleme elmozdul, mert a tömege már nem lenne elhanyagolható a testek össztömegéhez képest. *A centrum tömegéhez képest.*

Ha kapsz egy feladatot, és felmerül az ötlete annak, hogy a rendszer centrumának mozgására alapozz egy megoldást – a feladatok többsége persze másról szól –, akkor ezek szerint csak azt kell eldönteni, hogy egy feladatban a testek egymásra hatása elég jelentős-e ehhez. Nem szabad beleesni a rakétamérnök hibájába, aki megfeledkezett az űrhajó és a tömb egymásra hatásának fontosságáról.

> Bármilyen feladatra érvényes tanács: lehet, hogy a feladat úgy adja meg a tudnivalók egy részét, hogy azt fel kell ismerned, meg kell értened. Cselesen megadott mozgásirányok, sebességek, tömegek. Amikor irányok, távolságok valami másból deríthetők ki. Ezekre csak oda kell figyelni. Amikor azt látod hogy a feladat nem adott meg egy fontos adatot, akkor te hibáztál. Ott kell lennie minden adatnak. Vagy nem veszel észre valami összefüggést, vagy olyan képletbe keresel adatot, amelyik nem a legjobb választás a megoldáshoz.

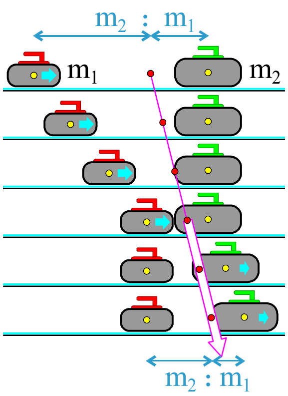
Bagdadba menet szembejött egy kalifa, mögötte ment három felesége, minden felesége mögött ment három-három testőr, minden testőrt kísért három-három szolgáló, hányan mentek Bagdadba?



A curling egy nagyon érdekes sport, mellesleg a kövek ütközése roppant tanulságos. Lássuk. A piros követ meglököm, a sárga kő áll. Megjelöltem a képen a centrumukat, ami, mivel a két kő tömege azonos, félúton van a két tömegközéppont között. A piros kőre érvényes a tehetetlenség törvénye, ezért a súrlódásmentesnek tekintett jégen egyenletes sebességgel csúszik. Két másik pillanatban is kiszámítottam a centrum helyét, majd a kövek ütköznek. A tömegközéppontjaik az ütközés pillanatában sem esnek egybe! Vagyis a centrum akkor is félúton van a sárga pontok között. Az ütközéskor a piros kő megáll, a sárga kapja az össze impulzust, azonos tömege miatt azonos sebességgel távolodik.

Nézd meg a centrumokat! A videóból egyenletes időközökben kivett képkockákon egyenes vonalat alkotnak. Vagyis a piros pont szemlátomást **egyenletes sebességgel halad**, érvényesül a centrum tehetetlenségének és impulzusmegmaradásának törvénye.

Láthattuk tehát a tanult szabályok működését, akkor most használjuk ki olyan esetben, amikor nem tudjuk előre a megoldást. A következő ábrán a piros kő egy nagyobb tömegű zöld kő felé csúszik, és egyforma időközönként megállítom a videót. Megjelölöm a két kő centrumát, a közös tömegközéppontjukat. A tömegeik arányára én kitaláltam egy értéket, a tanulság megfigyeléséhez ezt nem fontos tudnod. A **mérleghinta-szabály** szerint kell eljárnunk, a TÖMEGKÖZÉPPONT fejezetben foglaltakat felhasználva, és ahogy az ábrán átható, a tömegekkel fordítottan arányosan osztja fel a centrum a tömegközéppontok közötti távolságot.

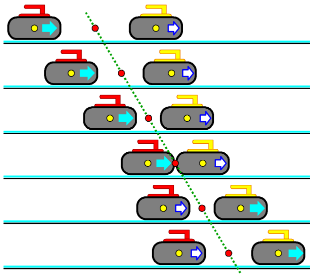


Ha ezek bármelyike nem volt érthető, akkor az 1. témakört és a 2. elejét mindenképpen át kellene olvasnod.

Látható, hogy a piros kő halad, a zöld áll, a centrum pedig, arányos sebességgel, szintén halad. Ezt végig tudjuk követni egészen az ütközésig, látszik az egyenes vonal. A centrum az ütközéskor nem a két kő között van, hanem a tömegközéppontok között, arányos távolságban, figyelj az ilyen apróságokra!

És most jön a kérdés: ha a piros kő állva marad, minden impulzusát a zöld kőbe adja át, akkor mekkora lesz a zöld kő sebessége? Azt már tudjuk, hogy mennyi az impulzusa, de most a sebessége is kell. Számok nélkül is *megszerkeszthető.* A centrum tehetetlenségében az a nagyszerű, hogy az az ütközés után is érvényes. Mi csak azt tudjuk, hogy a centrum mostanáig milyen sebességgel halad, és *annyival fog tovább is haladni*. Tudjuk előre, hogy mikor hol lesz a centrum, ismerjük a "mérleghinta" egyik végpontját is (az álló piros kő), ezekből biztosan tudhatjuk, hogy a zöld kő hogyan fog mozogni. **A centrum mozgásából állapíthatjuk meg a test mindenkori helyét**. Nem ismerjük a sebességek és tömegek számértékeit, nem tudhatjuk az impulzusokat, de pusztán abból, hogy követjük a centrum mozgását, és ismerjük azt az arányt, ahogy a két tömegközéppont távolságát a centrum felosztja, ennyiből meg tudjuk mondani a zöld test mozgását, előre. <u>Ez nagyon fontos alappélda</u> a centrum előre ismert mozgásának felhasználására, ezért figyeld meg és jegyezd meg jól.

Az ábrán úgy tűnhet, hogy a zöld kő a széles nyílhoz igazodva mozog. Ez véletlen egybeesés, és nem is pontosan igaz. A széles nyíl a centrum helyét adja meg.



Persze ez az egész nem csak akkor működik, amikor az egyik kő áll. Ezen az ábrán mindkettő ugyanabba az irányba mozog, de mehetnének egymással szembe is. Nézd meg az ábrát, vegyél magad elé két radírt vagy almát vagy bármit, és utánozd velük a képsoron látott mozgást! Gyerünk!

A centrumuk pont úgy keresendő meg, ahogy máskor, és ahogy látod, a centrum mozgása most is teljesen egyenletes. Azaz az impulzusa állandó, hiszen az össztömeg is állandó. Ha a képeket átrendezném úgy, hogy a piros pontok egymás alá kerüljenek – ezzel az álló inerciarendszert a centrumhoz kötött, mozgó inerciarendszerre cserélném –, akkor látnánk, hogy a két kő valójában csak egymásnak csúszott, majd a koccanás után szétcsúszott. A rugóval összekötött és a jégen együtt csúszó testek mozgása is kicsit hasonló volt. A centrum impulzusának állandósága mozgó testek rendszerére is érvényes és kihasználható.

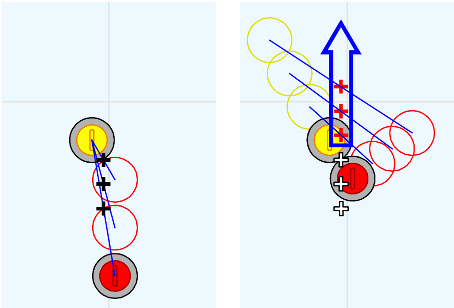
Sok esetben a példában szereplő testek álló helyzetből indulnak, ami miatt az impulzusuk nulla, és a rendszerük összimpulzusa is nulla. Ennek nem kell mindig így lennie, ebben a példában az összimpulzus nem nulla (a centrum jobbra mozog), ezért *legalább az egyik test mindig mozogni fog*.

A centrum mozgásának szabályai tökéletes összhangban vannak az impulzusra vonatkozó törvényekkel. Nem valami eltérőt, de nem is valami eddig ismeretlent tanultál vele, hanem egy másik megközelítést, másik megoldási lehetőséget ugyanarra a témára. Amikor kapsz egy feladatot, rá fogsz jönni, hogy mivel tudod könnyebben megoldani: kiszámítod a sebességet, gyorsulást, utat, vagy kiszámítod és felhasználod az impulzusok adatait, vagy felhasználod a centrum impulzusmegmaradásának törvényét, a centrum egyenletes mozgását. A curlinges példákban a kövek sebessége ismert, ezek könnyen megoldatók az impulzus számításával, de a centrumos módszerrel is. A csónakban bénázó embernél a sebesség, idő, erő kideríthetetlen, de a centrum mozdulatlansága segített nekünk.

Ellenőrzésképpen csináld meg önállóan a most látott eljárást egy olyan esetre, amikor a két kő az ütközéskor összeragad!

A centrum pontos helye miből és hogyan számítható ki?

Ne felejtsd el, hogy az itt olvasott magyarázatok, módszerek, összefüggések akkor kapnak számodra értelmet, ha feladatok megoldásában is hasznosítani tudod. **Gyakorold** feladatok megoldását! Most szánj rá időt, amíg még megteheted, hogy kipróbáld, megszokd, milyen jellegű feladatra melyik magyarázat alapján tudod a megoldást kitalálni. Itt csak magyarázatokat olvashattál, de meg kell tanulnod támaszkodni rájuk. Nem utolsósorban pedig a feladatokat egy dolgozatban végig meg kell csinálni, számításokkal, amit szintén nem árt gyakorolni. Sokat. Keress ide tartozó feladatokat.



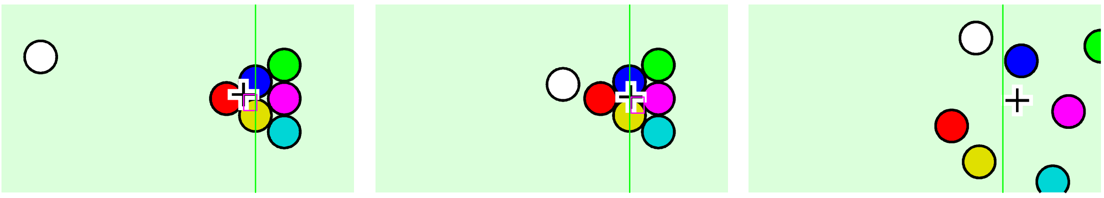
A köveket eddig oldalnézetben láttuk, mert a haladásuk egyetlen vonal mentén, a képernyő síkjában történt. Lássunk most két dimenziós esetet is, felülről nézve. Az itt látható ütközés során a centrum mozgása ugyanúgy meghatározó. Nézd meg, a képen lentről érkezik a piros kő, és ferdén eltalálja a sárga követ. A két kő kétfelé pattanva halad tovább. De pontosan megadható az útjuk.

Az első képen három pillanatra megjelöltem a két egyforma tömegű kő centrumát, ami szintén felfelé mozog. Egyenes vonalban, hiszen érvényes rá a tehetetlenség törvénye, és a két kő zavarmentes rendszert alkot. A centrum impulzusa a centrum sebességének és a két kő együttes tömegének a szorzata. Ez az impulzus az ütközés után is megmarad, tehát tudjuk, hogy a centrum ugyanazzal a sebességgel megy tovább. Most nem érdekes, hogy mi alapján, de bejelöltem a sárga kő útját, ismerjük a centrum útját is, és a kettőből egyértelműen következik az, hogy a piros kőnek mikor hol kell lennie.

Fontos, hogy ilyen feladat megoldásához jól használható méretű rajzokat készíts.

Hol van egy háromszög súlypontja? És a rombuszé?

Biliárdozunk, kezdéskor a fehér golyót belőjük a többi közé, és aztán minden golyó őrült rohangászásba kezd, ezt ismerjük. Mivel az asztal széle a kísérletünket most megzavarná azzal, hogy ott a golyók irányt, tehát impulzust változtatnak, az asztal legyen most nagyon széles. Ne törődj azzal, hogy harmadik képen levő állás mennyire valóságos, mert ez most mindegy, csak szétdobáltam a golyókat.

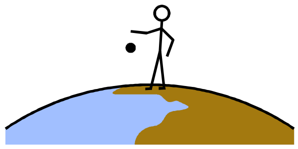


Most is megjelöltem egy kereszttel a hét golyó centrumának helyét, amely a túlsúly miatt a boly belsejében van. A "mérleghintán" most 1:6 a tömegek aránya. Meglőjük a fehér golyót, ily módon ellátjuk a rendszert kezdeti összimpulzussal, majd "lezárjuk" a rendszert, legalább elméletben gondoskodunk arról, hogy külső erő, mozgás, energia ne avatkozzon az eseményekbe.

A centrum most sem mozdulatlan. Ahogy a fehér golyó közeledik, *arányosan mozdul el a centrum is*, az előző példákban ezt már láttad. A zöld vonal segít a megfigyelésében. A centrum tömege 7 golyónyi. A törvény szerint ennek a pontnak a sebessége állandó, vagyis <u>bármelyik időpillanatra előre ismerjük a centrum helyét</u>.

Az következik ebből, hogy annak ellenére, hogy a golyók jóformán kiszámíthatatlanul ugranak szét, mi mégis képesek vagyunk arra, hogy ha tudjuk bármelyik hat golyónak a pontos helyét, akkor megmondjuk azt, hogy hol van a hetedik. Ugyanis a centrum pillanatnyi helye alapján ez viszonylag egyszerűen kiszámítható. Hat golyó sebességének (impulzusának) ismeretében megmondhatjuk a hetedik golyó sebességének nagyságát és irányát is. Vagyis azt, hogy hol *lesz* egy későbbi időpontban. *Anélkül, hogy látnánk.* Nem biztos, hogy átérzed ennek a jelentőségét, de az impulzus megmaradásának törvénye kicsit lehetővé teszi számunkra az előrelátást egy rendszertelennek tűnő rendszerben.

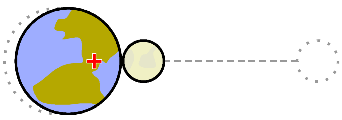
Példafeladatok



• **Állunk a földön, és leejtünk egy golyót. A golyó kezdetben állt, az impulzusa nulla volt. A leesés előtti pillanatban mozgott, az impulzusa m·v volt, nullánál nagyobb. Honnan lett ez az impulzus, ha a semmiből nem keletkezhetett? …**

Mi az, ami hatással volt rá? A Föld a tömegvonzása révén. Összesen ez a két test vett részt ebben az eseményben, vagyis vehetjük zárt rendszernek. Ezen belül az impulzus állandó. Ez is az akció–reakció jelenség egyik esete. Ha a golyónak lett $\mathbf{m \cdot v}$ impulzusa, akkor a Földnek is lett egy $\mathbf{-m_2 \cdot v_2}$ impulzusa, és a kettő ugyanannyi. A golyó és a Föld *közeledtek egymáshoz*. A Föld tömege hatalmas, ezért az elmozdulása mérhetetlenül apró, de nem nulla.

A golyó végül megállt, "eltűnt" az impulzusa. (Nem tűnt el, *van impulzusa*, pontosan 0.) Azért, mert ütközött a Földdel, egyesítette vele az impulzusát. A rendszer összimpulzusa kezdetben nulla volt, mert hozzánk, megfigyelőkhöz képest mindkét test állt, és ez az összimpulzus még mindig nulla.



• Ha ezt az elmozdulást kevesled, ejtsünk le nagyobb testet. Legyen például a Hold. Képzeljük el, hogy megáll a keringési pályáján, aztán szépen lassan esni kezd a Föld felé. A Föld is esni kezd a Hold felé, a tömegvonzás működik, és Newton I. törvénye szerint a hatás azonos nagyságú ellenhatást hoz létre. Mindkét testnek van egy tömege, a vonzerő ismert, kiszámítható a gyorsulásuk. **Addig zuhannak egymás felé, amíg nem találkoznak. Kérdés: mindeközben mennyit mozdult el a Föld? …**

A kérdés nem könnyű. A tömegvonzás törvénye ismert, de az erő négyzetesen függ a távolságtól, és nekünk az egyre csökkenő távolság miatt egyre gyorsabban növekvő vonzerővel kellene számítást végeznünk, amihez általad nem ismert matematikai eszköz kellene. De amikor a gyorsulás és az impulzus számítása is nehézségekbe ütközik, még segíthet a centrum figyelése.

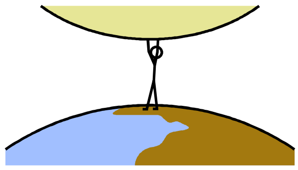
A Föld és a Hold tömegének aránya 81:1. Ismerjük a távolságukat, az alapján tudjuk a centrumuk helyét, annak a mérleghinta-szabály szerint a két égitest saját tömegközéppontja közötti távolságot 1:81 arányban kettéosztó pontban kell lennie. Meg is jelöltem egy piros kereszttel. Igen, benne van a Földben. Milyen szabály szerint mozog a Föld és a Hold centruma? **…**

Ez egy zárt rendszer, igaz? Akkor a centrumra érvényes a tehetetlenség törvénye. Vagyis a szabály maga a törvény: ha nem hat rá erő, akkor a sebessége nem változik. A centrumnak akkor is ugyanott kell maradnia, ha a két égitest elmozdul. Akkor is, amikor egymáshoz érnek. És a mérleghinta-szabály eközben mindvégig érvényes. Ha a három pontból kettőt ismerünk, akkor megvan a harmadik helye is.

Ezekből következően: a két égitestnek a centrumtól mért távolsága mindig 1:81 arányú lesz. Ez csak úgy lehetséges, ha a két égitest elmozdulása is mindig ilyen arányú, bármekkora időszakaszt is nézzünk. A Föld lép egyet, a Hold lép 81-et.

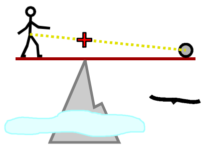
Ha utánanézel, azt fogod találni, hogy a két égitest *felszíne* közötti távolság rendes esetben (átlagosan) 376289 km. Ebből 1/**82** részt a Föld tett meg a centrum felé, ez 4589 km, a maradék 81/**82** részt pedig a Hold tette meg, ez 371700 km. A kettő aránya így 1:81. A találkozáskor hol van a rendszer centruma? Természetesen ugyanott, ahol eddig, de a találkozási ponthoz képest hol? Házi feladat.

Elméletileg nincs különbség a labda leejtése és a Hold leejtése között. Csak a számok mások.



• **Mi fog történni, ha az előző eset folytatásaként felemeled a Holdat, mondjuk, 2 méter magasra?** A Földön állsz, és úgy emeled meg, tehát az eltávolításukhoz szükséges kölcsönhatást te biztosítod. Akkor a rendszer továbbra is zárt, külső beavatkozás nem történt (te is a Föld része vagy erre az időre), ezért a centrum impulzusának megmaradása kötelező. A Hold és a Föld egymástól 2 métert távolodott, ebből 1/82 részt a Föld az egyik irányba, 81/82 részt a Hold a másik irányba.

Miért számít az *impulzus* megmaradása, amikor a Holdat csak felemeled és nem eldobod? Azért, mert itt a centrum impulzusáról van szó, és a centrum akkor is mindig megtartja a mozgási sebességét (és impulzusát), ha a hozzá tartozó testek elmozdulnak. És ez az impulzus most nulla. Az emelés ideje alatt van mozgás, de maga a centrum eközben sem mozdulhat meg, mert előtte állt, és utána is állni fog.

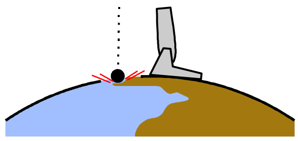


• **A balsorsod egy hegycsúcsra sodort, ahol egy palló egyik végén vagy te, a másik végén egy hordó. A te tömeged 60 kg, a hordóé 25 kg. Ha az egyensúly felborul, véged. Hogyan kell mozognod, ha le akarsz mászni? …**

El kell jutnod a palló alátámasztási pontjáig. Az egyensúly feltétele, hogy a hordóval a forgatónyomatékotok kiegyenlítse egymást. A mérleghinta-szabály pont ezt írja le: a súlyotok fordított arányban legyen a forgásponttól mért távolságaitokkal. Ez a szabály érvényes a centrum kiszámítására is. Mondhatjuk úgy is, hogy az egyensúlyhoz a te–hordó rendszer centrumát a feltámasztási pont fölött kell tartanod, mert így a centrumban ható közös súlyerőnek *nincs forgatónyomatéka*. A lényeg a távolságotok szabályozása.

Ha egy picit kifelé mozdulsz, akkor a palló feléd billen, és a hordó elkezd feléd gurulni. Ekkor gyorsan visszalépsz, helyreállítod az egyensúlyt, de a hordó mozgásban marad, a tehetetlenség törvénye, ugye. A tömegek (és a súlyotok) aránya 60:25, egyszerűsítve 12:5, ezért a távolságodat a forgásponttól mindig úgy kell igazítanod, hogy a hordó távolságával összehasonlítva 5:12 legyen. Ha a hordó gurul a csúcs felé 12 centit, akkor te mozdulsz a csúcs felé 5 centit. Így minden pillanatban a centrumotok ugyanott lesz, a csúcs fölött. Nem szabad sem sietned, sem késned. Ha elrontod és a hordó kifelé kezd gurulni, akkor neked is kifelé kell mozognod, arányosan, helyreállítva az egyensúlyt. Ha mindketten elértek középre, megnézheted, mi van a hordóban.

• **Lőjünk ki egy 100 tonnás golyót egy hatalmas ágyúval felfelé, 600 m/s sebességgel. Mennyi lesz a Föld elmozdulása? …**



Nincs válasz, mert az adatok hiányosak. A golyónak a sebességét adtam meg, nem az elmozdulását. A Földdel távolodnak egymástól, folyamatosan. (De nem változatlan sebességgel.) Nem mondtam meg, hogy *mikor* mérendő meg az elmozdulás. Új kérdés: mennyi a Föld *legnagyobb* elmozdulása? …

Aha, szóval egyszer megáll. Miért is? Mert a Föld és a golyó *kölcsönös* tömegvonzása (így pontos) folyamatosan fékezi őket. A test és a Föld a gravitáció révén ugyanúgy össze vannak kapcsolva, mint ahogy a két test volt a rugóval, ezért az egymástól való távolodásuk lassul, megáll, majd közeledésbe fordul, növekvő sebességgel. Mindkettőé.

A tömegvonzás erejét vegyük azonosnak, függetlenül a távolságtól, vagyis annyinak, mint amennyi a kilövés helyén, a felszínen. Ezt az erőt kiszámolhatnánk a tömegvonzás képletéből a két tömeg alapján, de fölösleges, mert a földfelszínen 100 tonna súlya kb. 1 millió N, ami azt jelenti, hogy ekkora a vonzerő a test és a Föld között. Kilőjük az ágyúgolyót felfelé. Az a kérdés, hogy milyen magasan áll meg. Melyik téma képleteit kell használnod? …

Természetesen függőleges hajítás zajlik, amihez a ferde hajítás függőleges, y-irányú képletei kellenek.

$$y = v_0 \cdot t + \frac{g}{2}t^2 \qquad t = \frac{v - v_0}{g}$$

A függőleges elmozdulás az $\mathbf{y}$, v_0=−600 m/s (felfelé mutat), g=10 m/s^2, hiszen megegyeztünk, a felszíni tömegvonzási erőt vesszük, akkor pedig a nehézségi gyorsulás is a szokásos. A kulcslépés: a holtponton v=0, mindig. Ebből t=60 s, tessék odafigyelni az előjelre, ennek ismeretében y=−1,8·10^4 m, tehát az ágyúgolyó legnagyobb elmozdulása felfelé 18 km. Még nem végeztünk, mert nem ez volt a kérdés.

Nem használtam fel azt az adatot, hogy a fékező (visszahúzó) erő 10^6 N. Nem volt rá szükségem, mert 1) a hajításnál szabadesés történik, ami független a tömegtől, ezért a tömegvonzási erő értékétől is; 2) a Föld felszínén állva lőjük fel a golyót, ezért a fékező nehézségi gyorsulás értékét már ismerjük.

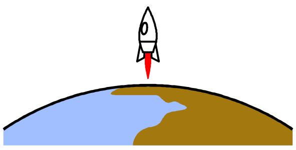
> Mostanra ezeket már könnyedén követned *kell*. Ha nem megy, feltétlenül kezdd újra az alapokat, a témakör legelejétől, gyorsan foltozd be a lyukakat. Ha húzod az időt, csak nő az elmaradásod. Az úttól a dinamika alaptörvényéig, és a szabadeséstől a súlytalanságig, aztán gyere vissza.

Szóval: mennyi a Föld elmozdulása? Az ágyúgolyóét már ismerjük, 18 ezer méter. A golyó–Föld rendszer centruma nem mozdult el, hiszen semmi sem mozdította, ezért a mérleghinta-szabály szerint a Föld elmozdulása fordítottan arányos a tömegekkel. A Föld tömege megközelítően 5,9736·10^{24} kg, az ágyúgolyóé 10^5 kg, ez alapján az jön ki, hogy a Föld 0,0000000000000003 métert haladt az ellenkező irányba. Körülbelül.

Ez a proton átmérőnek egyhatoda. Mégis, ha valahogy kiderülne, hogy a Föld ennek csak a felével mozdul el, akkor az már megszegné a törvényt, és a fizikusok elkezdenék keresni, hogy ennek mi az oka. Lehet, hogy ha megtalálják, az elvezet akár a teleportálás vagy az antigravitáció feltalálásáig, az apró jeleket sem szabad teljesen elhanyagolni.

A becsapódáskor a test és a Föld impulzusa összeadódik, ami azt eredményezi, hogy a Föld impulzusa ismét pontosan annyi lesz, mint amennyi a kilövés előtt volt. Amennyit a testnek átadott, azt vissza is vette tőle. Mekkora a test sebessége a becsapódáskor? **…**

Ha nincs a zuhanást fékező levegő, akkor a test sebességének ugyanannyinak kell lennie, mint a kilövéskor, csak lefelé. Pontosan úgy, mintha az ágyúval nem felfelé, hanem *lefelé* lőnénk ki. Ha van levegő, akkor a KÖZEGELLENÁLLÁSI ERŐ fejezetében elolvashatod, miért lesz a sebesség sokkal kisebb.

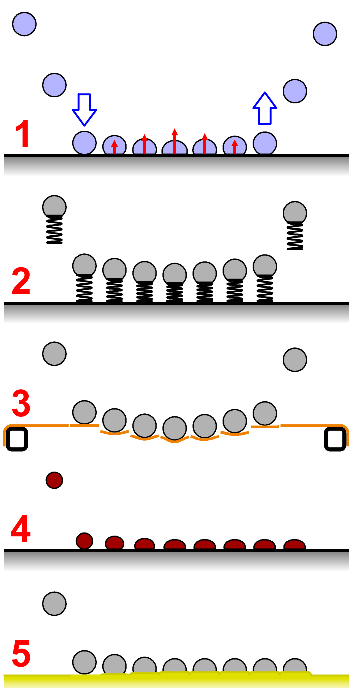


• **Mi van akkor, ha ágyúgolyó helyett egy nagy rakéta száll fel?** A rakéta és a Föld centruma ekkor is elmozdul felfelé, amit elméletileg a Földnek ki kell egyenlítenie azzal, hogy arányosan elmozdul lefelé, ez ott van az akció–reakció elve mögött. De ez itt most nem az az eset. Nincs sem akció, sem reakció, mert a rakéta és a Föld a kilövéskor *nem hat egymásra*. A rakéta nem azért száll fel, mert a földön levő valami vagy valaki felfelé löki. Azért száll fel, mert a hajtóművéből nagy mennyiségű gázt "dobál ki" nagyon nagy sebességgel, tehát a Föld ebben a műveletben nem vesz részt, itt csak a rakéta és a kifújt gáz alkotja azt a zárt rendszert, amelyen belül az impulzus megmarad.

Ütközések

Szilárd testek ütközése során két (vagy több) mozgó test találkozik és erőt fejt ki egymásra.

Az ütközés során a mozgó testek rövid ideig erőt fejtenek ki egymásra. Az ütközés erőlökést hoz létre, ezért az impulzus megváltozását okozza.



Amikor egy gumilabda a földre pattan, akkor, ha nagyon figyeljük, látjuk, hogy a labda egy időre benyomódik, majd a benne levő levegő nyomásának engedelmeskedve ismét felveszi az eredeti alakját. Ha ezt a konyha kövén próbáljuk ki, és a labda sáros, akkor a benyomódás jól látható bizonyítékát hagyja a földön.

Az **1.** képen látod egy labda lepattanásának menetét, egy lassított felvétel egymás mellé tett kockáinak sorozatával. A labda egy adott tömegű és sebességű testként érkezett, vagyis van impulzusa és tehetetlensége is, ebből származik az az erő, amivel eséskor a talajt nyomni kezdi. A talaj által rá kifejtett ellenerő Newton II. törvényének megfelelően sebességváltozást hoz létre, ez esetben lassulást. Az erő, illetve az előrehaladás alakváltozásra is kényszeríti a labdát, az egy kicsit benyomódik. A labda kisebb sebességgel, de folytatja az útját, a rá ható erő még nem volt elég a teljes megállításához. Ahogy közelebb megy a földhöz, kénytelen jobban benyomódni, de a rugalmas anyaga megnövekedő erővel válaszol erre a deformálódásra, ami a talajt nyomja. A megnőtt erő az eddiginél is jobban fékezi a labdát, de ez még mindig nem elég a teljes megállításához, ezért a labda lassulva ugyan, de nyomul tovább.

Végül a talaj nyomóereje és az általa létrehozott erőlökés nullára csökkenti a labda sebességét. Ha valamilyen rugalmatlan anyagból, például puha gyurmából készült golyót ejtünk le (**4.** kép), akkor a talaj ereje által szétlapított gyurma nem próbálja a eredeti alakját visszanyerni, ezért az ejtés itt véget is ér. A gyurma anyaga nem préselődik össze, a térfogata nem változik, hanem csak megváltozott az alakja, amit ellenállás nélkül tűr. Ezekről az ALAKVÁLTOZÁSOK fejezetben olvashatsz még.

De a labda rugalmas, össze van nyomódva, és az anyaga azon erőlködik, hogy visszanyomuljon az eredeti állapotba. Ez az erő a talajt nyomja, a talaj ellenereje pedig a labdát, felfelé (a rajzon piros). Ez az ellenerő a labdát gyorsítani kezdi felfelé, Newton II. törvénye szerint. A legnagyobb gyorsító erő egy közönséges gumilabdánál a legjobban összenyomódott helyzetben ébred, ezért miután a labda kicsit felfelé mozdult, az anyaga kicsit kinyomódott, a labda rugalmassági ereje gyengült. De ez a kisebb erő is tovább gyorsítja a labdát, amely még jobban közelít az eredeti alakjához. Végül mire a labda teljesen visszakerekedik, az addig rá kifejtett, felfelé mutató erő hatására már felgyorsult, felfelé mozog, és a tehetetlensége miatt ezt a mozgást folytatja. Visszapattant a földről. Ha a gravitáció nem lenne, akkor szép egyenletes sebességgel távozna a világűrbe, így viszont lelassul, ez már a HAJÍTÁSOK témaköre.

Mik a tanulságok?

- A lelassuláshoz, majd az ellenkező irányba gyorsuláshoz **idő kellett**. Ez azért is kézenfekvő, mert már az impulzusváltozásról is megállapítottuk, hogy időre van szüksége.
- Eközben a két ütköző test (a labda és a talaj) között **erő keletkezett**, amely a sebességváltozást is okozta. A talaj egy erőlökéssel fékezte le a testeket.
- A testek az ütközés idejére **deformálódtak**. A teljes lefékeződés után keletkező újabb mozgást az okozza, hogy a rugalmas test visszanyeri az alakját, ebből fakadó erővel hatva a másik testre.
- Ha a test rugalmatlan, akkor nem keletkezik olyan erő, amely visszafelé kezdené gyorsítani.

Azt hihetnénk, hogy amikor egy acélgolyót ejtünk egy üllőre, akkor az ütközés egyetlen pillanat alatt lezajlott, valami más módon. Ha szuperlassítással nézzük, kiderül, hogy az acélgolyó is úgy viselkedik, mint a gumilabda, csak gyorsabban játszódik le a jelenség. Azért, mert az acélgolyó sokkal nagyobb erővel reagál az ugyanakkora összenyomására, egyszerűbben szólva keményebb. A nagyobb erő gyorsabban lefékezi, majd gyorsabban indítja el felfelé is, összességében kevesebb idő alatt.

A **2.** képen a golyó rugalmasságát egy csavarrugóval helyettesítjük, és a jelenség lényegileg azonosan zajlik le, mint a rugalmas golyónál. A **3.** képen a rugalmatlan golyót gumiasztalra ejtjük, itt a "talaj" rugalmas, és löki felfelé a golyót. Mindkettő, a golyó és a talaj is lehet rugalmas, és a deformálódásuk ereje összegződik. Az **5.** képen a golyót homokba ejtjük, itt a talaj a teljesen rugalmatlan.

Az ütközésnek két szélső határa van: a **tökéletesen rugalmas** és a **tökéletesen rugalmatlan**. Ilyenek a valóságban nem léteznek, hanem a közöttük levő végtelen sok lehetőség valamelyike figyelhető meg. Ha szuperlassítással és szuperközelről megnézzük egy puha gyurmagolyó leejtését, akkor ha az anyaga *nem ragad* – ez egy plusz tényezőt vinne a jelenségbe, változtatva rajta –, akkor a gyurma is visszapattan egy picit, miközben szétlapul, de aztán visszaesik. Tökéletesen rugalmas ütközés sincs, az energia kapcsán erről lesz még szó. Figyeld meg, hogy az előző rajzokon a golyók nem ugyanabba a magasságba pattantak vissza, mint ahonnan indultak! Tudjuk, hogy a valóságban is mindig így van, a pattogás végül mindig megáll.

Az ütközés rugalmasságát számszerűen is kifejezhetjük, ez a mennyiség az **ütközési szám**:

$$k = \left| \frac{v_{R2}}{v_{R1}} \right|$$

ahol $\mathbf{k}$ az ütközési szám, $\mathbf{v}_{R1}$ a test relatív sebessége az ütközés pillanata **előtt**, $\mathbf{v}_{R2}$ a test relatív sebessége az ütközés pillanata **után**. A relatív sebesség azt jelenti, hogy az ütközésben részt vevő *másik testhez viszonyított sebesség*. Lehet, hogy az a test is mozog, vagy az ütközéstől elmozdul, és mindkét $\mathbf{v}_R$ sebességet ahhoz viszonyítva kell megállapítani.

Az ütközési szám tehát egy arányszám, **0 és 1 közötti** értéket kaphat, és nincs mértékegysége. **A távozási sebesség és az érkezési sebesség aránya,** az ütközés helye szempontjából. Esetleg összecseréled a kettőt, de emlékezz arra, hogy a szám mindig legfeljebb **1**. Olyan nincs, hogy valami leesik, és magasabbra pattan vissza. Ha ilyet látsz, akkor biztosan valami egyéb, külső erő avatkozott be. Szokás mindent százalékban megadni,* ekkor a $\mathbf{k}$ értéke 0% és 100% közötti. Tökéletes ütközéskor a test pontosan ugyanolyan sebességgel pattan vissza, mint amennyivel ütközés előtt haladt. Az acélgolyó ütközése az üllőn közel jár az 1,0-es ütközési számú tökéletes ütközéshez. Egy kosárlabda betonon 0,97 körüli ütközési számot tud, focipálya füvén 0,85-öt, kinn a tarlón talán 0,4-et, frissen felásott homokban 0,02-ot. Persze ezek csak becsléses értékek, elnagyoltan megadott körülményekre vonatkozóan.

Miért kell az abszolút érték jele a képletbe?

Ütközés során a test relatív sebességének iránya ellentétesre változik.

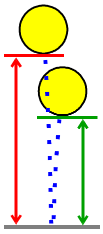
Ebből következően a két v érték egyike *negatív lesz*, emiatt a hányados is negatív. Az ütközési számot mindig pozitív értékként szokás használni, ezért a negatív előjelet eltüntetjük. De soha ne felejtsd el: a sebesség vektormennyiség, iránya van, és két sebesség összevetésekor az előjel nagyon fontos adat.

Ne felejtsd el, hogy a sebességeket közvetlenül a két ütköző test érintkezése előtt és után kell mérni. Ha leejtesz egy labdát, akkor a sebessége folyamatosan nő, visszapattanás után folyamatosan csökken, nem lehet akármikori sebességet figyelembe venni.

Ha a test sebessége az ütközés után kisebb, mint amennyi előtte volt, akkor itt valami eltűnik, nem?

De, így van. Az impulzus nem tűnik el, ezt már tudod, ezért ha a labda a földnek ütközik, a Föld impulzusa is meg fog változni, a labda impulzusának rovására. De ami itt számunkra még érdekes, az valami más, az a mozgási ENERGIA, amiben szintén az egyik meghatározó tényező a sebesség. Az ALAKVÁLTOZÁSOK fejezet alapján tudhatod, hogy ütközés során a testben levő mozgási energia egy része átalakul mássá, például hővé. (Ha egy vasdrótot kalapáccsal könnyedén ütögetsz, egészen felforrósodik.) Vagyis igen, a sebesség egy része energiaként máshová kerül, emiatt lesz az ütközési szám a gyakorlatban mindig kisebb 1-nél.

A MOZGÁSI ENERGIA ÉS IMPULZUS fejezetben látni fogsz egy ilyen példát, levezetve.



Nézzünk egy egyszerű feladatot, amelyben az ütközési számot mi magunk számoljuk ki! Szépen, lassan elmagyarázom, de te is dolgozz. **Leejtünk egy labdát a földre úgy, hogy kezdetben a talaj és a labda *alja* közötti távolság pontosan 1 m. A labda felpattanva 88 cm magasságot ér el, szintén a labda alját mérve. Mekkora az ütközési szám?**

* Nem jó szokás. Ha azt mondom, hogy valaminek az 50%-a, akkor az a dolog kevesebb 51%-nál és több 49%-nál, nagyon pontosan adtam meg az értékét. Ha ellenben azt mondom, hogy *a fele*, az kifejezi, hogy az érték nem egész pontosan meghatározott. Elég hülyén hangzik, ha azt mondom, hogy a kelkáposzta-főzeléknek csak az 50%-át ettem meg.

Induláskor el kell döntened, hogy milyen séma illik a feladatra (több egymást kiegészítő sémára is lehet szükség). Ezután fejből le kell tudnod írni az ahhoz tartozó képleteket. Ennyit mindig tudnod *kell*. Ha nem megy, akkor még nem tanultál elég figyelmesen, lépj vissza a témához. Itt mi a séma? **…**

Ez a **…** *azt jelenti, hogy légy szíves törni a fejedet, mielőtt megnézed, hogy én hogy csinálom. Ez mindenkitől elvárható, aki tanulni akarja a fizikát, azért, hogy ne maradjon le és hogy legközelebb ne bénázza el tök értelmetlenül a dolgozatot. Takard le egy papírral a következő sorokat, és minden ilyen pontnál állj meg, és akkor menj tovább, amikor van saját válaszod. Szóval mi a séma?* **…**

A feladat sémája függőleges HAJÍTÁS nulla kezdősebességgel, ejtés, szabadesés. Mit keresünk? Az ütközési szám két sebesség hányadosa, tehát képlet kell a sebességre. **…**

Két képlet is van, de az egyik a v_0-t adja meg a kilövés szögéből, annak itt semmi értelme; a másik képlet $\mathbf{v=v_0+g\cdot t}$, ahol v jelöli a lepattanás előtti pillanat sebességét (v_{R1}-et), t az elengedéstől a lepattanásig eltelt időt. Mennyi a v_0 kezdősebesség? **…**

Nulla, mert nyugalmi helyzetből ejtjük le a labdát. Ez a tag kiesett, marad $v=g\cdot t$. A v-t keressük, de a t ismeretlen, ezért kell rá egy második képlet. **…**

> $t=(v-v_0)/g$. A képlet jó, de **mégis** hibás ez a lépés. Miért? (Az ok inkább matek, nem fizika.) **…**
>
> No nem. Tessék még gondolkozni, lapozgatni, fejet törni. **…**
>
> A baj az, és a hajítások képletei között ez *meg is van jelölve*, hogy ez a képlet a másik képletből következik. Annak egy átalakított változata. Ami azért baj, mert ha ezzel akarjuk kétismeretlenes egyenletként megoldani a feladatot, akkor azonosságot kapunk, például azt, hogy v=v, és ezzel nem jutottunk sehová.

Egy képletünk maradt, jöjjön hát az: $\mathbf{y=v_0\cdot t+(g/2)\cdot t^2}$. y-nal itt a hajított test függőleges útját jelöltük, amit ismerünk, mert ez pontosan 1 méter. $v_0=0$, ott tartunk, hogy $y=5t^2$. Folytasd. **…**

Ha a következőt nem magadtól írtad le, *akkor baj van*, mert akkor elemi lépések megtételére sem vagy felkészülve (vagy túl lusta vagy?), sürgősen keress matekkorrepetálást. $1=5t^2$, **t**=gyök(0,2)=0,447 s.

> Ha a nehézségi gyorsulás pontos értékét helyettesítjük be, akkor a kapott szám **0,4516 s**, ezt meg is jegyezheted, mert *minden* test ennyi idő alatt esik le **1 méter** magasból. Az **1 másodperc** alatt megtett út pedig körülbelül 5 m, pontosan **4,90 m**.

Megvan a t, helyettesítsük vissza az első egyenletünkbe: $v=v_0+g\cdot t$, $v=0+10\cdot 0{,}447=4{,}47$ m/s.

> Ez is állandó minden testnél. **1 méter** magasról a végsebesség g·t, egész pontosan **4,429 m/s**.

A feladatban feltett kérdés az ütközési szám. Hogyan kell folytatnunk? **…**

Az ütközési szám képlete szerint $k=v_{R2}/v_{R1}$. A föld nem mozdul el (mérhetően), tehát a visszapattanási sebességet a mozdulatlan talajtól számíthatjuk, és ki kell számítanunk az értékét. Azt tudjuk, hogy v_{R2}-vel indul felfelé, és 0,88 m magasra emelkedik, *ott csökken a sebessége nullára*. Kérem még egyszer a függőleges hajítás sebesség-képletét. **…**

$v=v_0+g\cdot t$. A sebességet az előbb számoltuk ki. Mennyi a t? **…**

Ne kapkodd el a választ. Mennyi a t? **…**

Ha azt mondtad, hogy 0,447 s, **akkor elrontottad.** És valójában a sebességet sem számoltuk még ki. A REAKTÍV HAJTÁS fejezetben már beszéltem arról, hogy ha egy megoldás során észreveszed, hogy ugyanazt a betűjelet *két különböző dologra* kezded használni, akkor azonnal találj ki valami megkülönböztető jelzést. A t most a felfelé haladás ideje lenne, pedig azt már használtuk a lefelé haladás idejeként is. Vagy élesen elválasztod egymástól a két számítást, vagy másképp jelölöd ezeket, és leírod, hogy mit mivel jelölsz. Mondjuk, így: $\mathbf{v_2=v_{R2}+g\cdot u}$, ahol v_2 a felfelé haladás sebessége (mert v-ből is volt már egy), v_{R2} a korábbi alapképlet jelölését követve a felfelé mutató kezdősebesség, u pedig a felfelé haladás ideje. Írhatnál t_2-t is, az a fontos, hogy a betűjelek egyértelműek és ismert jelentésűek legyenek. Csak ekkor veheted észre, hogy *ezt az időt* még nem ismerjük. A másik ismeretlenünk a v_{R2}. Ha ez utóbbi meglesz, akkor már ki tudjuk számítani a **k** ütközési számot.

Tehát $v_2=v_{R2}+g\cdot u$. Annyit biztosan tudunk, hogy a v_2-vel jelölt végsebesség nulla, mert ekkor a labda a holtponthoz ért. Az idő kiszámításához jöjjön a másik képlet **…**

A képlet eredetileg így fest: $y=v_0\cdot t+(g/2)\cdot t^2$. Csak azért írom mindig zárójelben a g/2-t, hogy *egyértelmű* legyen, hogy a t^2 nem a nevezőhöz tartozik, nem $g/(2\cdot t^2)$-et kell kiszámolni. Lehet, hogy te is így gondolod zárójel nélkül is, de zárójellel a dolog biztosan egyértelmű. Átalakítom a képletet a jelenlegi jelzések szerint: $\mathbf{h=v_{R2}\cdot u+(g/2)\cdot u^2}$, ahol h a holtpont magassága, 0,88 m. Odafigyelést kíván a képlet átjelölése, de ha megcsináltad, már támaszkodhatsz rá. Most írjuk le a két képletünket, a két egyenletünket, benne az ismert számokkal.

$(v_2=)\ 0=v_{R2}+10\cdot u$ és $(h=)\ -0{,}88=v_{R2}\cdot u+5\cdot u^2$. Mínusz! Miért? **…**

Azért kell a h magasságnak negatív értéket kapnia, mert **a hajítások összes képleténél lefelé van a pozitív irány**. Felfelé haladva nemcsak a sebesség negatív, hanem a megtett út is. Csak így jön ki jól az egyenletünk. Ha elfeledkezünk erről, akkor a gyök alatt végül negatív szám lesz, ami persze nem lehet, ekkor kell észrevenned, hogy valamin elcsúsztál.

Két egyenlet, két ismeretlen, a szokásos technika ilyenkor az, hogy kifejezed az egyik egyenletből az egyik ismeretlent, azt behelyettesíted a másik egyenletbe, megoldod, majd az első egyenletbe visszahelyettesítve kapod az első ismeretlent. Két úton indulhatunk el, ráhajthatnék a v_{R2}-re és az u-ra is, én ezt választom:

$v_{R2}=-10u \rightarrow -0{,}88=-10u\cdot u+5u^2 \rightarrow -0{,}88=-10u^2+5u^2 \rightarrow -0{,}88=-5u^2 \rightarrow 0{,}176=u^2 \rightarrow u=\underline{0{,}420\ s}$.

Ez vissza a másikba: $0=v_{R2}+10\cdot u \rightarrow 0=v_{R2}+10\cdot 0{,}420 \rightarrow v_{R2}=\underline{-4{,}2\ m/s}$.

$v_{R1}=4{,}47$ m/s, a megoldás első felének volt ez az eredménye. Az ütközési szám a két érték hányadosa (pozitív), méghozzá úgy, hogy 1-nél kisebb legyen. **k**=4,2/4,47=**<u>0,940</u>**.

Nagyon hosszú volt, igaz? Mert túl sokat szövegeltem. <u>Akkor most leírom ugyanezt úgy, ahogy egy dolgozatban írnám</u>.

Leejtünk egy labdát a földre úgy, hogy kezdetben a talaj és a labda alja közötti távolság pontosan 1 m. A labda felpattanva 88 cm magasságot ér el, szintén a labda alját mérve. Mekkora az ütközési szám?

Ütközési szám $k=|v_{R2}/v_{R1}|$

Két szakaszból áll: függ. hajítás le 0 kezdőseb., utána függ. hajítás fel, adott magasságra.

1. szakasz, lefelé

$v=v_0+g\cdot t$, $y=v_0\cdot t+(g/2)\cdot t^2$. $v_0=0$, az ejtés végén $v=v_{R1}=g\cdot t$.

y=1 m az út a talajig, $(y=)\ 1=5t^2 \rightarrow t=\underline{0{,}447\ s}$. Ebből: $v_{R1}=10\cdot t=\underline{4{,}47\ m/s}$.

2. szakasz, felfelé (~~ellentétes irány~~)(negatív irány)

A megtett út 0,88 m, kezdősebesség a v_{R2}. Az alapképlet: $y=v_0\cdot t+(g/2)\cdot t^2$, ebből <u>itt</u>

$h=v_{R2}\cdot u+(g/2)\cdot u^2$, ahol u a felfelé haladás ideje, h=0,88 m.

$v_2=v_{R2}+g\cdot u$. h magasságon van a holtpont, ott $v_2=0$.

$(v_2=)\ 0=v_{R2}+10u \rightarrow v_{R2}=-10u \rightarrow \cancel{0{,}88=-10u\cdot u+5u^2=-10u^2+5u^2=-5u^2 \rightarrow u^2=0{,}88/-5}$

A magasság negatív, mert az út sebesség-irányú, ami felfelé negatív.

$(h=)\ -0{,}88=-10u^2+5u^2=-5u^2 \rightarrow u^2=0{,}88/5=0{,}176 \rightarrow u=\underline{0{,}420\ s}$. Visszahelyettesítve

$v_{R2}=-10u=\underline{-4{,}2\ m/s}$.

$v_{R2}/v_{R1}=-4{,}2/4{,}47$. Az ütközési szám <u>0,940</u>.

Amit elrontunk, azt ki szabad javítani. És jegyezd meg: "az idő jele" *nem* u, hanem csak mi ebben a megoldásunkban ezzel jelöltük az egyik időt, megkülönböztetésül.

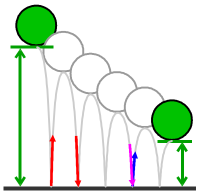
Igazság szerint a megoldás ezzel még nem kész, mert az összes pontért a kapott számértékeket ellenőrizni is kell, legalább a témazárókon, az egyenletekbe visszahelyettesítve. $4{,}47=0+10\cdot 0{,}447$ ✓, $1=5\cdot(0{,}447)^2=5\cdot 0{,}2$ ✓, $-0{,}88=-4{,}2\cdot 0{,}420+5\cdot(0{,}420)^2=-1{,}764+0{,}882=-0{,}882$ ✓, $0=-4{,}2+10\cdot 0{,}420$ ✓.

Ez egy nagyon unalmas, számolós feladat, de tíz perc alatt simán megvan, és sok pontot ér. Kettő darab tök egyszerű képletet kellett benne használni. Nem kell *szeretned*, de most már meg tudod oldani.

Ütközéssorozat

Az ütközési szám azt fejezi ki, hogy az ütközés során a testek nem tökéletesen rugalmas alakváltozásában a sebesség egy része elvész, az eredeti és a megmaradt sebesség aránya maga az ütközési szám. Ha az ütközések ugyanilyen testek között tovább folytatódnak, akkor a megmaradt sebességnek is csak az ilyen arányú maradékát kapjuk és így tovább. Lássuk egy példával:

Egy biliárdgolyót a padlóra ejtünk, és a golyó 5-öt pattan, mielőtt sikerül elkapnunk. Az utolsó felpattanásnak mekkora a kezdősebessége, ha a golyó először 5,1 m/s sebességgel érte el a padlót, és az ütközési szám 0,93?



Az első lepattanás sebessége oda 5,1, vissza 5,1·0,93=4,743 m/s. **A ferde és felfelé hajítás pályája szimmetrikus**, ezért a második lepattanás előtti érkezési sebesség ugyanakkora, mint amennyi az első lepattanás utáni felfelé mutató sebesség volt, 4,743 (piros nyilak). Ebből megmarad 4,743·0,93=4,411. Vagyis minden pattanáskor a sebesség mindig az ütközési szám állandó aránya szerint csökken. 5 visszapattanás, számold: 5,1 ·0,93 ·0,93 ·0,93 ·0,93 ·0,93 =5,1·$0,93^5$ =3,548 m/s.

Megkaptuk, hogy az ötödik pattanáskor mekkora volt a felfelé mozgás kezdősebessége. Hogy ezzel milyen magasra tud pattanni, a hajítási képletekkel igazán nem nehéz kiszámítani, az előbb csináltuk.

Többször lepattanó test esetében

$$\boxed{v_{R2} = v_{R1} \cdot k^n}$$

ahol $\mathbf{v_{R1}}$ az első lepattanás pillanata előtti sebesség, $\mathbf{v_{R2}}$ az utolsó felpattanás pillanata utáni sebesség, $\mathbf{k}$ a végig érvényes ütközési szám, $\mathbf{n}$ a lepattanások száma.

Az n=1 esetben eredményül kapott képletet megtalálod máshol is?

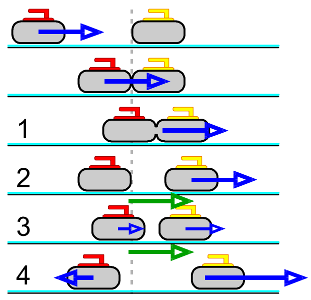
Ütközési alapszabályok

Az ütközéseknek vannak elég bonyolult szabályai is, de néhány egyszerűt megmutatok. Először is:

Az ütközés során is érvényes a centrum impulzusmegmaradásának törvénye.

Ez azt jelenti, hogy ha gondosan ügyelsz arra, hogy impulzus nem tűnik el, nem is születik, akkor ki fognak jönni a helyes sebességek olyan példában is, amit nehéz megérteni.

A törvény használatához a két ütköző testnek közös rendszert kell alkotnia. Miért lesz közös rendszer a két testből? Azért, mert ütköznek, azaz hatással vannak egymás mozgására.



Ennyi azonban még nem elég a mozgások kiszámításához. Nézd meg a rajzot. Érkezik a piros kő, találkozik a sárgával. Mutatok négyféle lehetőséget arra, hogy utána mi történik. 1: a kövek együtt mennek tovább, a megnőtt tömeg miatt félsebességgel; 2: a piros kő állva marad, a sárga kő veszi át az impulzusát és megy tovább; 3: mindkét kő megy tovább valamilyen sebességgel (a pirosé nyilván kisebb, mint a sárgáé, igaz?), az impulzusaik összege egyezik a kezdeti impulzussal; 4: a piros kő visszapattan, a sárga kő nagy sebességgel megy előre. Melyik fog megtörténni?

Az impulzusmegmaradás törvénye mind a négy esetben teljesül! A két kő impulzusának összege mindegyik esetben azonos lesz a piros kő kezdeti impulzusával. Akkor mi dönt? Honnan tudjuk meg a két kő ütközés utáni sebességét?

Az impulzusmegmaradás törvénye alapján a rendszer impulzusára ez az egyenlet írható fel:

$$I_E = I_U$$

$$\boxed{m_1 \cdot v_{1E} + m_2 \cdot v_{2E} = m_1 \cdot v_{1U} + m_2 \cdot v_{2U}}$$

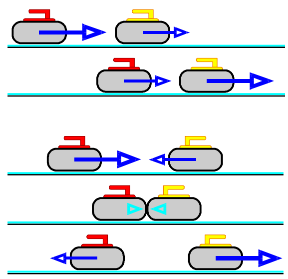
ahol 1 a piros és 2 a sárga kövek sebessége, ütközés Előtt és Után. De ebben az egyenletben két adat ismeretlen (v_{1U} és v_{2U}), ezért kell egy másik egyenlet is:

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 \cdot {v_{1E}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot {v_{2E}}^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot {v_{1U}}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot {v_{2U}}^2}$$

Ez az egyenlet a MOZGÁSI ENERGIA megmaradásának törvényéből következik, külön témakör szól majd róla. *Ennek az egyenletnek is* teljesülnie kell egy adott esetben, a másik egyenlettel együtt. **Mindkét kőhöz csak egy olyan sebességérték található, amely *mindkét* egyenletben igaz.** Ezért a tömegek és a kezdeti sebességek ismeretében a v_{pU} és v_{sU} egyértelműen kiszámolható. A képen látható köveknél történetesen m_1=m_2, és v_{2E}=0, de a megoldás bármilyen kövekre és sebességekre működik.

A képen látható mozzanatokban megfigyelhető az, amit az ütközési számnál emlegettem, a relatív (viszonyított) sebesség. A kezdőhelyzetben a relatív sebesség a piros kő sebessége a sárgához képest, míg például a 2. számú esetben… szintén. Ha a helyzetet egyszerűen úgy nézzük, hogy a piros kő ütközik valamihez, és visszapattan róla, akkor ez a 2. példára is igaz, mert a sárga kőhöz viszonyítva a piros kő mozgása így is felfogható. Tudod, vonatkoztatási rendszer dolga.

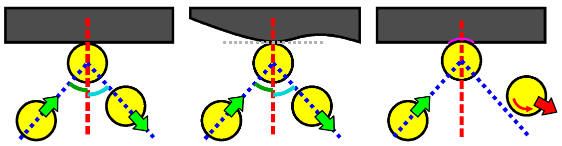
És ha már újra előhoztam az ütközési szám fogalmát: bizony, igazából a fenti két egyenlet bonyolítandó még azzal, hogy a k szorzótényezőt is bele kell foglalni. De az ilyen ütközéses feladatoknál tökéletesen rugalmas ütközést szokás feltételezni, ahol k=1. Az egyenletek kissé ijesztőek, de mindig csak két adat lehet bennük ismeretlen, ezért a megoldásuk nem túl nehéz.



Ezekből az egyenletekből levezethető a következő alapszabály: **két azonos tömegű test ütközésekor a testek sebességet cserélnek**. Így történik a képen is, akár azonos, akár ellenkező irányban haladt a két kő. Ha kicsit rutinos szemmel megnézed a mutatott eseteket, és még emlékszel is a tanultakra, akkor észreveheted, hogy közben a két kő centrumának a sebessége állandó marad. Ez is egy lehetőség számítások végzésére, akár egy harmadik egyenlet is összefabrikálható belőle.

Ha egy test egy hozzá képest végtelennek tekinthető tömegű testnek ütközik, akkor visszapattan róla. Például egy labdát rúgsz a ház falának.

Az utolsó bemutatott ütközési szabály a következő: **egy pontszerű test pályaszakaszai egy felülettel való ütközéskor egyforma szöget zárnak be a beesési merőlegessel.** Az ábrán bal oldalon láthatod, hogy miről van szó: a golyó olyan szögben távozik, amilyen szögben érkezett. Ez akkor is igaz marad, ha a golyó merőlegesen érkezik, mert akkor ugyanezen a merőleges vonalon is fog távozni. Ha a felület görbe, akkor ott, ahol a golyó vele találkozik, érintőt húzunk hozzá, és a beesési merőleges ahhoz igazodik.



Fontos feltétel az, hogy a test pontszerű. A valóságban egy biliárdasztalon a golyó a falhoz ütközve azt egy pillanatra benyomja, mert a fal egy rugalmas és könnyen deformálódó anyagból készült. Egy ütközésnek mindig van egy időtartama. Ez alatt az idő alatt a golyó egyik oldala a falhoz tapad, de a golyó tömegközéppontja halad tovább, ennek eredményeként <u>a golyó forogni kezd</u>. Ráadásul a fal ütközési száma is kisebb 1-nél, vagyis a visszapattanás sebessége egy kicsit kevesebb, mint az odaütődés sebessége. Ezeknek a hatásoknak az összegződése ahhoz vezet hogy a golyó "laposabban" pattan vissza és pörögve, ezt a biliárdjátékosok jól ismerik. Ezért igaz az előbb kiemelt szabály csak elméletben, a pörgést kizáró méretű, pontszerű testre. (Lásd még A GURULÓ GOLYÓ.)

Az első ábrán látod is a visszapattanásról szóló előző kijelentést. A fallal párhuzamos sebességösszetevő nem változik, a falra merőleges irányú pedig előjelet vált.

Egy további szabályról a MOZGÁSI ENERGIA ÉS IMPULZUS fejezetben fogsz olvasni.

Egy ismert játékszer a Newton-inga, más néven Newton-bölcső. Pontosan egy vonalban acélgolyók vannak felfüggesztve, és az egyik szélsőt felemelve és visszaengedve az ütközés ereje a túlsó oldalon levő golyót löki el, majd a dolog oda-vissza ismétlődik. Ha egyszerre két golyót emelünk fel és engedünk vissza, akkor a túloldalon is két golyó lökődik el, és lehet még különféle figurákat eljátszani. A jelenségek az ütközési szabályokkal, az impulzus- és energiamegmaradási törvényekkel megmagyarázhatóak.

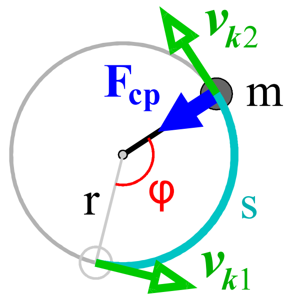
A pattogás lassan szétzilálódik, végül némi himbálózás a golyók megállnak. Kezdetben a pontosan érintkező golyókon nagy sebességgel végighalad az első ütközés rugalmas lökéshulláma, az acélban ennek a sebessége 1200 m/s körül van. De az acél hiába kemény anyag, az ütközések apró alakváltozással járnak, sorra mindegyik golyóban, emiatt a lökés átadódása lassan késni kezd, végül a golyók mindegyike elveszti a kontaktust a szomszédaival, a kapott mozgási energiát nem adják tovább, hintázni kezdenek. Bizonyítékul arra, hogy az ütközési szám sajnos még itt sem éri el az 1-et.

Körmozgás

Ha beakad a póráz.

Körmozgás egyenletes sebességgel

Ez egy fontos, nehéz, sok más fogalmat megalapozó téma, rengeteg új képlettel. Lassan haladj.



A körmozgás egy olyan haladó mozgás, amikor a test tömegközéppontja körpályán mozog. Ebben az esetben akkor is, ha a test sebessége állandó, **gyorsulásról beszélhetünk**, mivel a mozgásvektor iránya változik, lásd a GYORSULÁS fejezetet.

A körpályán a testet egy erő tartja, ami a kör középpontja felé mutat, és a neve **centripetális erő** ($\mathbf{F}_{cp}$). A test arra gyorsul, amerre erő húzza, eszerint a test **centripetális** (középpont felé mutató) **gyorsulás**t végez, ami $\mathbf{a}_{cp}$-vel jelölünk.

A körpályán a megtett út az **ívhossz** ($\mathbf{s}$). Az ehhez tartozó középponti szög neve **szögelfordulás**, a jele $\boldsymbol{\varphi}$ (fí). Azt fejezi ki, hogy a kör középpontjából nézve mekkora szöget zárnak be a megtett körív végpontjai.

Folyton visszatérő probléma szokott lenni a **látószög**, mint mennyiség értelmezése.

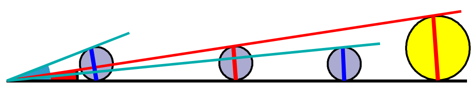
Nézd meg a Holdat. Mekkorának *látod*? Valószínűleg mondasz egy hosszértéket, például azt mondod, hogy fél centiméter. Hát jó. Akkor előveszek egy fél centis golyót, és odaadom neked, hogy tehát ekkorának látod? Azt mondod: igen. Akkor két lépéssel odébb megyek és felmutatom a golyót: tehát *ekkorának*?

Válasz: nem, mert túl messzire vitted. Visszajövök, és harminc centire a szemedtől felmutatom újra: *ekkorának*? Nem, ne hozd ilyen közel.

Te valószínűleg úgy értetted a fél centit – így szokás –, hogy a fél centis golyót *kartávolságban* nézed, és az akkora, mint a Hold. De miért pont kartávolságban, miért nem harminc centiről vagy másfél méterről? Nem hiszem, hogy tudsz rá jó választ.

Este nézd meg a Kis Göncöl csillagképet, az északi égbolton. A két hátsó csillaga milyen messze van egymástól? Igazság szerint 338 fényévnyire, nem keresztben, hanem mélységében, de szerintem te sem erre gondoltál.

A helyes válasz: a két csillag távolsága 3,2°. A két csillagtól a szemedig húzott két egyenes vonal ekkora szöget zár be egymással. Ez az érték a két csillag **szögtávolsága**.



A fél centis golyót is mindig akkorának láttad, amekkora a két széle közötti szögtávolság. Ha a szemedhez közel teszed, akkor nagyobb, ha távol teszed, kisebb. Csak egy bizonyos távolságban fogod akkorának *látni*, mint amekkora a Hold. 57 cm távolságban, elárulom. (Vagy mint a Nap, mert ezeknek véletlenül úgy jött ki a méretük és távolságuk, hogy a Földről egyforma nagynak látszanak.)

Úgy is lehet nézni, hogy ha van két vonalad, például a Hold két szélétől a szemedhez érkező két vonal, akkor az azok között hosszúságban kifejezett távolság attól függ, hogy azt a szemedtől milyen távol méred meg. Ha a vonalzót a szemedtől 30 cm-re tartod, akkor a Hold 2,6 mm nagyságúnak látszik, ha másfél méterre, akkor pedig 13 mm-nek. (A golyó átmérője 5 mm volt.) Hogy ezt honnan tudom? Onnan, hogy tudom a Holdról azt, hogy a szögnagysága 30 ívperc, azaz fél fok. És ha a tangens (vagy szinusz) függvény használatával te is elkezded méricskélni a körülötted levő tárgyak szögnagyságát, akkor a vonalzó tőled mért távolsága ismeretében a millimétereket és fokokat átválthatod egymásba. (1 cm 57 cm távolságban mérve lesz 1 fok, de 8-10 cm fölött ez elkezd torzulni.) *Figyelsz még egyáltalán?*

Ahogy láthatod, a dolgok látszólagos nagyságát praktikusabb a látószögükkel kifejezni, mint a levegőben megmérni őket vonalzóval, és mindig hozzátenni, hogy ez a vonalzó milyen távolságára érvényes. A látószög abszolút mérték, független a mérőeszköz távolságától. A golyó tőled 57 cm távolságban látszott fél fok alatt, a Hold 384 ezer kilométer távolságban látszik fél fok alatt. Egy tárgy méretét hosszban csak a mérési távolság megadásával tudod megadni. Látószögben, szögnagyságban, **ívhossz**ban pedig minden egyéb adat nélkül is. És ha utólag megtudod a megmért objektum távolságát, kiszámolhatod a valódi méretét, ha pedig megtudod a méretét, kiszámolhatod a távolságát. Szögfüggvényekkel.

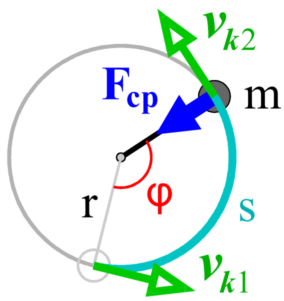
Ha maga a tárgy közeledik hozzád, akkor persze nő a szögnagysága.

Szögmérőből fabrikálhatsz mérőműszert is ehhez. Már a babilóniai csillagászok is megtették, ennek segítségével tudtak pontos térképet készíteni az égboltról, és annak alapján észrevenni és regisztrálni a változásokat, például a bolygók mozgását vagy a nóvákat. Ma is használatban vannak ilyen eszközök a szögtávolságok mérésére, földméréshez, navigációhoz: a kvadráns a kör negyedét fogja be, a szextáns a hatodát, az oktáns a nyolcadát.

Mekkora a tévétek szögmérete onnan, ahonnan te nézed?
Ha az 50 méteres tornyot 13° alatt látod, akkor mennyi a távolsága? (6^3 m)

Tehát még egyszer: a megtett körív szögnagysága a szögelfordulás, a jele φ. Az ábrán láthattad, hogy ez a kör középpontjából nézve hogyan is értendő.

A szögelfordulás lehet 360 foknál, **2π radián**nál nagyobb is, mert lehet, hogy a mérési idő alatt a test több kört is megtesz. Itt az ideje a Matek témakörben a RADIÁN fejezet elolvasásának. Mostantól szükséged lesz rá.



A test mozgásának vektora mindig a kör adott ponton vett érintője irányába mutat. Ha a kötöttség, a centripetális erő megszűnne, akkor a test ebben az irányban, egyenes vonalban haladna tovább. A köríven futott sebességének **kerületi sebesség** a neve, a jele v_k. *Ha a körmozgás egyenletes*, akkor a kerületi sebesség állandó, azaz a képen látható v_{k1} és v_{k2} nagysága egyenlő. Ez az egész tehát szinte ugyanaz, mint az egyenes vonalú egyenletes mozgás, csak itt a pálya egy körív, érdemes majd a fogalmakat és képleteket összehasonlítani. *Csak tartsd észben ezeket*: 360° = 2π, K = r·2π.

A befutott **ívhossz** a radiánból adódóan **a szögelfordulás és a sugár szorzata**:

$$s = r \cdot \varphi$$

Az adott ívhossz megtételéhez szükséges időt szokás szerint **t**-vel jelöljük. Az egy kör megtételéhez szükséges **köridő** jele **T** (vagy **keringési idő**, periódusidő), a mértékegysége másodperc. A kétféle időt egymásba átválthatjuk, ha arra gondolunk, hogy a szögelfordulás történik **t** idő alatt, a teljes kör megtétele történik **T** idő alatt:

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

A feladatban kapott szögek vagy fokban, vagy radiánban lesznek megadva. Tudd őket átváltani. Ha úgy kényelmes, te használhatsz fokot is, de a képletekben a szögek mértékegysége radián.

A v_k **kerületi sebesség** kiszámítására most már két képletünk is adódik, így mindig a feladatban megadottakhoz igazodva vehetjük elő a megfelelőt:

$$v_k = \frac{s}{t} \quad \left(= \frac{r \cdot}{t} = \frac{K}{T} \right) \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$
$$\text{ahol} \quad K = r \cdot 2\pi$$

Tehát a kerületi sebesség a megtett ívhossz (út) osztva a mért idővel, ami ugyanaz, mint a kör kerülete (**K**) osztva a köridővel. A mértékegysége az egyenes vonalú sebességhez hasonlóan **m/s**, ahogy a szögletes zárójelben megadva látod.

Azt is megadhatjuk, hogy 1 másodperc alatt hányszor teszi meg a kört. Periodikus mozgás lévén ez az érték hívható *frekvenciának* (am. gyakoriság), ekkor a jele **f**. A technikában ehelyett a **fordulatszám** szót használjuk, és **n**-nel jelöljük, de lényegük ugyanaz.

$$n = \frac{z}{t} \qquad (= f)$$

ahol **z** az összesen megtett körök száma, **t** az eközben eltelt idő. A **z**-t darabra számoljuk (bár törtszám is lehet), ezért a fordulatszám mértékegysége kicsit furcsa:

$$[n] = \frac{1}{s}$$

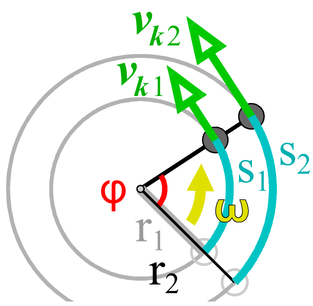
A fordulatszámot sokszor 1/perc-ben adják meg, ezt *ne felejtsd el* 1/s-ba átszámolni, például: 90/perc= 1,5/s. Vagy 1,5 **hertz** (Hz), ezt a periodikus mozgások általános mértékegységeként szoktuk használni.

A Matek témakör első fejezetében megtalálod a magyarázatát annak, hogy miért használható a fordulatszám mértékegységeként az $\mathbf{s^{-1}}$. Ugyanazt jelenti, csak másképp van leírva.

A **T** köridő a fordulatszám reciproka:

$$T = \frac{1}{n} \qquad [s]$$

Mit jelent az s^{-1} mértékegység? Miben különbözik a t és a T? Mi a z és az n?
Mi az ívhossz és a sugár hányadosa? Mi a kerületi sebesség vektorának iránya?



Ahhoz, hogy kerületi sebességről beszélhessünk, kell a kerület, vagyis ismerni kell a kör sugarát. Ez nem mindig áll a rendelkezésünkre, vagy nem mindig akarjuk az egyenleteinket függővé tenni tőle. Van egy másik mennyiségünk a mozgás leírására, amihez viszont ezekre nincs szükség. Ha a megtett út, az ívhossz helyett a körpályán megtett *szöget* nézzük, akkor teljesen mindegy, hogy a test milyen távolságban kering. Megmérjük, hogy az adott idő alatt bejárt pályát *milyen szög alatt látjuk*, ez a szögelfordulás (φ), az előbb volt szó róla. Kiszámítva ebből azt, hogy hány radián szögtávolságot tesz meg a test 1 másodperc alatt, megkapjuk a **szögsebességet**, a jele **ω** (omega), a mértékegysége *látszólag* a fordulatszáméval azonos:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad \left[\frac{1}{s}\right]$$

azaz

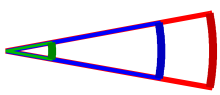
$$\omega \cdot t = \varphi$$

A kerületi sebesség a sugárhoz tartozik, a szögsebesség viszont a sugártól független adat. Ahogy az ábrán látod, a kisebb pályasugárhoz (r_1) kisebb ívhossz (s_1) és kisebb kerületi sebesség (v_{k1}) tartozik, mint a nagyobb sugárhoz (r_2), miközben mindkét test szögsebessége azonos: **ω**.

A φ/t-re már volt egy képletünk, azt itt is fel tudjuk használni:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot n$$

Ahogy azt már a közönséges háromszögeknél megtanultad, úgy az *ívháromszögekre* is érvényes a hasonlóság fogalma, vagyis a szár hossza és az ív hossza egyenesen arányos, a háromszögekben azonos arányban változik. A szár hossza ebben az esetben a körpálya sugara. Ez adja meg az ívhossz és a szögelfordulás arányát, de a kerületi sebesség és a szögsebesség arányát is.



Itt az előbb elmondottak eredménye, három már ismert fogalom összekapcsolása:

$$\left|\vec{v}_k\right| = r \cdot \omega$$

Ezt ki is lehet következtetni az ívháromszögek hasonlóságából vagy a fogalmak korábbi magyarázataiból, de ha csak a képleteket alakítgatod egymásba, akkor is ki fog jönni.

Ha egy műholdat nézel az égen, mit tudsz meg róla, a kerületi sebességét vagy a szögsebességét?

A keringő testet a centripetális erő, egy kényszererő tartja pályán. A test sebességvektora változik, a test gyorsul, a középpont irányába. A **centripetális gyorsulás** valami olyasmit fejez ki, hogy a test milyen gyorsan "esik" a középpont felé.

$$\left|\vec{a}_{cp}\right| = r \cdot \omega^2$$

A kerületi sebességhez való viszonya, ha a képleteket összehasonlítod, hasonlít az egyenes vonalú mozgások képleteihez, a (kerületi) sebesség mértékegysége m/s, a (centripetális) gyorsulásé m/s^2, mint rendesen. De, vigyázz, mert az egyenes vonalú és a körmozgás közötti hasonlóság nem érvényes mindenre, ne ezzel akard megjegyezni.

Azért kell abszolút értéket számolni, mert a sebesség és a gyorsulás vektormennyiségek, viszont a képlet csak a nagyságukat adja meg. De már az előbb kiderült, hogy a kerületi sebesség az érintő irányába, a centripetális gyorsulás mindig a középpont felé mutat. Ha akarod, a képletekből elhagyhatod a nyilat és az abszolútérték-jelet, de így precízebb.

Mennyi a **centripetális erő**? A dinamika alaptörvénye még körpályán is érvényes:

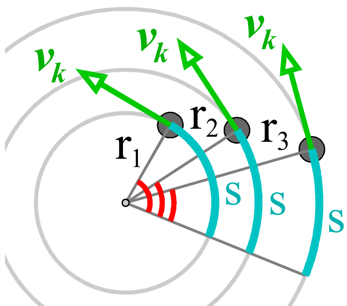
$$F_{cp} = m \cdot a_{cp}$$

$$F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Ezen nem is csodálkozhatunk, mert már megfigyeltük, hogy minél nagyobb tömegű tárgyat forgatunk meg egy madzagon, minél gyorsabban, annál nagyobb erő kell a körpályán tartásához.

Következmények

Az eddigi ábrákon azonos középponti szöghöz tartozó különböző hosszúságú köríveket láthattál. Ugyanahhoz a φ-hez és különböző r-ekhez tartozó arányosan különböző s-ek azonos t idő alatt bejárva ugyanazt az ω-t adják, és kifelé arányosan növekvő v_k-kat. *Követed? Rajzold le a szöveg alapján, legalább két körrel. Utána fent ellenőrizheted.*

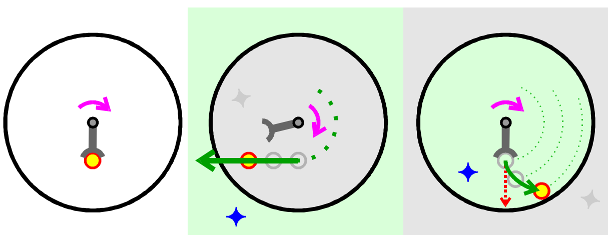


Másik tipikus eset az itt látható, amikor a különböző sugarú körökből megegyező *hosszúságú* ívet veszünk. Láthatod, hogy most az s-ek azonosak, és mivel a t is ugyanaz, a régi v=s/t képlet szerint a v_k-k is megegyeznek. Ugyanakkor a nagyobb r-hez ugyanaz az s kisebb φ-t ad, és értelemszerűen kisebb ω-t. Ez nem fizika, ez csak sima geometria.

Ezeket a fogalmakat az ábrákon jól gyakorold be, hogy fejtörés nélkül értsd a kapcsolatukat. Ha előkerülnek, sosem tilos magadnak kis rajzot csinálnod, és azt használni az emlékezeted segítésére.

Egy test nem változtatja meg a sebességét, amíg külső erő nem hat rá. A test most is egyenes vonalban haladna, de a sebességére merőleges irányú centripetális erő eltéríti. Merőleges, ami azt jelenti, hogy az haladási sebességhez hozzá sem tesz, abból el sem vesz, csak az irányát változtatja meg. Eszerint a kezdeti sebesség nagysága nem változik, csak körpályára kényszerített testnél ez a sebesség kerületi sebességgé válik.

Ha egy körpályán állandó sebességgel mozgó testnek a középponttól mért távolságát megváltoztatjuk, akkor a haladási sebessége megmarad. Azaz a kerületi sebesség nem függ a pályasugártól. A hozzá tartozó szögsebesség viszont fordított arányban változik meg.



Ezen a rajzon egy forgó korongot látsz felülről. Egy szerkezet tartja a helyén a sárga golyót, majd az első képen látható helyzetben elengedi. A kérdés az, hogy a golyó hogyan mozog.

A helyes válasz ilyenkor az, hogy "Attól függ, hogyan nézem." Az egyik lehetőség a szokásos inerciarendszerben nézni az eseményeket, "kívülről", például a kék csillag helyén állva.

Forgó rendszer jelenlétében mindig felmerülhet az ötlete annak is, hogy a megfigyelő a korongra üljön, és egy másik, a koronggal együtt forgó vonatkoztatási rendszerben figyelje az eseményeket. Az INERCIA-RENDSZER fejezetben már olvashattál erről, láthattál példákat.

Kívülről nézve a golyó körmozgást végzett mostanáig, amelyben a centripetális erőt ez a kar biztosította. Ez az erő megszűnt, nem maradt semmilyen erő, ezért a golyó a pillanatnyi mozgásirányát folytatva, egyenes vonalban gurul tovább.

Ha a korongon ülünk, akkor világ leszűkül a korong területére. Ugyanazt fogjuk nézni, amit az előbb, csak más lesz az alaptengelyek iránya, a vonatkoztatási rendszer. Így nézve kezdetben a golyó *állt*, mert velünk együtt forgott. Egyszer csak a szerkezet elengedte, és a golyó "esni" kezdett a korong széle felé. De nem sugárirányban, egyenes vonalban fogja ezt megtenni, hanem egy ívelt pályán.

A golyót a **Coriolis-hatás** (ejtsd: korioli vagy koriolisz) téríti el, ami úgy néz ki, mintha erő nyomná félre a golyót, ezért hívják néha Coriolis-erőnek. Pedig itt csak annyi történik, hogy a golyó változatlan haladási (kerületi) sebességével haladva egyre nagyobb sugarú körpályára kerül, csökken a szögsebessége, emiatt a sugárirányú mérővonalhoz képest egyre jobban "lemarad", ebből adódik össze a görbült gurulási pályája íve. Minden pillanatban meghúzható a kiguruló golyóhoz az a körpálya, amelyen haladónak tekinthetjük, és azon a körpályán ellenőrizhetők azok a meghatározó tényezők, amiket a korábbi ábrán láttál, azonos v_k sebességek esetén.

A golyó mindkét esetben ugyanazon a térbeli vonalon halad, a megfigyelés nem változtathat magán a jelenségen, csak a pálya *ábrázolásához* használunk eltérő jellegű koordinátarendszereket.

A földrajzban a passzátszelek kapcsán is emlegetik a Coriolis-hatást. A gömbölyű Föld felszíne mentén haladó légtömegnek a Föld tengelyétől mért távolsága változik, ebből ered az elhajló mozgás.

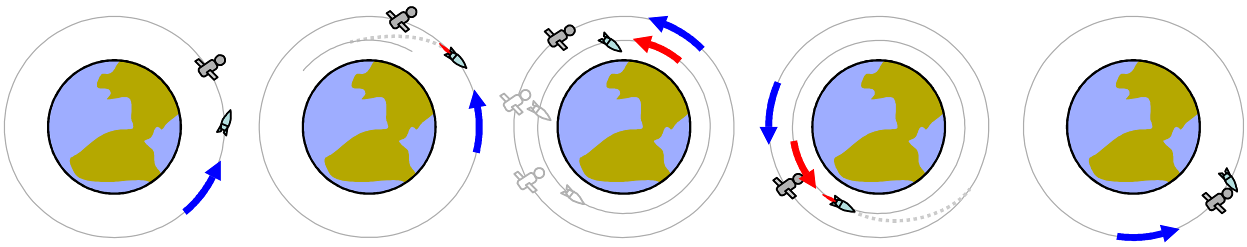
A SZABADESÉS fejezetben már tettem említést az égitestek által követett **tehetetlenségi pályák**ról. Ezek alakja mindig a kúpszelet-görbék valamilyen méretű és irányú változata: kör, ellipszis, parabola, hiperbola. Kikapcsolt hajtóművel az űrhajók is mindig egy ilyen pályagörbén haladnak, lásd még a *Kozmosz* témakör KEPLER-TÖRVÉNYEK fejezetét.

Körpályás feladatok között van olyan, amelyben a centripetális erőt nem kötél, hanem *rugó* adja. A rugó egyedisége az, hogy a nyújtásakor növekedő visszahúzó erővel válaszol. A rugóhoz kötött pálya sugarának nem fix centripetális erőhöz kell igazodnia, hanem a növekvő sugár *növekvő centripetális erőt* eredményez, és a pálya sugara ennek megfelelően találja meg az értékét.

Az égitest körül keringő test mozgása részben hasonló eset, mert a test és az égitest közötti kapcsolat itt sem merev. Mivel a TÖMEGVONZÁSI erő a távolság négyzetével csökken, a növekvő sugár *csökkenő centripetális erőt* eredményez, a pálya sugara ennek megfelelően alakul ki valahol. Ha ilyen szempontból átgondolod a körmozgás képleteit, rájöhetsz, hogy ez furcsa mozgási szabályokat tud eredményezni. Megmutatom a legismertebbet.

Az égimechanikai paradoxon

A Föld körül kering egy űrállomás, mögötte azonos pályán lemaradva egy űrhajó. Az űrhajó szeretné utolérni az űrállomást. A földi közlekedéshez szokott ember azt mondja, hogy a rakéta gyorsítson. De az űrhajó pályája tehetetlenségi pálya, a Földtől való távolság szabja meg a kerületi sebességet, és viszont. Ezért a valóban célravezető manőver meglepő.



A helyes megoldás az, hogy *az űrhajó fékezni kezd*. Láthatod a kis rajzon, ahogy a REAKTÍV HAJTÁS technikájával a haladási irányba fújja a hajtómű égésgázait, *mintha éppen távolodni akarna az űrállomástól, és így fog hozzá közeledni*. A paradoxon szó látszólag megmagyarázhatatlan ellentmondást jelent, ezért kapta a manővert megalapozó elv ezt a nevet.

Az űrhajó továbbra is a nyíl irányában halad, a hajtóművel fékez. Azzal, hogy az űrhajó valamennyivel csökkentette a kerületi sebességét, automatikusan és megakadályozhatatlanul alacsonyabb keringési pályára került. Ha utánaszámolnánk, azt látnánk, hogy annak ellenére, hogy *a kerületi sebessége csökkent*, a pályasugár annyival kisebb lett, hogy az űrhajó *szögsebessége* *megnőtt*. Ezért az űrhajó "belülről előzni" kezdi az űrállomást. Hajtómű használata nélkül, pusztán az égimechanika szabályai következtében. (Képtelenség lenne annyi üzemanyagot felvinni, amennyi a szabad ide-oda röpdösést lehetővé tenné.) Az űrhajó jócskán megelőzi az űrállomást, alacsonyabb pályán, ideje elkezdeni a "tolatást", hogy végül összetalálkozzon vele. Ennek érdekében begyújtja a hajtóművét, és *gyorsít*. Megnöveli a kerületi sebességét, emiatt nő a pályasugara, emelkedni kezd, de ezzel csökkenni kezd a szögsebessége, és ahogy a Coriolis-hatásnál már láttuk, lemarad a pályáján, pont annyira, hogy végül az űrállomás közelébe kerüljön. Ott aztán már a kis manőverhajtóművek finom használatával pontosan összekapcsolódnak.

Ez az egész csakis azért működik így, mert az űrjárműveket a tömegvonzási erő tartja pályán, ezért itt a centripetális erő a pályasugár növelésével négyzetesen csökken.

A szögsebesség és a fordulatszám mértékegységei (ω és n)

Ennek a két mennyiségnek a mértékegységével gond van. Először is az, hogy *látszatra azonosak*: **1/s**. Pedig az nem lehet, hiszen az előbb láthattad ezt a képletet: $\omega = 2\pi \cdot n$. A szögsebesség mindig a fordulatszám 2π-szerese, ezért a mértékegységük nem lehet azonos, csak azonosnak látszik.

Az **1/s** kifejezéssel matematikailag azonos az $\mathbf{s^{-1}}$ alakkal, ezt a Matek témakörben elolvashatod. Ha pedig egy mennyiség k **1/s**, akkor az összevonható így: k**/s**, itt a k a mérőszám, az s pedig a mértékegység része. Például 40 1/s egyenlő azzal, hogy 40 s^{-1} vagy 40/s.

A fordulatszám a megtett körök száma (z) osztva az idővel, egyszerűbben: kör per másodperc. Viszont olyan elismert, nemzetközi fizikai mértékegység nincs, hogy "kör", "darab", "db", de még a "fordulat" sem igazi mértékegység. A körök száma csak egy szám; lehetne mértékegysége, de sajnos nincs. Mivel a "szám per szekundum"-ot nem lehet mértékegységként leírni, a számlálóba betettek egy 1-est, és így keletkezett az 1/s.

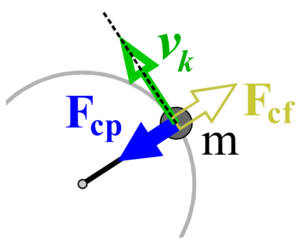
Ha biztos akarsz lenni abban, hogy a mértékegységet nem érti félre az, aki olvassa, amit leírsz, akkor azt javaslom, hogy írd valahogy így: fordulat/s, ford/s, kör/s. Akkor is, ha ez nem hivatalos.

A szögsebesség a megtett középponti szög (φ) osztva az idővel. A szög szabványos mértékegysége a radián, ezt szintén a Matek témakörben elolvashatod. A radián egy arányszám, az ívhossz és a sugár aránya, tehát nincs mértékegysége. Egy teljes kör 360°, vagy radiánban számolva ~6,28 (2π). Lehetne jelölhető mértékegysége, de sajnos nincs. Ha kerülni akarod a félreértést, akkor azt javaslom, hogy írj radián/s vagy rad/s mértékegységet. (Bár a rad a sugárzás egy elavult mértékegysége.)

És mit tehetsz akkor, ha a feladatban te az összetéveszthető alakkal találkozol? Például "**3/s**"? Akkor gondosan oda kell figyelned arra, hogy a szöveg szerint az milyen mennyiséghez tartozik. Ha azt írják, hogy "a *fordulatszáma* 3/s", akkor világos, hogy ez 3 fordulatot jelent másodpercenként, vagyis a szögsebessége 6π radián/s. Ha a *szögsebessége* 1,3/s, akkor tudod, hogy ez radiánban értendő, 1,3 radián/s, ami kb. 74,5°/s, a fordulatszám ekkor kb. 0,207 fordulat/s.

Centrifugális erő

A rajzon van egy nyíl, egy erő, amiről még nem beszéltünk, az F_{cf} jelű. Ez a **centrifugális erő**. A centripetális erőről valószínűleg akkor hallottál először, amikor a körmozgást tanultad, viszont a centrifugális erőt talán már régóta ismered. A centripetális erőt a kötél (madzag, kábel, rúd) fejti ki a testre, ezzel az erővel kényszerítve azt a körpályára. Ha ez az erő megszűnne, a test a tehetetlenség törvényét maradéktalanul betartva egyenes vonalban és egyenletes sebességgel távozna, abba az irányba, amerre a kerületi sebessége abban a pillanatban mutatott.



Ha a fejed fölött madzagon forgatott labdát egy bizonyos irányba akarod eldobni, a madzagot akkor kell elengeded, amikor a labda a kívánt irányhoz képest pont "oldalt" van. Azt hihetnéd, hogy ekkor elengedve a labda "kiesne" valahová oldalirányba, pedig a labda előrefelé indul el.

A testnek megvan a maga tehetetlensége, ami nem csak az egyenes vonalú gyorsuláskor figyelhető meg, hanem a centripetális gyorsulásnál is. A keringetett test ellenállni próbál a kényszernek, nem akar bekanyarodni, mert valami húzza kifelé, amit "centrifugális erő"-nek szoktak hívni.

A TEHETETLENSÉGI ERŐ című fejezetben erről hosszan írtam, itt már csak alkalmazom az ott megtanultakat erre a helyzetre. Tehát mindenekelőtt:

A körpályán haladó testre ható centrifugális erő *nem létezik*.

Az a *hatás*, jelenség, ami a testet kifelé húzza, **maga a tehetetlenség**. Nem erő. Ha benne ülünk egy körhintában, csak *úgy érezzük*, mintha egy erő húzna bennünket kifelé. Már egy csomó dolgot megtanultál a mechanikából, az egyik legfontosabb ezek közül Newton egyesített mozgástörvénye, ezért jól tudod, hogy ha az előbbi ábrán látható módon hat ránk egy erő befelé és egy ugyanakkora kifelé, akkor az eredőjük nulla, és mi zavartalan, egyenes pályán siklunk el a távolba. A törvény a fizikában szent, ami azért jó nekünk, mert akkor most tudhatjuk azt, hogy valamit nem jól nézünk.

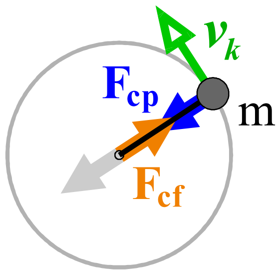
Annál is inkább, mert szigorú törvény az is, hogy egy testre ható erőt mindig *egy másik test hoz létre*. A körhintán nincs olyan test, ami bennünket kifelé nyomna. Akkor ott ilyen erő nem is létezhet.

A centripetális erő ellen ébredő erőhatás tehát csak a tehetetlenségnek az a formája, ami próbálja a testet egyenes pályán tartani, miközben egy tényleg létező erő ívelt pályára kényszeríti. Ha a centrifugális erő valódi erő lenne, az megszegné a törvényeket. Ehelyett:

A keringő testet kifelé húzó erőhatás neve *centrifugális tehetetlenség*.

Centrifugális erőnek mást hívunk, vagyis mást kell hívnunk.

A centrifugális erő az az erő, amivel a keringő test *arra a testre* hat, amely őt körpályán tartja.



Figyeld meg: a centrifugális erő sosem a keringő testre hat, hanem a kötélre, azon keresztül pedig arra a tengelyre, amelyik a kötélen keresztül a pályán tartáshoz szükséges erőt kifejti. Lehet a tengely egy oszlop, egy motor, egy leszúrt cövek, egy ember, ennek nincs jelentősége. A kötelet tartó tengelyre persze hat a csapágyból vagy tengelyfoglalatból származó ellenerő is (szürke), amely arról gondoskodik, hogy az a kötél húzóereje ellenére is a helyén maradjon, de feladatokban ezzel ritkán szoktunk foglalkozni.

> Ne gondold azt, hogy fölösleges ez a rugózás azon, hogy most végül is mi húz mit, ha végül mégiscsak az derült ki, hogy van centrifugális erő, akkor pedig hagyjalak ezzel békén. Ha csak a szögsebességet kell kiszámolni a fordulatszámból, vagy valami hasonló gyerekség, akkor nincs jelentősége. De ha a feladat olyasmit akar tőled, hogy mekkora a parittyából* kivágódó kavics gyorsulása, ott enélkül talán eltévedsz és pontokat veszítesz, esetleg el is akadsz a megoldással, mert sehogy sem jön ki az egyensúly. A fizika precíz tantárgy, pontosan ettől működik, csináld jól te is.

Szóval ha a centrifugális erő ($\mathbf{F}_{cf}$) nagysága és iránya érdekel bennünket, akkor

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cp}$$

de: **a centri<u>petális</u> erővel a kötél húzza a testet, és a testre csak ez az erő hat, ami kényszererő. A testben ébredő ellenerő a centri<u>fugális</u> erő, és a test ezzel az erővel húzza a kötelet.**

A körpályán haladó testet nem mindig egy kötélszerű dolog tartja pályán, amely a test "belső" oldalát húzza. Van olyan vidámparki játék, ami egy nagy forgó dob, és a centrifugális tehetetlenség annak a belső falára nyom bennünket olyankor is, amikor a dobot megbillentik. Ott is, de egy kanyarodó autóban is a "külső" oldalunkat **befelé nyomja** a merev szerkezet ereje. Az előző megfogalmazás erre is igaz.

> **Amit eddig olvastál, az egy inerciarendszerben igaz.** Nézhetjük a körmozgást egy <u>forgó</u> vonatkoztatási rendszerben is, amely <u>nem</u> inerciarendszer, de ettől még használható. Ilyenkor a rendszer közepén állva, a testtel együtt elfordulva figyeljük a jelenségeket. Ilyen rendszerben nézve a test a mozdulatlanságát *tényleg* két, egymást ellensúlyozó erő hatása alatt tartja meg, és ez a két erő a centripetális és a centrifugális erők.

Mire hat a centripetális és mire a centrifugális erő?

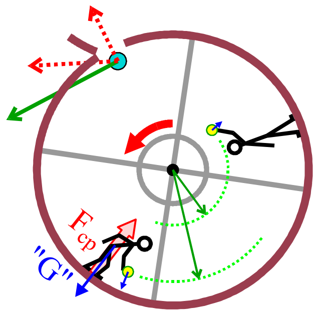
Egy fontos dolgot még ide kell vennünk. A tehetetlenségnek ez a fajtája a körpálya elhagyására törekszik, de a test a körpályán *haladó* mozgást végez, és arra külön vonatkozik *a másik* fajta tehetetlenség, a szokásos. Ezért **ha a körmozgás kerületi sebességét növelni vagy fékezni akarjuk**, akkor azt a tehetetlenséget kell legyőzni, az egyenes vonalú mozgásoknál kitárgyalt szabályok szerint.

---

* Talán még ma is él az a finomkodó szokás, hogy a csúzlit parittyának hívják. Tévedés. A csúzli az, amiben a gumit meghúzom, elengedem és kilövi a kavicsot, a parittyában pedig a kavicsot *körpályán* megforgatom, és az egyik zsineg elengedésével szüntetem meg a centripetális erőt.

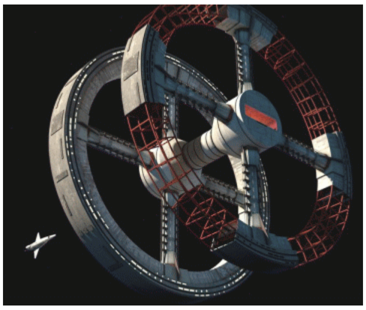
Ha te egy körpályán motorozol, és egy kötéllel vagy kikötve a pálya középpontjához, akkor a **centrifugális tehetetlenség** az, ami miatt majdnem kirepülsz a pályáról. Ha viszont növelni akarod a sebességedet, akkor gázt adsz, hogy a tested szokásos (mondjuk úgy: **lineáris**) **tehetetlenség**ét leküzdve felgyorsulj, és fékezned kell ahhoz, hogy lassíts.

Hogy hívják azt a törvényt, amely ezt előírja?



A **centrifugális tehetetlenség** és a **centripetális erő** hasonló viszonyban vannak, mint amilyen a szokásos inerciarendszerben a **szabadesés** és az **alátámasztási erő** viszonya. Nem azonos, de hasonló. Amikor a körhintán ülve a centrifugális tehetetlenség kifelé húz bennünket, akkor az egyfajta súlynak is felfogható. A rajzon látható szerkezet forog – az irány igazából nem számít –, és a két ember ennek részeként a forgástengely körül körmozgást végez. A forgódobban levő embert a centripetális erő nyomja befelé, és ennek ellenhatásaként jön létre számára egy "súly". Ami az ember számára egy függőleges vonal, az egyben ennek a forgódobnak egy sugara. A "fent" iránya a forgástengely felé mutat.

Egy különbség van a forgódobban létrejövő mesterséges nehézkedés és a valódi földi nehézkedés között: ez a mesterséges súly kisebb a forgástengelyhez közelebb. A centripetális gyorsulás ugyanis $\mathbf{a}_{cp}=\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}^2$, tehát függ a keringés sugarától, a tengelytől való távolságtól, a szögsebesség pedig az egész merev rendszer minden elemére egyforma. Ez azzal a furcsa következménnyel jár, hogy ha egy tárgyat felemelnek, akkor az eközben egyre könnyebb lesz. A mesterséges súly a centripetális gyorsulásra válaszoló ellenhatás, és a kettő mindig arányban áll egymással. A labda a "padlóhoz" közel tartva a maga körpályáján halad, aminek a sugara elég nagy, emiatt a centripetális gyorsulása is nagy. A felemelt labda körpályája kisebb sugarú lesz, ezért a képletnek megfelelően a centripetális gyorsulása kevesebb lesz. Vagyis az alacsonyan tartott labda nehezebbnek érződik, mint a magasra tartott labda. Ha egyszer egy ismeretlen szobában találod magad, ezzel eldöntheted, hogy nem kerültél-e egy űrállomásra.



Az orosz Konsztantyin Eduardovics **Ciolkovszkij** már **1903**-ban leírta a reaktív hajtást az ötven évvel későbbi űreszközök számára, ő találta ki a folyékony üzemanyagú többlépcsős rakétát, és kitalálta azt is, hogy egy űrhajó vagy űrállomás forgatásával mesterséges nehézkedést lehetne létrehozni, az előbb leírtak szerint. A dolog nagyon is lehetséges. Ha majd tudunk már akkora űrállomást építeni, akkor az valószínűleg tényleg forogni fog, előállítva azt a minimális nehézkedést, ami a nagyon veszélyes csontritkulás és izomsorvadás megelőzéséhez feltétlenül kell, és amit a mai űrállomásokon eddig rengeteg torna végzésével is csak lassítani tudnak.

Azt, hogy ez a súlypótló erőhatás pontosan mekkora is, két dolog befolyásolja: az $\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}^2$ képletnek megfelelően a forgástengelytől való távolság és a forgás szögsebessége.

> Ha a gyűrű sugara 50 méter, mekkora forgásidő kell az 1 g álgravitációs gyorsuláshoz? $g=r\cdot\omega^2$, $g=9{,}80665$, $r=50$ » $\omega=0{,}443$, $T=2\pi/\omega$ » $T=\underline{14{,}2\text{ s}}$. A kerületi sebesség? $v_k=\omega\cdot r=22{,}1$ m/s = $\underline{80\text{ km/h}}$.

Az előző rajz szerinti "padlón" áll egy nagy kék labda. Ha kinyílik alatta egy csapóajtó, akkor a labda "kiesik". Pontosan merre fog haladni? A helyzet ugyanaz, mint ami a KÖRMOZGÁS fejezetben a forgó korongon elengedett golyóval volt. Az ember hajlik arra az érzésre, hogy a tengely körül keringő, majd elengedett labda egyenesen kifelé indul, sugárirányban, hiszen érezhetően arra törekszik. De van egy érintőirányú sebessége is, ami miatt inkább valamennyire előre esne, gondolhatjuk. A pontos valóság a zöld vonallal mutatott irány: a labda *kívülről nézve* ezen a pályán haladna, és ebből eredően kerülne át a nyíláson, majd repülne tovább. Ha viszont *belülről nézzük*: a labda kiesik a lyukon, majd rögtön lemarad, eltűnik az űrhajósok szeme elől, lásd a Coriolis-hatást az előző fejezetben.

Gyorsuló körmozgás

A körmozgásnak van olyan fajtája is, amikor a **szögsebesség egyenletesen nő** (vagy csökken). Amikor léket kap egy túlnyomásos palack, vagy elszabadul egy petárda, és egyre gyorsabban pörögni kezd, ezek ilyen esetek. A forgást okozó erőhatás állandó nagyságú marad, ezért a körsebesség egyenletesen nő, hasonlóan ahhoz, amikor egy testet egy erő egyenes vonalban egyre nagyobb sebességre gyorsít.

Lehet, hogy ti ezt nem tanuljátok, de azért én megmutatom neked a **szöggyorsulás** (**β**, béta) fogalmát:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \left[\frac{1\,(\mathrm{rad})}{s^2}\right]$$

A deltával már foglalkoztunk a haladó mozgások témakörében, a SEBESSÉG és GYORSULÁS fejezeteiben. Ebben a képletben azt jelentik, hogy amennyit a szögsebesség két pillanat között *változott*, elosztva azzal, amennyi idő eltelt közben, akkor kapjuk meg a második időpillanatban érvényes szöggyorsulást.

Figyelj és gondolkozz: az egyenes vonalú mozgásnál az **s** út egyenletes növekedése a **v** sebesség, ami állandó. A gyorsulás során a **v** egyenletesen növekszik, és az **a** gyorsulás állandó. Körmozgásnál a **φ** szögelfordulás egyenletes növekedése az **ω** szögsebesség, ami állandó. Gyorsuló körmozgásnál az **ω** egyenletesen növekszik, és a **β** szöggyorsulás állandó.

Így aztán ismerős képleteket kapunk az egyenes (balra) és a körvonalú (jobbra) **gyorsuló mozgásra**:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$

$$v = v_0 + a \cdot t \qquad \omega = \omega_0 + \beta \cdot t \quad \rightarrow$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad t = \frac{\omega - \omega_0}{\beta}$$

A gyorsuló körmozgásnál a kerületi sebesség egyenletesen változik, ezért van egy *állandó* értékű, az eltelt időtől független nagyságú **kerületi gyorsulás** is:

$$a_k = r \cdot \beta \qquad [m/s^2]$$

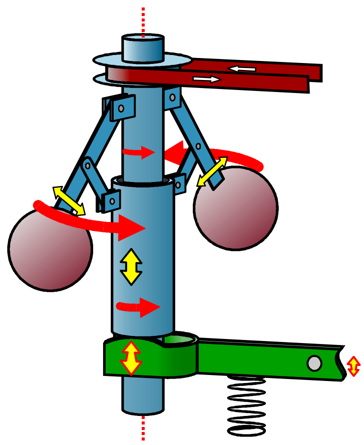
A kerületi sebesség továbbra is **r·ω**, ez az **ω**-val együtt egyenletesen növekedik (és $\omega = \beta \cdot t$), így a képletek szerint egy adott t pillanatban

$$v_k = r \cdot \beta \cdot t \qquad [m/s]$$

A centripetális gyorsulás továbbra is $\mathbf{r \cdot \omega^2}$, ez az **ω**-val együtt *négyzetesen* növekedik, és a képletek szerint egy adott t pillanatban

$$a_{cp} = r \cdot \beta^2 \cdot t^2 \qquad [m/s^2]$$

A centrifugális szabályzó



Ezt a szerkezetet James Watt fizikus nevéhez kötik, de ő csak alkalmazója volt, nem a feltalálója. (És a gőzgépet sem találta fel.*) Az eszköz feladata az, hogy valamilyen géphez kapcsolva egyenletesen tartsa annak teljesítményét.
A szabályozni kívánt gép valamilyen megoldással (a rajzon egy szíjáttétellel) forgásban tartja a szerkezetet. A két nehéz fémgömb és az összes kék színű alkatrész együtt forog. A gömbök centrifugális tehetetlenségének ereje a forgási sebességtől függ. Ha a forgás felgyorsul, a gömbök eltávolodnak a tengelytől, és kicsit feljebb emelik a tengelyen szabadon elmozdulni képes kék csövet. Ez kissé feljebb engedi a hozzá támaszkodó zöld szabályozókart, ami a gépezet teljesítményét kicsit

* Wattnak tulajdonítják a gőzgép feltalálását, ami szokás szerint egy tévhit. Amikor Watt megszületett, Angliában már kb. 70 Newcomen-féle atmoszférikus gőzgép üzemelt, elsősorban bányák víztelenítő szivattyúit hajtva. Ezek a gépek valójában nem a gőz, hanem a levegő erejét hasznosítják. Nagyon sok szenet fogyasztottak, rossz volt a hatásfokuk. Watt 29 éves korában bemutatott egy ötletes és fontos újítást, a gőzlecsapatót (kondenzátort), amivel duplájára növelte a hatásfokukat.

visszaveszi. A csökkenő teljesítmény miatt a szíjáttétel által fenntartott forgás sebessége kicsit csökken, a gömbök lejjebb ereszkednek, lejjebb tolva a csövet, ami a szabályozókaron át kicsit újra megnöveli a gép teljesítményét.

Ez az önszabályozó rendszer végül is egy közbülső helyzetben stabilizálódik, az ingadozást kiegészítő alkatrészekkel minimálisra lehet csökkenteni. A szabályzónak (más szóval *regulátor*nak) köszönhetően például egy gőzgép nyomását vagy egy motor fordulatszámát nem kell folyamatosan figyelni és kézzel igazgatni, hanem elég a szabályzót valamilyen megoldással egy bizonyos állásba behangolni. De használható például egy óraszerkezet vagy akár egy lift mozgásának közvetlen fékezésére is.

Forgómozgás

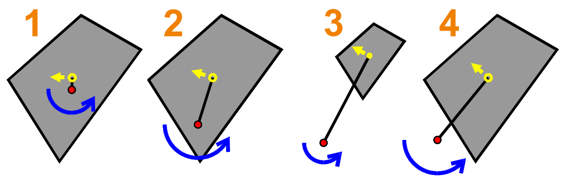
A forgómozgás nem sokban különbözik a körmozgástól. A körmozgásban egy pontszerű test kering egy középpont körül, a forgómozgásban pedig egy merev *pontrendszer* pontjai végeznek körmozgást egy közös tengely körül. Az első témakör TÖMEGKÖZÉPPONT fejezetében már beszéltem a pontrendszer fogalmáról, amikor egy testet **végtelen sok önálló tömegpont együtteseként** fogjuk fel. Itt is ez a helyzet, és a test helyére milliónyi apró pontot kell képzelnünk, amelyek mindegyikét egy-egy lehelet-vékony pálcika tartja körpályán a tengely körül. Ezt a látomást követve a forgómozgás szabályait matematikailag megkaphatjuk a körmozgás szabályaiból.

Lényeges kritérium, hogy a test teljesen merev legyen, a tömegpontocskák nem változtathatják meg az egymáshoz viszonyított helyzetüket, elsősorban a tengelytől való távolságukat. Egy vízzel telt léggömböt megforgatva jól látszik, hogy az a centrifugális tehetetlenség miatt a forgás síkjában megnyúlik. Ezzel sokkal zűrösebbé válik a forgásának a kiszámítása, ezért abból indulunk ki, hogy a megforgatott test egyáltalán nem deformálódik.

A második témakör ALAKVÁLTOZÁSOK fejezetében olvashattad azt az állítást, hogy ha egy testre erő hat, akkor a valóságban a test mindenképpen deformálódik valamennyire. Ez még mindig igaz, csak a merev testekről szóló feladatokban ezt elhanyagolhatónak vesszük.

Érdekesség: Ha egy közönséges papírlapból kivágunk egy kör alakú darabot, majd megfelelően rögzítjük egy villanymotor tengelyén, akkor ha a motor elég nagy fordulatszámon pörög, a papírkorong kissé kitágul. Ezzel úgy kifeszül, hogy el lehet vele fűrészelni a fát.

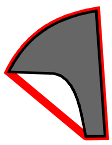
Kis problémát jelenthet a szóhasználatban a **keringés** és a **forgás** kettéválasztása. Mindkettő körmozgás. Ha egy golyót megforgatunk a mértani tengelye körül, akkor azt remélhetőleg senki nem fogja keringésnek mondani, mint ahogy a Föld sem *forog* a Nap körül.



Az **1.** képen a testet egy olyan tengely körül forgatjuk meg, amely a testen a piros pontnál hatol át. A test tömegközéppontja nem itt van, hanem a sárgával jelölt pontban, amely így egy kis sugarú pályán körmozgást végez a tengely körül. Ez a test a tengely körül **forog**, mindenki így mondaná. A **2.** képen tulajdonképpen ugyanezt látjuk, csak a forgástengely távolabb van a test tömegközéppontjától, a test széléhez került közel. De ha az 1. mozgás forgás volt, akkor a 2. is az.

A **3.** képen a test egy távolabb levő forgástengely körül **kering** vagy **köröz**. A **4.** kép csak a keringési sugár nagyságában különbözik, tehát a test ebben az esetben is kering.

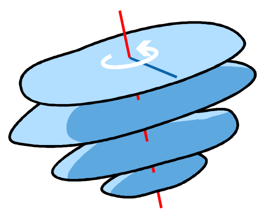
A különbség láthatóan az, hogy forgásról akkor beszélünk, amikor *a tengely átmegy a testen*. A szóhasználat keverése félreértést okozhat, ezért érdemes a szokáshoz igazodni. A Föld forgási ideje 1 nap, a keringési ideje 1 év.



Ha a test egy gyűrű, és a forgástengely áthalad a gyűrű belsején, akkor sem megy át a tengely magán a testen, mégis nyilván érted, hogy attól ez még forgás. Ha valahol meg kell keresnünk a határt egy ilyen felemás esetben, például a képen látható "homorú" testnél, akkor a szokás az, hogy forgásról akkor beszélünk, ha a tengely a piros határvonalon belül van. A határeset közelében a szóválasztás mellett kiegészítő magyarázattal érdemes tisztázni a helyzetet.

Egy pontszerű tömeg a rajta átmenő tengely körül forog vagy kering?

Egy merev test pontjai nem keringhetnek *egyetlen pont* körül. A különböző "magasságban" levő tömegpontoknak különböző dőlésű pályasíkban kellene ehhez keringeniük, ekkor viszont a pontok egymás közötti távolsága mindig változna, tehát a test nem lenne merev. A valóság az, hogy a pontok elrendeződése állandó marad, a keringés egyetlen sík irányában zajlik, de így a test vastagsága miatt egyetlen pont helyett egy vonalszakaszt járnak körbe a test pontjai.



A test forgása mindig **csakis egy tengely körül** történhet, minden esetben. A tengely a forgás során mozdulatlan. A test pontjai a tengely körül keringenek. Elképzelhetjük úgy, hogy a test vékonyra van szeletelve, a szeletek merőlegesek a közös forgástengelyre. A rajzon egy krumpliszerű test néhány szeletét láthatjuk a végtelen sokból. Előbb dől el, hogy hol van a tengely, és csak abból derül ki, hogy a szeletelést pontosan merre kell végezni. A forgás síkja a szeletek síkja, és minden szelet pontjai a tengely egy-egy pontja körül végeznek körmozgást.

Ha nincs rögzített tengely, akkor a forgás mindig valami olyan tengely körül alakul ki, amely átmegy a test **tömegközéppontján**. Azért, mert a test tömegközéppontjának csak ebben az esetben nulla a tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatéka. Hogy ez mit jelent, azt értened kell, és szükség esetén nézz utána a FORGATÓNYOMATÉK fejezetben. Hogy a dolog *miért* van így, az nekünk nem érdekes.

Amikor a TÖMEGKÖZÉPPONT fejezetben a definícióhoz a kötetlen forgást használtuk, akkor valójában olyasmit képzelj el, ahogy valamilyen irányban megpörgetve feldobsz egy tárgyat. Hagyod, hogy kialakuljon a forgás tengelye, majd tegyük fel, hogy azt meg is tudod jelölni. Több ilyen kísérlettel több tengelyt is kapsz, és mindig ezek közös metszéspontja a test tömegközéppontja.

A magára hagyott, szabadon forgó test tengelye milyen kitüntetett ponton megy át?

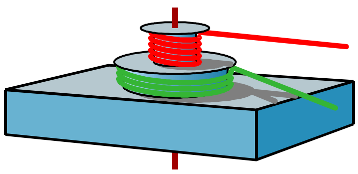
A forgáskor is van szögelfordulás, szögsebesség, szöggyorsulás, forgásidő, fordulatszám, ezek értékei **a test minden pontjára**, minden szeletre azonosak, és úgy kell velük bánni, ahogy az a körmozgásnál már kiderült. A centripetális gyorsulást és erőt most nem egy kötél közvetíti, hanem közvetlenül a test anyaga. A krumpli pontjai azért nem repülnek szanaszét, mert a krumpli anyaga szilárd, a részecskék egymáshoz kötődnek. Ha a forgás nem olyan gyors, hogy ez a kötődés szétszakadjon, akkor a test egyben marad.

A test egy pontját külön vizsgálva annak van kerületi sebessége és megtett ívhossza is, ami a pont keringési sugarától, vagyis ez esetben a pontnak a forgástengelytől mért távolságától függ.

Ha egy forgó test rögzített forgástengelye nem a tömegközépponton megy át, akkor a forgáskor a tömegközéppont a tengely körül körmozgást végez, ami miatt a tengelyre kifelé ható centrifugális erőt hoz létre. Ilyenkor mondjuk azt, hogy a forgás *excentrikus*, centrumon kívüli, ez féloldalas terhelést jelent a tengely, a csapágyazás számára, és elhasználódáshoz, akár szétrázódáshoz vezethet. Ennek megelőzésére történik meg a *centrírozás* (a forgáscentrum beállítása), amikor a test túlsó felére egy olyan kiegészítő súlyt rögzítenek, amivel együtt a test tömegközéppontja a tengelyre tolódik, és a tengely oldalirányú terhelése ezzel megszűnik.

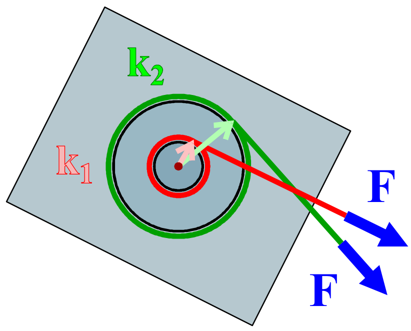
Mit tolunk el a kerék centrírozásakor?

Forgatónyomaték



Az *Erők* témakörben már alaposan kitárgyaltuk a forgatónyomatékot és a hozzá kapcsolódó fogalmakat, például az egyensúlyokat vagy a stabilitást. Azokban a fejezetekben az erők a testeket mozdulatlanságban tartották. Most pedig a forgást előidéző forgatónyomatékról lesz szó.

$$M = F \cdot k$$



Ha egy testet meg akarunk forgatni, illetve **változtatni akarunk a forgás sebességén**, ahhoz erőt, egész pontosan **forgatónyomatékot** (erőmomentumot) kell a testre kifejteni.

Miért nem csak erőt? Azért, mert saját tapasztalatodból tudhatod, hogy ha meg akarsz pörgetni valamit, akkor nem mindegy, hogy a tengelyhez közel vagy attól távolabb fejted ki rá azt a forgató erőt.

A rajzon a téglatest megforgatása a cél, és választhatsz a piros és a zöld zsineg meghúzása között. Ha a két zsineget ugyanakkora erővel húzod meg, akkor a pirosat húzva a test lassabban pörög föl. Egy adott fordulatszám adott idő alatt történő eléréséhez pedig a piros zsineget *nagyobb* erővel kell húzni, mint a zöldet.

A zsineg meghúzásával az orsóra, hengerre mindig érintő irányú erőt fejtünk ki. A két zsineg között itt egyetlen különbség van: az erő hatásvonalának távolsága a forgástengelytől, vagyis a k erőkarok hossza. Ez egész egyszerűen azt jelenti, hogy a két azonos erő közül a zöld zsinegen közvetítettnek nagyobb a **forgatónyomatéka**. $M=F \cdot k$. Láthatod, hogy a k_1 erőkar kisebb, mint a k_2, akkor az $F \cdot k_1$ is kisebb, mint az $F \cdot k_2$, tehát a piros zsineg gyengébben forgat. Vagyis ha meg akarjuk adni, hogy egy test forgatására mekkora erőhatást vetünk be, akkor közölni kell az erő nagyságát és a hozzá tartozó erőkar nagyságát is. Összességében a forgatónyomatékot.

Ha egy tengellyel rögzített testre több erő is hat, akkor mindegyik erő létrehozza a saját forgató-nyomatékát. A FORGATÓNYOMATÉKOK ÖSSZEGE fejezetben példát is láthatsz arra, hogy

Több erő közös forgatónyomatéka egyenlő az egyes forgatónyomatékok előjeles összegével. Ha ez nem nulla, akkor a forgatónyomatékok *kiegyenlítetlenek*.

Mi a "rendes" neve annak, hogy adott fordulatszám adott idő alatt történő elérése? (Bétával jelöljük.)

Tehetetlenségi nyomaték

Azt, hogy egy haladó test tehetetlensége mit jelent, már kívülről tudod: ha a testre ható erők eredője nulla, akkor a test mozgása egyenes vonalú, egyenletes sebességű. Ha a test sebességét meg akarjuk változtatni, akkor erőt kell rá kifejteni, leküzdve a tehetetlenségét.

A forgómozgás hasonló. A nyugalomban levő forgó test fogalma azt jelenti, hogy a test vagy áll, vagy az adott tengely körül egyenletes szögsebességgel forog. Ha nincs súrlódás, akkor „évmilljókig eljár tengelyén”.

Azt már tudjuk, hogy ha a forgás sebességét meg akarjuk változtatni, ahhoz forgatónyomatékot kell kifejteni. Most nézzük meg, hogy a test ennek mennyire engedelmeskedik. Ha egyenes vonalban meg-tolunk egy testet, akkor az gyorsul, de a tehetetlenségétől függ az, hogy milyen ütemben. **A forgó test tehetetlensége a *tehetetlenségi nyomaték*.** A névből sejtheted, hogy itt ismét szerepe lesz a forgástengelytől mért valamilyen távolságnak.

A tehetetlenségi nyomaték értéke mindig egy adott forgástengelyre vonatkozik.

Ismerjük jól a jelenséget: amikor egy nagy tömegű vagy nagy méretű testet megforgatunk, erő kell, mire az felpörög, de aztán erő kell ahhoz is, hogy leállítsuk. Nagy tömegű vagy nagy méretű: ebből már ki is derül, hogy itt ez a két dolog számít.

Egy körmozgást végző pontszerű tömeg tehetetlenségi nyomatéka – a jele Θ (théta)* – egy adott forgástengelyre vonatkoztatva:

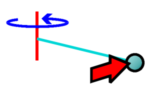
$$\Theta = m \cdot l^2$$

ahol $\mathbf{m}$ a tömeg, $\mathbf{l}$ pedig a pontnak a forgástengelytől mért távolsága, más szóval a *nyomaték karja*. Mértékegysége:

$$[\Theta] = kg \cdot m^2$$

A testnek azért kell pontszerűnek lennie, hogy egyértelmű legyen a tengelytől mérhető távolsága.

A tehetetlenség értékére azért van szükségünk, hogy megtudjuk, egy bizonyos erő mennyire gyorsítja fel a mozgást. (Lásd Newton II. törvényét.) Egyenes vonalú gyorsulásnál a tehetetlenséget egyenlőnek vesszük a tömeggel. **Körmozgásnál a tehetetlenség a tömegtől és a nyomaték karjától is függ**, ezért a "forgási tehetetlenséget" mindig *ki kell számítani*.



Képzeld el, hogy van egy forgástengely, amelyből egy egészen vékony, láthatatlan, de merev drót lóg ki oldalt, annak a végén pedig egy nagyon kis kiterjedésű, pontszerű test van rögzítve. A test tömege akármennyi lehet. Ha ezt a testet (nem a drótot) érintő-irányban, oldalról megtoljuk, akkor a test a tengely körül körpályán fog megindulni. A gyorsító erővel a test tehetetlenségét kell legyőznünk. Ha nagy a tehetetlenség, akkor kicsi a gyorsulás.

Szintén a tehetetlenségi nyomaték (más szóval *forgási tehetetlenség*) jut szerephez akkor, amikor a tengely körül keringő tömegpontot lassítani akarjuk. Az egyenes vonalú mozgás lassításához is erő kell a tehetetlenség legyőzésére, a körmozgásnál is erő kell a tehetetlenségi nyomaték legyőzésére.

Minél nagyobb a tömeg és minél hosszabb a kar, annál jobban bele kell feküdnöd, hogy a kart vala-mennyire elfordítsd. Hiába pontszerű a tömeg, a nagysága lehet akár több száz kiló is, ha akarod, mert ez most csak az elvi, leegyszerűsített vázlata a fogalomnak, és a fizika az elvvel foglalkozik, nem a számokkal. (Nem az számít, hogy a tömeg milyen nehéz, hanem hogy milyen nehezen gyorsul!)

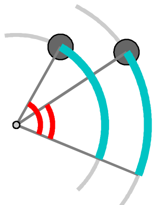
* Azért írjuk th-val, mert valójában az ezzel jelölt hangot úgy kellene kiejteni, ahogy az angol *think*, *bath* szavakban, csak ehelyett az általános szokás szerint egyszerű "té"-t mondunk.

Emlékezhetsz, hogy a forgatónyomatéknál elmondtam: az erőkar csak egy képzeletbeli kar, láthatatlan, megfoghatatlan. Csak azért nevezzük karnak, mert úgy könnyebb beszélni róla. Itt is ez a helyzet, a kar merev, de láthatatlan, és **a kart nem tudjuk nyomni, csakis a kar végén levő testet**.

A forgatónyomatéknál mit nevezünk erőkarnak?

Azt mondja a képlet, hogy a forgástengelyhez közelebb levő tömegnek kisebb a tehetetlenségi nyomatéka. A test ott "kevésbé ellenkezik", jobban gyorsul, hamarabb ér el egy kitűzött sebességet. Csakhogy itt valami nem stimmel, mert hát mégiscsak egy tömeget gyorsítunk fel egy erővel, és a dinamika alaptörvényének érvényesnek kell lennie, akár közel vagyunk a tengelyhez, akár távol. **Az F=m·a törvény talán nem egyformán érvényes minden testre?**

De, a törvény érvényes, itt más okozza a látszólagos ellentmondást. A kérdés magyarázata ott keresendő, hogy *mit tekintünk sebességnek*. Egyenes vonalú mozgásnál a sebesség egyértelmű: az egy másodperc alatt megtett úthossz. Körmozgásnál viszont kétféle sebességünk van! Azt, ami itt az egy másodperc alatt megtett úthossz, azt kerületi sebességnek hívjuk, de nem ez kell nekünk. <u>A nyomatékokkal kapcsolatban "sebesség"-nek a szögsebességet tekintjük</u>.



Ha egy testet tolni kezdünk, és azt akarjuk tudni, hogy mekkora *utat* tesz meg, akkor tényleg mindegy, hogy a test ki van-e kötve valami tengelyhez. A körmozgásnál viszont azt tekintik a képletek és törvények fontosnak, hogy ehhez az úthoz mekkora *szögelfordulás* tartozik. Ha egy adott hosszúságú utat a tengelyhez közelebb teszünk meg, akkor a szögelfordulás, a piros ív nagyobb, mint ha a tengelytől távol tennénk meg ugyanekkora utat. A rajzon a két kék ív *hossza* megegyezik.

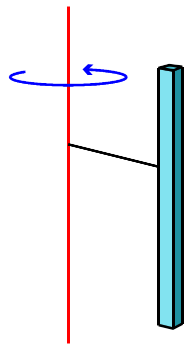
A tehetetlenségi nyomaték csak azért kisebb a tengelyhez közel, mert bár ugyanaz az erő és ugyanaz a test, nagyobb a szögelfordulás, egyszerűen így jön ki a geometriából. Az út hossza ugyanakkora lesz, de nagyobb lesz az egy másodperc alatt megtett szög, akkor nagyobb a szögsebesség, vagyis nagyobb a "sebesség". Ha a testet nagyobb "sebesség"-re tudtuk felgyorsítani, akkor nyilván kisebb volt a test ellenállása, más szóval a tehetetlensége, a logika ezt írja elő. Ha a hétköznapi fogalmaink szerint ez furcsa érvelés is, mi akkor is ehhez igazodunk.

A dinamika alaptörvényéből körmozgásnál milyen adatot tudhatunk meg?

Megbeszéltük, hogy egyetlen *tömegpont* tehetetlenségi nyomatéka micsoda, és tudjuk, hogy egy forgó *test* kis keringő tömegpontok összességeként fogható fel.

Egy test tehetetlenségi nyomatéka egyenlő a testet alkotó tömegpontok tehetetlenségi nyomatékainak összegével, ugyanarra a forgástengelyre vonatkoztatva.

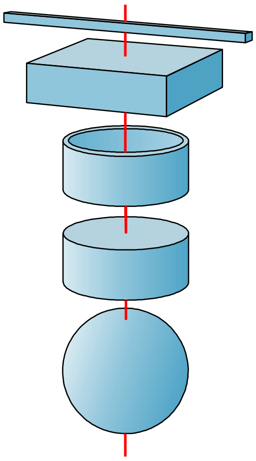
Itt már megint végtelenül kis mennyiségekből végtelen sok darabot kellene vennünk, ilyennel már akadt problémánk korábban is. De nem kell elmenni a végtelenekig. Képzeletben megteheted, hogy ha nem is végtelenül vékony, de elég vékony függőleges hasábokra osztasz fel egy testet, és így keresel egy közelítő értéket. Ez teljesen ugyanúgy menne, mint ahogy az általános iskolában úgy számítottátok ki egy szabálytalan síkidom területét, hogy lefedtétek 1 cm oldalhosszúságú négyzetekkel. A széleken van egy kis gond, de ott kicsit erre, kicsit arra csalsz, és végül a négyzetek összege egész jó közelítéssel kiadja a síkidom területét.



Itt ugyanezt csinálhatnánk meg olyan kis négyzet alapú hasábokkal, mint amit a rajzon látsz. Közelítésnek jó lesz. A hasábocska tömege kiszámítható, a távolság megvan. Egy vékony hasáb tulajdonképpen ugyanolyan, mint korábban az a pici golyó, csak magasabb, így a tehetetlenségi nyomatékának kiszámítására a $\Theta = m \cdot l^2$ képlet teljesen jó. A *magasságot*, ami a forgástengellyel párhuzamosan mért hosszt jelenti, azért nem kell számításba venni, mert a magasabb testnek annyival nagyobb a tömege is, és a magasság ezzel már bekerült a képletbe.

Megtudhatjuk így az összes vékony hasáb tehetetlenségi nyomatékát egyenként, ezeket összeadva pedig az egész test tehetetlenségi nyomatékát kapjuk. Ez elég vacakolós dolognak ígérkezik, ezért bizonyos szabályos alakú testekre ezt az összegzést már megcsinálták helyettünk, és most felsorolok közülük ötöt. Nem biztos, hogy meg kell tanulnod, de akkor tudd, hogy hol keresd.

Az első test egy nagyon vékony rúd, a második egy téglatest, a harmadik egy nagyon vékony falú nyitott, üres henger, a negyedik egy tömör henger, az ötödik pedig egy tömör gömb. A testek tömege minden esetben m, az anyaguk homogén sűrűségű.



rúd	$\Theta = \frac{1}{12} m \cdot l^2$	l a rúd hossza
téglatest	$\Theta = \frac{1}{12} m \cdot \left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2}\right)$,	$d_{1,2}$ a felső téglalap méretei
üres henger	$\Theta = m \cdot r^2$	r a henger falának (közepes) sugara
tömör henger	$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$	r a henger sugara
gömb	$\Theta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$	r a gömb sugara

A testek magassága egészen kicsi is lehet, ekkor az üres henger egy vele egyenértékű körvonallá, a tömör henger egy koronggá válik, a képletek ekkor is igazak.

Van egy 12 cm átmérőjű golyónk, a tömege 1,4 kg. Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka? A képlet szerint $\Theta=2/5 \cdot m \cdot r^2$, m=1,4 kg, r=0,06 m, $\Theta=$0,002 $kg \cdot m^2$.

A tehetetlenségi nyomaték egy tengely körüli mozgásnál ugyanaz, mint ami a tehetetlen tömeg az egyenes vonalú mozgásnál. Mindkettő egy ellenállás a mozgás megváltoztatásával szemben.

A tehetetlenségi nyomaték attól nyomaték, hogy a testet egy vékony "kar" köti egy forgástengelyhez.

Egy pontszerű tömeg tehetetlenségi nyomatéka a tömegtől és a kar hosszúságától függ, lásd képlet.

Egy egész test tehetetlenségi nyomatéka a pontjainak tehetetlenségi nyomatékaiból adható össze. Nem függ közvetlenül a test magasságától, viszont függ a tengelytől mért kiterjedésétől, azért, mert a tömegpont tehetetlenségi nyomatékára is ez volt igaz. Vagyis a tehetetlenségi nyomaték függ a test alakjától.

Ha például a hengert keskenyebb rúddá formázzuk, és a tengely továbbra is hosszában megy át rajta, akkor a tehetetlenségi nyomatéka csökkenni fog, egy motorral sokkal hamarabb lehet felpörgetni. Ha ellenben széthúzzuk egy olyan valamivé, ami keresztben széles, akkor lassabban lesz felpörgethető.

Kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka mindig nagyobb nullánál.

Az egyenes vonalú mozgások melyik fogalmához hasonlítható a Θ jelentése?

Figyeld meg, hogy a különféle szabályos testekre vonatkozó képletek tulajdonképpen a test anyagának eloszlásáról árulkodnak. Egy üres henger minden pontjának nyomatéka ugyanannyi, ezért az összes nyomaték $m \cdot r^2$, de ha *ugyanezt a tömeget* korong alakú testté formázzuk, akkor a belső és külső távolság átlagolódik, összességében a henger tehetetlenségi nyomatékának felét kapjuk. Nézhetjük úgy is, hogy az anyag egy részét közelebb vittük a tengelyhez, ezért a forgatása könnyebb lett.

Ha egy gömbről azt mondom, hogy a tehetetlenségi nyomatéka 28, akkor **abban benne van már a tömege is**. Azt viszont *nem tudjuk*, hogy ez a tömeg mennyi. Igaz, hogy minden gömbre $\Theta=2/5 \cdot m \cdot r^2$, de lehet 28 a tehetetlenségi nyomatéka egy kis méretű, nagy tömegű, és egy nagy méretű, kis tömegű gömbnek is. Sőt, ha nem tudjuk, hogy gömb, akkor a formáját sem tudjuk megtippelni, mert végtelen sok egyéb alakú test is létezik, amelynek szintén 28 a tehetetlenségi nyomatéka.

A képletekhez tartozott az a kitétel is, hogy ezeknek a testeknek homogén sűrűségű az anyaga. Ha egy olyan gömböt veszünk, amelynek például a belső része sűrűbb, mint a külső – a Föld ilyen gömb –, akkor erre a testre a $\Theta=2/5 \cdot m \cdot r^2$ képlet nem lesz igaz. Ilyenkor vagy nagyon részletes számítással, vagy méréssel lehet a test tehetetlenségi nyomatékát megtudni. A mérés azt jelenti, hogy a testet ismert nagyságú forgatónyomatékkal kell gyorsítani vagy lassítani, és a szögsebesség változásából lehet a tehetetlenségi nyomaték értékét kiszámolni. Egy bizonyos tengelyre. Ha a tengely iránya vagy helye változik, akkor teljesen más nyomatékot kaphatunk. Ha egy hosszú rudat a hossztengelye körül forgatunk, alig lesz tehetetlenségi nyomatéka, szöget bezáró tengelyekkel pedig egyre nagyobb.

A lényeg az, hogy a tehetetlenségi nyomaték az összetettsége ellenére is egy olyan adat, amely a testről *nem árul el semmi mást*, és két teljesen különböző testnél is lehet ez a szám azonos.

Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy 60 dekás méterrúdnak?

A forgómozgás alaptörvénye

A haladó mozgások egyik legfontosabb törvénye a dinamika alaptörvénye (Newton II. törvénye), amely a tehetetlenség törvényével (Newton I. törvénye) egybeépülve alkotja az egyesített mozgástörvényt. Ezeknek megvan a megfelelőjük a körmozgások számára is. A körmozgás egyaránt jelenti a külső forgástengely körüli keringő mozgást és a belső tengely körüli forgó mozgást is, a kettő tulajdonképpen ugyanaz, csak más a tömeg elrendeződése a tengely körül.

Hogy szól a tehetetlenség törvénye? A test megtartja mozgásállapotát, amíg a rá ható erők eredője nulla. Tudod, hogy **körmozgásnál** az erő önmagában nem meghatározó, **a forgatónyomaték az, ami a testet forgatja**, a kétféle zsineg esete volt rá a példa. A nyugalomban levő forgó test fogalma azt jelenti, hogy a test vagy áll, vagy az adott tengely körül egyenletes szögsebességgel forog. Amikor a test nem forgott, akkor az Erők témakörében azt a helyzetet forgási egyensúlynak hívtuk.

A **forgási tehetetlenség törvénye** a haladó mozgás tehetetlenségéhez hasonlít:

Egy test akkor és csak akkor van *forgási nyugalomban*, ha a testre ható erők forgatónyomatékainak a tengelyre vonatkozatott előjeles összege nulla.

Megjegyzés: Néha a törvényt úgy írják, hogy „Egy forgó test akkor van nyugalomban…” Ezzel az az egyik probléma, hogy a kijelentésnek nem csak a forgó, hanem az éppen nem forgó testre is érvényesnek kell lennie. A forgási nyugalmi helyzet az álló testre is fennáll. A másik pedig az, hogy a forgó test nyugalma úgy is érthető, hogy a test egyenes vonalban, egyenletes sebességgel halad, miközben a tengelye körül forog, például egy pörgetve eldobott labda a súlytalanságban. Csakhogy ez *tényleg* így is van, a tehetetlenség törvénye érvényes a forgó labdára is, és emiatt nem tudhatjuk, hogy a törvénynek ez a szövegezése éppen melyik nyugalmi helyzetről is szól a két egyformán lehetséges közül. Ezért ha a test *forgásának* egyenletességét akarod kiemelni (beleértve a 0 szögsebességet is), akkor inkább forgási nyugalmi helyzetnek vagy nyugalomnak hívd, így egyértelmű lesz.

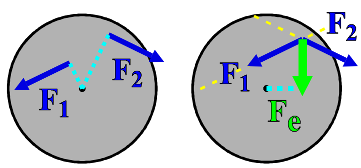
A haladó mozgás tehetetlenségi törvénye és a forgási tehetetlenség törvénye egy testre egymástól függetlenül teljesülhet.

Ha a forgás szögsebességét meg akarjuk változtatni, akkor a testre kiegyenlítetlen forgatónyomatékot kell kifejteni. A kettő kapcsolatának pontos meghatározására a dinamika alaptörvénye mintájára **a forgómozgás alaptörvénye** is megfogalmazható:

Egy adott forgástengelyre vonatkoztatva a testre ható erők eredő forgatónyomatéka egyenlő nagyságú és azonos irányú az általa létrehozott szöggyorsulásnak és a test tehetetlenségi nyomatékának a szorzatával.

A forgómozgás alapegyenletének is hívják a törvény képlettel leírt alakját:

$$M_e = \beta \cdot \Theta$$



ahol $\mathbf{M}_e$ az eredő forgatónyomaték, $\boldsymbol{\beta}$ (béta) a szöggyorsulás és $\boldsymbol{\Theta}$ (théta) a tehetetlenségi nyomaték. Az eredő forgatónyomaték azt jelenti, hogy ha a testre több erő hat, akkor vagy az erők forgatónyomatékainak összegét, vagy az erők összegének forgatónyomatékát kell forgatónyomatékként számításba venni (lásd az ábrát). A kétféle számítás értéke azonos, vagyis bármelyiket választhatod.

Ha az $\mathbf{M}_e$ nulla, akkor a $\boldsymbol{\beta}$ is nulla, *és viszont*, ekkor a forgási tehetetlenség törvényét kapjuk. A $\boldsymbol{\Theta}$ kiterjedt (nem pontszerű) testeknél sosem lehet nulla.

Ha egy test szögsebessége változik, akkor tudjuk, hogy a testre kiegyenlítetlen forgatónyomaték hat. A szögsebesség változása az is, ha egy álló test forogni kezd, vagy egy forgó test megáll.

Egy test milyen adata állandó a forgási nyugalmi helyzetben?

Bármilyen alakú test végezhet **haladó mozgást**, egyenes vonalban, parabolapályán, körpályán vagy bármilyen más útvonalon. A haladó mozgásban érvényes Newton I. és II. törvénye, vagyis a testnek van tehetetlensége, és egy erővel egyenletesen gyorsítható. Bármilyen testhez kiválasztható vagy kialakulhat egy forgástengely, amely körül a test **forgó mozgást** végezhet. A forgási tehetetlenség miatt a forgási sebesség megváltoztatásához forgatónyomatékot kell rá gyakorolni. **A kétféle mozgás egymástól független, egymásra nincsenek hatással**, egy külső erő akár egyszerre változtathatja mindkettőt is. A haladó mozgás törvényei egy már forgó testre is maradéktalanul érvényesek, és egy test haladását nem befolyásolja, ha közben forogni kezd.

Perdület (impulzusmomentum)

Ahogy a tehetetlenségi nyomaték megfeleltethető a tehetetlenségnek, úgy a haladó mozgásoknál tárgyalt IMPULZUSnak is megvan a forgó testekre vonatkozó megfelelője, a **perdület**, régebben használt nevén az **impulzusmomentum**, **impulzusnyomaték** vagy **forgásmennyiség**.

Gyakorlatilag arról van szó, hogy ha már sikerült egy testet a kívánt szögsebességre felpörgetnünk, akkor ebben is van egy lendület – most a köznapi jelentésében használva a szót –, amit zavarmentes (súrlódásmentes) környezetben a végtelenségig meg is tart. Ez, ahogy sejthető, szorosan kapcsolódik a test tehetetlenségi nyomatékához és forgási sebességéhez, ahogy az impulzus kapcsolódik a tömeghez és a haladási sebességhez. A **perdület** kiszámítása a következő:

$$\boxed{\mathrm{N} = \Theta \cdot \omega}$$

ahol $\mathbf{N}$ a perdület, $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, $\boldsymbol{\omega}$ a forgás szögsebessége. A mértékegysége:

$$[\mathrm{N}] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}$$

A mértékegység jobb oldali változatát (newtonméter-szekundum) könnyebb megjegyezni, ha összehasonlítjuk a perdületet az impulzussal. Haladó mozgások esetében a testet egy erő gyorsítja, amelynek mértékegysége **N**. Ha az erő adott ideig hat a testre, akkor abban létrejön egy mozgásmennyiség, egy impulzus, a mértékegysége **Ns**. Körmozgásnál a testet egy forgatónyomaték gyorsítja, amelynek mértékegysége **Nm**. Ha a forgatónyomaték adott ideig hat a testre, akkor abban létrejön egy forgásmennyiség, egy perdület, a mértékegysége **Nms**.

Én bizony össze szoktam keverni a mértékegységeket. Csinálhatod te is úgy, ahogy én: tudd pontosan a képletet, és a mértékegység abból mindig előállítható, lásd még a könyv végén.

A perdület *irányított* mennyiség, egy adott tengely körül kétféle iránya lehet, a forgatónyomatékkal összhangban: pozitív (balra forgó) és negatív (jobbra forgó). A forgástengelynek azt a végét nevezzük "északinak", amely ezen a kis rajzon a monitorból kifelé, feléd mutatna. Ha a jobb kezedet ökölbe zárva a hüvelykujjadat kinyújtod, akkor ha a többi ujjad irányát vesszük pozitívnak, akkor a hüvelykujjad mutat a tengely északi végének irányába. Ha a forgásirány az ellenkezőjére változik, akkor az északi irány is vele együtt változik. **Az északi irányt mindig a forgás iránya jelöli ki.**

Folytassuk az impulzus szabályainak átértelmezett felsorolását. A perdület megváltoztatásához a testre valamennyi ideig egyenletesen valamennyi forgatónyomatékot fejtünk ki, ez a **nyomatéklökés**.

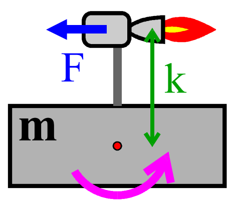
$$\boxed{\Delta \mathrm{N} = \mathrm{M} \cdot \Delta \mathrm{t}}$$

A nyomatéklökés a forgatónyomatéknak és az erőkifejtés idejének a szorzata. Írhatjuk egyszerű $\mathbf{M \cdot t}$ alakban is, csak ne felejtsd el, hogy a $\mathbf{t}$ annak az ideje, ameddig az erő hatott, ez bármennyi lehet. A nyomatéklökés **mértékegysége Nms** (newtonméter-szekundum). Ha a forgatónyomaték nem egyenletes, akkor a folyamatot kisebb szakaszokra bontjuk.

A nyomatéklökés valójában "egy adag perdület", ezért jelölhetjük ΔN-nel, a perdületváltozás jelével, és ezért ugyanaz a mértékegységük. Ha a nyomatéklökés előtt a perdület nulla volt, akkor a *változás* maga az új perdület, ΔN=N. Ilyenkor a két képletből kijön az, hogy

$$\Theta \cdot \omega = \mathrm{M} \cdot \mathrm{t}$$

Mit jelent az M és hogyan számolhatod ki?



Először kissé talán nehéz elképzelni, milyen mechanikai megoldással *változtathatunk* a forgáson egy forgatónyomaték létrehozásával. A forgatónyomatékot hajdan az emelőkhöz, billentő erőkhöz kötöttük, valami lassú művelethez, és most ezzel kell zökkenőmentesen tovább gyorsítanunk egy már forgó testet. Valójában erre sokféle lehetőség létezik, ilyen például a bicikli egyik irányba szabadon forgó meghajtómechanizmusa is, levegővel fújt turbinalapátok, elektromágneses indukciós tárcsa stb. Ezen az ábrán megnézhetünk egy egyszerű, tiszta módszert. A téglatest a piros ponton áthaladó merőleges tengely körül forog. Bármennyi is a forgási sebessége, rátehetünk még egy lapáttal, ha bekapcsoljuk a kis rakétahajtóművet.

Tegyük fel, hogy a test aktuális perdülete **N**=1400 Nms. A rakéta ereje **F**=30 N, a **k** nyomatékkar hossza 0,4 m. Mennyivel nő a test perdülete, ha a hajtóművet **t**=5 s hosszan járatjuk? A forgatónyomaték **M**=**F**·**k**=12 Nm, a nyomatéklökés **ΔN=M·t**=12·5=60 Nms. Az öt másodperc végeztével a test perdülete 1400+60=1460 Nms. Ha a hajtóművet újra bekapcsoljuk, változatlan teljesítménnyel, akkor a perdület minden másodpercben 12 Nm-rel nő.

Mekkora lett így a szögsebesség? **…**

Fogalmunk sincs róla, mert az arra vonatkozó képletből csak egyetlen adatot ismerünk. Ha meglenne a test tehetetlenségi nyomatéka, akkor ki tudnánk számolni.

És ha megadom, hogy az **m** tömeg 2,5 kg? **…**

Nem lettünk okosabbak. Hiába tudjuk a tömeget, mert ha az egy gömbbé van gyúrva, akkor könnyebben lesz megpörgethető, mint ha kinyújtjuk egy jókora lappá. Szükségünk van a tehetetlenségi nyomatékra.

Akkor azt mondom, hogy kezdetben a test fordulatszáma 0,9 volt. Folytasd. **…**

Akkor kerülő úton már meg tudjuk oldani. A szögsebesség ω=2π·n, és n=0,9. Ebből ω=5,655 1/s, ennyi volt a szögsebesség, amikor a perdület még 1400 Nms volt. Ebből kiszámolhatjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték (Θ) 247,57 kg·m^2 *volt*. Ha nem változott, akkor a mostani perdületből már megtudjuk, hogy a jelenlegi szögsebesség **ω**=1460/247,57 =5,90 1/s. (Az új fordulatszám 0,939.)

Miért 5,90, és nem csak 5,9? A feladatok eredményeit gyakran 2 tizedesjegy pontossággal kérik tőled. Nem *legfeljebb* 2, hanem 2. Akkor bizony tessék kiírni a két tizedesjegyet. Egyébként az "5,90" azt jelenti, hogy az érték 5,895 és 5,905 közötti. Ha csak "5,9" van írva, az egy 5,85 és 5,95 közötti számot jelent, tízszer nagyobb eltérést is megengedve. Ha tudjuk, hogy a számítás eredménye 5,8972182 lett, akkor nincs értelme ekkora bizonytalanságban hagyni azt, aki az eredményedet elolvassa.

"Ha nem változott." Miért, a tehetetlenségi nyomaték változhat?? Bizony, nincs akadálya annak, hogy egy tárgy az alakját *a forgás közben is megváltoztassa*. Ha az átalakulással **megváltozik a test pontjainak elrendeződése** a tengely körül, akkor a pontok tehetetlenségi nyomatékai, és összegük, **a test tehetetlenségi nyomatéka más lesz**. Ha megnézed a korábban mutatott centrifugális szabályzót, annak a működése is arra alapul, hogy a megnövekvő fordulatszámra a tehetetlenségi nyomatékának megnövelésével reagál. A műugró vagy tornász pedig hol összehúzza magát, hol kinyújtja a testét, szintén a tehetetlenségi nyomatékát változtatva, változtatva ezzel a forgása sebességén is, mindjárt meglátod. A test *továbbra is merev test* marad, csak a részeit egymáshoz képest átrendezzük.

Pontosan mi az a fordulatszám? Ellenőrizd a KÖRMOZGÁS fejezetében!

Rakétaforgatású téglánkkal még nem végeztünk. Feltűnt, hogy a forgástengely a téglatest középpontján ment át? *Mi van a rakéta tömegével?*

A példában nem jutott szerephez a tömeg. Mi közvetlenül a tehetetlenségi nyomatékkal számolhattunk. Mi itt a probléma? Ha a rajzon látott rendszer közös tömegközéppontját, centrumát keressük, akkor a rakéta tömegét is számításba kell venni. *Ha feltételezzük*, hogy a téglatest sűrűsége egyenletes, akkor annak a tömegközéppontja a mértani középpontjában van. Van viszont egy rakéta is, saját tömeggel, és ettől a rendszer centruma a mérleghinta-szabály szerint valamennyivel a rakéta felé van eltolódik.

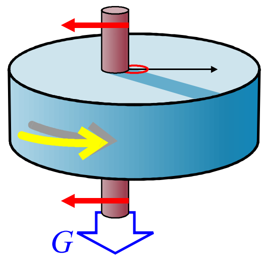
A piros pont nem a centrum helyét, hanem a forgástengely helyét jelöli. De az elhelyezése alapján úgy tűnhet, mintha a mérleghinta-szabályról megfeledkeztünk volna. Viszont most ez sem lenne baj, hiszen a feladatban a centrumnak nincs szerepe. Igazából *nem mondta senki*, hogy a téglatest centruma középen van, csak feltételeztük, mert gimis fizikapéldákban nem szoktak bonyolult helyzeteket alapul venni.

Jó, és ha a centrum nem a piros pontnál, nem a tengelyen van, akkor is mi van? Nos, mi következne közvetlenül ebből? **…**

Az, hogy a centrum körpályát ír le a tengely körül. Egy keringő tömegpont. *És?* **…**

Akkor van egy centrifugális tehetetlensége, vagyis *erő* kell a pályán tartásához. Hol kell ezt az erőt kifejteni? Köss rá a tollad oldalára valamit, tartsd a tollat függőlegesen, és forgasd gyorsan. Érezni fogod az ujjaidban azt az erőt, amit a tengely a "csapágyra" kifejt, és azt is, hogy ez az aszimmetrikus erő az egész rendszerrel együtt forog. A centrifugális erőt a tengely közvetíti az őt tartó csapágyakra, azok pedig létrehozzák a tengelyt a helyén tartó ellenerőt. Tehát a tengely és a csapágyak féloldalasan meg lesznek terhelve. Ha láttál már olyan mosógépet, amelyben egyenetlen súlyeloszlásban volt a ruha, amikor centrifugálni kezdett, akkor lehet fogalmad arról, amikor egy tengely terhelése egyenetlenné válik.

Egy nagy sebességgel forgatott pörgettyű vagy számítógép-merevlemez felől többé-kevésbé halk zúgást hallunk, amelynek a hangmagassága a pörgés sebességével együtt változik. Az a helyzet, hogy a forgó testet szinte lehetetlen tökéletesen kiegyensúlyozni. Olyan ez, mint a labilis egyensúlyi helyzet: elméletben létezik, a gyakorlatban sosem tudjuk teljesen eltalálni. A lemezegység korongjának vagy motorjának a tengelye a leheletnyi *excentrikusság* miatt mégiscsak ide-oda mozog a csapágyában, amely nem tudja tökéletesen mozdulatlanul tartani. A tengely rendkívül apró, de szapora odaütődései állnak össze egy folyamatos hanggá. Minél halkabb ez a hang, annál kisebb a tengely mozgása. A folyamatos oldalerő, netán az erősödő rázkódás hatására a csapágyak erősen kopnak, felmelegszenek, rossz esetben végül "besülhetnek".

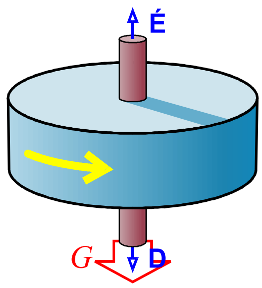


A rajzon egy olyan forgó rendszert látsz, amelynek az excentrikussága igen nagy, és a tengely végeit oldalirányú erők tartják vissza. *Forgatónyomaték nem hat rá*, mert a jelenlévő erők a tengelyen mennek át, ezért a forgás sebessége állandó marad, a forgási tehetetlenség törvénye szerint.

Tudjuk, hogy egy nagyobb napkitörés, pontosabban koronakidobódás során a bolygónkat elérő ritka plazmafelhő többféle okból is súlyos károkat képes okozni a nagy kiterjedésű elektromos hálózatokban, főleg az azokat tápláló generátorokban. Mivel a generátorok pótlása szerencsés esetben is igénybe vesz egy-két hetet, és addig legfeljebb az elektromos fogkefénkkel tudjuk meghajtani a hűtőszekrény motorját meg a víztorony szivattyúját – a teljes kommunikációs hálózatunk összedőlését most ne számítsuk a kényelmetlenségek közé –, érthetően gyakori a kérdés, hogy miért okozhat ekkora bajt a távvezetékekben ilyenkor fellépő viszonylag kis áramingadozás.

A magyarázat nem az ingadozás erejében rejlik, hanem magában az ingadozásban, ami a generátorokban aszimmetrikus elektromágneses térerőváltozásokat gerjeszt. A kiegyensúlyozott, nagy sebességgel forgó, hatalmas tömegű generátormagra ezek a kis ritmikus lökdösések úgy hatnak, mint amikor a mosógépben félrecsúszva gyűlik össze a vizes ruha. Az ebből származó rezgés tönkreteheti a csapágyazást, akadályozva a szabad forgást, vagy csak simán széttépi az egész miskulanciát. Csak egy kis excentrikus terhelés kell hozzá. Ezért fontos a Napot figyelő jelzőrendszer fenntartása, amely segíti a generátorok és más érzékeny berendezések időben történő leválasztását, leállítását.

A generátormag tömege legyen csak 5 t, a fordulatszám 50/s. Mekkora visszatartó centripetális oldalerő hat a tengelyekre és a csapágyakra, ha a tömegközéppont *1 milliméterrel* elmozdul a forgástengelyről? **…** A képlet $F_{cp}=m\cdot r\cdot\omega^2$, $\omega=2\pi\cdot n$, r=0,001 m, ezekből F_{cp}=493 ezer newton.



Ha a rendszer tömegközéppontja a forgástengelyre esik, akkor a forgás erőmentes. Ilyenkor a tengely terhelése megegyezik álló és forgó helyzetben, a rendszer kiegyensúlyozott. Az ábrán levő pörgettyű tengelye csak a súlyt (G) tartja, ami független a forgástól.

A rakétahajtású téglatestről a forgás és a forgatónyomaték kapcsolatának az a része is jusson eszedbe, amikor a rendszerre kifejtett forgatónyomaték a forgással *ellentétes* irányú. Ha a rakéta a másik irányba állna, akkor gyorsítás helyett lassítaná a forgást. A forgásnak, a szögsebességnek, szöggyorsulásnak, forgatónyomatéknak, perdületnek mindig van iránya is, ezért matematikailag a gyorsulás és lassulás összesen egy előjelben különbözik, minden eddigi képletünk mindkét esetben érvényes.

Mit jelent, ha egy test forgása excentrikus? És mit okoz?

A forgatónyomaték és a szögsebesség változása közötti összefüggést mondja ki a forgómozgás alaptörvénye. A perdület definíciója szintén a szögsebességre alapul. A nyomatéklökés definíciójából tudjuk, hogy a perdületet forgatónyomatékkal lehet megváltoztatni. Ezekhez kapcsolódik a **perdülettétel**:

Egy test perdületét <u>külső</u> erők forgatónyomatékai és csakis azok változtathatják meg. A forgatónyomatékok eredője egyenlő a perdület időegységenkénti megváltozásával.

A második, kissé rejtelmes mondat valójában a tételt kifejező képletet írja le:

$$M_e = \sum_i M_i = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

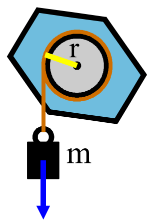
ahol $\mathbf{M_e}$ az eredő forgatónyomaték, amely a testre ható összes forgatónyomaték előjeles összege, $\mathbf{\Delta N}$ a perdület változása, $\mathbf{\Delta t}$ a közben eltelt idő. A képlet szerint **ha a perdületváltozás értékét elosztod azzal az idővel, amennyi alatt az lezajlott, akkor megkapod, hogy mekkora forgatónyomaték okozta**.

Ha megnézed a nyomatéklökés képletét, látod, hogy a két képlet lényegében ugyanaz, tehát azt is mondhatnánk, hogy **a perdület megváltoztatása nyomatéklökésekkel és csakis azokkal lehetséges**. A perdület nyomatéklökésekből rakódik össze. A nyomatéklökés pedig nem más, mint egy adott ideig a rendszerre kifejtett forgatónyomaték.

Fontos, hogy a tétel kiemeli a forgatónyomatékról, hogy azt külső erőnek kell létrehoznia, ahogy ez nagyon is lényeges kitétel volt az impulzusváltozással kapcsolatban is.

Kiegyenlített forgatónyomatékoknál azok eredője 0, tehát ilyenkor a perdület nem változik.

A perdület megsemmisíthetetlen. Részben vagy egészben átadódhat más testeknek, de eltűnni nem fog. Ehhez kapcsolódik majd a következő fejezet, a perdület megmaradása.



Foglaljuk össze a tanultakat egy hosszú példafeladatban. A kék test áll. A nehezéket elengedjük, húzni kezdi a kötelet, a test forogni kezd. A nehezék tömege m=4 kg, a kötéldob sugara r=0,2m. 3 másodperc elteltével a test forgási sebessége 0,6 radián/s. Ez kerületi vagy szögsebesség? **…**

A kerületi sebesség a kerületre, az ívhosszra alapul, tehát lenne benne méter. A szögsebesség szög per idő, a szög mértékegysége radián, tehát szögsebességről van szó, ω=0,6. **Mennyi a test fordulatszáma? …**

ω=2π·n, vagyis n=ω/2π=**0,0955 fordulat/s**. Mennyi ideig tart egy fordulat? T=1/n=**10,47 s**. Elég lassú, de ez nem érdekes. **Mennyi a test tehetetlenségi nyomatéka?**

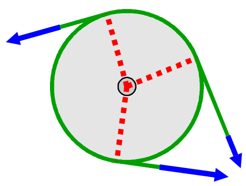
Hát pontosan ez az, amit nem lehet kitalálni csak úgy. A test pontos geometriai adataira lenne szükség, valamint az anyagának a sűrűségére, hogy a testből vett kis hasábok tehetetlenségi nyomatékait kiszámíthassuk és valamilyen módszerrel összeadogathassuk. Viszont most mégis *eleget tudunk* ahhoz, hogy megmondjuk. Szóval, mennyi a test tehetetlenségi nyomatéka?

Az eljárás a szokásos: előkapod a forgómozgásról szóló képleteket, és megnézed, hogy van-e közöttük olyan, amelyben már csak a Θ az ismeretlen. Rossz hírem van: most nincs ilyen. Itt most több képlet összerakása kell, és fejtörés. Megoldható, dolgoztasd meg az agyadat. **… …**

Komolyan remélem, hogy a fejtörés legalább részleges sikert hozott. A dolognak ez a része az, amit a feladatok megoldásával begyakorolnod kell.

$M = F \cdot k \quad \beta = \Delta\omega / \Delta t \quad M = \beta \cdot \Theta$, ahol… ezt már te is ismered. Tudod folytatni? **…**

Az értékek kiderítésének van egy menete, amelyben az ismert adatokból kiszámítunk egy ismeretlent, annak birtokában egy újabbat, egészen addig, amíg meg nem kapjuk, amit keresünk. A láncolat eleje most talán nem olyan nyilvánvaló, de az első két képletben csak egy-egy adat ismeretlen, amelyek a harmadik képletben lesznek felhasználhatók. Csináld. **…**



Az M=F·k képletben a forgatónyomaték ahhoz az erőhöz tartozik, amely a test forgását létrehozza, ez a kötélre akasztott nehezék súlya. Esetleg meglep, hogy ezt az erőt nem az egész test legkülső peremén fejtjük ki rá, de ez nem is szükséges. A forgató erő F=m·g=40 N. Kérdéses a k erőkar. 1) A kötél a dob egyik érintőjével esik egybe, 2) a kötélerő a kötél vonalával esik egybe, 3) az erőkar mindig merőleges az erő vonalára, 4) az érintőre a kör sugara a merőleges, tehát: az erőkar az r sugár, itt 0,2 m. Megvan a forgatónyomaték: M=8 Nm.

A β szöggyorsuláshoz a szögsebesség változása kell. **…** A test álló helyzetből indult, 0,6-ig jutott, akkor a Δω=0,6, a közben eltelt idő 3 s, azaz β=0,6/3=0,2 radián/s^2. Fejezd be te! **…**

A harmadik képlet alapján 8=0,2·Θ, azaz a tehetetlenségi nyomaték **40 kgm²**.

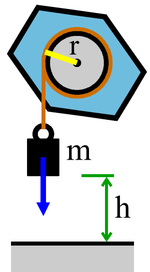
A nehezék végül a földre ér. Mi történik a testtel ezután? …

A nehezék kötelet húzó ereje és ezzel együtt a forgatónyomatéka megszűnik. Más forgatónyomaték a testre nem hat, így tehát a forgási tehetetlenség törvénye szerint a test forgási sebessége állandósul, nem változik tovább. *Nem áll le*, mert a tengelyre ható súrlódási erőt szokás szerint nem vesszük figyelembe.

A tengely súrlódása milyen formában avatkozna be a mozgásba? A tengely is mindig egy rúd, legalább ott, ahol a felfüggesztése vagy csapágya van. A súrlódás ennek a rúdnak a forgását lassítja, és szintén érintőirányú erőt fejt ki a tengely felszínére, forgatónyomatékot, bármennyi is a tengely átmérője. Ez a súrlódás is csak egy felület elcsúszása egy másik felületen, nincs benne semmi új. Egy forgástengely súrlódását általában csökkenteni próbáljuk, a felületek közé bejuttatott csúszós anyagokkal.

A teherkocsik kerekeit egy vasúti munkás indulás előtt végigkopogtatja. Részben repedés okozta hamis hangot keres, részben a tengelyek végein levő zsírzóházakat ellenőrzi. Ha valamelyikből kifogy a kenőzsír, akkor útközben a súrlódás annyira felhevítheti a tengelyt, hogy a kocsi is kigyullad.

A tűzgyújtó pálca működése erre a felhevülésre alapul, annak kimondottan ártana egy kis kenőzsír.



A test h magasságból indult, és h=0,9 m. Mennyi idő alatt ér le a nehezék a földre? Ez egy kicsit fogósabb kérdés, de valójában nem is olyan komplikált. Tervezd meg a megoldást. **… …**

Alakítsuk át a kérdést: mennyi idő alatt tekeredik le a dobról h hosszúságú kötél? Egyszerűbben is mondhatjuk ugyanezt: mennyi idő alatt fordul el a test h *ívhosszúságot*? (Értsd meg a rajzon!)

Remélem, hogy megszólal benned a figyelmeztető hang, hogy ívhosszúságot csak egy köríven lehet lemérni, olyanon, amelynek ismerjük a sugarát. És mi a másik szükséges adat? **…**

A forgómozgás képletei az ívhossz helyett a szöggel, szögsebességgel, szöggyorsulással foglalkoznak, ezért az ívhosszúságot hasznos lesz a hozzá tartozó elfordulási szögre váltani, ez a φ. A megoldáshoz első része lényegében ennyi: mekkora középponti (elfordulási) szög tartozik a kötéldob 0,9 m kerületi hosszú elfordulásához? **…**

Van egy r=0,2 m sugarú körünk, amelynek a kerülete r·2π=1,257 m. Ez felel meg a 2π középponti szögnek (radiánban), a 0,9 m ívhossz alapján a szükséges elfordulás szöge 2π·0,9/1,257=4,50 radián. Fölösleges fokra váltanunk, mert újra radiánban kell majd használnunk, de kb. 258°.

Ezek után fogalmazd is meg magadnak a feladatban feltett kérdést úgy, hogy a már kiderített adatokra hivatkozol! Tehát most mit keresünk? **…**

Körülbelül ezt kellett kitalálnod: Mennyi idő alatt fordul el a test 4,50 radiánnyit, ha a forgatást az m tömegű nehezék súlya hozza létre, álló helyzetből?

Az időt nagy leleményesen elnevezzük t-nek, φ=4,50, F=m·g=40 N, r=0,2 m.

Megjegyzés: Lehet, hogy a feladatban két tizedesjegy pontosságot kell használnod, de ezt a gyakorlatban elég fölöslegessé teszi, ha a g értékét szabad ekkora pontatlansággal megadni.

$M = F \cdot k \quad \Delta\omega = \Delta\varphi / \Delta t \quad \beta = \Delta\omega / \Delta t \quad M = \beta \cdot \Theta$. A képletekben már csak a t értéke ismeretlen, szóval ezt illik simán két vállra fektetni. Végezd el a behelyettesítéseket! **…**

M=F·k=F·r=8 Nm, ω=4,5/t, β=4,5/t^2, Θ=40 kgm^2, ezt még az előbb számoltuk ki. Fejezd be! **…**

M=β·Θ, 8=4,5/t^2·40. Ebből t=**4,74 s**, ennyi idő alatt ér le a nehezék a földre. *Csináld meg még egyszer, egyedül, üres lapra!* A tehetetlenségi nyomaték 40 kgm^2, a nehezék magassága 0,9 m, tömege 4 kg, a forgódob sugara 0,2 m, a test álló helyzetből kezd forogni.

Megér pár szót újra az, hogy **a delta jelek hogyan, miért tűnnek el**. Ez visszatérő probléma, és a tanárok sem erőltetik, a békesség kedvéért, de annyira nem veszélyes. Például a **Δω** a szögsebesség változását jelenti. Ez egy ilyen példában úgy értendő, hogy választunk két pillanatot, és megnézzük a szögsebességet mindkét pillanatban. Amennyi közöttük az eltérés, annyi a szögsebesség változása. Előjelhelyesen, mert ha a szögsebesség csökkent, akkor a **Δω** negatív szám. A **Δφ** ez elfordulási szög változása a két pillanat között, a **Δf** a frekvencia változása, **ΔQ** az elektrosztatikus töltés változása, szóval **Δvalami** mindig a 'valami' értékében a két kiválasztott pillanat közötti időszakban bekövetkezett változás, a két megfigyelt érték különbsége.

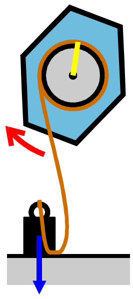
A **Δt** pedig "az időben bekövetkezett változás". Ez úgy értendő, hogy ketyeg az óra, az első pillanatban ránézel és megjegyzed, aztán a második pillanatban is, és a kettő különbsége a **Δt**, annak az időszakasznak a hossza, amely alatt a szóban forgó jelenséget megfigyelted, megmérted.

Vegyük például ezt: "*A forgatónyomatékok eredője egyenlő a perdület időegységenkénti megváltozásával.*" Az időegységenkénti megváltozás azt jelenti, hogy ha a változás 15, és ez 3 időegység alatt történt, akkor az 1 időegységre jutó változás 5. Az általánosító "időegység" szót a korrektség miatt használják, de ha te az összes kapott adatot mindig átszámítod az SI által előírt mértékegységekbe, akkor az "időegységenkénti" helyére nyugodtan beteheted azt, hogy "másodpercenkénti", és így kézzelfoghatóbb lesz a téma.

És a **Δ** jelek hogyan vehetők ki a számításból? Tudjuk például, hogy a gyorsulás a sebesség időegységenkénti megváltozása, **a=Δv/Δt**. Két különböző pillanatban nézzük meg a **v** értékeit. Ha először 32, aztán 38, akkor a **Δv** értéke 6, és ezt osztjuk a közben eltelt idővel. Ha csak azt írjuk le képletként, hogy **a=v/t**, akkor ez azt jelenti, hogy 38 osztva az akkori pontos idővel, aminek persze nincs semmi értelme.

De *ha* az **a=v/t** képletet úgy értelmezed, hogy a sebesség *kezdeti* értéke nulla volt, vagy hogy a **v** már csak a sebesség*változást* jelenti, akkor megengedhető, hogy az egyszerűség kedvéért így írd és így tanuld meg. A kényelmesség miatt én is így szoktam csinálni, és ebben a könyvben sem koptatom fölöslegesen a delta billentyűt. De ne felejtsd el mindig megérteni, hogy pontosan mit is kell kiszámolnod.

Az előző feladatokban használt nehezék a földön nyugszik. Valamilyen módon megpörgetjük a kék testet, az ábra szerint, és magára hagyjuk. Mi fog történni? …



A kérdés nem nehéz. A "magára hagyjuk" azt jelenti, hogy nem fejtünk ki rá erőt, nem gyorsítjuk, nem fékezzük tovább. A test egyenletesen forog, majd a kötél megfeszül. Onnantól a test a nehezéket emeli, ahogy azt például a HENGERKERÉK fejezetben is kitárgyaltuk. És a nehezék súlya állandó forgatónyomatékkal lassítja a test forgását, ami egyszer végül 0-ra csökken, a test megáll. És? Természetesen a válasz itt nem ér véget, hiszen ekkor a nehezék súlya pozitív irányban kezdi pörgetni a testet, az előző feladat pontosan ezt a helyzetet írta le. Amikor a nehezék újra a földre ér, a test forgási sebességének növekedése véget ér, és a test egyenletes sebességgel forog tovább. Ha a kötél nincs a dobhoz rögzítve, akkor végül leszalad az egész. Ha rögzítve van, akkor a felcsévélés–leereszkedés az ellenkező irányban megismétlődik, és így tovább. Ha a mozgást lassító erőket figyelmen kívül hagyjuk, akkor ez a fel–le játék vég nélkül folytatódik.

A képen látható helyzetben ω=–7,5/s, Θ=25 kgm^2, m=5 kg, r=0,2 m, a kötélhossz szükség szerinti. Mennyi a nehezék elemelkedése és leérkezése közötti időkülönbség? Ez a feladat könnyebb, mint az előző. Oldd meg. Az eredmény 37,5 s.

A forgásba hozott testre jellemző irányított mennyiség a perdület (N), $\Theta\cdot\omega$, mértékegysége Nms.

A nyomatéklökés egy adott ideig a forgó testre gyakorolt forgatónyomaték, M·t.

A perdülettétel szerint a perdületet csak külső erők forgatónyomatékai változtathatják meg, összeadódó nyomatéklökések alakjában. A perdületváltozást a test tehetetlenségi nyomatéka nehezíti.

Lendkerék, motornyomaték

A lendkerék vagy lendítőkerék egy olyan, nagy tehetetlenségi nyomatékú test, amely mechanikus szerkezetekben az összegyűjtött forgási energia tárolására és visszaadására szolgál. Rendszerint henger, korong, kerék alakú, mert a mérethez viszonyítva ennek a formának van a legnagyobb tehetetlenségi nyomatéka.

A "lendkerekes autó" fogalma az 1950-70-es években jól ismert volt. A gyerek ezt a kisautót néhányszor jó erősen megtolta a padlón, csak előrefelé, újra meg újra felemelve. Az autó kerekei felpörgettek egy vaskorongot, a lendkereket, ezután az autót el lehetett engedni, és innentől **a lendkerék forgatta a kerekeket, hajtotta az autót**, amely magától gurult, tovább, mint ha csak meglöknénk. Sima kövön egy húszcentis autóbusz 8-10 métert is megtett, mire a súrlódás felemésztette a lendkerék teljes perdületét.

Az elektromos, aztán elektronikus játékok időszaka előtt ez volt az általános, mellesleg elég strapabíró és teljesen energiatakarékos megoldás, járművek mellett másféle játékokban is. Az elve egyszerű: a valamilyen mechanikus módon felpörgetett lendkerék forgatónyomatékot tud kifejteni egy fogaskerékre, amely áttételesen a jármű kerekét megforgatja. Persze hiába voltak ezek a játékok könnyű anyagokból, elsősorban vékony vaslemezből vagy műanyagból, a mozgást akadályozó erők viszonylag nagy ellennyomatékot gyakoroltak a lendkerékre, ezért **a perdülete elég hamar nullára csökkent**. De néhány lendületvétellel újra feltölthető a kocsi energiával, aztán hajrá.

A lendkerék igazi autóbuszban való felhasználására komoly kísérletek is folytak. Az ilyen buszt is motor hajtaná, de a fékezés úgy történne, hogy a busz a lendületének egy részét a lendkerék forgási sebességének növelésére fordítva vesztené el. Amikor újra elindul, a gyorsítását a lendkerék végezné, és a motorral csak kiegészíteni kellene az így kapott hajtóerőt. Többféle technikai nehézség miatt az ötlet végül elhalt.

Az egyik komoly nehézséget a pörgettyű vagy giroszkóp jellegzetes vonása jelenti: a pörgettyű a perdületén kívül a forgási síkját is megtartja. Ha a tengelyét elfordítani próbáljuk, akkor egy keresztirányú erővel reagál. Egy busz meghajtására már alkalmas méretű és perdületű lendkerék pörgettyűként viselkedve egy szűk kanyarban fel tudná borítani a buszt.

Ha viszont ügyelünk arra, hogy a pörgettyűre minimális kitérítő erővel hassunk, akkor a forgástengely iránya hosszú időn át állandó marad. Egy felpörgetett pörgettyűt az asztalról egy papírlappal is felemelhetsz anélkül, hogy az felbillenne. A megpörgetett kosárlabdát az ujjadon egyensúlyozva szintén kihasználod ezt a hatást. A képen látható három tengelyes kardánfelfüggesztés a pörgettyűt minden kényszertől megszabadítja, és hiába forgatjuk el a két kis kart fogva a szerkezetet *bármilyen* irányban, a pörgettyű forgástengelyének térbeli iránya nem változik. Műholdak stabilizálórendszerében, repülőgépek, hajók navigációs műszereiben folyamatosan forgásban tartott pörgettyűk segítségével tárolják a beállított alapirányokat.

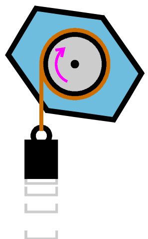
A forgó lendkerék melyik tulajdonságát hasznosítjuk a kisautóban? Magyarázd is meg.

A lendkerekes autót a felpörgetett lendkerék ereje mozgatja. Azt írtam az előbb, hogy "a súrlódás felemésztette a lendkerék teljes perdületét." Miképp történik ez?

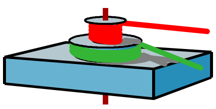
A lendkerék a hozzá kapcsolódó fogaskerék-áttétellel mozgatja az autó kerekét. Forgatónyomatékot fejt ki a vele közvetlenül érintkező fogaskerékre. *Mennyi időre elegendő* a benne indításkor összegyűjtött perdület? Akár a nyomatéklökés képletéből, akár a perdülettételből megkapjuk a következő egyenletet:

$$\boxed{N = M \cdot t}$$

Itt a szó szerinti válasz a kérdésünkre. Hogy a felvett összes perdület mennyi időre elég, az attól függ, hogy mekkora forgatónyomaték alakjában fogyasztjuk el. A képlet nem csak azt fejezi ki, hogy ha valamennyi ideig egy adott forgatónyomatékkal forgatunk egy kereket, akkor mennyi perdületet hoztunk létre. A dolog visszafelé is működik. A meglevő perdületet erő, munkavégzés alakjában hasznosítani tudjuk. De hogyan vezetjük el az erőt a lendkerékről?



Az előbb láttunk rá egy alapvető megoldást, amikor a forgó test egy kötéldobra tekeredő kötéllel leküzdötte egy másik test súlyerejét és felemelte. Végső soron minden módszer arra alapul, hogy a forgó tengelyen van egy kerékféle, amely szintén forog. A kerék pereme érintőirányban egy erőt fejt ki valamire, például a feltekeredő kötélre, egy végtelenített szíj, lánc egyik ágára, vagy egy fogaskerékre, dörzskerékre stb. Az a lényeg, hogy a kerék által átadott erő pillanatnyi vektorának mindig van egy merőleges távolsága a tengelytől, ez az erőkar, amely nem minden erőátviteli módszernél állandó, de a fentieknél az, és egyenlő a kerék vagy dob sugarával. Erőször erőkar: forgatónyomaték.



Tudhatod, hogy ha el akarsz fordítani egy testet, akkor annál könnyebben megy, minél nagyobb erőkar végén tudod az erőt kifejteni. Az EMELŐK alapelve pedig az, hogy a teherkarral annál nagyobb erőt tudsz kifejteni, minél nagyobb a kar hossza. Az erő nagysága és a forgatónyomaték nagysága mindig összefügg, oda–vissza.

A forgómozgást mindig csak forgatónyomatékként tudjuk erővé alakítani.

Ha a lendkerékről nagy forgatónyomatékkal, nagy erőkarral vesszük át az erőt, akkor a perdület rövidebb időre elég, hamarabb alatt csökken nullára, az **M·t** összefüggés szerint.

A forgatónyomatékban hol mérjük az erőkart? (Kereshetsz választ másik fejezetben is.)

A forgómozgások alapegyenlete szerint a forgatónyomaték alkalmas a tehetetlenségi nyomatékkal szemben egy forgás gyorsítására, lassítására. De **a forgatónyomatékkal más erők és nyomatékok is szembekerülhetnek**, amelyek származhatnak a súrlódásból, valamilyen alakváltozásból, közegellenállásból, bármiből, ami erőt igényel. Egy autó kerekét is egy forgatónyomatékkal forgatja meg a motor, és nem a kerék tehetetlenségi nyomatéka, hanem a gördülő-ellenállása és más ellenerők azok, amelyek a motor erejével szemben fellépnek.

Egy szerkezet mozgatásához forgómozgásból felvett erő sem csak a forgó lendkerék tehetetlenségi nyomatékából és perdületéből származhat, mert forgó mozgást produkál egy motor is. A motor ereje közvetlenül nem fejezhető ki, hiszen mekkora ereje van egy vékony, forgó tengelynek? **A motorok erejét is csak nyomatékként tudjuk erővé alakítani.** Később látni fogod, hogy a motor teljesítménye azt árulja el, hogy az erőt milyen gyorsan vehetjük át, de magát az erőt a motor *nyomatéka* fejezi ki. Hogy aztán az az erő miféle mechanizmussal lesz elvezetve arra a helyre, ahol elhasználódik, például az autó kerekeihez, egy csörlőhöz vagy a daru kötélzetéhez, már külön erőtani kérdés.

Egy kocsi tömege 700 kg. Tegyük fel, hogy a benne levő motor egyenletesen 250 Nm nyomatékot ad le. (A valóságban a nyomaték több dologtól függően is változik.) **A motor a tengelyre szerelt, 26 cm átmérőjű keréken futó ékszíjjal adja le az erejét. Ha eltekintünk minden erőveszteségről, akkor mennyi idő alatt gyorsul fel a kocsi 100 km/h sebességre?**

Ismerd fel a sémát! Milyen mozgás, milyen képlet illik a feladat lényegéhez? **…**

Egy ismert tömegű autót egyenes vonalban gyorsítunk fel egy megadott sebességre egy erő segítségével. Ha netán még mindig nem ismernéd fel ebben a dinamika alaptörvényét… Ne is képzeljünk el ilyet, úgysem fordulhat elő, igaz? A $v=a\cdot t$ képletből t a kérdéses, az a pedig az $F=m\cdot a$ képletből szerzendő meg, ehhez kell még az F. Viszont már az öcséd is tudja, hogy $M=F\cdot k$, tehát együtt van minden, légy szíves levezetni. **…**

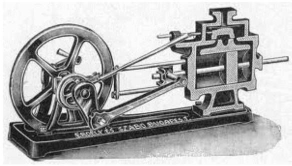
M=250 Nm, k=0,13 m (26 centi az átmérő!), M=F·k, vagyis F=1923 N.
m=700 kg, F=m·a, vagyis a=2,75 m/s^2.
v=100 km/h=27,8 m/s, v=a·t, vagyis **t=<u>10,1 s</u>**.

A motor teljesítménye, sebessége és a nyomatéka gyakran nincs arányban. Lehet, hogy egy traktor csak 50-nel tud hasítani, viszont egy kötélen kihúz a sárból egy egész Lamborghini flottát. A motorja és a masszív erőátviteli rendszere nem tud nagy sebességgel dolgozni, ellenben a motor bivalyerős, ezért nagy nyomaték, nagy erő vehető át tőle.

Megirigyli ezt a tököstóni, és úgy dönt, hogy felspécizi a Lamborghinijét, milyen pöpecz dolog lesz kihúzni a sárból a szomszéd nagyarc Hummerjét. Feltesz a motorfőtengelyre egy nagyobb ékszíjtárcsát, aztán csodálkozik, amikor a motor prüszköl, vinnyog, csuklik, csak nem húz. Merthogy a gyárilag megadott nyomaték a motor képességeit jellemzi, és ha túlterheljük, akkor el is törhet valami. Ha növeljük az erőkart, akkor ugyanabból a (maximális) nyomatékból kisebb erőt kapunk, M=F·k.

Ha egy forgó lendkerék lelassul és megáll, akkor az minek a következménye lehet?

<u>A lendkerék és a motor kombinálható is</u>. A játékautó lendkerekének perdülete folyamatosan fogyott, elhasználódott. De a lendkereket valamilyen **motorral állandó fordulatszámon is lehet tartani**. Ha az azt érő egyenetlen fékező erőhatások viszonylag kicsik, akkor a motor hamar pótolja a forgási sebesség csökkenését, és ehhez **nem kell erős motor**, ez benne a jó. Erre alapul a "bakelit"* lemezek lejátszója is, amiben a forgó tányért viszonylag nagy tömegűre készítik. Ugyan időbe telik, amíg a gyenge motor felpörgeti a percenként 33 1/3 fordulatszámra, de ezek után ha egy pillanatra valami apró egyenetlenség miatt a lemez lelassulna, a tányér nagy tehetetlenségi nyomatéka miatt az a kis erőlökés észrevétlen marad, a sebesség nem csökken, a hang nem kezd el "nyávogni".



Ez a haszna a nagy mechanikus gépekben is a lendkerék szerkezetbe iktatásának. Egy gőzgép vagy robbanómotor az erőt nem egyenletesen, hanem *periodikus lüktetéssel adja le.* Ahol ez kényelmetlenséget okoz, ott a mechanizmusba egy lendkereket építenek, és a motor az erejével mindig annak a perdületét táplálja. A kerék tehetetlenségi nyomatéka nagy, a motortól kapott erő (forgatónyomaték) csak kisebb ingadozást okoz a forgásában, és a munkavégző erőt a motor helyett a kerékről vezetik tovább, **egyenletesebb meghajtást kapva**. Az emberi hajtású futógépek, sígépek alkatrészei között is ott van egy lendkerék, de a

hosszútávú pályakerékpárok egyik kereke is viszonylag nehéz. Időbe telik vele felgyorsulni, de onnantól könnyebb a sebesség tartása pillanatnyi kihagyás esetén, és a pedál forgatásakor kifejthető nagyon változó erő ellenére is.

Dugattyús motoroknál vagy hajtórudas gépeknél olyan helyzet is előfordul, hogy a motor véletlenül épp egy holtponti helyzetben áll meg. Létrejön egy olyan egyensúlyi helyzet, amikor az erőhöz majdnem pontosan 0 hosszúságú erőkar tartozik, a puszta erő nem is tudja a szerkezetet ebből kimozdítani. A megelőzésére a legegyszerűbb az aszimmetrikus súlyelosztású lendkerék. Ha egy

* Nem bakelit, vinil. A bakelit nem is alkalmas ilyen leheletfinom részletek megőrzésére, hajlításkor pedig szilánkosan széttörik. A közös tulajdonságuk összesen az, hogy mindkettő fekete.

gőzmozdony kerekét oldalról megnézed, jól látszik rajta egy megvastagított, súlyosabbra kialakított rész. Amikor menet közben a dugattyú a holtponton van, a kerék saját lendületéből kicsit tovább forog, áttolva a dugattyút is a holtponti helyzetén, amely ezután ismét forgatóerőt tud rá kifejteni.

A lendkerék gépek egy nagy tehetetlenségi nyomatékú alkatrésze, amely felpörgetve nagy perdületet tud tárolni.

A forgó lendkerék mechanikus áttételeken át erőt tud átadni, amihez a perdületét használja fel.

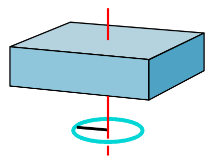
A perdület mindig csak a lendkerék által kifejtett forgatónyomatékként használható fel. A nyomatékból kapott erő az F·k szerint az erőátadás helyén érvényes erőkartól függ.

A perdületet minél nagyobb nyomatékként vesszük át, annál rövidebb idő alatt áll le a lendkerék, az N=M·t összefüggés szerint. A perdületet nyomatéklökésekkel lehet a lendkerékbe tölteni, és a perdület azonos végösszegű nyomatéklökésekként kapható vissza.

Nyomatékot nem csak egy lendkerék perdülete, hanem bármilyen forgó mozgás létre tud hozni. A forgó mozgásból erőt mindig csak nyomatékként lehet kinyerni. A motorokban forgómozgás jön létre.

A lendkerék másik előnye, hogy a perdülete folyamatosan kiegészíthető, növelhető, ezzel szakaszosan érkező gépi erő tehető egyenletesebbé.

Tömegközépkör



Az egyenes vonalú mozgásnál az egyszerűség kedvéért úgy vettük, hogy a tehetetlenség a test *tömegközéppont*jában hat. Ennek analógiájára bevezethetjük a **tömegközépkör** fogalmát. Egy forgó test tehetetlenségi nyomatéka és tömege ebben az elméleti, vastagság nélküli körben koncentrálódik. Ha egy testnek ismerjük a tehetetlenségi nyomatékát, akkor a számításainkhoz a testet helyettesíthetjük a tömegközépkörével, aminek pontosan ugyanannyi a tehetetlenségi nyomatéka és a tömege.

Egy Θ tehetetlenségi nyomatékú, m tömegű forgó test tömegközépköre az az r_{tk} sugarú körvonal, amelyre

$$\Theta = m \cdot r_{tk}^{2}$$

Ez a fogalom csak a tehetetlenségi nyomaték egy másféle megadására szolgáló lehetőség.

Adott egy test, amelynek a tömege 2 kg, a tehetetlenségi nyomatéka 0,1 kg·m². Mekkora a test tömegközépkörének a sugara? A képletből $\mathbf{r}_{tk}$=gyök(0,1 / 2)=22,3 cm. Vagyis ha a testet egy ilyen méretű, vékony falú hengerré vagy vékony gyűrűvé gyúrnánk, akkor annak a tehetetlenségi nyomatéka pont ugyanakkora lenne, mint most. Azt, hogy maga a test eredetileg milyen alakú, *nem is kell tudnunk*.

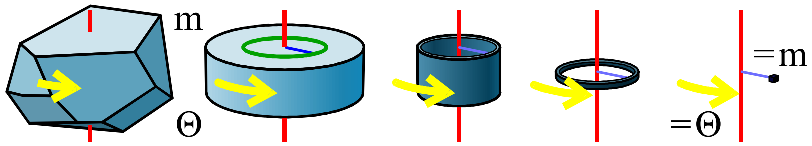
A korábbi fejezetekben a tömegközéppontot is gyakran már a test tömegét is hordozó tömegpontként kezeltük, kiszámoltuk az impulzusát és így tovább. A tömegközépkör csak egy körvonal, de megengedhető az is, hogy egy vékony gyűrű (vagy üres henger) alakú, tömeggel rendelkező testként beszéljünk róla. Ha azt olvasod, hogy a tömegközépkör 0,1 kgm²-es, akkor közvetlenül a test tehetetlenségi nyomatékát látod megadva, benne a test tömegével is, amit viszont kiegészítő adatként szintén meg lehet vagy meg kell adni. A mértékegység tisztázza a szám jelentését. Tehát: **a tömegközépkör vagy csak egy tömegtelen körvonal, vagy már egy körvonalnyira összepréselt tömeg.**

Forgómozgás értelmezése körmozgásként

Egy forgó test forgómozgásának adatai átalakíthatók úgy, hogy végül egyenlővé tesszük egy tömegpont körmozgásává. Ezzel a művelettel könnyebben értelmezhetővé válhat a kifejtett ható erő hatása a forgásra. Ez a fejezet nem "kötelező anyag", de a végén a tételt azért nézd meg.

Adott egy tetszőleges alakú test, amelynek mérésekkel megtudtuk a tömegét és a tehetetlenségi nyomatékát is. A tömeg mérését nem kell magyarázni, vagy mégis? Általában elintézhetjük úgy, hogy a test nehézségi erejét más testek (súlyok) nehézségi erejének összegével hasonlítjuk össze, egy kétkarú mérlegen. Ha viszont a nehézségi erők kicsik, lehetséges megoldás az, hogy egy ismert erővel felgyorsítjuk, és a gyorsulását megmérve következtethetünk a tehetetlenségére, ami viszont azonosnak vehető a tömegével, lásd A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE fejezetet. $F=m \cdot a$. Jövőre tanulni fogod a periodikus mozgásokat, ott ennek a módszernek a továbbfejlesztését is látni fogod.

A tehetetlenségi nyomaték szintén egy tehetetlenség, a mérési módszer is hasonló: a testet ismert forgatónyomatékkal megforgatjuk, és a szöggyorsulásából következtethetünk a tehetetlenségi nyomatékra, $M=\beta\cdot\Theta$.



Ezt a testet át lehet gyúrni egy olyan hengerré, koronggá, amelynek azonos a tehetetlenségi nyomatéka. Ha már ismerjük ezt a tehetetlenségi nyomatékot, akkor a henger sugara kiderül a $\Theta=m\cdot r^2$ képletből. A térfogatuk ugyanaz lesz. A test tömegén és tehetetlenségi nyomatékán mindeközben nem változtattunk.

Már az eredeti testhez is kiszámítható a tömegközépkörének sugara, az előbb láttál rá példát. A hengernél ez még egyszerűbb, mert ha a sugara r_h, akkor

$$r_{tk}=\frac{r_h}{2}$$

a zöld kör ezt mutatja. Ha a tömör hengerünk anyagát összepréseljük egy olyan üres hengerré (hengerpalásttá), amelynek a sugara r_{tk}, a tömege pedig továbbra is m, akkor a test tehetetlenségi nyomatéka *továbbra is ugyanaz*, mint amennyi eredetileg volt. Ehhez a test sűrűségét szinte végtelenre kell növelni, de elméletileg ezt el lehet képzelni. A kapott hengerpalást magassága bármekkora lehet, az egyszerűség kedvéért most nem változtattunk rajta.

A testek tehetetlenségi nyomatéka nem függ a testnek a tengellyel párhuzamos irányú kiterjedésétől, a magasságától. Ezért a test tehetetlenségi nyomatéka nem fog változni akkor, ha ezt a hengerpalástot összepréseljük egy ugyanolyan átmérőjű, nagyon vékony gyűrűvé. A tömeg nem változott, és a tömegközépkör definíciójából következően a tehetetlenségi nyomatéka sem.

Eljutottunk ahhoz az állapothoz, amikor a tehetetlenségi nyomaték fejezetében látott képletek szerint ez a roppant sűrű anyagból álló nagyon vékony gyűrű helyettesíti az eredeti testet. A helyettesítés úgy értendő, hogy ugyanaz a tömege és ugyanaz a tehetetlenségi nyomatéka is. Csak olyan dolgokat csináltunk vele, amik ezeken az adatokon nem változtatnak. A gyűrűre érvényes, hogy $\Theta=m\cdot r^2$.

Ha megnézed a tömegpont tehetetlenségi nyomatékának meghatározását, látni fogod, hogy ez a gyűrű a kör mentén haladva összepréselhető egyetlen elméleti tömegponttá úgy, hogy a tehetetlenségi nyomatéka most sem változik. $\Theta=m\cdot l^2$, mondja a képlet, az l itt az r_{tk}, az m pedig még mindig ugyanaz.

Végignézhetted azt a lépéssorozatot, amelyben

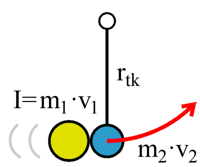
Egy tetszőleges forgó testet összepréselhetünk egy változatlan tömegű, körmozgást végző tömegponttá, amelyhez tartozó nyomatékkar hossza a test tömegközépkörének sugara. Ekkor a test és a tömegpont tehetetlenségi nyomatéka megegyezik.

Ennek az egyszerűsítő átalakításnak (*redukciónak*) köszönhetően a test forgására ható erők összemérhetőkké váltak a tömegpont körmozgására ható erőkkel, illetve értelmezhetőbbé tehető egy haladó mozgás kapcsolata egy forgómozgással.

Az átalakítással egy kiegyensúlyozott forgómozgást végül excentrikus forgással (keringéssel) váltjuk fel, de ebben a vonatkozásban nem kell a tengely oldalterhelésével foglalkoznunk, ez csak egy elméleti modell egy másfajta megközelítéshez.

Melyik szabályos test tehetetlenségi nyomatékával egyezik meg az eredmény?

A felhasználási lehetőségek egyike látható az ábrán: egyenes mozgás impulzusának átalakulása körmozgás perdületévé. A két mennyiség "átváltása" azért nehéz elméleti feladat, mert két teljesen eltérő mozgásról van szó. De ha a test forgómozgását a pontszerű tömeg megfelelő körmozgásává redukáljuk, akkor az erőlökés mozzanatát felfoghatjuk egy teljesen rugalmas *ütközésként*, és máris ismerős terepen járunk.



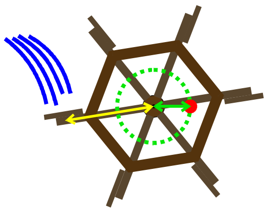
A rendszerbe $\mathbf{I}$ ($=\mathbf{m_1\cdot v_1}$) impulzust hoz a sárga golyó, és ütközik a forgó testet az előbbiek szerint helyettesítő pontszerű $\mathbf{m_2}$ testtel. Ez az ütközés után $\mathbf{v_2}$ sebességet vesz fel, de most ez kerületi sebesség lesz, mert utána egy $\mathbf{r_{tk}}$ sugarú körpályán mozog. Vegyük úgy, hogy az ütközés során az egész impulzus átadódik, $\mathbf{m_2\cdot v_2=I}$. A szögsebesség és a kerületi sebesség közötti kapcsolat $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{v_2/r_{tk}}$, a perdület $\mathbf{N=\Theta\cdot\omega}$. A $\boldsymbol{\Theta}$ tehetetlenségi nyomaték megállapításához csak arra kell emlékeznünk, hogy a sugár most a *tömegközépkör* sugara, ezért $\mathbf{\Theta=m_2\cdot r_{tk}^2}$. Mindent összegezve azt kapjuk, hogy a sárga test hozott impulzusa így válhat a kék test perdületévé:

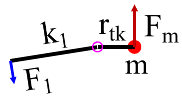
$$N = \Theta \cdot \omega \quad = m_2 \cdot r_{tk}{}^2 \cdot \frac{v_2}{r_{tk}} \quad = m_2 \cdot v_2 \cdot r_{tk}$$
$$N = I \cdot r_{tk}$$

Emlékezz arra, hogy a tehetetlenségi *nyomaték* abban más, mint a tehetetlenség, hogy van hozzá egy erőkar is. Az impulzus*nyomaték* (másik nevén perdület) abban más, mint az impulzus, hogy van hozzá egy erőkar is.

Mi az általunk használt neve az erőnyomatéknak?

Most az impulzus erőlökése <u>a tömegközépkör érintője mentén</u> lépett a rendszerbe, de ez általában nem így van. Nézd meg ezt a vízimalom-kereket! Berajzoltam a tömegközépkörét is, és a piros ponttal szimbolizáltam a tömegét is (a körön bárhol lehetne), amely az impulzust átveszi, a tengely körüli forgássá alakítva. Láthatod, hogy az a pont, ahol a víz az impulzusát a rendszerbe beadja, jóval távolabb van a tengelytől mint amekkora a tömegközépkör sugara. Alatta láthatod a helyzetet lecsupaszítva, megtartva a lényeget. Mi ez? **…**





Úgy van, ez egy teljesen hétköznapi kétkarú emelő, a 2. témakör részletesen foglalkozott vele. Azt látjuk, hogy ha a víz kifejt rá egy F_1 erőt, k_1 hosszúságú erőkaron, az létrehozza a piros m tömegre ható F_m erőt, ennek a karja maga az r_{tk}. Az emelő mérleghinta-szabálya szerint

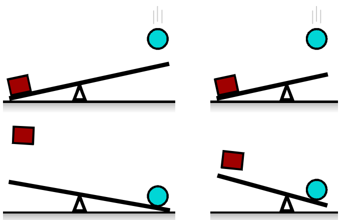
$$\frac{F_m}{F_1} = \frac{k_1}{r_{tk}}$$

azaz nagy erőhöz kis erőkar tartozik és fordítva.

Az impulzus és az erő közötti összefüggést már ismered: $\Delta I = F \cdot t$, erre alapozva kijelenthető az is, hogy

$$\frac{F_m \cdot t}{F_1 \cdot t} = \frac{I_m}{I_1} = \frac{k_1}{r_{tk}}$$

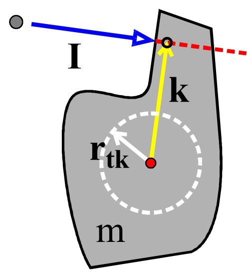
ahol I_1 a rendszerbe beérkező, ez esetben a víz által hozott impulzus, I_m a tehetetlenségi nyomatékot r_{tk} erőkarral helyettesítő tömegpont (a piros pont) leendő impulzusa, ebből lesz a perdület. Mert, remélem, emlékszel, a <u>perdület</u> kiszámítása a célunk. Pontosan ugyanide lyukadtunk volna ki, ha impulzus helyett az emelőn létrejövő $F_1 \cdot k_1$ *forgatónyomatékot* vesszük alapul.



Nem is a levezetés a lényeg, hanem a tanulság. Ha a forgó testre ható külső erő forgatónyomatékát vagy impulzusát a tengelytől k_1 távolságra alkalmazzuk, akkor azt <u>egy **k_1/r_{tk}** értékkel megszorozva kell számításba vennünk</u>. Ez azért van így, mert ha az érkező hatásnak jó nagy erőkart adunk, akkor sokkal nagyobb perdületet tud létrehozni, mint ha az erőkar kicsi.

Most már csak össze kell illeszteni a két eredményünket. Az előbb megtudtuk, hogy ha egy testre egy erőlökést fejtünk ki úgy, hogy az pont a tömegközépkörének érintőjeként hasson a testre, akkor a testben keletkező perdület az $N = I \cdot r_{tk}$ képlettel számolható ki. Azt is megtudtuk, hogy ha a testre a tengelytől ennél *távolabb*, k távolságban fejtjük ki azt az erőlökést, akkor a perdület nagyobb lesz, a távolság arányában, tehát szorozni kell egy k/r_{tk} tényezővel is. Írjuk le együtt:

$$N = I \cdot r_{tk} \cdot \frac{k}{r_{tk}}$$



Ha az egyszerűsítést elvégezzük, megkapjuk az ilyen esetekben általánosan használható tételt.

Ha egy elforgatható testre egy I erőlökést fejtünk ki úgy, hogy annak hatásvonala a forgástengelytől k távolságra van, akkor az így létrehozott perdületváltozás értéke

$$\Delta N = I \cdot k$$

Ahogy arról már máskor is beszéltünk, az N és a ΔN között az a különbség, hogy az utóbbi a perdület *változását* jelenti, tehát ha a testnek már van egy perdülete, akkor az a képlet szerint $I \cdot k$ értékkel nő. Vagy csökken, ha az impulzus iránya a meglevő perdülettel ellentétes. Így pontos.

Perdületmegmaradás

Az impulzusmegmaradás analógiájára **a perdület megmaradásának törvénye** így szól:

Zárt rendszerben a testek perdületeinek (impulzusnyomatékainak, forgásmennyiségeinek) **előjeles összege mindig állandó marad. A rendszeren belül a testek megváltoztathatják egymás forgásállapotát, de az összperdületen csak külső erő tud változtatni.**

Az impulzusmegmaradás témájánál látott képlethez hasonló itt is felírható:

$$\sum_{i=1}^{n} \Theta_i \cdot \omega_i = N_0 \quad \text{állandó}$$

ahol az $\mathbf{N_0}$ a rendszer kezdeti összperdülete.

A perdülettétel azt mondja, hogy a test perdületét külső erő változtathatja meg, a megmaradási tétel pedig azt állítja, hogy a zárt rendszerben a testek egymás perdületét is megváltoztathatják. Hogy van ez? Egy testhez képest egy másik test hatása már külső erő. Ha ezt a két testet önálló, zárt rendszernek vesszük, akkor az egyik test ereje megváltoztatja a másik perdületét, de *ugyanennyivel kell a saját perdületének is változnia* ellenkező irányban. Mindkét testre külső erő hat, de a perdületek egyikből a másikba vándorolhatnak (részlegesen is), és a két testben együttvéve állandó marad. Ez akárhány testre igaz, ha gondoskodni tudunk arról, hogy azok a világ többi részétől függetlenek maradjanak.

A törvény érvényesülése megfigyelhető egyetlen forgó testen is, ez gyakorlatilag a forgási tehetetlenség törvényét jelenti. A perdület megmaradását egy nagyon egyszerű kísérleti eszközön is megfigyelhetjük: egy guruló labdán. Haladás közben a labda egyenletes forog. Ha az asztal végén leesik, akkor esés közben is láthatóan forog tovább.

Mit fejez ki a Θ·ω szorzat?

Az AKCIÓ–REAKCIÓ fejezetben leírtakhoz hasonlóan a több testből álló rendszerek perdületének megmaradása is okozhat érdekes jeleneteket. Például egy kis turmixgép perdülete kikapcsolt állapotban nulla. Amikor bekapcsolod, akkor az az egyik irányba erősen megrándul. Ennek az a magyarázata, hogy a motor a keverőkarokat jókora gyorsulással felpörgeti, vagyis a rendszer egy része nagy perdületet kap. A karok tömege nem nagy, de a fordulatszámuk és szögsebességük már az. A gép tekinthető zárt mechanikai rendszernek, de akkor a benne levő perdületnek állandónak kell maradnia. Ehhez az szükséges, hogy a turmixgép többi része ugyanakkora, ellentétes irányú perdületet kapjon. A tömege ennek sokkal nagyobb, vagyis a tehetetlenségi nyomatéka is sokkal nagyobb, ezért a forgása lesz lassabb, mert a kettő szorzata adja a perdületet. A két rész perdülete kiegyenlíti egymást.

Csak azért nem forog tovább az egész turmixgép, mert erősen fogjuk, a testünk tömegéhez képest jelentéktelen mértékű perdületet elnyelve, egész pontosan *a Föld perdületét megváltoztatva* vele. Hiszen **a perdület nem tűnik el**, csak máshová vándorol. Ezt az impulzus fogalma kapcsán már alaposan megtanulhattad, és a perdület az impulzus megfelelője a forgómozgásoknál. Ha jégre állítanánk a gépet és úgy kapcsolnánk be, pörögni kezdene.

A helikopter főrotorja (a nagy légcsavarja) egy jókora kiterjedésű, nehéz szerkezet, nagy tehetetlenségi nyomatékkal. Ha repülés közben a rotor forgási sebességét növelni kell, a törvény szerint a helikopter testével együtt alkotott zárt rendszerben az összperdületnek akkor is meg kell maradnia az aktuális értéken. Ezért a helikopter is elkezdene forogni a rotor tengelyén, az ellenkező irányba. Ennek kiküszöbölésére szolgál a farokrotor, egy másik légcsavar, amely érintő irányú elfordító erőt tud kifejteni, és ezzel ellensúlyozzák a főrotor sebességének megváltozásából származó forgató hatást. A farokrotor rendszeren kívüli tényezőt vesz igénybe, az elfújt levegő impulzusa formájában, ezért áll meg a törzs forgása a megmaradási törvény megsértése nélkül.

Mi történne, ha a helikopter főrotorjának a tengelye hirtelen megszorulna? A *törzshöz képest* a rotor forgási sebessége nagyon kicsivé válik, esetleg teljesen meg is áll. A rotor jókora perdülete nem tűnhet el, csak áthelyeződhet másba, és ez a más itt csakis a helikopter teste lehet, amely hevesen forogni kezd. Ez katasztrófát okozna, a törzs nem viselne el ekkora terhelést és szétszakadna.

Az egyenes vonalú mozgások melyik fogalmához hasonlítható a perdület?

A perdület megmaradásának van egy <u>különleges</u> következménye is. Tudjuk, hogy az impulzusban a tömeg és a sebesség szorzata van. Amikor az impulzus állandó, akkor az $\mathbf{m \cdot v}$ szorzat állandó, márpedig a tömeg állandó, ebből következően a sebesség is az. A perdület képlete szerint $\mathbf{N=\Theta\cdot\omega}$, a forgás szögsebességének és a tehetetlenségi nyomatéknak a szorzata állandó. De arról már korábban is beszéltünk, hogy **a tehetetlenségi nyomaték nem állandó**. A változásához elegendő, ha a test alakja megváltozik. Tudod, a tömegpontok távolsága a tengelytől az, ami a tehetetlenségi nyomatékot meghatározza. Ha kinyitsz egy esernyőt, megnöveled a tehetetlenségi nyomatékát, ilyen egyszerű.

A klasszikus példa a műkorcsolyából ismert jelenet, amikor a versenyző kitárt karral forogni kezd. Aztán a karját behúzza*, magához szorítja, és akkor a forgási sebessége látványosan megnő. Ehhez nem vesz igénybe semmilyen további erőt, ez pusztán a perdületmegmaradás következménye. A törvény szerint a korcsolyázó saját "rendszerén" belül a perdület nem változhat. Azzal, hogy a karját behúzta, a versenyző a saját tehetetlenségi nyomatékát csökkentette. A tömege nem változott, de a tömegpontjai átlagosan *közelebb kerültek a forgástengelyhez*. A perdület nem vész el, ezért cserébe a szögsebességnek kell megnőnie, ezt diktálja a törvény, $N=\Theta\cdot\omega$, tehát gyorsul a forgás. Amikor ismét kitárja a karját, újra megnöveli a tehetetlenségi nyomatékát, és lassul a forgás. Amikor ugrik, akkor is magához szorítja a karját, hogy elég gyorsan tudjon forogni, amikor pedig megérkezik, kezét-lábát kinyújtja, hogy a forgást megállítsa.

Ugyanez a jelenség bármilyen forgó mozgásnál létrejöhet. Egy szaltó közben szintén a forgatónyomaték csökkenthető azzal, hogy az ugró összehúzza magát. Csak ettől, minden külső erőhatás nélkül meg fog változni a forgás sebessége, mert a perdület nem párologhat el. Ha egy head spin közben behajlítod a lábaidat, éppúgy csökken a forgatónyomatékod, mint a korcsolyázónak. A tehetetlenségi nyomaték hangolásával, a karok, lábak kinyújtásának változtatásával a forgás sebessége tetszés szerint beállítható. A törvény kötelez, a szögsebesség igazodik a tehetetlenségi nyomaték változásához, *akkor is*, ha ez nekünk nem jó. Ha a forgást fékezni akarod, a tehetetlenségi nyomaték megnövelése, a lábaid szétnyitása nélkül, akkor külső erőt kell bevonnod, például súrlódást, letéve a kezedet.

Mi is a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség kapcsolata a perdülettel?

Még a Naprendszer keletkezésében is ott volt ez a megkerülhetetlen fizikai törvény. Az ősidőkben a Nap, a bolygók és minden egyéb egy elképzelhetetlenül nagy, ritka porfelhő volt a világűrben, amely a saját gravitációja hatására mérhetetlenül lassan húzódott össze. Aztán történt valami, például elhaladt "a közelben" egy csillag, vagy egy szupernóva robbanásának lökése elért hozzánk, és ez egy kicsit megmozdította a felhőt. Egy egészen kevés forgás, egy perdület is bekerült a mozgásba. Amikor a felhő összetömörödött Nappá és bolygókká, ez a perdület megmaradt, a forgás felgyorsult, és a Nap körül ezért keringenek és forognak ma a bolygók, a holdak, de még a külső Oort-felhő is.

* „– Emlékszel, amikor egy helyben lassan pörögni kezdenek, először széttárt karral …
– Igen …
– Aztán hirtelen behúzzák a karjukat, és akkor mit látsz?
– Én már semmit. Addigra elalszom."
(Romhányi József: Mézga Aladár különös kalandjai – Rapídia)

Mozgások összehasonlítása

Az egyenes vonalú és a körmozgás sok tulajdonságában összepárosítható egymással. Tekintsük át ezeket egy táblázatban.

egyenes vonalú mozgás	körmozgás és forgómozgás
Egyenletes sebességnél a test időegységenként azonos **úthosszt** (s) tesz meg.	Egyenletes sebességnél a test pályája időegységenként azonos **elfordulási szöget** (φ) zár be.
	A test által bejárt **ívhossz** (s) az elfordulási szög mellett a pálya sugarától (r) is függ.
A **sebesség** jele v.	Sebességnek a kerületi helyett inkább a **szögsebesség**et (ω) tekintjük, mert a kerületi sebességtől eltérően az független a pálya sugarától.
A magára hagyott test megtartja egyenletes **haladási** sebességét.	A magára hagyott test megtartja egyenletes **keringési vagy forgási** sebességét.
A test sebességének megváltoztatásához a testre **erőt** (F) kell kifejtenünk.	A test keringési vagy forgási sebességének megváltoztatásához a testre **forgatónyomatékot** (M) kell kifejtenünk.
	A forgatónyomaték abban különbözik az erőtől, hogy tartalmazza az erő és a forgástengely közötti távolságot is. M=F·k.
A test bizonyos mértékig ellenáll az erőnek, a **tehetetlenségével**.	A test bizonyos mértékig ellenáll a forgatónyomatéknak, a **tehetetlenségi nyomatékával**.
A tehetetlenséget a **tömeggel** (m) fejezzük ki. A test tehetetlensége egyenlő a testet alkotó tömegpontok tehetetlenségeinek összegével.	Tömegpont tehetetlenségi nyomatékát (Θ) a tömeg (m) és a forgástengelytől mért távolság (l) alapján fejezzük ki ($m \cdot l^2$). Testek tehetetlenségi nyomatékát a test pontjainak tehetetlenségi nyomatékaiból adjuk össze. Ehhez vannak kész képletek is.
A tehetetlenség nem függ a test alakjától.	A tehetetlenségi nyomaték függ a test pontjainak a tengelytől mért távolságaitól, összességében a test alakjától és súlyeloszlásától.
A tehetetlenséget a **tömegközéppont**ban összegződő hatásnak vesszük.	A forgó test tehetetlenségi nyomatékát a **tömegközépkörében** összegződő hatásnak vesszük.
A test reagálását az erőre a **dinamika alaptörvénye** írja le: a=F/m. Az erő hatására a haladási sebesség megváltozik.	A test reagálását az erőre a **forgómozgás alaptörvénye** írja le: β=M/Θ. A forgatónyomaték hatására a szögsebesség megváltozik.
Állandó erő hatására a test sebessége (v) egyenletesen változik, a **gyorsulás** (a) állandó.	Állandó forgatónyomaték hatására a test szögsebessége (ω) egyenletesen változik, a **szöggyorsulás** (β) állandó.
A test gyorsításába fektetett **erő** (F) a test **impulzus**át (I) növeli. Az impulzus csökkentéséhez ellenirányú erő kifejtése szükséges.	A test szögsebességének növelésébe fektetett **forgatónyomaték** (M) a test **perdület**ét (N) növeli. A perdület csökkentéséhez ellenirányú forgatónyomaték kifejtése szükséges.
Az impulzus megváltoztatásához idő kell. ΔI=F·t.	A perdület megváltoztatásához idő kell. ΔN=M·t.
Zárt rendszeren belül az impulzusok összege állandó.	Zárt rendszeren belül a perdületek összege állandó.

Energia

Legyen már valami hasznunk is a mozgásból.

Munka

Ez egy nagyon hosszú fejezet, de csak azért, mert egy megalapozó fontosságú fogalmat magyarázok meg jó alaposan, mindenféle irányból. Nem nehéz, csak olvasd végig, akár több menetben.

A **mechanikai munka** definíciója elég egyszerű. Munka az, ha egy erő hatására egy test elmozdul. Figyeld meg: *hatására*. A munkát az végzi, ami (vagy aki) az erőt gyakorolja a testre. A munkát a test*en* végzi. És mivel az ERŐ meghatározása szerint erőt kifejteni csak egy test tud, közvetlen érintkezéssel vagy erőtér közvetítésével, ezért a munkát a testen mindig egy másik test végzi, akkor is, ha a mi testünk az a test.

A mechanikai munka az a mennyiség, amely úgy és csak úgy keletkezik, hogy egy test erőt fejt ki egy másik testre, amely az erő hatásvonalának irányában elmozdul.

A munkához az elmozdulásnak az erő hatásvonalának irányában kell megtörténnie.

Mi következik ebből? Az egyik az, hogy ha te öt percen át tartod megemelve az autót, amíg valaki kereket cserél rajta, akkor végül hiába érzed úgy, hogy jártányi erőd sem maradt, *nem végeztél munkát.* A kocsi ugyanis, amíg te az erőt kifejtetted rá, nem mozgott. Nincs elmozdulás, nincs munka, a szabály így szól. Hogy ez egy hülyeség? Más szempontból talán, de a fizikában, különféle okokból, a munkát így definiálták, mert további fizikai fogalmak alapjául a munka meghatározása így lett célszerű. Ezért amikor fizikapéldát oldasz meg, el kell felejtened a munka fogalmának hétköznapi használatát, és *szigorúan* tartanod kell magad ehhez a meghatározáshoz.

A mozgás önmagában nem elég. Ha a világ legerősebb embereinek rendezett versenyen ötven méteren át cipelnek hihetetlen súlyú vasakat, akkor sem végeztek munkát, a mechanikai munka fizikai meghatározását nézve. Merthogy a testek mozognak ugyan, de arra, amerre a versenyzők az erejüket kifejtik rá, vagyis felfelé, ezek a testek centit sem mozdulnak. Csak vízszintesen. Az pedig egyáltalán nem érdekes. Az erő hatásvonalának irányába nincs elmozdulás, akkor nincs munkavégzés sem.

Sőt, még az sem érdekes, hogy a test mekkora utat ($\mathbf{s}$) tesz meg egyéb irányokban, miközben a testre az erőt kifejtjük, hanem az erő irányú *elmozdulás* a fontos. Az elmozdulás ($\mathbf{d}$) az út kezdő és végpontját összekötő egyenes szakasz – lásd az ÚT fejezetet –, és az út lehet össze-vissza kanyargó vonal, a munka kiszámításához ilyenkor csak a mozgás végeredményét használjuk fel. Tegyük fel, hogy egy irodaház egyik szobájában felemelünk egy ládát, és átvisszük a felettünk levő szobába. Kilépve az ajtón elcipeljük a ládát a folyosó végén levő lépcsőig, felmegyünk egy emeletet, és az ugyanolyan hosszú folyosón bemegyünk a szobába. Mennyi munkát végeztünk? A derekunk leszakad, de a mechanikai munka kiszámításában az elmozdulás kb. 3 méter.

A **mechanikai munka** kiszámítása:

$$\boxed{W = F_d \cdot d}$$

ahol $\mathbf{W}$ a munka jele (az angol *work* szóból), $\mathbf{d}$ a test elmozdulása, és $\mathbf{F}_d$ az elmozdulás irányában a testre kifejtett erő. A mértékegység

$$[W] = N \cdot m$$

Megjegyzés: Ezt a mértékegységet már láttuk, a FORGATÓNYOMATÉK mértékegységeként. De persze ettől a munka és a forgatónyomaték nem válik azonos értelművé. Ott a távolság az erőkar hossza volt, vagyis teljesen más dolgokról van szó.

A munka mértékegységének másik nevet is meghatároztak, ez a **joule**, a jele **J**. A szó kiejtése nem egységes, tartja magát a „zsúl”, de az szinte biztos, hogy Mr. James Prescott Joule angol sörfőző és fizikus a családnevét „dzsúl”-nak ejtette.

$$\boxed{1\ J = 1\ N \cdot m}$$

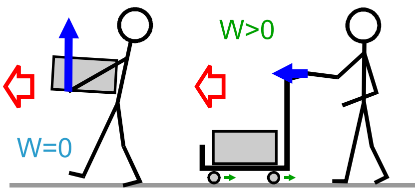
Tehát **1 joule mechanikai munkát végzünk, ha 1 newton erővel 1 méternyit mozdítunk el egy testet**. Mekkora testet? Mindegy. Nem számít sem a tömeg, sem a méret, sem az, hogy mennyi *idő* alatt mozdítjuk el a testet. Először elmozdulás, csak ennyi.

Mennyi mechanikai munkát végez egy daru, ha 3 kN súlyú téglát emel fel 8 méter magasba?

Talán felmerül benned, hogy itt nem került még szóba a tehetetlenség törvénye, vagyis hogy egy vízszintesen mozgó test mozgásához semennyi erő sem kell. Ez így van, és ha a testet csak "kíséred", nem is végzel munkát. Erőt ahhoz kell kifejtenünk, hogy a test mozgását akadályozó valamilyen erőt küzdjünk le, például a súrlódást, amire a ládacipeléskor most nem volt szükségünk.

Nézzük meg még egyszer a ládacipelést. A folyosókon gyalogolva az *általunk kifejtett erő függőleges* volt, a láda súlyát tartottuk, de a láda ekkor *függőleges irányban kicsit sem mozgott*, a vízszintes mozgatásához pedig – tegyük fel – nem kellett erő, az egyenes vonalú egyenletes mozgás erő nélkül zajlik. Ezért ezek az útszakaszok az általunk a ládán végzett mechanikai munka szempontjából teljesen érdektelenek, nulla munkát érnek. Amikor a ládával felmentünk a lépcsőn, akkor ugyan valamennyit előrefelé is mentünk, mert a lépcső rézsútos, de végre felfelé is mozogtunk, tehát a ládának volt olyan irányú mozgása is, ami megegyezett a kifejtett erőnk irányával. Ekkor végeztük a végül számításba veendő munkát.

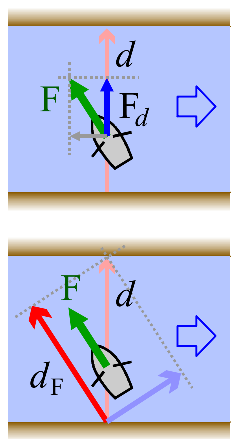
De mi a helyzet, ha a ládát *egy kocsin* toljuk végig a folyosókon? Az bizony már sokkal több munkát jelent! A kocsit ugyanis mi toljuk, legyőzve a gördülő-ellenállási (és súrlódási) erőt, eközben a kocsi azon a vonalon mozog, amerre mi az erőt kifejtjük. A lépcsőn feljutással végzett munka nem változik, de most hozzá kell adnunk a folyosón végzett munkánkat is. Úgy, hogy a kocsi gurításához használt erőnket megszorozzuk az így megtett vízszintes irányú úttal.



Ha körbe-körbe sétálgatunk a ládát cipelve, akkor végül a végzett munkánk *nulla*, mert nem volt egy pillanat sem, amikor a láda legalább részben arra mozdult volna, amerre az erőnk mutat (és a példa érdekében tegyük fel, hogy tökéletes simasággal, vízszintesen, egyenletes sebességgel mozgott a láda tömegközéppontja). Ha egy kocsin körbe-körbe tologatjuk, akkor viszont nem kell tartanunk a ládát, *sokkal könnyebb* a dolgunk, de a végzett munkánk mégsem nulla, mert a kocsi gördülő-ellenállását erő kifejtésével győztük le, mégha az az erő nem is sok. (Az is igaz, hogy aztán a lépcsőn még a kocsit is fel kell cipelnünk.)

Az út melyik szakaszán végeztünk munkát a súllyal szemben?

Foglalkozzunk még egy kicsit az iránnyal. Csónakkal evezünk át a folyón, és mivel a sodor ellen tartva evezünk, sikerül a partra merőlegesen átjutni. A megtett útvonal, egyben az elmozdulás is $\mathbf{d}$ hosszúságú, és $\mathbf{F}$ az az erő, amit a csónak mozgatása érdekében kifejtünk. Kérdés, hogy mekkora munkát végeztünk.



Kétféleképpen lehet a helyzetet nézni. Az egyik szerint az $\mathbf{F}$ erővektort, szokás szerint, helyettesíthetjük két olyan összetevő erővektorral, amelyeknek az $\mathbf{F}$ az eredője. Ezt most úgy csináljuk, hogy az egyik összetevő ($\mathbf{F}_d$) az elmozdulás irányába mutat, a másik pedig merőleges. Az utóbbi az elmozdulás szempontjából nulla, nem számít. (Ha ezzel problémád van, nézd meg az EREDŐ ERŐ fejezetet.) A munka kiszámításakor csak az első összetevőt szorozzuk az elmozdulással, és megkaptuk a munka előbbi képletét, $\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{d}$.

De úgy is nézhetjük az akciót, hogy az erőt nem bontjuk fel, viszont keresünk *két olyan elmozdulást*, amelyek eredője a $\mathbf{d}$ elmozdulás. Itt a mozgás vektorát bontjuk fel összetevőkre, az egyik összetevő az *erővel* párhuzamos. A másik viszont arra merőleges, vagyis a kifejtett erő és a munka szempontjából érdektelen. Bebizonyítható, hogy az $\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{d}$-vel *azonos* értéket ad a munka egy másik lehetséges képlete:

$$W = F \cdot d_F$$

ahol tehát $\mathbf{F}$ az általunk kifejtett erő, és $\mathbf{d}_F$ az *ennek irányában* megtörtént elmozdulás. Figyeld meg jól az ábrán a két esetet, és a két képlet közötti különbséget. Azért érdemes ezt is megjegyezni, mert **egyes feladatok megoldásához ez a felfogás a kényelmesebb**.

A csónakra egyébként két erő hat: a mi evezésünk ereje és a víz sodrása, de a mi munkánkat a mi erőnkből kell számolni.

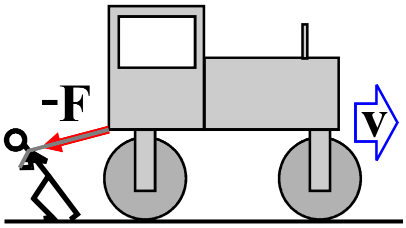
Mit bontottunk vektorösszetevőkre a második esetben?

Nem mindig van látszatja a munkavégzésnek. Ha az előre haladó úthengert teljes erőből toljuk, akkor is nehéz elhinni, hogy az erőfeszítésünk bármit is hozzátenne a sebességéhez. Pedig valószínűleg igen, legfeljebb eltörpül az úthenger motorja által végzett munka mellett. Mindenesetre az általunk kifejtett erőt az úthenger mozgásával összeszorozva megkapjuk a mi mechanikai munkánk mennyiségét. De ha az úthengert ugyanakkora erővel oldalról nyomjuk, látszatra pont ugyanannyit ér az erőfeszítésünk, de az erőnk irányába nincs elmozdulás, a munkánk biztosan nulla.

Húzni vagy tolni: munkavégzés szempontjából egyforma erőkifejtés, csak az irány más.

Van negatív mechanikai munka is. Ez végképp hülyeségnek tűnik, hétköznapi értelmet nem is igen találhatunk benne. Nem értelmes, de *értelmezhető*. Ugyanazért kell ezt a lehetőséget megengedni, amiért a lassulást negatív gyorsulásnak vesszük: ezzel egy kalap alá lehet venni különböző dolgokat, ennek következtében ugyanaz a képlet használható rájuk, egy képlet megtanulása is elég. Gondolom, ettől hirtelen rokonszenvessé vált számodra a negatív munka, ha eddig még nem volt az.

A W, a szorzat akkor lesz negatív, ha az egyik tényezője negatív. Ez azt jelenti a gyakorlatban, hogy az erő iránya és az elmozdulás iránya ellentétes. Ha tehát kötélen húzzuk teljes erőből az úthengert, de az az ellenkező irányban mozog, akkor negatív munkát végzünk az úthengeren. Ugyanez történik, ha az úthengert toljuk, és az velünk szemben mozog, ilyenkor mondhatjuk azt, hogy elsőre jó ötletnek tűnt.



A negatív munka egyáltalán nem jelenti azt, hogy nem kell erőlködnöd. Azt jelenti, hogy hasztalanul erőlködsz, mert ugyan húzod, de mégis távolodik. Lehet, hogy egy lejtőn ezzel lassítod egy kocsi legurulását, a munka mégis negatív. Ha viszont egy bika tol téged, de te nem próbálod őt sem tolni, sem húzni, akkor sem pozitív, sem negatív munkát nem végzel, mert nem erőlködsz.

A munkát nem mindig mi végezzük, hálistennek. Alkalmas erre a szél, a folyó, a gravitációs erő, igavonó állatok, és persze a számtalan gép is. Általánosságban egy test egy erővel végez mechanikai munkát egy másik testen, és hogy ezek a testek mik, azok már csak példák, hasonlatok.

Merre mozog a test, amikor negatív munkát végzünk rajta?

Összetett munkavégzés

A mechanikai munka tárgyalásánál a tankönyvekben olyanok olvashatók, hogy mikor kell csak a test elmozdulását számolni, és mikor a teljes útját. Nem kell ezt komplikálni. A munka az erő és az irányában vett elmozdulás szorzata.

De akkor mi volt azzal, amikor a ládát a kocsin toltuk? Arról volt szó, hogy akkor munkát végeztünk! Pedig az eredeti példa szerint az elmozdulásunk csak 3 méter.

Úgy van. De a láda cipelésekor az erőnk iránya nem változott, és mivel a láda súlya ugyanannyi maradt, az erő nagysága sem változott. *Az erővektor nem változott.* Akkor ezt egyetlen folyamatos munkavégzésnek vesszük, amelyben az erő-irányú elmozdulást vesszük számításba, alapesetben így kell.

A kocsi tolásakor viszont az erő először vízszintes volt, aztán függőleges, aztán megint vízszintes. A láda átszállítása *három szakaszra bontható*, egy-egy erővel és elmozdulással. A szakaszokon végzett munkát egyenként, a már megadott módon kell kiszámolni: erő szorozva az elmozdulással, a három szakaszban egyenként elért elmozdulással.

Ha a munkavégzés során az erő iránya vagy nagysága változik, akkor a munkát szakaszokra kell bontani, és az azokon végzett munkákat összeadni. Egy szakaszon belül az erővektor változatlan legyen.

Pontosan ugyanezt leírhatod egy képlettel is, ha menőzni akarsz. A test útját felosztjuk szükség szerinti szakaszokra, amelyek mérete nagyon kicsi is lehet, és az összes munkát az útszakaszokon végzett munkák összegeként számítjuk ki.

Ha az $\mathbf{F_d}$ mindig az adott útszakaszon megtett **d** elmozdulás irányába mutató erőkomponens, akkor

$$\boxed{W = \sum_i \left(F_{d,i} \cdot d_i\right)}$$

„Szumma í szerint ef dé íszer dé í.” Vagyis (csak a forma kedvéért) i-vel megszámozva összeadjuk az elmozdulások és az irányukba mutató erők szorzatait. (A zárójel kiírása itt nem kötelező, de hasznos.)

Ha a mozgás egyenes szakaszok mentén történik, a felbontás kézenfekvő. De a legkanyargósabb **út** is felbontható **elmozdulásokból álló** olyan láncra, ami majdnem pontosan megegyezik az úttal. Nem találtunk fel semmi újat, nézd meg az ÚT fejezet ábráját! Minden egyes útszakaszra önállóan érvényes marad a munka kiszámításának összes szempontja, még mindig tartjuk magunkat az alapelvhez.

Minden mechanikai munka összeadható kisebb szakaszokon történt munkavégzésekből. Ha ki tudjuk számolni egy teher egy lépcsőfokon való felvitelének munkáját, akkor az megszorozható a lépcsőfokok számával, ha az összes munkát akarjuk tudni. Ha vödrönként merjük ki a vizet a kútból, akkor szintén szakaszokból adjuk össze a munkát.

Ha egy mozgás során az erő irányát meg kell változtatni, attól még nem biztos, hogy az utat kis szakaszokra kell bontani. Ha azt kell kiszámolnod, hogy egy ember egy szerpentinen, amelynek a meredeksége végig azonos, a kocsiját végig ugyanúgy tolva összesen mennyi munkát végez, akkor sincs baj, a kanyargós út ilyen szempontból érezhetően *helyettesíthető* egy hosszú, lejtős egyenessel.

Ugyanígy: ha például egy testet egy körpályán tolunk végig, és *mindig* a mozgás irányába toljuk, akkor az elmozdulások összegeként vehetjük egyszerűen a körív hosszát (a kör kerületének egy részét).

Ha biztosan tudjuk, hogy egy útszakaszon az erő minden pillanatban az elmozdulás irányába mutat, akkor ott az elmozdulások összegeként közvetlenül az útszakasz hosszával számolhatunk.

Hogy keletkezik az az erő, *ami miatt* a lejtőn a kocsit feltolva munkát kell végeznünk?

Miért kell odafigyelnünk arra, hogy ez ***mechanikai*** munka? Mert van másmilyen is. A hő is tud munkát végezni, de még mennyire, ilyen esetekben ***termodinamikai*** *munkáról* beszélünk, amikor a víz felforralása, hő bevitele hatására a hőenergia a dugattyú elmozdulásává, mechanikai munkává változik. De mechanikai munka is termelhet hőt. Elég, ha összedörzsölöd a tenyeredet, érzed a termelt hőt, ki is tudnád számolni, hogy milyen súrlódási erő ellen összesen hány métert mozgott egymáson a két tenyered. Az ENERGIA fejezetben szó lesz még ilyenekről.

A termodinamikai munkát azért nem lehet egyszerű hőmérséklet-emelkedésben kifejezni, mert a munka egy része nyomásváltozásban, egy része térfogatváltozásban is megjelenhet. Jövőre tanulni fogjátok, hogy ezek között szoros összefüggés van és egy zárt rendszeren belül ezek csak egymás rovására változhatnak. Addig is ha termodinamikai munkáról ejtünk szót, gondolj a gőzgépre.

Elektromos munka is van, de ez nem a villanymotor által végzett mechanikai munka, most hagyjuk is.

Körmozgás

Erőt kell kifejtenünk egy mozgó testre azért, hogy körpályán maradjon, ez a centripetális erő. Mivel a test mindig erre merőlegesen mozog, az erő irányába nem történik elmozdulás, tehát a centripetális erő nem végez munkát. **De:** ha a test haladását a körpályán valami lassítja (légellenállási erő stb.), akkor az egyenletes sebesség fenntartásához is erőt kell a testre kifejteni. A testet "tolni kell" a körvonalon. Ez az erő mindig a pillanatnyi mozgás irányába mutat, és a munkáját ugyanúgy kell kiszámítani, mintha egyenes pályán haladna a test. Vagyis ha egyszer körbeviszed a testet, akkor megtettél 1 kerületnyi utat, mindig az erőd irányába haladva, tehát munkát végzel.

Forgó mozgás munkája

A test egyenletes forgása ugyanolyan nyugalmi helyzet, mint az egyenes vonalú egyenletes mozgás, tehát a fenntartásához nem kell erő. De ha a forgás szögsebességét, egyidejűleg a test perdületét meg akarjuk változtatni, vagy éppen ha a forgást lassító erőt akarjuk leküzdeni, akkor forgató irányú erőt kell rá kifejtenünk. Egy motoros fűrész berántásakor a kábellel egy kereket forgatunk meg, ami áttételekkel a motor dugattyúját mozgatja. A vízimalom őrlőköveit az áramló víz mozgatja a nagy lapátkerék forgásban tartásával.

Mennyi munkát végzel egy test forgatásával? A hengerkerék mintájára lehet számolgatni az erőket és elmozdulásokat. De néha van ennél rövidebb út is. Nemsokára olvasni fogod, hogy a testen elvégzett munka energiát halmozhat fel a testben. Ilyenkor elég kiszámolnod a test *forgási energiájának meg-*

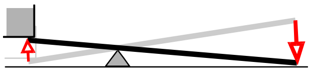
változását, és annyi a végzett munka, tök egyszerű. Ez akkor is beválik, ha az energián te a munkáddal változtatsz (felpörgeted vagy lelassítod), és akkor is, ha a forgó testtel végeztetsz munkát. Például úgy, hogy a jól megpörgetett lendkerék "magától" fel tud húzni egy vödör vizet. A forgó testtől kapott munka is változtat a test forgási energiáján, a szögsebességén, aminek a mérésével kijön az általa elvégzett munka. (Vagy kiszámolod a vödör emelésének munkáját a súlyából és a felemelés elmozdulásából. Ez az a helyzet, amikor te választhatsz megoldást. A feladatok gyakorlása segít ezt megszokni.)

Mit kell ismerned ahhoz, hogy az erő számolgatása nélkül is kiszámolhasd a végzett munkát?

Áttételes munkák

Az egyszerű gépek megváltoztatják a kifejtendő erők nagyságát és irányát, ezért nézzük meg az "áttételesen" végzett munka alakulását ezekre az esetekre.

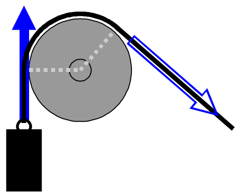
Emelő



Ha egy kétoldalú EMELŐvel emeljük meg a kocsit a kerékcseréhez, akkor a megemelés során munkát végzünk. (Amikor már csak tartjuk, az nem munka.) Ha a teherkar a fele az erőkarnak, akkor nekünk feleakkora erőt kell csak kifejtenünk, mint ami a kocsi egy az egyben való megemeléséhez kellene. Ha a kezdő- és véghelyzetet az ábrán megnézed, hasonló háromszögeket találsz, 1:2 arányúakat. Ebből az következik, hogy az emelő végét kétszer olyan hosszan kellett lefelé tolni, mint amennyit a kocsi emelkedett. Feleakkora erő kétszer akkora úton: az *ugyanannyi munka*! Vagyis az emelő kevesebb erőt tett szükségessé, de összesen az elvégzendő munka nem csökkent.

Ha csak annyit tudunk, hogy a teher súlya 1100 N, amit 15 cm magasra emeltünk, akkor a mi munkánk biztosan 165 J volt, mert csakis ennyi munkával történhet meg ez az emelkedés. Nem kell tudnunk, hogy mekkora volt az *általunk* kifejtett erő vagy az emelő felénk eső végének elmozdulása. **Ha az erőt áttételesen fejtjük ki a testre, akkor a mi erőnk adatai helyett a munka kiszámolható a test ellenerejének (pl. súlyának) és elmozdulásának szorzatként is.** Ez a tanulság jól jön még.

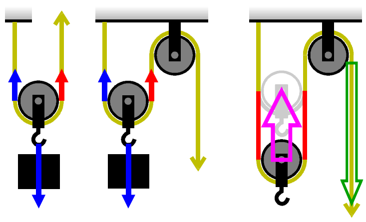
Állócsiga



A csigánál a kötelet másfelé húzzuk, mint amerre a test mozog. Ez teljesen igaz, de a kötél csak közvetíti az erőnket. Ha a kötelet meghúzzuk ferdén, a testre ható erő akkor is felfelé mutat, a kötélnek a kettő találkozásánál vett irányába, és ez munkavégzés szempontjából ugyanaz, mint ha közvetlenül mi magunk tartanánk a testet. Vagyis az állócsiga a munkán *semmit* sem változtat.

Mozgócsiga

A mozgócsiga is csigákból áll, de egyébként teljesen más dologról van szó.



Először nézzük meg az erőket. Az első a legegyszerűbb felállás, a kötél egyik vége rögzítve van, a másik végét mi tartjuk. A teher mozdulatlan, tehát az erők eredője nulla, vagyis a kötél két szárában fele-fele nagyságú erők ébrednek. Ezek összege ellensúlyozza a teher súlyát. A dologban a poén az, hogy a kötél egyik végét nem mi fogjuk, hanem rögzítve van a falhoz, állványhoz, fához, valamihez. Azt az erőt nem nekünk kell kifejtenünk.

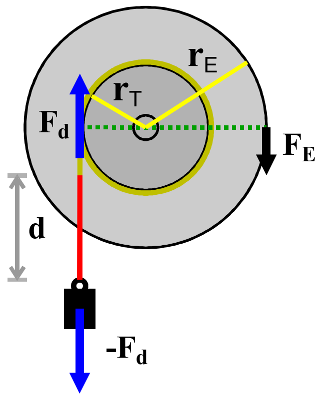
A második ábrán beiktattunk egy állócsigát, ami *semmi mást* nem változtat a helyzeten, mint hogy a kötél szabad végét más irányból, ez esetben lentről húzhatjuk. A gyakorlatban így szokták a csigákat elhelyezni. Az erők ugyanakkorák.

A mozgócsiga a kötél eresztésével-húzásával le-föl engedhető. Azt már tudjuk, hogy nekünk elég feleakkora erővel húznunk a kötelet. De nézzük meg, hogy milyen hosszan kell a kötelet húznunk ahhoz, hogy a mozgócsiga nagy nyíllal jelölt emelkedését elérjük. A mostani és a felhúzott állapot közötti magasságkülönbség annyi, amennyit a lila nyíl mutat. A kötél viszont most a *két* piros szakasszal hosszabb, vagyis kötélből *kétszer annyit* kell húznunk, mint amennyi az emelkedés. Ez egyformán érvényes az 1. és a 3. helyzetre.

A jelenség ugyanaz, mint amit a kétoldalú emelőnél láttunk. Feleakkora erővel húzhatjuk a kötelet, de cserébe kétszer olyan hosszúságon. A munka a kettő szorzata, igaz? Vagyis az derül ki, hogy a mozgó-csigával az erőt csökkenthetjük, de a munka ugyanannyi marad. Ha nem így lenne, akkor a teher részben magától emelkedne fel csak attól, hogy köteleket kötözgetünk ide-oda. Csodák pedig nincsenek. Ha meg akarunk emelni valamit, akkor ahhoz mindig munka kell, és mindig ugyanannyi. Ennek ellenére ez a mozgócsiga nagyon hasznos eszköz a mai napig, mert többet ér az erő csökkentése, mint amennyi nehézséget okoz a kötél hosszabb húzása.

Mozgócsigából egyébként többet is össze lehet kombinálni csigasorrá, amivel tovább lehet osztani az erőt, de tovább szorzódik a húzandó kötélhossz. A mese szerint amikor Arkhimédész ráébredt az ebben rejlő lehetőségekre, lelkesedésében kijelentette, hogy ha valaki mutat neki egy fix pontot az űrben, ahová kikötheti a kötelet, az egész Földet meg tudja mozdítani.

Hengerkerék

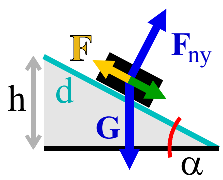


Az EGYSZERŰ GÉPEKnek erről a típusáról a 2. témakörben volt szó. A lényege az, hogy a munkavégző erő és az ellenerő különböző sugarú kerekek érintői mentén hatnak, ami az emelők elve szerint fordítottan arányos nagyságú erőket tesz szükségessé. A munkavégzéshez az erők nagyságán kívül erő irányú elmozdulás is kell: ha a kereket forgatjuk, akkor a kerülete mentén lemérhető a forgatás teljes úthossza. Ha a kerék kerülete 120 cm, 5,2-szer forgattuk meg 75 N erővel, akkor a munka 1,2×5,2×75, azaz 468 joule.

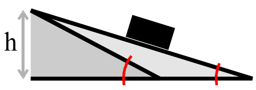
A munka egy teher felemelése. Ezt nem csak a munkavégző erő, hanem a teher alapján is számíthatjuk. Ilyenkor csak a teher és az erő között fennálló egyensúlyt veszünk alapul, nincs sebesség meg mozgás. A kerék peremére kifejtett erőnk a két sugár aránya szerint kisebb: $F_d \cdot r_T = F_E \cdot r_E$. Ha ezt nem érted, akkor légy szíves megtanulni az EMELŐK fejezetet a 2. témakörből.

Így ha a henger érintője mentén a teher **d** távolságon mozdult el, akkor a testen $\mathbf{F_d \cdot d}$ munka lett elvégezve. És ki más végezte volna el ezt, ha nem mi? Vagyis a munkát akkor is ki tudjuk számolni, ha nem a kifejtett munkavégző erő elmozdulását ismerjük, hanem a teher erejét és elmozdulását, mert a kettő ugyanannyi. Ez mértannal is kijönne, de így sem rossz.

Lejtő



A lejtőn végzett munka kiszámításában sem fogunk mást tapasztalni, mint eddig: a munkán nem tudunk spórolni. Annyit már magadtól tudnod kell, hogy a test nehézségi ereje (G) és a lejtő nyomóereje (F_{ny}) egy lejtőirányú eredő erőt hoznak létre, amit ellensúlyoznunk kell egy szintén lejtőirányú F ellenerővel. Ha ezzel az erővel feltoljuk a testet a lejtő tetejére, akkor az erőt az elmozdulás (d) irányába fejtettük ki a testre, vagyis a munka a lejtő hosszának és az erőnek a szorzata.



Konkrétabban: $F=-G\cdot\sin\alpha$, a lejtő hossza $d=h/\sin\alpha$, $W=F\cdot d$, a $\sin\alpha$ kiesik, a munka $-G\cdot h$! Ez azt jelenti, hogy a testnek a lejtőn feltolásához elvégzendő munka pontosan annyi, mint ha a testet egyszerűen felemelnénk, a súlyával ellentétes erővel elmozdítva h távolságon. A rakodómunkás megválaszthatja, hogy milyen meredekségű lejtőn akarja feltolni a testet. Ha laposabb a lejtő, akkor kisebb a G és F_{ny} eredője, kisebb a test tolásához szükséges erő is. De ha annak végül ugyanabba a **h** magasságba kell feljutnia (egy teherautóra, mondjuk), akkor a laposabb lejtő hosszabb utat is jelent. Ha tehát kisebb erővel toljuk a ládát, akkor hosszabb úton kell, a kettő szorzata a munka, ami a lejtő meredekségétől függetlenül ugyanannyi.

Megjegyzés: Azért nem teljesen ugyanannyi. Hiszen a valóságban van súrlódás is, és ha hosszabb úton toljuk a testet, hosszabb úton kell a súrlódás ellen dolgoznunk, vagyis valójában kicsit több munkát kell belefektetnünk. A lejtő meredekségét ezért ésszerűen kell megválasztani, valamit valamiért áldozva.

Teljesítmény

A munka mennyisége szempontjából nem volt érdekes, hogy az mennyi idő alatt ment végbe. *Mennyiségét* tekintve mindegy, hogy azt a ládát cammogva és szuszogva viszed vagy futsz vele. A főnököd nyilván nem ilyen szemszögből nézné a helyzetet, őt érdekli az, hogy **a munka milyen gyorsan történik**. A teljesítményed érdekli, ami úgy számítandó ki, hogy ha az adott munkát rövidebb idő alatt végzed el, akkor nagyobb a teljesítményed.

A teljesítmény akkor kap gyakorlatias értelmet, ha valamilyen munkát huzamosan végzel, például egész nap ládákat cipelsz, ekkor annál rosszabb a teljesítményed, minél kevesebb ládát viszel el egy adott idő alatt. De a teljesítmény fogalma és képlete akkor is használható és értelmet hordozó, ha olyan munkát nézünk meg, ami pár másodperc alatt lezajlik.

A teljesítmény jele **P** (*power*), az értéke **egyenesen arányos a végzett munkával (W) és fordítottan arányos az ahhoz felhasznált idővel (t)**.

$$P = \frac{W}{t}$$

a mértékegysége a **watt**:

$$[P] = 1 \ \frac{J}{s} = 1 \ \text{watt (W)}$$

Láthatod, hogy a munka jele és a teljesítmény mértékegysége egyformán W, ezért külön gonddal memorizáld a téma képleteit. És újra mondom, ne betűk szerint menj vakon egy megoldásban, hanem a képletet tanuld meg szavakkal is, és figyelj oda, hogy a feladatban pontosan miről van szó.

A teljesítmény nem azt adja meg, hogy valaki mennyi munkát "teljesített", hanem hogy mennyit milyen gyorsan.

Nézzük meg a dolgot visszafelé is: ha van egy dízelmotorod, amelynek a teljesítménye 40 kW, és 5 percen át szivattyúzod vele a vizet, akkor a végzett munka 40 kW×300 s =1200 kJ =1,2 MJ.

$$W = P \cdot t$$

A munka fogalmának leírásakor számtalanszor volt szó arról, hogy a test elmozdul. Ha ezt a mozgást egy erővel hozzuk létre, vagy a hátulról tolt úthengerhez hasonlóan csak beleteszünk valamennyit, akkor a test *sebességében* benne van a munkánk. Rakjuk össze a három ide illő képletet:

$W = F \cdot s$, $s = v \cdot t$, $P = \frac{W}{t}$, és ezekből kijön a teljesítmény egy másik képlete:

$$P = F_v \cdot v$$

ahol az $\mathbf{F}_v$ a mozgás (elmozdulás) irányába kifejtett erő és $\mathbf{v}$ a mozgás sebessége. A képletből a MUNKA megbeszélésekor is látott elv szerint sejthető, hogy ha a sebesség vagy az erő nagysága változik, akkor új munkaszakasz kezdődik, amelyre a teljesítmény külön számítandó ki.

Hogyan következik egymásból a teljesítmény két képlete?

Amikor a teljesítmény ingadozik, a munka szakaszokra bontandó, akkor az egész folyamat összteljesítménye *nem összeadással* lesz kiszámítható, ahogy a munkánál tettük, hanem **átlagszámítással**. Ezt el lehet rontani. Lássuk:

1 óra alatt 20 kJ munkát végzel (ami nem sok), a következő 3 órában összesen 45 kJ munkát. Mennyi az átlagteljesítményed?

Először is vigyázz a mértékegységre, ugyanaz a helyzet, mint a km/h és m/s közötti átváltás esetében. A 20 kJ/h átváltva 20000 J / 3600 s, ami csak 5,56 W.

De most maradhatunk a kJ/h mértékegységnél. Az első óra teljesítménye 20 kJ/h, a következő három óráé 15 kJ/h. Van egy rossz és egy jó számítási módszer. A rossz: a kettőt átlagoljuk, (20+15)/2= 17,5 kJ/h. Ez *a teljesítmények számtani átlaga*, tekintet nélkül az így végigdolgozott idők arányára, ilyet a feladatok általában nem kérnek, és viszonylag kevés a gyakorlati haszna. Ez tehát a rossz.

Ehelyett a jó: az 20 kJ/h-t 1 órán át, a 15 kJ/h-t három órán át tartottad. Ha erre is tekintettel vagy, akkor tényleg az átlagteljesítményt (vagy átlagos teljesítményt) számolod ki:

$$P_{átl} = \frac{20\,kJ/h \times 1\,h + 15\,kJ/h \times 3\,h}{1\,h + 3\,h} = \frac{65\,kJ}{4\,h} = 16{,}25\,kJ/h = 4{,}51\,W$$

$$P_{\text{átl}} = \text{átlagteljesítmény} = \frac{\text{összes munka}}{\text{összes idő}}$$

Fogyasztás

Ezzel a viszonylag keveset használt fogalommal az a baj, hogy kétféle jelentésben is használják. Nemsokára látni fogod, hogy a munkavégzéshez mindig a valahol felhalmozott *energiából* kell elhasználni valamennyit. Az energia mértékegysége a munkáéval azonos: joule.

A **fogyasztás** az egyik jelentésében a **munka** párja, és a mértékegysége **joule**. Azt fejezzük ki vele, hogy egy bizonyos munka elvégzésekor összesen mennyi energiát használtunk el. Annak ellenére, hogy a munkát végző rendszer valóban fogyasztott energiát, fogyasztás helyett jobb lenne **energiafel-használás**nak hívni, elkerülve a félreértést.

A villanyóra, a mérőműszer, ami alapján az áramért fizetünk, kWh mértékegységben jelzi ki az értéket. A kilowattóra kW·h-t jelent. A watt (és kilowatt) a *teljesítmény* mértékegysége (J/s), ezt visszaszorozzuk idővel, aminek az eredménye munka (P·t=W). A munka mértékegysége viszont a joule. Számítsuk át:

$$1\ \text{kWh} = 1\frac{\text{kJ}}{\text{s}} \cdot 3600\ \text{s} = 3{,}6\ \text{MJ}$$

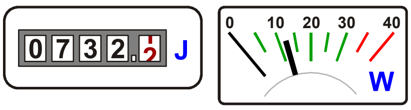
Ellenőrizd az utolsó témakör PREFIXUMOK fejezetében a mértékegységek nagyságrendjét!

Vagyis a villanyóra munkát, illetve az ahhoz felvett energia összegét jelzi ki. A két leolvasás között el-fogyasztott energia árát kell mindig kifizetni.

A **fogyasztás** a másik jelentésében a **teljesítmény** párja, és a mértékegysége **watt**. Ez az időegység alatt felhasznált energia mennyiségét fejezi ki. Teljesítménynek akkor hívjuk, amikor a munkát végző szempontjából nézzük az időegység alatt elvégzett munkamennyiséget. Ha azt mondjuk, hogy egy villanymotoros szivattyú 1200 W teljesítményű, akkor ezt úgy szoktuk érteni, hogy másodpercenként el is végzi az 1200 J munkát. Fogyasztásnak pedig akkor szoktuk hívni, amikor azt figyeljük, hogy az energiából ez a munka időegységenként mennyit fogyaszt el. Ha 1200 W a villanymotor *fogyasztása*, akkor elhasznál 1200 J munkaerejű áramot másodpercenként, de talán a felvett energia egy része az alkatrészek súrlódása stb. miatt haszontalanul fogy el. Lehet, hogy a szivattyúmotor valódi *teljesítménye*, a ténylegesen elvégzett munka alapján, csak 950 W lesz, a kettő aránya a hatásfok.

Ha megkérdezik, hogy a szivattyúnak mennyi a fogyasztása, akkor nem fogja senki azt mondani, hogy 475110 joule, merthogy a szivattyú az üzembe állítása óta összesen ennyi energiát használt fel. Erre a kutya sem kíváncsi. Azt fogják mondani, hogy pl. 1200 watt, vagyis *másodpercenként* 1200 joule energiát fogyaszt. Egy dízelgenerátor fogyasztására esetleg azt mondja valaki, hogy óránként fél liter, autóra pedig hogy 100 kilométerenként 7 liter. Szóval ha nem is mindig idő szerint, de mindig valami egységre átlagolva mondjuk. Így aztán ha kerülni akarjuk a félreértést, hívjuk ezt a mennyiséget **átlag-fogyasztás**nak.

Amikor egy feladatban megadják egy villanyégő *teljesítményét*, az elég bénán néz ki, mert az égőtől végkép nem várunk *munkát*, csak hogy világítson. Igazából nem is a munka érdekel bennünket, hanem az általa fogyasztott energia. Ilyenkor igazán indokolt azt mondani, hogy az (átlag)fogyasztása pl. 60 watt. (Ami percenként 3,6 kJ felvett energiát jelent, percenként 1 Wh.)



Egy olyan műszeren, ami a munkához egyenetlenül felhasznált energiát számolja (joule), a mutatott érték mindig növekedik. A fogyasztást (watt) mérő műszeren a kijelzett érték ingadozik. Ha egy szerkezet *egyenletesen* használja fel az energiát a munka-végzéshez, akkor az első műszer egyenletesen pörög, a második pedig egy értéken áll.

Mit tehetsz azért, hogy ne értsd félre a feladatot, és ne értse félre a tanár a te megoldásodat? A probléma az, hogy fogyasztásként összes munkára vagy időszaki teljesítményre gondolnak. *Figyeld a feladat értelmét*. Ki kell derülnie belőle annak, hogy időegységenként (1 másodperc, óra, nap stb.) számítandó energiafelvételt adnak meg vagy éppen kérdeznek, vagy *összesen* felvett energiát. Figyeld gondosan, és használd helyesen a mértékegységeket is, összes energiafelvétel J, kJ, Ws, Wh, kWh, átlagfogyasztás W, kW.

Hatásfok (munka)

A mozgást akadályozó erők olyan többleterő kifejtését teszik szükségessé, ami valójában veszteség: a motorcsónak egyenletes sebességének megtartásához jókora motort kell járatnunk, a kocsink is elég hamar leáll a legsimább úton is, ha üresbe tesszük, elvéve tőle a motor erejét.

Az elvégzett munka egy része tehát ezeknek a hatásoknak az ellensúlyozására megy el, és csak a maradék munka termel valódi eredményt. Vagy másképp nézve: ha megadott mennyiségű munka elvégzését kívánjuk látni, akkor annyival többet kell belefektetnünk, hogy a veszteség után is maradjon annyi, amennyi kell.

A munka hatásfoka az az arányszám, amely azt mutatja meg, a befektetett munka mekkora része válik hasznos munkává. Zárt rendszeren belül a hatásfok legfeljebb 1.

1-nél nagyobb hatásfok azt jelentené, hogy több munkát végzünk el, mint amennyit dolgozunk, ami fizikai szempontból sajnos lehetetlen. Hacsak nem veszünk igénybe egy gépet is, viszont akkor a rendszerünk *nem zárt*, mert így egy külső tényezőt is beengedtünk a játékba.

$$\eta = \frac{W_h}{W_ö}$$

ahol η (éta) a hatásfok jele, W_h a hasznos munka, $W_ö$ pedig az összes befektetett munka. A hatásfok egy arányszám, mértékegysége nincs. Az értelmezhetőséghez a $W_ö$ értékének 0-nál nagyobbnak kell lennie.

összes munka = hasznos munka + veszteség

Egy kötelet húzva vizet emelsz ki a kútból. Az erő 240 N, az út összesen 82 m. Ezzel 292 litert húztál 6 méter mélyből. Mennyi a munkád hatásfoka? A végzett munka $W_ö$=240·82=19680 J. 292 l víz súlya 2864 N, a hasznosult munka W_h=2864·6=17181 J, a hatásfok η=0,873.

A targoncával elvégeztél 710 kJ munkát 14 perc alatt. Mennyi áramot fogyasztottál, ha a gép hatásfoka 42%? Az elfogyasztott áram végezte el az összmunkát. A hasznosult munka W_h=710 kJ. A hatásfok η=0,42. $W_ö$=W_h/η=1690 kJ. **Mennyi volt a targonca átlagfogyasztása?** Nem mennyit fogyasztott összesen, hanem a fogyasztás kell, a teljesítmény párja. P=$W_ö$/t. Az idő 14 perc, t=840 s. P=2012 W.

Emlékezhetsz, hogy a munkába csak az az erőkifejtés számít bele, amit a test elmozdítására fordítunk, a testre az elmozdulása irányában fejtünk ki. A MUNKA fejezetben sokat olvashattad, hogy ha nagy erőt fejtünk ki, akkor is lehet, hogy a végzett mechanikai munka kevés vagy akár nulla. A hatásfok nem fejezi ki az *erő és a végzett munka* viszonyát, csakis **a hasznosult munka és a valóban végzett munka arányát** jelenti. Ha a ládával a kezünkben álldogálunk, annak az erőkifejtésnek *nem a hatásfoka* nulla, hanem a végzett munka nulla, aminek nem is lehet hatásfokáról beszélni.

Ahogy a munka alapján számíthatunk hatásfokot, úgy a teljesítmény alapján is lehetséges. *Ha* a teljesítményt, mint a másodpercenként valóban elvégzett, hasznos munkát, és a fogyasztást, mint a másodpercenként a munkához felhasznált munkakapacitást (energiát) tekintjük, akkor a hatásfokra ez a meghatározás is adható:

$$\eta = \frac{\text{teljesítmény}}{\text{fogyasztás}}$$

Örökmozgó

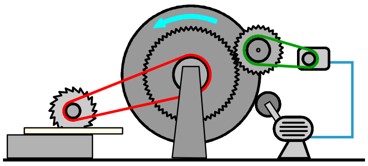
Rövidesen olvashatod, hogy ahhoz, hogy egy eszköz munkát végezzen, energiát kell adnunk neki, és ennek az energiának az előállításához valami másféle munkát kell elvégezni. Például egy kötélen felhúzunk egy hatalmas kalapácsot, aztán elengedjük, és az ráesik egy nagy fémdarabra. A kovácsok évezredek óta használnak ilyen eszközt a fémek formálásához. **A kalapács munkát végez, de magától nem emelkedik fel, ehhez kell valaki vagy valami munkája.**

Sokan ábrándoztak arról, hogy de jó lenne, ha az a kalapács valahogy mégiscsak munka nélkül emelkedne fel, így aztán kitaláltak mindenféle szerkentyűket mindenféle munkák végzésére. Ezek egy része okos találmány, kihasználja a tűz, víz, szél, nap stb. erejét, közvetlenül vagy közvetve, ezer efféle gép működik körülöttünk. Egy másik részük működik, de nem éri meg használni, olyanok is vannak, amelyek nem is működnek, mert bénaságok. És van még egy kategória: a hülyeség. Nem is gondolnád, hogy mennyi hülyeség kapott már szabadalmi védettséget a világ országaiban, mert azt nem vizsgálják, hogy használható-e, csak hogy volt-e már előtte ugyanilyen.

A hülyeség egyik klasszikus típusa az ún. elsőfajú örökmozgó, latin nevén *perpetuum mobile*. Ez nem egy bizonyos szerkezet neve, hanem inkább egy elvé, amelynek a megvalósítására már rengeteg szerkentyűt agyaltak ki. A munka hatásfokát már megbeszéltük, így aztán érted, ha azt mondom, hogy <u>az örökmozgó olyan gép, amelynek a hatásfoka 1-nél nagyobb</u>. Energianyereséges gép.

Használjuk az előbbi egyszerű példát. A kovácsműhelyben a kalapács súlya 300 N, mi egy csigán átvetett kötelet 300 N-nal húzunk a felemeléséhez. De mi a kötelet 1 méternyit húzzuk, a kalapács pedig felemelkedik másfél méternyit. Nincs csigasor, gőzgép, rakéta, hanem csak így egyszerűen. A munkánk hatásfoka 1,5. Hát ezt akarnák megcsinálni a lelkes, de persze meg nem értett zsenik. Mivel ez a dolog nyilvánvalóan lehetetlen, ezért mindenféle kerekek, súlyok, himbák, emeltyűk, rugók, motorok, mágnesek bonyolult rendszerét találják ki, kijelentve, hogy végül ez a szerkezet több munkát tud elvégezni, mint amennyi energiát mi beleteszünk. Pedig valójában csak annyira rafinált szerkezetet találtak ki, hogy már ők maguk sem értik egészen, és ezért elhiszik, hogy megtalálták a titkot.

Szögezzük le: *nagyon jó lenne*, a világtörténelem legnagyobb eseménye lenne, ha valakinek sikerülne ilyesmit feltalálnia. Az illetőt egyidejűleg császárrá, szentté és istenné avatnák, megvásárolhatná az egész Földet és valóságshow-kba hívnák meg. Csakhogy eddig még egy ilyen találmány sem működött. Voltak persze csalók is, akik úgy próbáltak jutalmat kapni, hogy a szerkezetbe titkos motort vagy más erőforrást szereltek. Sok olyan alak is volt már, aki megmutatta vagy leírta a gépet, de nem engedte megvizsgálni, és az elvet sem volt hajlandó elárulni. Biztos tudtak jobbat is, mint az isten-császárság.



Az örökmozgók legjellegzetesebb válfaja a <u>visszacsatolásos</u>, amelyik önmagát is meghajtja. Az ábrán látsz egy ilyet. A nagy lendkereket megforgatjuk. Az egy ékszíjjal (zöld) megforgat egy áramgenerátort, amely ellátja árammal azt a motort, amely megforgatja a lendkereket, amely az ékszíjjal megforgatja a generátort… És így tovább, körbe-körbe. Nekünk nem is kell a lendkereket tovább forgatnunk, mert forgatja a villanymotor. Az "örökmozgó" nevet ezért kapta az ilyen szerkezet: a beindítás után nem áll le többet.

Figyeld meg jól: a rendszerbe a beindítása után nem kerül be sem külső erő, sem munka, sem energia, a rendszer önmagát táplálja, ez az ilyen találmányok lényege. Persze be lehetne iktatni húsz különféle áttételt is, játékok és tévéműsorok témája mindenféle poénos láncolat felépítése. De egy félig üres pohár nem telik meg csak attól, ha a vizet bármilyen komplikált módszerrel az egyik pohárból a másikba öntögeted. Ez a fenti rendszerre is igaz.

Fontos: a *visszacsatolás* fogalma egyáltalán nem hülyeség, csak az, hogy itt nem kiegészíti, hanem teljes egészében helyettesíteni akarná a külső energiaforrást.

Találj ki egy meggyőzőnek tűnő örökmozgót, vagy keress leírást egy ilyenről, és bizonyítsd be, hogy miért *nem* működik örökké. Kiselőadás is kihozható belőle.

A szerkezet a terv szerint fenntartja a sajt mozgását, de ennek még nem lenne semmi haszna. A haszon az ábrán az lehetne, hogy a piros ékszíjon át megforgat egy fűrészgépet, mondjuk. Tehát a szerkezetnek mindenképpen **több munkát kellene elvégeznie**, mint amennyi munka az *eredetileg teljesen mozdulatlan* rendszerbe belekerült.

Mi a probléma ezekkel a tervekkel, gépezetekkel? A <u>*veszteség*</u>. A világ összes mérnökének eddigi egybehangzó tapasztalata szerint *nem létezik* olyan erőátviteli módszer – ez még a legszimplább kétkarú emelőre is igaz –, amelyben az erő utolsó csöppje is oda kerülne, ahová szánjuk. Még az emelő rúdja is meghajlik egy egész kicsit, még ott is eltűnik egy pici munka. Ahol mozgás van, forgás, gurulás, csúszás, ott pedig *mindig* van súrlódás, közegellenállás, ami a munka hatásfokát valamennyivel az 1,000000… alá nyomja. A vezetékben keringő áram erejét csökkenti a vezeték ellenállása, a gőzgépben a munkahenger a hő egy részét szétsugározza és így tovább. Amíg ezeket a zavaró tényezőket nem sikerül pontosan 0-ra leszorítani, addig nem lesz veszteségmentes munka. *És akkor még nem is beszéltünk a remélt nyereségről*, ugye, pedig az lenne a lényeg.

Óriási elméleti forradalom lenne, ha egy picike masinát tudna valaki csinálni, amely nyereséges lenne, bár addig nem sok gyakorlati hasznát látnánk, amíg nem lehet vele fát is hasogatni. Azok a kis kísérleti játékszerek, amelyekben pillekönnyű kerekeket látunk mozogni, látszólag minden erőbevitel nélkül, netán "pszichikai energiák" bevetésével, úgy néznek ki, mintha győznének a fizikai törvények fölött. Pedig bizony azok mozgását is okozhatja a szerkezetet tartó kéz melege, elektrosztatikus töltése, vagy például a napfény leheletfinom nyomása, és amíg ez ki nem derül, addig játékszerek is maradnak.

Energia

Az energia szót a hétköznapi életben elkoptattuk már mindenféle módon. Az energiát ne úgy képzeld el, hogy az azzal "feltöltött" dolog baljós zúgást hallat, halványan pulzál benne valami fény és apró kisülések futkosnak a felszínén. Ez csak egy filmes móka. Az energiának általában nincs látható jele.

Röviden úgy szokás mondani, hogy **az energia munkavégző képesség.** Energiája mindig egy testnek vagy rendszernek van, amely ennek eredményeként valamilyen fajtájú és mennyiségű munkát tud végezni egy másik testen vagy másik rendszeren. Sokféle munka van, és sokféle energiát különböztetünk meg. Például mechanikai, hő-, kémiai, nukleáris, elektrosztatikus, elektromos energia. Ezek rövidebb-hosszabb ideig tárolhatók is, és ez nem mindig igényel bonyolult technikát. Ha felemelünk egy nagy követ, munkát végzünk rajta, ezzel energiát tárolunk benne. Amikor a kő leesik, **a benne tárolt energiát visszaadja**, ami munkavégzésre használható, a kő meg tud mozgatni valamit.

Mi itt csak a **mechanikai** (más szóval fizikai) és a **termodinamikai** energiával foglalkozunk. (Az utóbbit *hőenergiának* is hívhatjuk, kissé nagyvonalúan.) Annak is csak azzal a részével, amely *mechanikai* munkavégzéssé alakítható, vagy abból származik.

A környezetünkben hő többféle forrásból is származhat: a nap sugárzásából, a föld belső magjából, kémiai folyamatokból (pl. égés), nukleáris folyamatokból (pl. maghasadás), elektromos áram munkájából (pl. villanyradiátor) és mechanikai munkából is. A tűzgyújtó pálca, amit forgatni kell, hogy a vége felforrósodva meggyújtsa a forgácsot, súrlódás ellen végzett mechanikai munkából termel hőt. Ha egy fémdarabot kalapálsz egy ideig, olyan forró lesz, hogy megégeted vele az ujjadat, itt a fém alakváltozásába fektetett munkánk okoz hőt, ami itt csak melléktermék. (Mi a munkát a kalapácson végezzük, a többi már annak csak az átalakulása.) A biciklipumpa is felmelegszik, ekkor az állandóan ismétlődő légnyomásnövekedés termel hőt, szintén melléktermékként.

A melléktermék azt jelenti, hogy a munka egy része olyan hőt termel, amire nincs szükségünk, felhasználni sem tudjuk. Ezt **hőveszteség**nek nevezzük. Nemcsak azt jelentheti ez a szó, hogy például egy kazán fűtésekor a létrehozott hő egy része elszáll. Hőveszteség az is, amikor mechanikai munka egy része alakul át haszontalan hővé, elvéve a munkavégzésre használt erő, energia egy részét.

Ugyanakkor van sok eset, amikor pont átalakítani szeretnénk az egyik fajta energiát a másikba, például a hőbevitellel végzett munkát mechanikai energiává. **Elméletileg az energia változatai veszteség és nyereség nélkül átalakíthatók egymásba.** Gyakorlatilag viszont még nem tudunk olyan energiaátalakítási eszközt megszerkeszteni, amely ne lenne *nagyon* veszteséges.

Mi a neve a hasznosult és a befektetett *munka* arányának?

Az energiát a rendszerbe mindig *beviszi* valami, valamikor korábban. Belepumpálja, betáplálja, mondjuk így. Az energiát úgy lehet elképzelni, mint egy rugó összenyomását: valami azt a rugót összenyomja, munkát végezve rajta. A rugó ezt az összmunkát tárolja, később vissza tudja adni általa végzett munka alakjában. Vagyis az összenyomás a rugót energiával töltötte fel. Lehet, hogy egy nappal korábban, ahogy az egy óra felhúzása esetén is történik, de lehet, hogy még régebben. A rugót *nem kell szó szerint érteni*, az is egy lehetőség, de itt valójában csak egy általános jellegű hasonlat.

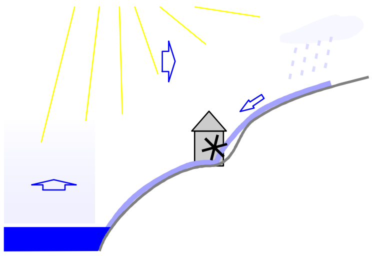
Az energianyereséges eszköz lenne az örökmozgó, ami úgy tud munkát végezni, hogy ahhoz kevesebb energia bevitele is elegendő. A benzinmotor vagy a léghajó nem energianyereséges gépek, csak mivel az energiát nem nekünk kell egy kerék tekerésével belepumpálnunk, ezért úgy tűnhet, mintha az energia a semmiből teremne. Ha valaki új *energiaforrást* fedezne fel, attól az azt használó gépek nem lennének nyereségesek, csak egy másféle energiát fogyasztanának.

Mostanában sokat emlegetett hívószó a **megújuló energiaforrás**. Ma túlnyomórészt *fosszilis* energiahordozót használunk gépi munkavégzés energiaforrásául, százmillió éve elpusztult élőlények testéből kialakult szenet, olajat, gázt. Ezeknek a kémiai energiáját változtatjuk elsőként hőenergiává víz felforralásával, gyártva a szén-dioxidot, aztán a gőz mechanikai munkát végez egy erőmű generátorának megforgatásával, veszteségesen, ami aztán **áram**ot termel, veszteségesen. Az áramot vezetékeken elszállítjuk, veszteségesen, majd az elektromos gépek felhasználják, veszteségesen. Az atomerőművek annyiban különböznek, hogy a víz felforralásához szükséges meleget maghasadásból nyerjük (hihetetlenül veszteségesen), cserébe elpusztíthatatlan radioaktív szeméttel vesszük körbe magunkat. Sajnos egyik megoldás rosszabb a másiknál, de még mindig ezek a legjobbak.

Vagy a **benzin**t közvetlenül betöltjük a tankba, majd amikor rálépünk a gázpedálra, hővé alakítjuk, veszteségesen. Az égésből származó hő egy része szétszóródik, sőt, hűtővízzel szándékosan szórjuk szét, de jelentős része mégiscsak a dugattyút mozgatja. Aztán egy része az erőátvitel mechanizmusaiban vész el, szintén felmelegítve mindenfélét, majd egy újabb jókora része a kerék gördülőellenállásának leküzdésében, amitől a gumi és a lengéscsillapító melegszik. Az üzemanyagból nyert energia zömével a kocsit felgyorsítjuk, majd a lámpánál megállítjuk, a fékpofák felmelegítésére fordítva a kocsi mozgatásába mindeddig befektetett energia maradékát. Ettől még nem járhatunk gyalog, de a dolognak mégiscsak van egy kissé fanyar mellékíze.

A fűtésre **gáz**t használunk, felmelegítve a kazánnyi vizet, veszteséggel, mellé állva az arcunkon érezzük a szétszóródó hőt. Aztán a forró víz végigmegy a csöveken, veszteséggel, a cső körüli levegőt melegítve. A csőből a radiátorba kerülő hő szétszóródása a hasznos része a dolognak, de a szoba fűtésére fordított hő végül elszivárog a falakon át, sokkal inkább az ablakokon át, veszteséget okozva, és amikor meleg van a szobában és ezért kinyitjuk az ablakot, a radiátorba folyó víz szabályozása helyett, azt már nem is kell magyarázni. Illetve kell, csak hiába.

Gyakorlatilag lapátoltjuk kifelé az ablakon a rengeteg szenet, olajat, gázt. Azért mert viszonylag olcsó. Ha megnézel egy dokumentumfilmet egy olajfúró toronyról, láthatod, hogy az az olcsó milyen döbbenetes mennyiségű munkát, eszköz- és *energia*ráfordítást jelent a valóságban. De mivel ahhoz mi mindannyian összeadjuk azt a pénzt, amennyit az ezen fáradozó összes dolgozó, vasércbányász, kohász, gépész, teherautósofőr, rakodó, mérnök, fúrómunkás, kezelőszemélyzet, egyéb melós, és persze menedzser kap, úgy érezzük, hogy az energia még elfogadható mennyiségű pénzbe kerül. Elfelejtjük azt, hogy ha ki is fizetjük, *akkor sem lesz több olaj*. Erre is vonatkozik egy indián mondás: „Ha majd a fehér ember megmérgezte az összes folyót, kivágta az összes fát, leölte az összes állatot, a fehér ember akkor majd rájön, hogy a pénz nem ehető."



Ezek az energiahordozók hatalmas ütemben fogynak, és egyre több lelemény és munka kell az utolsó cseppek kipréselésére a földből. A megújuló energiaforrás viszont olyan, ami nem fogy el, mert mindig visszapótlódik. A napfény napelemtáblákkal alakítható árammá, a nap hője felmelegítheti a vízcsöveket is; a folyó sodra, a szél ereje meghajthatja a turbinákat. Ez az energia végül is mind a Napból származik, mert a szelet is a nap melege hozza létre, a folyó vizét is a nap viszi fel a hegyre, a tengerből, folyóból felszálló vízpára és eső alakjában. Újra és újra. Az energia nem a semmiből terem, nem történik csoda, de a Nap még pár évmilliárdig sugározni fog, ha kérjük, ha nem, és rettenetes bőségű energiát zúdít ránk. Ha sikerülne annak egy aprócska töredékét felhasználni, szinte korlátlannak tűnő mennyiségű mechanikai, hő- és elektromos energiához juthatnánk. Az a baj, hogy ezek az energianyerő eszközök és a velük kapott energia még mindig drágábbak, mint a szén, az olaj és a gáz. Mert az még viszonylag olcsó. Így aztán lapátolunk tovább az ablakon kifele.

Ezen el lehet gondolkodni néha. Meg azon, hogy miért is úgy mutatják nekünk a boldog jövőt, hogy még a fogkefét is egy kis rejtett szerkezet tolja a kezünkbe, ahelyett, hogy odanyúlnánk és felemelnénk. A szerkezet nyilvánvalóan egy-két villanymotorral működik. És az a kis szerkezet is áramot eszik, amely éjjel-nappal arra a jelre vár a mobiltelefonunktól, ami arra utasítja, hogy kapcsolja fel a szobai lámpát. Lehet, hogy jópofa dolog, de kissé utánagondolva… Sok kicsi sokra megy, erről az erőművek fogyasztásmérői sokat mesélhetnek.

Vannak legendák "vákuumenergiáról", "nullponti energiáról", ezek kísérleti ellenőrzése és elméleti megalapozása egyelőre nem hozott sikert. Az antianyaggal való próbálkozások sem mutatnak eddig gyakorlatban használható új lehetőséget, noha a kutatások, részecskegyorsítós kísérletek során már sokszor sikerült melléktermékként vagy szándékosan antirészecskéket létrehozni. Vannak, akik olyan új energiaforrásról álmodoznak, ami valójában a mi három dimenziós terünkön kívüli térből lopna energiát, "a szomszéd kertjéből", de az ilyesmi puszta képzelgés, bár valamikor a rádió is képzelgés volt, ezt sem szabad teljesen elfelejtenünk.

A magfúzió viszont világos dolog, a Nap is ezzel termeli az energiát, ráadásul ez radioaktív hulladékot sem eredményezne, de sajnos még nem jutottunk el odáig, hogy úgy beindítsuk, hogy a folyamat folyamatos maradjon. A "hidegfúzió" az lenne, hogy ezt óriási nyomás és forróság költséges előállítása nélkül is megcsinálhatjuk, de az erről szóló hírek eddig mind hamisak voltak.

A vízerőmű lenne a legjobb jelenlegi lehetőség, viszont csak hegyek között van a folyónak elég esése, egyébként pedig egy duzzasztógát építése baromi sok munka, nehezíti a hajózást, a duzzasztás rontja a többi hely vízellátását és szétdúlja a folyó élővilágát. Nehéz ügy.

Az energia munkavégző képesség, ezzel kezdtük. Az energia annyit ér, amennyi munkát el tud végezni. Emiatt a mértékegysége szintén **joule**, ahogy a munkáé is.

$$[E] = J$$

Az energia mennyiségének kiszámítására szolgáló képlet pedig az energia fajtájától függ.

Energiamegmaradás

Van pár ide vonatkozó törvény, ezek a világ és a fizika leghasznosabb törvényei közé tartoznak. Az az érdekes, hogy ezek a törvények nem bizonyíthatók mással, mint hogy megfigyeltük őket. Igaz, hogy rendkívül gondos kísérletek százezreivel, de elvileg elképzelhető, hogy valahol találunk rájuk ellenpéldát. Ám mindeddig *kivétel nélkül* az a megfigyelés, hogy ezek a törvények mindenre igazak.

Az energiamegmaradás törvénye kezdetnek ennyiben összefoglalható:

Egy szigetelt rendszer energiáinak összege állandó.

Ez túlságosan általánosító, és mindenféle energiára vonatkozik. Külön problémát okoz, ha a mechanikai munkával összehasonlítani próbáljuk az anyag kémiai reakciókkal termelt vagy fogyasztott energiáját, és külön válfajt jelentenek a szubatomi szerkezet változásával vagy a kvantumfizikai jelenségekkel összefüggő energiák. Márpedig ezek egymásba alakulása során az összeg nem változhat. Hagyjuk is ezt, nekünk csak a **mechanikai és termodinamikai energia** érdekes.

Kezdjük az utóbbival. A **termodinamika I. főtétele** így szól:

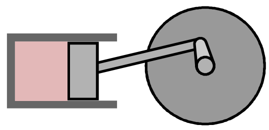
Egy rendszer belső termodinamikai energiájának változása egyenlő a rendszerrel közölt hőenergia és a rendszeren végzett mechanikai munka összegével.

Vagyis a termodinamikai energia akkor és csak akkor változik, ha kívülről hőt vagy munkát viszünk be. Vagy veszünk ki, az energia csökkenése is változás, a munka pedig ekkor a rendszerhez képest negatív. Enélkül a rendszer termodinamikai energiája nem változik, ezt jelenti a "csak akkor".

"A rendszerrel *közölt*…" Ez a közlés nem azt jelenti, hogy beszélünk hozzá, hanem hogy átadunk valamit. Hő közlése magyarul melegítést jelent. Mechanikai munka révén hőt létrehozni főleg súrlódási és alakváltoztatási erőkkel szoktunk, csiholunk vagy gyúrunk valamit. Például a gumiabroncs azért melegszik fel, mert a guruláskor minden pontján újra és újra benyomódik.

Mi az a szigetelt rendszer? **Zárt rendszer**ről már korábban is többször beszéltünk, amikor feltételeztük, hogy a rendszerben levő testekre más testek erői nem hatnak. A **szigetelt (más néven: izolált) rendszer** ennél annyival több, hogy a rendszer határait hő sem lépheti át.

Tudjuk, hogy egy csiszológép felmelegíti azt a testet, amelyen a súrlódási munkát végzi. Ha létrehozol egy szigetelt rendszert egy csiszológép körül, egyfajta "termoszt", hőszigetelt kamrát, amely nem enged se ki, se be egy pici hőt sem, akkor a csiszolástól a kamra belső hőmérséklete növekszik. Pontosan meghatározható a végzett mechanikai munka "átváltási aránya" termodinamikai energiává.



Azt várhatnánk, hogy ha olyan könnyen válik a mechanikai energia egy része hőveszteséggé, akkor gyerünk, a hő is alakuljon mechanikai energiává, főleg mechanikai munkává. Sajnos ez nem úgy megy, a termodinamikai energia hasznosítása többé-kevésbé bonyolult mechanizmusú gépeket kíván, amelyek jelentős veszteséggel dolgoznak.

A szigetelt rendszerre vonatkozó követelmény másképp is nézhető: Ha nem tudod a rendszert szigetelni, akkor ne várd, hogy a tételben foglalt energiamegmaradást megfigyelheted, mert az energia összege nem lesz változatlan. Vagy kifelé, vagy befelé hő fog áramlani, esetleg a kamrába zárt, de a melegedéstől kitáguló levegő kipréselődik a kamrából (ez mechanikai munka) stb. Az szinte biztos, hogy az energiamérleg a kamrában nem fog stimmelni, valamelyik irányba "szivárogni" fog. Ez a felismerés segíthet annyit, hogy ha meg tudjuk mérni, hogy a szivárgás mekkora, akkor azzal kiegészíthető az energiaszámításunk.

Nem mondhatjuk azt, hogy ha a rendszer nem szigetelt, akkor a tétel nem igaz. A tétel mindig igaz, csak a benne levő *állítás* nem teljesül, mert a feltétel sem teljesül. Ez lényeges elvi különbség.

Megjegyzés: Az előbbi csiszológépes példánk valójában máris rossz, mert a kamrába egy vezetéken áram megy be, ami a villanymotort megforgatja, magában a motorban is némi *hőt* termelve csak ezzel. Az elektromos áram is energiahordozó, ezzel energiát loptunk be a kamrába. Érezheted, hogy nem is olyan egyszerű dolog szigetelt, ugyanakkor hasznos rendszert létrehozni.

Ha már itt tartunk, elmondom a termodinamika II. főtételét: a hő mindig a melegebb testből megy a hidegebb testbe. Ezért sincs olyan, hogy "sugárzó hideg". Ha létezne olyan szerkezet (a Maxwell-démon), amely energiafelhasználás nélkül vissza tudná tölteni a meleget oda, ahonnan jött, akkor meg tudnánk csinálni a másodfajú örökmozgót, a nyereséges hőerőgépet.

Az egyszerűsítve "örökmozgó" néven emlegetett szerkezeteknek mi a fő sajátossága?

Húzzuk meg a határt máshol, és nézzük meg, milyen szabály érvényes a hőátadódás figyelmen kívül hagyásával. **A mechanikai energia megmaradásának törvénye**:

Zárt rendszerben a testek mechanikai energiáinak összege állandó marad. Az energia átrendeződhet, átalakulhat, de nem semmisül meg és nem keletkezik.

A mechanikai energia két fő típusáról fogunk beszélni: **kinetikus** és **potenciális** energiákról. Az első mozgásban levő testben tárolódik, a második mozdulatlan testben. Ezek egymásba átalakulhatnak.

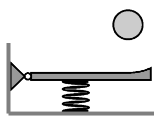
A törvény lerázza a hő, a termodinamikai energia problémáját azzal, hogy csak zárt rendszerről van szó, és csak a mechanikai energiákról tesz kijelentést. Figyelj jól, elmondom, hogy ez hogyan fér össze a termodinamika I. főtételével, amely szerint a hő is beleszámítandó a mérlegbe.

Ha megforgatsz egy nagy kereket, és nem hat rá erő, akkor lassulás nélkül forog bármeddig. Ha a tengelyben van súrlódás, akkor a kerék lassul, a tengely pedig melegedni fog, és már tudjuk, hogy az így keletkező hő és a súrlódás által végzett lassító munka energiái megegyeznek, ezt mondja a Td1 főtétel. A MEm törvénye nem törődik a hőveszteséggel, csak annyit mond, hogy ha a forgás átalakul valami másféle mechanikai munkává vagy energiává, például egyenes vonalú mozgássá vagy egy rugó összenyomásává, akkor ezek összege állandó marad.

A hőveszteséggel elszállt energia azért nem hiányzik, mert **a zárt rendszerben kizártuk a nem odaillő *erőket***. A tengely súrlódási ereje ilyen külső erő lenne, és mi feltételeztük, hogy a rendszert külső erő nem bolygatja. Ha nincs súrlódási erő, mert a zárt rendszerrel ebből indulunk ki, akkor *nem lehet abból származó hőveszteség sem*. Ha pedig kívülről közvetlenül hőenergiát vinnénk be (például egy zárt edényt melegítve légáramlást hozunk benne létre, amely hajtja a lapátkereket), azzal is erőt hoznánk létre, tehát ez is tilos. Ha a mechanikai rendszerbe bevitt hő nem végez mechanikai munkát (nincs jelentősége, hogy a malomkereket felmelegíti-e a napsütés), akkor azzal egyszerűen nem törődünk és kész.

A termodinamika első főtétele megmagyarázza azt, amikor a lejtőn lecsúszó test sebessége és energiája a súrlódás miatt csökken. Magyarázattal tartoztunk magunknak arról, hogy miért lassulhat le a test a törvény megsértése nélkül. Ekkor ugyanis a hiányzó energia súrlódási hővé alakult. Lehet, hogy nem mérhető nagyságú hővé, de ha erősebb a súrlódás és hosszabb a mozgás, már mérhetővé válik. Ha a lecsúszó test *mechanikai* energiáját nézzük, akkor a súrlódás kívülről érkező erő, ami miatt az összenergia egy része hőveszteségként elhagyja a rendszert. Ha zárt mechanikai rendszert akarunk, akkor *súrlódásmentessé* kell tennünk, de a valóságban semmi sem súrlódásmentes, ezért az ilyen példák nagyon idealizáltak, leegyszerűsítettek.

A mechanikai energia megmaradási törvénye csak rugók, súlyok, lendkerekek, ágyúgolyók stb. mechanikai munkát létrehozó vagy abból származó energiáival foglalkozik. Kinetikus energiákkal és mechanikai potenciális energiákkal. Ez a kettő egymásba átalakulhat, és egyszerre mindkettőből lehet ugyanabban testben.



Amikor ti a mechanika témakörét tanuljátok, nem kell a hőveszteség mennyiségével törődnötök, ezért **a mechanikai energia megmaradási törvényére támaszkodj**, a termodinamikai törvényeket elhagyva.

Mi a zárt és szigetelt rendszer különbsége?

Az energia a jövőbeli munka előre tárolt formája. "Munkakonzerv", mondjuk. Egy zárt rendszerből kivett energia mechanikai munkává alakulhat úgy, hogy a rendszer megmozgat valami azon kívül levő testet. Munka végzésére energiát kell felhasználni, valamilyen belső vagy külső forrásból.

Egy rendszer energiája az általa végzett külső munka során csökken.
Egy rendszer energiája külső mechanikai munka bevitelével növelhető.
Zárt rendszerben a testek a mechanikai energiát egymáson végzett munkával adják át.

Gondold át figyelmesen a fenti alapszabályokat. A munka bevitele azt jelenti, hogy kimondottan az energiatartalom növelése érdekében munkát végzünk. Felhúzzuk a rugót, megforgatjuk a kereket, meglendítjük a falbontó vasgolyót. A természeti energiákról szólva kiderült, hogy egy rendszer a mechanikai energiát megkaphatja általunk nem megfigyelt módon is, de a munkavégzés ott sem maradt el.

Ha a kisautót a felpörgetett lendkerék elgurítja valameddig, akkor a lendkerék forgási energiája *legalább* ennyivel csökken. Azért legalább, mert az energia egy része veszteségként folyik el, súrlódásra stb. Ha a lendkerék forgási energiáját növelni akarjuk, akkor munkát végezve kell a pörgését gyorsítanunk.

Energiatároló

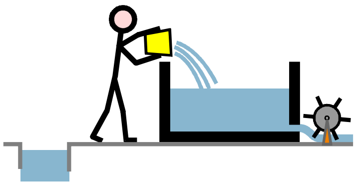
A fenti megállapításokat szabályszerűbben összegzi a **munkatétel**:

Egy rendszer energiájának változása egyenlő a <u>rendszeren végzett</u> munkák előjeles összegével.

$$\Delta E = \sum_i W_i$$

Már megfigyelhetted, hogy ha változásról van szó, akkor az történhet *bármelyik irányba*. Most is ez a helyzet. Amikor az energia növekedik, akkor azt pozitív összegű munkák hozták létre. Amikor az energia csökken, akkor az energia végzett munkát.

A "*pozitív összegű* munkák" nem azonos azzal, hogy "pozitív munkák". Lehet, hogy három munkavégzés figyelhető meg egyidejűleg, ebből kettő negatív, és csak a harmadik pozitív, viszont az nagyobb, mint a két negatív munka együttvéve. Az *összeg* ekkor pozitív.



Talán már neked is eszedbe jutott: a "rendszeren végzett munkák" megfogalmazás nem köti ki azt, hogy ezek a munkák *mikor* történjenek. Egyszerre vagy egymás után, vagy is-is, ez mind belefér a tétel kijelentésébe. Például: van egy víztartályunk, amelyből kifolyó víz meghajt egy kis lapátkereket, ami aztán áramot termel, mondjuk, ez már nem érdekes. A víztartály szolgáltatja a kerék mozgatásához az energiát, nekünk a víztartályban kell felhalmoznunk az energiát.

Ehhez munkát kell végezni: hordani a vizet. Megtehetjük ezt már akkor, amikor még nem indítjuk be a vízkereket – üres tartállyal úgysem indul be –, és akkor is, amikor már forog, menet közben. Ha közben tartunk egy kis szünetet, de már van elég víz, akkor a vízkerék foroghat tovább, az összegyűjtött energia hasznosítása, fogyasztása nem áll meg. Megállhat, ha egy időre elzárjuk a vizet, és ez független attól, hogy közben hordunk-e még a tartályba. Hordhatjuk a vizet egyedül, mással felváltva és mással egyszerre is. A munkatétel erre az összes lehetőségre egyben összefoglalja a szabályt: **az energia mindig annyival nő, amennyit az energiatárolóba betöltünk, és annyival fogy, amennyit a fogyasztó** (a vízkerék) **felhasznál**.

A test energiáját megváltoztató munkák száma, ideje és időtartama tetszőleges.

Ez a víztartály csak egy példa, bár valószerű. A víz töltögetését az energia betöltéséről szóló univerzális hasonlatnak szántam. Ám a betöltött víznek <u>ténylegesen van is energiája</u>. (A mechanikai potenciális energiák magassági energia nevű típusa, fogunk beszélni róla.) És mi nem azzal végezzük a munkát, hogy a vödörből a tartályba töltjük a vizet, hanem azzal, hogy a vödör vizet <u>felemeljük</u>, egy úton egy erőt kifejtve a súlya ellen. Ezt a munkát energiaként vissza tudjuk kapni azzal, amikor a víz "visszaesik" a földig, és alul valamilyen sebességgel kifolyik, hajtva a kereket. Ha még más munkát is végzünk, például kocsival hordjuk oda a vizet, azt nem a tartályon végezzük, nem a víz felemelése a célja, ezért nem fogja a mérleget növelni, nem változik tőle a tartály energiája.

A kifolyó víz felhasználásának is van egy hatásfoka, mindjárt lesz róla szó.

A víztartály, ha szorgosak vagyunk, megtelik, tovább nem tölthető. Az energiatárolóknak van egy **tárolókapacitása**, ami nem végtelen, ez korlátozni szokta a gyakorlatban a felhasználás lehetőségeit. Egy akkumulátorban sem tudunk egy határnál több energiát elraktározni, ezért ha az elektromos autónkkal hosszabb utat is meg akarunk tenni, akkor újabb akkumulátor(ok)ra van szükség, aminek hely kell, és persze szállítani is kell a felhasználásig. A kiürült akkumulátort sem dobhatjuk ki, mert szükségünk lesz még rá a következő úton. Szóval a véges kapacitás okoz némi problémát.

Energiából nincs hitel.

Ha az akkumulátor kifogy, a kocsi megáll. Ha a víztartály **kiürül**, akkor a vízkerék megáll. De ha a tartály kiürült, akkor **újra megtölthető** vízzel, ahogy az akkumulátor is feltölthető, a rugó is felhúzható, a lendkerék is felpörgethető.

Miért nem hajtjuk *közvetlenül* a vízkereket? Tény, hogy annak a hatásfoka a legnagyobb, de lehet kényelmetlen, akár megoldhatatlan is. Lehet, hogy a vízkerék olyan helyen van, ahová mi nem férünk be, de egy vízvezeték elvezethető odáig. A vizet tudjuk <u>szakaszosan</u> is hordani, miközben a felhasználása folyamatos. (A számítógépes technikában a feldolgozandó, átmásolandó, kinyomtatandó adatok ilyen előre felhalmozását végzik a puffertárak.) A feltöltés megtörténhet jóval korábban is. És egy fontos dolog: a feltöltés történhet máshol is, a felhasználás helyétől távol. A megtöltött víztartály (akkumulátor, rugó) elszállítható oda, ahol az energiára szükség van. A szállítás munkája nem térül meg, de ettől még lehet az eljárás elég gazdaságos.

És mi van, ha esik az eső? Potyaenergiát kapunk az égből, vízhordás nélkül. Nos, ilyenkor a rendszerünk nem zárt, nincs korlátozva a vízhordó emberek és a víztartály kapcsolatára, viszont a munkatétel nem is követelte meg a rendszer zártságát. Ami azért nem baj, mert az eső "felhőbe töltéséhez" is munka kellett, amit ki is lehet számítani, csak azt a Nap végezte el valamikor korábban, vagyis a munkatétel igaz marad.

A tételre a MOZGÁSI ENERGIA fejezetben még visszatérünk, mivel elsősorban azzal kapcsolatban szokták értelmezni és használni.

Mondj három olyan dolgot, ami miatt érdemesebb a tartályt tölteni, mint a kereket forgatni!

Ha a rendszer zárt, akkor elméletileg **az energia akármeddig tárolódik**, nem "romlik meg". Látni fogod, hogy energiabevitel az is, ha egy dobozt felteszünk a szekrény tetejére, aztán ötven évig ott hagyjuk. Amikor az a doboz végül valamiért leesik, át fogja adni az energiáját annak, amire ráesik.

Az energia munkavégzési képesség, ezért jó esetben a munkával befektetett energiát egyszer visszakaphatjuk. Ha egy gumirudat vagy lemezrugót hajlítunk meg, az a munka, a veszteséget levonva, célzottan visszakapható, továbbítható másba. De **nem minden befektetett munka nyerhető vissza** a másik testből, az energia tárolásához megfelelő eszköz is kell. Ha meghajlítunk egy vasrudat, a rúd úgy marad, az az energia már nem lesz használható, az a munka mechanikai szempontból elhasználódott, felemésztette valami. De ha energia nem vész el, akkor hová lett? A vasrúd a hajlítás helyén kicsit felmelegedett. Ha többször meghajlítgatjuk, fel is forrósodik. Az energiának legalább egy része erre ment el. De a mindenféle húzott-nyomott test belső szerkezete, esetleg a molekularácsának alakja is változást szenved, anyagfáradás, kopás, ezek is lehetőségek a bevitt energia apránkénti elszivárgására.

A rakéta álló helyzetből felgyorsul, mechanikai energiát szerzett. Honnan?

Az izomerő kémiai folyamat, égés eredménye, ezért a mi szempontunkból kívülről bevitt energiának tekintendő, tehát bonyolítja* a megmaradási törvényre alapozó számításokat. Ez a robbanómotorok és villanymotorok munkájára is érvényes. A feladatban szerepelhet az izomerő vagy egy gép, mint az energia *kezdeti* forrása, de utána a rendszer "bezárul", és az lesz az érdekes, hogy azon belül mi lesz a befektetett energiával.

A rakéta hajtóművében égés zajlik, kémiai reakció, ez adja meg a kiáramló gáznak az energiát, amit aztán a reaktív hajtáshoz felhasználnál. Ezért tűnhet úgy, mintha a mechanikai energia a semmiből születne.

Hatásfok (energia)

A hatásfokról már volt egy fejezet a MUNKA után, ott a hatásfokot a hasznosult munka és az összes befektetett munka hányadosaként határoztuk meg. Az energia kapcsán is lehet róla beszélni.

A hatásfok mindig egy olyan arányszám, amely valami befektetés, ráfordítás mennyiségét hasonlítja össze a visszakapott mennyiséggel. Hatásfok lehet az, ha a kinőtt tulipánok számát elosztjuk az előtte elültetett hagymák számával. Ha a hatásfok 0,95 (95%), akkor átlagosan minden 20 hagymából 19 virág nőtt ki. Hogy miért nem mindegyik, az már a kertész gondja. Hatásfok lehet az, ha nevetések számát elosztjuk az elmondott viccek számával. Hatásfok lehet az is, ha barátainknak sütött szalonnás rántották számával elosztjuk azt, hogy hányan ismerték fel, hogy mit esznek.

A hatásfok, bármire is számítjuk ki, a legtöbbször 1-nél kisebb szám, mert van valami veszteség. Üzleti befektetéstől elvárás, hogy a hatásfok 1-nél nagyobb legyen, és az így kapott különbözet a haszon.

A fizikában, **a munka és energia befektetésében soha nincs haszon**. A legjobb, ami elérhető, a 100%-os hatásfok, de az eddigiekben már láthattad, hogy a súrlódás, alakváltozás, közegellenállás és más tényezők mindig, minden folyamatban okoznak valamennyi veszteséget.

Ilyen folyamat lehet egy energiaátvitel vagy energiaátalakítás, amikor például hőenergiát elektromos energiává alakítunk. A hatásfoka

* A bonyolításkor a dolgok bonyolultabbá válnak. Amikor valaki valamit végrehajt, elrendez, akkor ő lebonyolít.

$$\eta = \frac{E_{ki}}{E_{be}}$$

ahol az átalakító rendszerből **ki**jövő, felhasználható elektromos energia és a **be**fektetett hőenergia arányát számítjuk ki. Egy átlagos gőzturbinás hőerőmű esetében ez 0,4 körüli érték, 40%. A hiányzó 60% valahol elszáll, többnyire hőveszteség alakjában, az erőmű környezetét fűtve. A kombinált ciklusúnak nevezett hőerőmű hatásfoka feltornászható 0,6-ra is.

Vízerőműnél (mechanikai->elektromos) 0,9 körüli hatásfok is gyakori, napelemektől (fény->elektromos) viszont 0,15 a szokásos, és 0,40 már kitűnőnek mondható. A robbanómotor (kémiai->mechanikai) kb. 0,5 hatásfokot tud, persze ez nem egy asztmásan hörgő, kivénhedt Ladára értendő csúcsforgalomban, hanem egy szuperül kihegyezett, modern autóra optimális körülmények között.

A munkával energiát halmozhatunk fel. Ha E_{ki} a munkából kapott energia mennyisége és $W_ö$ az összes végzett munka, akkor ennek a hatásfoka:

$$\eta = \frac{E_{ki}}{W_ö}$$

Tegyük fel, hogy van egy energiát tároló rendszerünk, ez lehet elektromos akkumulátor, összenyomott rugó, forgó lendkerék, mindegy. A benne tárolt energiát felhasználhatjuk munkavégzésre.

Az energiafelhasználás hatásfoka az az arányszám, amely azt mutatja meg, hogy a munkavégzésre felvett energia mekkora része válik hasznos munkává. Zárt rendszeren belül a hatásfok legfeljebb 1.

Ha megnézed alaposabban, akkor láthatod, hogy az energia és a munka hatásfokai igazából csak abban különböznek, hogy máshonnan nézzük ugyanazt a dolgot.

A villanyégők (elektromos->fény) sajnos az energiájuk legalább 95%-át hőveszteség formájában szórják szét, de még a LED-es fénytesteknek is van 75-80% vesztesége. Az elektromos hősugárzó a nyerő, mert az majdnem 100%-os hatásfokú, mivel ebben az esetben a hőveszteség is hasznos.

A 100%-nál nagyobb hatásfok azt jelentené, hogy a gépünket az energiaforrásból táplálva több munkát tudunk elvégeztetni, mint amennyi munkával a felhasznált energia előállítható. (Lásd: ÖRÖKMOZGÓ.)

$$\eta = \frac{W_h}{\Delta E}$$

ahol $\boldsymbol{\eta}$ (éta) a hatásfok jele, $\mathbf{W}_h$ a végzett hasznos munka, $\mathbf{\Delta E}$ az energiaforrásban tárolt energia mennyiségének csökkenése, vagyis a felhasznált energia.

A hatásfokok összegződhetnek is, ami ez esetben az össze*szorzásukat* jelenti. Tehát ha az erőmű az eltüzelt gázt 40%-os hatásfokkal alakítja árammá, amit aztán 90%-os hatásfokkal juttatnak el hozzánk, ahol egy 65%-os hatásfokú elektromos szivattyúval locsoljuk a füvet, akkor a földgáz energiájának 0,4×0,9×0,65 részével, 23%-ával locsoljuk a füvet, ami még egy elég hatékony energiafelhasználásnak tekinthető.

Kinetikus energiák

Egy test mozgásállapota megváltozhat, amikor a test erőt gyakorol egy másik testre, ellenerőt kiváltva. **A test tehetetlenségéből származó erő** munkavégzésre alkalmas, csak az elmozdulást kell a megfelelő irányban tartani. Ha a test mozgása **munkavégzésre alkalmas**, akkor a test mozgása kinetikus energiát tárol. (A görög kinészisz mozgást jelent.) Ennek a **mechanikai energia**fajtának két jellegzetes típusát fogom bemutatni: a **mozgási** (haladási) és a **forgási** energiát. Egy testben, egy rendszerben mindkettő jelen lehet egyidejűleg, és egymásba átalakulhatnak.

Zárt rendszerben a merev testek kinetikus energiáinak összege állandó.

Mozgási energia

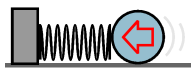
A név kicsit félrevezető, mert ez az energiafajta kimondottan a haladó mozgásban van jelen, abban tárolódik. A mozgás pályája lehet egyenes vonal, parabola, kör, hullámvonal, bármi. Az energia akkor válik érdekessé, amikor megcsapoljuk, amikor alkalmat adunk neki arra, hogy munkát végezzen, és hogy a test addig hogyan mozgott, teljesen mindegy. A tekegolyó munkát végez, amikor feldönti a bábukat, a lezuhanó súly munkát végez, amikor a ráüt a földbe verendő cölöp végére. Nyilván érted, hogy ha valamilyen test mozog, és nekimegy valami másnak, akkor *ha az ereje elmozdulást okoz*, az munkavégzés, eszerint a mozgásban munkavégzés lehetősége rejlik, azaz energia.

A **mozgási energia** (E_m) összesen két tényezőtől függ:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

ahol **m** a mozgó test tömege, **v** a test haladási sebessége. A mértékegysége **joule**.

Egy ehhez hasonló képletet már láttál az IMPULZUS fejezetben: $I=m \cdot v$. Eszerint az impulzusra és a mozgási energiára is igaz, hogy csak a test tömegétől és sebességétől függ. Az impulzus számításának a célja mindig az, hogy ha egy része átadódik más testbe, akkor annak a *sebességét* megismerjük. Az impulzus nem alakul át mássá. Ellenben **az energia átalakulhat** más formába, például egy összenyomott rugó energiájába is. Ha tehát egy súlyos golyót nekigurítunk egy rugónak, ott az impulzus nem mondja meg, hogy a rugó mennyire nyomódik össze, mert az impulzus a rugót, vagy aminek az támaszkodik, *eltolni* próbálja. A mozgási energiáról viszont megmondható, hogy a rugó mekkora összenyomódásává fog átalakulni.



A mozgó test impulzusa és mozgási energiája együtt nő vagy csökken. Nem egyenlők, de a változás *iránya* mindig megegyezik. **Amikor az impulzus 0, akkor a mozgási energia is 0. Eközben a testben lehet másféle mechanikus energia is.**

Azt, hogy egy mozgó testnek van impulzusa és mozgási energiája is, félre lehet érteni úgy, mintha ez a két dolog egymástól függetlenül ott lenne a testben. És ha akarunk, akkor fogyasztunk valamennyit az impulzusából, máskor az energiájából, esetleg csökkentjük az egyiket és növeljük a másikat. Ez nem így van. A testnek csak **tehetetlen tömege** és **sebessége** van. Az impulzus és a mozgási energia is csak ezekből származó képesség. Az, hogy melyik van számunkra jelen, az csakis attól függ, hogy melyikkel akarunk törődni, melyiket akarjuk kiszámítani, melyik jellegű hatást akarjuk érvényesíteni. Az impulzust ütközéskor, sebességátadáskor nézzük, az energiát munkavégzéskor. Nincs ott mindkettő a testben, hanem tulajdonképpen egyik sem, csak a sebesség és a tömeg mindig akként jelenik meg egy akcióban, ahogy azt látni akarjuk.

Az impulzus és a mozgási energia képleteinek összevetéséből levezethető az átszámítás:

$$E_m = \frac{I^2}{2m} \quad \leftrightarrow \quad I = \sqrt{2m \cdot E_m}$$

ahol **m** a mozgó test tömege, $\mathbf{E_m}$ a mozgási energiája, **I** az impulzusa.

> Adott egy test, amelynek a tömege m=2 kg, a sebessége 6 m/s. Mennyi az impulzusa és a mozgási energiája? I=12 kgm/s, E_m=36 J. Egyeztesd a képlettel: $I^2/2m$ =144/4 =36=E_m.

Valamilyen okból a test sebessége 4 m/s-ra csökken, mondjuk. Onnantól I=8 kgm/s, E_m=16 J. Az átváltási képletből: $I^2/2m$ =64/4=16=E_m. Stimmel.

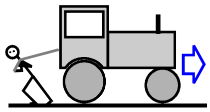
Mi annak a neve, ami során egy testre egy ideig egy erő hat, változtatva a sebességen?

Lehetséges, hogy te az ENERGIATÁROLÓ fejezetben bemutatott **munkatételt** itt, a mozgási energia témája kapcsán tanulod. Ebben az esetben a szöveg ehhez illően módosul:

Egy test mozgási energiájának változása egyenlő a testre ható erők munkáinak előjeles összegével.

$$\Delta E_m = \sum_i W_i \quad \text{vagy egy másik alakban:} \quad \Delta E_m = W_ö$$

Megjegyzés: Ez a megfogalmazás azért nem lesz ellentmondásban az általában a mechanikai energiáról szóló munkatétellel, mert a forgási energia és a mechanikai potenciális energiák mind átalakulhatnak mozgási energiává. Ennek ellenére szerintem úgy helyes, ha a munkatételt kiterjesztjük minden mechanikai energia és mechanikai munka egyenértékűségévé, mert jól látható lesz az érvényessége a potenciális energiák terén is.



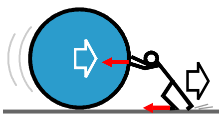
Ha az energia változása pozitív, akkor a munkák összegének is pozitívnak kell lennie. **Az energia csökkenhet is**, akkor a változás, a ΔE_m értéke negatív. A tétel egyenlete azt követeli, hogy ezért a munkák összege is negatív legyen. Emlékszel a negatív munkára? Annak idején az egyik példa rá az volt, amikor az előre haladó úthengert húztuk visszafelé. A munkánk attól volt negatív, hogy mi a haladással ellentétes irányban erőlködtünk. Akkor most képzeld el, hogy egy nagy, nehéz, guruló hordó mozgása ellen vetjük be az erőnket. A mozgást nem fékezzük meg egykönnyen, de *fékezzük*. Az erőkifejtés iránya a mozgással ellentétes, és nem is eredménytelen, a mozgás lassul. Akkor viszont csökken a mozgásban rejtőző energia is. Most jön kapóra az, hogy a negatív munka fogalmát bevezettük, mert most összeadhatjuk a hordó mozgási energiáját a rajta végzett munkával, és az eredmény kisebb lesz, mint amennyi előtte volt. Tehát az energia negatív változása és negatív munka kapcsolatára is találtunk értelmes példát, a munkatétel egyenlete érvényes maradt ilyen esetben is.

Váratlan kérdés: miért dőlünk előre, ha nagy erővel akarunk húzni valamit? Már tanultad.

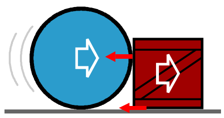
Amikor egy test mozgási energiája csökken, akkor az energia képlete szerint vagy a test tömegéből tűnt el valamennyi (elpárolog, elég, letörik stb.), vagy a sebessége lett kisebb. Az utóbbi a szokásos. A hordó mozgási energiája a példánkban végül nullára csökken.

Mi történik az energia szempontjából, **ha egy testen *pozitív* (össz)munkát végzünk**, tehát abba az irányba mozog, amerre nyomjuk? F=m·a, gyorsulnia kell, ez alaptörvény. Lássuk: a pozitív $W_ö$ munka csak pozitív ΔE_m-mel lehet egyenlő, a változás pozitív, **a mozgási energia nő**. A képlet szerint ekkor (változatlan tömegnél) a v^2 lesz nagyobb, azaz a v sebesség nagyobb, eszerint a test *tényleg* **gyorsul**. Minden egybevág, ez a szép a fizikában. És az is, hogy ha nem vág egybe, az figyelmeztetés arra, hogy valamit benéztünk.

Lehet-e az m vagy a v^2 értéke negatív?



Ha gurul felénk egy hatalmas hordó, és mi megpróbáljuk megállítani, akkor a hordó hátrafelé tol bennünket. Nem akadálytalanul, mert a talaj csúszási súrlódási erőt fejt ki ránk, amit mi továbbadunk. Mi erőt fejtünk ki rá, de a hordó mozgása az erőnkkel ellentétes, $W=F_d \cdot d$, az elmozdulás negatív, a munkánk negatív, a **munkatétel** szerint ez csökkenti a hordó mozgási energiáját és a sebességét.



Most álljon a helyünkön egy nagy láda. A talaj és a láda között csúszási súrlódási erő van, a hordó erőt fejt ki a ládára, a láda hátrafelé csúszik, a hordó lassul. A láda arra mozdul, amerre a hordó nyomja, eszerint a hordó *pozitív* munkát végez a ládán.

Az előbbi változatban azt hangsúlyoztam, hogy mi végzünk negatív munkát a hordón, a ládás változatban pedig látszik, hogy a hordó végez pozitív munkát a ládán. A két változat között *semmilyen* lényegi különbség sincs. A hordó az akadály tolása közben energiát veszít, vagy úgy is mondhatjuk, hogy a hordó **a saját mozgási energiáját az akadály tolására fordítja**. Így lesz az energiából munka. Végül az energiája nullára csökken.

A hordó fékezésekor a munkánk negatív, a hordó mozgási energiája csökken, a változás negatív. Amikor a hordó megáll, akkor az energiája nulla lett. Ha továbbra is nyomjuk, akkor megindul visszafelé, a munkánk pozitív lesz, ezzel a hordó energiája *újra nőni kezd*, függetlenül a mozgás irányától.

A mozgási energiának nincs iránya, az értéke mindig pozitív.

A csúszási súrlódási erő mennyire függ a sebességtől? Már tanultad.

Miért áll meg a hordó? Azért, mert a láda egy erőlökéssel lefékezi. De van másik válasz is: azért, mert a mozgási energiája nulla lett. Hová tűnt az energiája? Átadta a ládának, azt mozgatta meg. De végül a láda is áll, hová lett az általa kapott mozgási energia? Elveszett a súrlódás miatt. Energia nem "vész el", hová lett akkor? Talajrészecskéket morzsolt szét, a láda alsó deszkáinak rostjait szakította el, nagy része pedig felmelegítette a talajt és a láda alját.

A mozgási energia és a munkatétel összekapcsolásával nagyon fontos kijelentést tehetünk a mozgási energia változásáról:

Egy test lassuláskor energiát ad le, gyorsuláskor energiát vesz fel.

Energia felvétele azt jelenti, hogy energiát kell vele közölni, pozitív munkát kell rajta végezni. Ha azt tapasztaljuk, hogy egy test gyorsul (nő a sebessége), akkor tudhatjuk, hogy valamilyen forrásból energiát vesz fel, azaz a forrás energiájából fogyaszt, a saját mozgási energiáját pedig növeli.

A testet lelassítani csak úgy lehet, ha a mozgási energia különbözetét átvesszük tőle. Ha ezt nem tesszük meg mi, akkor megteszi az a test, amely alakváltozást szenved (összetörik) vagy felhevül a kapott energiától. Ez történik egy autó ütközésekor vagy egy meteor becsapódásakor. A fékeződés, megállás felszabadítja a haladó test mozgási energiáját, valahová áthelyezi, mert a testben nem maradhat, annak a sebessége kisebb lett, esetleg nulla. A máshová átkerülő energia munkavégzésként csinál valamit. Lehet, hogy tárolódik egy arra alkalmas eszközben – például összenyom egy rugót –, az is lehet, hogy meghajt egy turbinát, de lehet, hogy csak rombol.

Amikor a kovács a kalapáccsal a vasat üti, akkor az ütközéskor megálló kalapács mozgási energiája részben alakváltozást okoz a vasban, részben hőenergia alakjában adódik át, azaz melegíti a vasat.

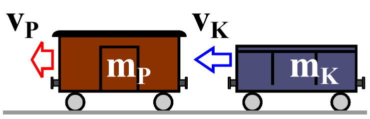
Amikor a hordó nekimegy a ládának, akkor a hordó lassul, a láda sebessége viszont nő, a hordó által leadott mozgási energia a ládába kerül át. Ez a jelenet már ismerős, ütközésként már tárgyaltuk. Most nézzük meg újra, a mozgási energiát is megfigyelve.

Mozgási energia és impulzus

Az ebben a fejezetben leírtak már nincsenek ott a tankönyvedben, bár ez az egyik olyan pont, ahol a mozgási energia számítgatása értelmet kap. Ha ötösre hajtasz, vagy felcsigáztam a kíváncsiságodat, akkor ne hagyd ki. Ha pedig egyik sem, talán akkor is érdemes legalább beleolvasnod, hogy mi ez.

A testek mozgására egyszerre érvényes az impulzusmegmaradás és az energiamegmaradás törvénye, ezért a számításainknak mindkettőt ki kell elégítenünk. Ha ez furcsa eredményeket ad, akkor az eredményekre kell magyarázatot találnunk, és nem a törvényt elhanyagolnunk.

Egy tehervagon gurul a sínen v_P=3 m/s sebességgel, a tömege m_P=1 t. Utoléri egy másik vagon, a sebessége v_K=4 m/s, a tömege m_K=0,7 t. A találkozás után mekkora sebességgel gurulnak tovább?



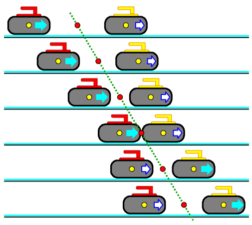
A jó öreg impulzussal gyorsan elintézhetjük a kérdést. $I=m\cdot v$. Az első kocsi impulzusa m·v=3000 kgm/s, a másodiké 2800 kgm/s. Az együttes tömegük 1,7 t, a közös impulzusuk 5800 kgm/s, tehát az új **közös** sebességük 5800/1700=3,412 m/s.

Most már tudjuk azt is, hogy a két kocsi mozgási energiájának összege is állandó marad, nézzük meg ezt is. $E_m=1/2\cdot m\cdot v^2$. Az első kocsi energiája 4500 J, a másodiké 5600 J, a kettő összege, tehát a rendszer közös mozgási energiája 10100 J. A kocsik együttes tömege 1,7 t, ebből a képlet szerint kiszámítható, hogy a közös sebességük 3,447 m/s…

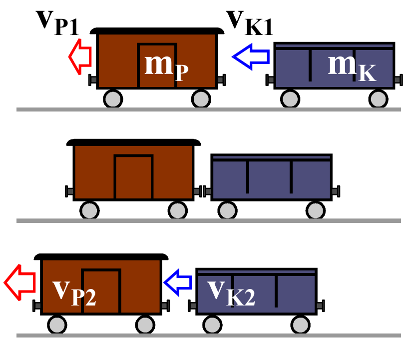
Valami nincs rendben, *a kettőnek egyeznie kellene*. Mert a sebesség nem lehet egyszerre kétféle. Az eltérés kicsi, hunyjunk szemet fölötte? A fizika tudorai nem hagyhatnak figyelmen kívül több mint 1%-os eltérést. Annyiból már csinálhatnánk egy kis teljesítményű örökmozgót is. Hol van itt a hiba?

A hiba az, és erre figyelmeztetlek ismét, hogy feltételeztünk valamit, amit a feladat szövegében szándékosan elkentem, és a valóságban nem úgy működik, ahogy itt gondoltuk. Ez egy nagyon érdekes és alapvető fontosságú probléma, megér annyit, hogy *alaposan eltöprengj rajta*. Utána folytatjuk, jó?

…



Nézzük meg még egyszer: gurul a kocsi, hátulról érkezik a másik, találkoznak... És miért is maradnak együtt utána? Én a közös sebességüket számoltam ki, indokolatlanul. A CENTRUM IMPULZUSMEGMARADÁSÁNAK ALKALMAZÁSAI fejezetben láttunk már ilyet. Találkoznak, összekoccannak, ahogy a curling-köveken is látod, és távolodni kezdenek. Ez egy *ütközés*. A hátsó test lelassul, az első test felgyorsul kicsit. *Nem ragadnak össze*. Azzal, hogy mi feltételeztük azt, hogy a két kocsi a találkozás után együtt halad, olyan információra alapoztuk a megoldásunkat, amit senki nem állított, és nem is következik a tényekből. Gyakorlatilag úgy bántunk a feladattal, hogy a két kocsi ütközése **tökéletesen rugalmatlan**, pedig ez nem igaz.



Nézzük meg még egyszer a jelenetet, előfeltételezések nélkül, teljesen általános adatokkal! A piros vagon kezdeti sebessége v_{P1}, tömege m_P, a kék vagon kezdeti sebessége v_{K1}, tömege m_K. Találkoznak, majd v_{P2} és v_{K2} sebességgel haladnak tovább. Összesen abban lehetünk biztosak, hogy $v_{P2} \geq v_{K2}$, hiszen a kék kocsi nem fog átmenni a piroson. **A kérdés továbbra is a v_{P2} és v_{K2} értéke.**

Ha az ilyen esetekre kitalált impulzus számításával fogunk hozzá, akkor azt látjuk, hogy az *nem elég* a megoldáshoz. Jó, de nem elég. A két kocsi centrumának egyenletes mozgását nyomon tudjuk követni, de az, hogy távolodáskor a két kocsinak mi a sebessége a centrumhoz és egymáshoz képest, azt az impulzus-egyenletek nem határozzák meg. Az arányukat igen, de az értéküket nem. A mozgási energiák kiszámítása hasonlóan kevés az egyértelmű megoldáshoz.

Használjuk egyszerre mindkettőt. A két megmaradási törvény alapján leírhatjuk ezt:

$$\mathbf{I_{P1}+I_{K1}=I_{P2}+I_{K2}} \quad \text{és} \quad \mathbf{E_{P1}+E_{K1}=E_{P2}+E_{K2}}$$

vagyis a két kocsi zárt rendszerében az impulzusok összege és a mozgási energiák összege is állandó marad. $\mathbf{I}$ mindig a megfelelő kocsi impulzusa, $\mathbf{E}$ a mozgási energiája. Lássuk ugyanezt kibontva:

$$m_P \cdot v_{P1} + m_K \cdot v_{K1} = m_P \cdot \mathbf{v_{P2}} + m_K \cdot \mathbf{v_{K2}} \quad \text{és} \quad (m_P \cdot v_{P1}^2)/2 + (m_K \cdot v_{K1}^2)/2 = (m_P \cdot \mathbf{v_{P2}}^2)/2 + (m_K \cdot \mathbf{v_{K2}}^2)/2$$

Szépen, aprólékosan nézd végig, *ne csak átfusson rajta a szemed*, ellenőrizd. Csak két képletet kellett tudnunk hozzá: impulzus és mozgási energia. Az ijedősek talán aggódni kezdenek a láttán, de én kiemeltem azokat az adatokat, amiket még nem ismerünk. Ez egy tök primitív kétismeretlenes egyenletrendszer! Az ijedősek kedvéért leírom ugyanezt úgy, hogy a számokat még nem vonom össze:

$$1000 \cdot 3 + 700 \cdot 4 = 1000 \cdot \mathbf{v_{P2}} + 700 \cdot \mathbf{v_{K2}} \quad \text{és} \quad (1000 \cdot 3^2)/2 + (700 \cdot 4^2)/2 = (1000 \cdot \mathbf{v_{P2}}^2)/2 + (700 \cdot \mathbf{v_{K2}}^2)/2$$

Most jöjjön a számok egyszerűsítése:

$$5800 = 1000 \cdot v_{P2} + 700 \cdot v_{K2} \quad \text{és} \quad 10100 = 500 \cdot v_{P2}^2 + 350 \cdot v_{K2}^2$$

Az első egyenletből kifejezem a v_{P2}-t: $(5800-700 \cdot v_{K2})/1000 = v_{P2}$, majd behelyettesítem a másodikba: $10100 = 500 \cdot ((5800-700 \cdot v_{K2})/1000)^2 + 350 \cdot v_{K2}^2$. Ezt jó lesz olvashatóbbá tenni:

$10100 = 500 \cdot \left(\frac{5800 - 700 \cdot v_{K2}}{1000} \right)^2 + 350 \cdot v_{K2}^2$. Kényelmesebb lesz, ha előbb a törtet egyszerűsítem 100-zal, aztán az egész egyenletet 50-nel:

$202 = 10 \cdot \left(\frac{58 - 7 \cdot v_{K2}}{10} \right)^2 + 7 \cdot v_{K2}^2$, tovább egyszerűsítve $202 = 10 \cdot (5{,}8 - 0{,}7 \cdot v_{K2})^2 + 7 \cdot v_{K2}^2$.

Felhasználva azt az azonosságot, hogy $\mathbf{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$, gondolva arra is, hogy itt a b negatív:

$202 = 336{,}4 - 81{,}2 \cdot v_{K2} + 4{,}9 \cdot v_{K2}^2 + 7 \cdot v_{K2}^2$, rendezzük 0-ra: $0 = 11{,}9 \cdot v_{K2}^2 - 81{,}2 \cdot v_{K2} + 134{,}4$.

A másodfokú egyenlet megoldása már csekélység, a könyv végén van róla egy fejezet. Eredményként azt kapjuk, hogy v_{K2} értéke vagy 4 m/s, vagy 2,8235 m/s, másodfokú egyenletnél mindig két eredményre számíthatunk. Ezekkel ki kell számítani az első egyenletből v_{P2} értékét, amire már megvan a képlet:

$v_{P2} = (5800-700 \cdot v_{K2})/1000$, ami 3 vagy 3,8235, ilyen sorrendben társítva a másik két számhoz.

Mit csináltunk? Rutinból felírtunk két egyenletet a vagonok sebességeivel az impulzusok összegének és a mozgási energiák összegének változatlanul maradását kihasználva. Ezek után kaptunk egy egyenletrendszert, amit megoldottunk anélkül, hogy törődtünk volna a jelentésével. (A felhasznált azonosságot a Függvénytáblázatokban valahol „a hatványozás azonosságai” környékén megtalálod.) Végül kaptunk két sebességpárt: piros kocsi–kék kocsi **3 és 4 m/s**, vagy **3,82 és 2,82 m/s**.

A kocsik találkozásakor talán kockadobással dől el, hogy a két lehetőség közül melyik győz? Neeem. Valami alapján az egyik eredmény kizárható. Te döntesz, nézd meg, gondolkodj rajta!

…

Már leírtam egy, a döntéshez szükséges információt, ott volt az orrod előtt: *„$v_{P2} \geq v_{K2}$, hiszen a kék kocsi nem fog átmenni a piroson.”* :-) Ha ezt magadtól is észrevetted, akkor vedd úgy, hogy megdicsérlek, mert ezt csak a jók veszik észre, amikor az eredmény *értelmét* is átgondolják.

Az eredmény tehát ez: a találkozás után **a piros kocsi 3,82 m/s, a kék kocsi 2,82 m/s** sebességgel gurul tovább. Ehhez feltételeztük, hogy a két kocsi súrlódásmentes, zárt rendszert alkot, a pálya vízszintes, továbbá az ütközés tökéletesen rugalmas, vagyis a mozgási energiákból semennyi nem vész el.

Te talán a másik két számot választottad? Csak azért, mert azok kerek számok? Hiba! A matekban nincs szimpátia, ott csak a szabályok szigorú betartásával szabad dolgoznod! Ha egy feladatban két kerek szám adódik megoldásként, akkor gyanakodhatsz *arra, hogy azok a jó értékek, de ez nem döntési alap, a döntést ettől függetlenített vizsgálódás után kell kimondani.*

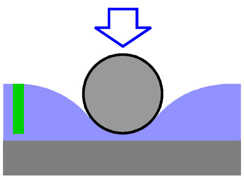
Ha végiggondolod, hogy miért jött ki két kerek szám másik eredményként, egyszerű választ találsz. Az a két szám pontosan ugyanaz, mint a kezdeti sebességek. Ez azért lehetne szintén az egyenleteket kielégítő eredmény, mert az impulzusok összege és az energiák összege *akkor sem változik*, ha a kocsik sebessége nem változik. Ha a kocsik csak mennek, akkor nincs változás, a törvények mindent rendben találnak. Csak éppen a kék kocsi áthatolna a piroson, ami nem életszerű.

Az igazán teljes megoldáshoz még az is hozzátartozik, hogy az első egyenletből kapott értékpárt a második egyenletbe is behelyettesítve ellenőrizzük, méghozzá az eredetibe, hogy elkerüljük a levezetésben esetleg elkövetett hiba zavarását: $(m_P \cdot v_{P1}^2)/2+(m_K \cdot v_{K1}^2)/2=(m_P \cdot \mathbf{v_{P2}}^2)/2+(m_K \cdot \mathbf{v_{K2}}^2)/2$. A 4 tizedesjegyű értékekkel 10100 és 10099,8 a két oldalon, az eredményünket hitelesnek fogadhatjuk el. Ez a megoldás így már kiállja a próbát egy versenyen is.

Mennyi az ütközési szám a tökéletesen rugalmatlan ütközésnél?

Ha már ilyen szépen végigvezettük az igazi megoldást, akkor nézzük már meg, hogy mi volt a gond az első kísérletünkkel! Legyen tényleg úgy, ahogy hittük, és tegyük teljesen rugalmatlanná az ütközést. Ezt több módon is megoldhatjuk, az egyik az, hogy jókora adag gyurmát szerelünk a kocsik ütközőjére, hogy az *elnyelje* az ütközés energiáját. Persze nem ez az igazán praktikus változat, de egy fontos dolgot erről megállapíthatunk.

Az energiamegmaradás törvényei rámutatnak azokra a lehetőségekre, amikor egy test mozgási energiája részben vagy egészben **átalakul** valamilyen más energiafajtákba, vagy más testek mechanikai energiáit növeli. Lehet, hogy az ütközés energiája alakváltozásokat hoz létre, például amikor egy autó karosszériája összegyűrődik, illetve amikor a gumiból lemorzsolódott részecskék féknyom alakjában az úton maradnak. Az alakváltozások általában hőtermeléssel is járnak, ami egy újabb lépcsőfok a mozgási energia átváltozásában.



Ezeket a megtervezett vagy megtervezetlen energiaáthelyeződéseket hívjuk úgy, hogy **a test mozgási energiája elnyelődik más testek mozgásában, alakváltozásában vagy hősugárzás formájában**. Az elnyelődés szót rendszerint akkor használjuk, ha az energia *veszteséggé*, nem hasznosítható energiává alakul. A szivacsra eső golyó a szivacs anyagán végez alakváltoztatási munkát. A kocsik légzsákjában is mechanikai energiát (nyomást) hoz létre a neki csapódó ember, ezt adja tovább úgy, hogy a zsákból kipréselődik a gáz, végső soron átvéve és szétszórva a lelassuló test mozgási energiáját. Tudod: a lelassuló test energiát ad le, amit valaminek át kell vennie.

Az impulzus nem alakul át, csak átadódik. Az energia átalakulhat, és más testek energiaveszteségeiként elnyelődhet. Az elnyelődés nem jelenti energia eltűnését, csak szétszóródását.

A megálló test az impulzusát mindenképpen átadja a másik testnek, de a meghosszabbított impulzusátadás csökkenti a fékezés *hevességét*. A képlékeny ütközési felület ugyanakkor alakváltozás és fejlődő hő formájában nyeli el a test mozgási energiáját, lehetővé téve, hogy az ne a testben maradjon.

A szétszóródás azt fejezi ki, hogy az energia a gyakorlatban nyomon követhetetlenül aprózódik szét és alakul át másba. Ha a rendszert *szigetelni* tudjuk, akkor az energia összege nem változik, de ez csak kísérleti körülmények között valósítható meg.

A testek kinetikus energiái hővé alakulhatnak. Szigetelt rendszerben a mechanikus és termodinamikus energiák összege állandó.

Az impulzus viszont mozgás, és mozgás is marad, ha milliónyi gázmolekula mozgásává is alakul. Ha felrobbantunk egy hegyet, majd egy pillanatban összeadjuk a szilánkok sebességeit, megkapjuk az eredeti impulzust, hiány nélkül. Ezért az impulzus "követhetőbb".

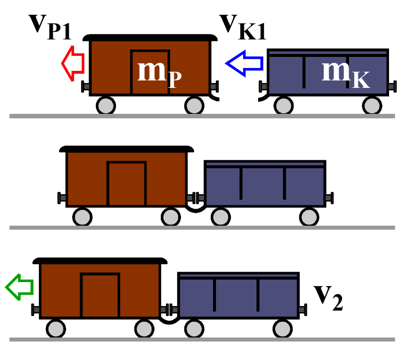
Ha választani kell az impulzusmegmaradás és az energiamegmaradás törvénye között úgy, hogy a mozgásokat kell minél megbízhatóbban ellenőrizni, akkor az impulzust válaszd.

Persze az energia képletei sem haszontalanok. Az előző példán is láthattad, hogy nem boldogulhattunk volna nélküle. Még inkább szükségünk lesz rá olyankor, amikor például egy mozgási energia valamilyen *nem mozgásos* mechanikai energiává alakul át, az energiás feladatok között sok ilyen is van.

Mi a neve a hőt tartalmazó energiatípusnak?

Vissza a vasúti kocsikhoz. Gyurma helyett valahogy másképp próbáljuk elnyeletni az ütközés energiáját. Ha nem nyelődik el, akkor a kocsik az ütközés után visszapattannak. Akkor akadályozzuk meg ezt, az ütközéskor kapcsolódjanak össze a kocsik. Elmondom még egyszer, miről van szó.

Egy tehervagon gurul a sínen v_P=3 m/s sebességgel, a tömege m_P=1 t. Utoléri egy másik vagon, a sebessége v_K=4 m/s, a tömege m_K=0,7 t. A találkozáskor a kocsik összekapcsolódnak. Mekkora sebességgel gurulnak tovább?



Ezen tényleg nincs mit vacakolni, az előző feladatverziónál leírt megoldás ebben az esetben teljesen jó, ráadásul ugyanilyen példákat már csináltunk az impulzusos fejezetekben. Az első kocsi impulzusa m·v=3000 kgm/s, a másodiké 2800 kgm/s. Az együttes tömegük 1,7 t, a közös impulzusuk 5800 kgm/s, tehát az új közös sebességük v_2=5800/1700=3,412 m/s. Ez teljesen biztos és hibátlan.

De akkor mi a helyzet a mozgási energiára épülő megoldásunkkal? $E_m=1/2\cdot m\cdot v^2$. Az első kocsi energiája 4500 J, a másodiké 5600 J, a kettő összege, tehát a rendszer közös mozgási energiája **10100 J**, az ebből számított sebesség lett valamiért nem jó.

Számítsuk ki, hogy ha a sebesség 3,412 m/s, akkor mennyi a rendszer mozgási energiája! $E_m=1/2\cdot m\cdot v^2$, (1700/2)·$3{,}412^2$=**9895 J**. Az eredmény, a helyes eredmény szerint **az energia 205 joule-lal kevesebb**, mint amennyi akkor jön ki, ha a két kocsi mozgási energiáját összeadjuk. *Elveszett?*

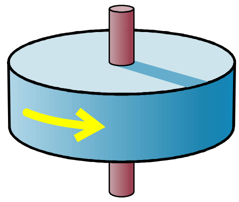
Bár az energiamegmaradás törvénye azt mondja, hogy energia nem vész el, mégis az a helyzet, hogy ez a 205 J *számunkra* elveszett. Mozgási energiából átalakult valami másféle energiává. A két kocsi bevitte a rendszerbe a saját mozgási energiáját, amiből végül kevesebb maradt, mint amennyi a két energia összege. Amikor a kocsik ütköznek, utána megpróbálnak elrugaszkodni egymástól, de az összekapcsoló bilincs nem engedi. Az ALAKVÁLTOZÁSOK fejezetben olvashattad ezt: *„Minden érintkezéses erőhatás esetén mindkét test alakváltozást szenved.”* Akkor itt is kellett lennie alakváltozásnak, a bilincsben, az alvázban, a kocsiszekrényben, nem tudjuk. Az ütközők kifejezetten arra vannak tervezve, hogy a bennük levő rugó energiát nyeljen el, ott is "eltűnhetett" a fölösleg.

A feladatokban általában az áll, hogy a súrlódást, egyéb energiaveszteséget figyelmen kívül hagyhatjuk. Nos, ez a feladat egy olyan eset, amikor a veszteség *nem hagyható figyelmen kívül*, mert maga a helyzet írja elő, pontosan kiszámolva, hogy mennyinek kell lennie az energiaveszteségnek ahhoz, hogy a kocsik ne ugorjanak szét. Amíg ez az energia nem nyelődik el, addig a kocsik rángatóznak a rögzítő-bilincs két végén, és a rendszer nem tud nyugalomba kerülni.

Tudj arról, hogy a kinetikus energia egy része *látszólag el tud tűnni*, átalakulva, szétszóródva. A feladatokban sok esetben arra alapozunk, hogy a mechanikai energiák összege nem változik, de ezek elméleti helyzetek. Tudj arról, hogy néha az energia egy részének el *kell* nyelődnie ahhoz, hogy a feladatra helyes megoldást találhassunk, de persze ezt igazolnunk kell a megfelelő számítással vagy magyarázattal. Te valószínűleg nem fogsz ilyen feladatot kapni, de sosem lehet tudni.

Kipróbálhatod: egy puskagolyó tömege 8,4 g, sebessége 310 m/s, becsapódik egy 20 kg-os farönkbe, amely a vízen lebeg. Mekkora sebességgel mozdul el a farönk? Ha kiszámítod az impulzusokat és mozgási energiákat is, akkor az egyenletekből kiderül, hogy a sebesség csak kb. 2%-a lesz annak, mint amennyit a golyó energiája indokolna, vagyis az energia túlnyomó része elnyelődik, és ezt előre tudjuk.

Forgási energia



A haladó test sebességének megváltoztatása erőt igényel, mert a test tehetetlensége ezt szükségessé teszi. *Igaz ez akkor is*, ha a test közben forog.

De a forgó testnek van egy másik fajta tehetetlensége is, a **tehetetlenségi nyomaték**, már jól ismered. Ezért a test forgási sebességének megváltoztatása forgatónyomatékot igényel.

Amikor a testet megpörgetjük, perdületet, és egyidejűleg forgási energiát hozunk létre benne, amit később munkavégzésre is irányíthatunk. Kicsit nehéz gyakorlati példát találni a *közvetlen* hasznosítására, de nyilván érzed, hogy ha egy nagy malomkövet megforgatsz, akkor az a perdületét megtartva tovább forog, és őrli a magvakat. Azt, hogy meddig forog, kiszámíthatjuk a testre ható lassító forgatónyomatékok összegzésével, de megközelíthetjük úgy is, hogy addig forog, amíg a forgási energiája munka végzésében el nem fogy.

A **forgási energia** a tehetetlenségi nyomaték és a szögsebesség közös hatása:

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2$$

$$[E_f] = J$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, $\boldsymbol{\omega}$ a forgás szögsebessége. Mint minden energiának (és munkának), úgy ennek a mértékegysége is a **joule**. Hasonlítsd össze a mozgási energia képletével.

A PERDÜLET fejezetben olvashattál példákat arra, hogy amikor a forgó test a perdületét megőrizni próbálja, az miért is jó nekünk. A forgási energia viszont az, amikor a perdület egy részét kinyerjük a testből, és **munkát végeztetünk vele**. Ha a forgó testre nem hatunk semmilyen erővel, akkor a forgása nem változik, az energiája megmarad. Amikor pedig erővel hatunk rá, akkor vagy gyorsítjuk és hozzáadunk az energiájához, vagy ha munkát végeztetünk vele, akkor az csökkenti az energiáját. A forgó testről már tudod, hogy egész pontosan nem erőt fejtünk ki rá és nem erőt ad le, hanem forgatónyomatékot, ezért a **munkatételt** ennek megfelelően kicsit átfogalmazzuk:

Egy test forgási energiájának változása egyenlő a testre ható forgatónyomatékok munkáinak előjeles összegével.

$$\Delta E_f = \sum_i W_i \quad \text{vagy egy másik alakban:} \quad \Delta E_f = W_ö$$

A perdülethez korábban próbáltam olyan példákat is találni, amikor a testből forgásként, perdületként adódik tovább, de a perdület helyett az esetek többségében – eddig kimondatlanul – valójában **a forgási energia munkává alakítása** történik. Amikor a forgó test forgást ad tovább, akkor a perdület megmaradását látjuk, de ha a forgó test felhúz egy rugót, megcsavar egy gumiszálat, felemel egy súlyt, felgurít egy kocsit egy lejtőn, akkor valójában a forgási energia átalakulását láttuk már eddig is.

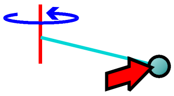
Amit a mozgási energiánál leírtam, az itt is érvényes:

A perdület nem alakul át, csak átadódik. Az energia átalakulhat, és más testek energiaveszteségeiként elnyelődhet.

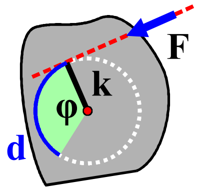
Amikor a forgó test felemel egy súlyt, vagy megcsavar egy gumiszálat, akkor a **perdülete** nem tűnik el, csak a Föld átveszi azt, hiszen a perdülettel megmozdított testek mindig valamilyen erőkapcsolatban vannak a Földdel is. A Földnek pedig olyan gigantikus tehetetlenségi nyomatéka és tehetetlen tömege van, hogy ezek a hatások megmérhetetlenek. Ha súlytalanságban levő, külső erőktől megszabadított űrhajóban csinálnánk meg ugyanezt, akkor a perdület örökkévalósága már észlelhető mértékű lesz, az űrhajó egészen kicsit megmozdul.

Most viszont ezzel nem foglalkozunk, bennünket most csak a forgásban rejlő **energia** érdekel, amely át tud alakulni más mechanikus és egyéb energiákká. Hővé is, alakváltoztatássá is, természetesen, a forgómozgás veszteségei pont olyan jellegűek, mint a haladó mozgásé.

Látod a hasonlóságot a mozgási és forgási energiák képletei között?



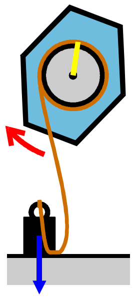
A **munka** a definíciója szerint az erő és az annak hatására megtett távolság szorzata. Forgómozgásnál a távolság egy kicsit furcsa, de emlékezz vissza a FORGÓMOZGÁS ÉRTELMEZÉSE KÖRMOZGÁSKÉNT fejezetre, amelyben azt láttuk, hogy a forgás átértelmezhető egy tömegpont kötött pályán történő *haladásává*. Végül az derült ki, hogy a perdületváltozást a testre ható erőlökés *erőkarja* határozza meg. A helyzet végül is ugyanez a munkával is. Ha egy elforgatható testre egy F erőt fejtünk ki, akkor a test pontjai a tengely körül elmozdulnak, körívet járnak be. Az erő hatásvonalának van egy távolsága a forgástengelytől, ez az erő nyomatékkarja. Az elmozdulás (d) most egy ívhossz, amit azon a körön kell mérni, amelynek a sugara ez a nyomatékkar. A rajzon láthatod, miről beszélek, és adok hozzá egy képletet is, ami pont ugyanezt írja le:



$$W_f = F \cdot \varphi \cdot k_F \quad = M \cdot \varphi$$

ahol a W_f az F erő forgási munkája, φ az elfordulás szöge, k_F az F erőhöz tartozó nyomatékkar hossza. A körmozgás képleteivel ezt mindenféle alakra hozhatod, a kapott adatoknak megfelelően.

Ezt a feladatot egyszer már láttad, most megnézzük másképp. **A képen látható helyzetben a kék test a nyíl irányában forog, ω=–7,5/s, Θ=25 kgm^2. A forgással felemel egy nehezéket, m=5 kg. A kötéldob sugara r=0,2 m, a kötélhossz szükség szerinti. *Milyen magasra* emelkedik a nehezék?**



A nehezék egy bizonyos magasságnál nem emelkedik tovább. Miért? Azért mert az emelés egy erővel történik, és a forgó test véges forgási energiája alakul emelési munkává, az energiát pedig ismerjük. A munka még mindig **W=F$_d$·d**, ezért a d elmozdulás egy kiszámítható érték, ez a megemelkedés maximuma. Az emelés munka alakjában elfogyasztja a forgási energiát, ahogy annak lennie kell. Ekkor a forgás megáll, a nehezék nem emelkedik tovább.

Megjegyezhető, hogy a nehezék a súlyával forgatónyomatékot fejt ki a kötéldobra, ami miatt ezután az álló helyzetben levő kék test lassan forogni kezd, lefelé.

Mindenekelőtt: mennyi a kék test forgási energiája, "mennyiből gazdálkodhatunk"? A képlet ismert, E_f=1/2·Θ·ω^2= 0,5·25·(−7,5)^2=**703,125 J**. A negatív előjelet csak a tisztesség kedvéért írtam ki, ha már a feladatban szerepel a forgás irányának jeleként, de ahogy látod, végül is nincs szerepe.

Az energia teljes egészében munkává alakulhat, és ez most meg is történik. Ebből az következik, hogy a végzett munka egyenlő a forgási energiával, **W=703,125 J**. Amikor az elvégzett munka eléri ezt a mennyiséget, akkor a kék test forgási energiája le lett nullázva, a forgása megáll. Mindehhez szokás szerint *feltételeztük*, hogy súrlódás és egyéb veszteség nincs. Folytasd! **…**

Már csak egy lépés van hátra, mert az előbb udvariasan megadtam azt a képletet, amelyből már csak a keresett adat ismeretlen. **W=F$_d$·d**, ebből a W már ismert, a függőleges elmozdulást keressük, ez a d, és mennyi az F_d? **…**

Nyilvánvaló, ez a test súlya. Ez az az erő, amit a forgó testnek ellensúlyoznia kell, ennyi erőt kell a munkavégzés során kifejtenie. Tehát az F_d=m·g=5·9,80665=49,03 N. d=W/F_d=**14,34 m**.

A megoldásban az a különösen érdekes, hogy a kötéldob sugarára *nem volt szükségünk*. Ezek szerint nem érdekes, hogy a nehezék forgatónyomatéka mennyi. Ez a feladat már nem erőtani, nem mozgástani, hanem energetikai tárgyú, ezért nem számít semmi más, mint hogy a nehezék milyen távolságon kifejtett *negatív munkája* csökkenti az ismert forgási energiát nullára. Nem érdekel bennünket a forgatónyomaték, sem a mozgás sebessége, ideje, csak az átalakuló energia.

Miért negatív munka? **…** Azért, mert a test felfelé halad, de a kötélen keresztül a kötéldobra kifejtett ereje lefelé mutat, hiszen az a súlyából ered. A munkatétel elő is írja, hogy az energia csökkentéséhez negatív munka kell. Az E_f sosem csökken nullára, ha a ΔE_f (a változás) nem negatív, azaz a $W_ö$-nek is negatívnak kell lennie. Minden egybevág, igaz?

De ha már emlegetem, számítsd ki azt, hogy hányat fordul eközben az a kék test, jó? Már két lehetőséged is van rá. Jószívű leszek, mindkettőt kérem. :-) **… …**

1) A sugár 0,2 m, akkor a dob kerülete 2·r·π=1,257 m. Erre feltekeredik 14,34 m kötél, az pontosan 11,41 fordulat.

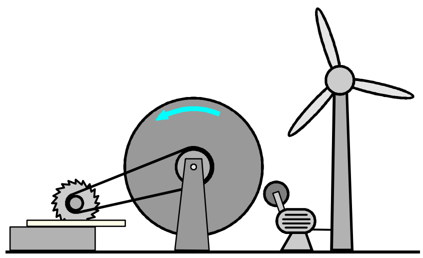
2) $W_f=F\cdot\varphi\cdot k_F$, ezt nemrég láttad, $\varphi=W_f/(F\cdot k_F)=703{,}125/(49{,}03\cdot 0{,}2)=71{,}70$ radián, ami 2π-vel osztva 11,41 teljes kör. Hát ennyi az egész.

Ezeknek a feladatoknak te csak akkor látod hasznát, ha gondosan ellenőrzöl minden lépést, ellenőrzöd azt is, hogy érted a lépés okát is. És ezután magad is nekiülsz, és *segítség nélkül* megoldod. Ha nem sikerült, akkor olvasd el újra azt a részt, ahol eltévedhettél, majd csináld meg újra. Amikor a végeredmény egyezik, *és nem lestél*, akkor volt értelme ezeket leírnom neked.

Az erő és a hatásvonalának a tengelytől mért távolsága együtt mit ad meg?

A forgási energiának van egy nagyon jó tulajdonsága. A haladási (mozgási) energiát hordozó test halad, ezért ha a testben **az energiát *tárolni* akarjuk**, azért, hogy később felhasználhassuk, a testnek haladási pályát kell biztosítanunk. Ha elfogy az út, megáll a haladás, akkor az energia elvész. Ha a testet körpályán tartjuk, az már használható megoldás, így teszünk például akkor, amikor a parittyában levő kavicsot vagy egy *bolát* megforgatunk, készenlétbe helyezve benne a mozgási energiát, amit aztán haladássá tehet, amikor elengedjük.

A forgó test ellenben nem igényel haladási pályát, egy helyben marad, a forgási energia konzerválása emiatt *sokkal kényelmesebb*, ilyen tárolóeszköz a LENDKERÉK, már beszéltünk róla. Amikor szükség van rá, a forgási energia bármekkora része közvetett módon felhasználható, fogaskerékkel, szíjáttétellel, áramgenerátorral elvezethető, és munka végeztethető vele. Ha a forgási energia elfogy, akkor az egész szerkezet megáll, de *újratölthető*. A lendkerék szögsebességének munkával történő növelése energia bevitelét jelenti egy kinetikus energiát tárolni képes rendszerbe. A **szögsebesség** bizonyos határokon túl már nem növelhető gazdaságosan, de a forgási energia másik összetevőjének, a **tehetetlenségi nyomaték**nak a növelése, tehát még nagyobb tömegű és méretű lendkerék használata nagyobb energiafelvételi *kapacitást* hoz létre.



Szintén a lendkerék felhasználását mutatja ez a vázlat. A szélkerék áramot termel, ami megforgat egy villanymotort, ami eredetileg a fűrészgépet hajtaná meg. Most iktassunk be egy nagy lendkereket. A szélkerék által termelt árammal a lendkereket pörgetjük fel. A szél erőssége ingadozik, ezért amikor van szél, a szélkerék növeli a lendkerék sebességét, beletöltve a szélből nyert energiát. Amikor nincs szél, akkor lekapcsolódik róla, a lendkerék pörög tovább. De a fűrészgéppel sem folyamatos a munka, és az állásidőben a szélkerékkel termelt jó kis áram elveszne, pedig jól jönne még, amikor éppen nem fúj a szél.

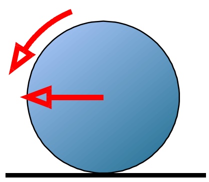
A lendkerék a megtermelt energiát fel tudja venni, forgási energia alakjában tárolni tudja, majd munkává alakítva le tudja adni. Mi ennek a haszna? Az, hogy *nem csak akkor lehet fűrészelni, amikor fúj a szél.* A befolyó energia tárolható addig, amíg a felhasználására sor kerülhet.

Az előbbi példa inkább elméleti, mert ma a kinetikus energia átmeneti tárolására általában elektromos akkumulátorokat használunk, és a tárolt áramot utána villanymotorok által hasznosítjuk.

Mennyi forgási energiát tárol egy lendkerék, ha a tömege fél tonna, az átmérője 2,4 m és fordulatszáma 14 s^{-1}? Hengernél a tehetetlenségi nyomaték $1/2\cdot m\cdot r^2$ (lásd ott) $=360\ kg\cdot m^2$. A fordulatszámból a szögsebesség $\omega=14\cdot 2\pi$, az energia tehát összesen 1,393 MJ. Ez már valami. Ha ezt az energiát áramtermelésre fordítjuk, 80%-os hatásfokkal, akkor ezzel 18 db energiatakarékos, 17 W-os fénycsőizzót lehet meghajtani 1 órán át, elméletileg. Sajnos ezt az energiát valamikor valahogy bele is kellett tölteni ebbe a lendkerékbe, hiszen **az csak tárolja és nem előállítja az energiát**. De az igazsághoz hozzátartozik az is, hogy egy átlagos gépkocsi-akkumulátor energiakapacitása 10 MJ körül van.

A guruló golyó

Általában a haladó testek mozgásának vizsgálatakor pontszerű testekkel foglalkozunk, figyelmen kívül hagyva a kiterjedését. Most megnézzük, miért.



A kétféle kinetikus energia egyidejű létezése és átalakulása nagyon jól megfigyelhető egy nehéz anyagból készült, elég nagy golyón, például egy biliárdgolyón. Amikor a golyó az asztalon gurul, akkor **a tömegközéppontja az asztallal párhuzamosan, egyenes vonalban mozog**, a golyó anyagpontjai pedig emellett körmozgást is végeznek a haladási irányra merőleges forgástengely körül. Eszerint a golyónak mozgási és forgási energiája is van.

$$E_{kin} = E_m + E_f = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$$

Legyen a golyó tömege 215 g, átmérője 61,5 mm, a haladási sebessége 0,8 m/s. A **mozgási energiája** $E_m=1/2 \cdot m \cdot v^2=1/2 \cdot 0{,}215 \cdot 0{,}8^2$, azaz 0,0688 J.

A forgási energiához szükségünk van a tehetetlenségi nyomatékra, a korábbi táblázatból:

$$\Theta_{gömb} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$$

A szögsebesség kiderítése igényel egy kis odafigyelést. Nézd meg magadban a golyó gurulását nagyon lelassítva. Annak a pontnak, amelyik éppen az asztalt érinti, a haladási sebessége **az asztalhoz képest nulla**. A golyó középpontjának a sebessége 0,8. Ha most a "kamerát" a golyóval együtt mozgatjuk, akkor azt látod, hogy a golyó középpontja a kép közepén marad, és az asztal csúszik el alatta hátrafelé 0,8 sebességgel. És az asztallal együtt a golyónak az asztalt érintő pontja is. Sikerült elképzelned? Ezek szerint tudjuk a guruló golyó felszíni pontjának a kerületi sebességét! Ebből pedig a szögsebességet is.

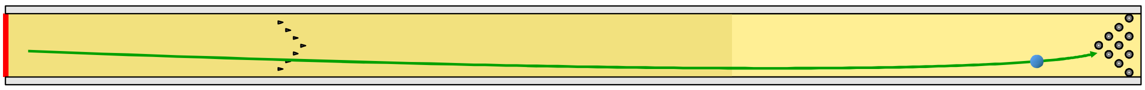
$$v_k = v$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Számoljunk: v_k=0,8 m/s, r=0,0615/2, ω=0,8/0,03075, azaz 26,02 radián/s. (Ami azt jelenti, hogy másodpercenként n=4,14 fordulatot tesz meg.) A gömb tehetetlenségi nyomatéka $\Theta=2/5 \cdot m \cdot r^2=8{,}132 \cdot 10^{-5}$. (lásd SZÁMOK NORMÁL ALAKJA). A **forgási energia** $E_f=1/2 \cdot \Theta \cdot \omega^2$, azaz 0,00275 J.

A puhán meglökött biliárdgolyónk kinetikus energiája tehát összesen E_m+E_f=**0,0716 J**.

Milyen energiákat sorolunk a kinetikus energiák közé?



Egy rendes bowlingpálya több mint a feléig finoman fel van olajozva. Emiatt a játékos úgy tudja a golyót elgurítani, hogy az a pálya első felén *csúszik*, azaz a golyó forgása nem igazodik a haladásához, sőt, a beletett csavarás miatt keresztben pörög. Ez a forgás a pálya első felén nem sokat csökken, ám amikor a száraz pályaszakaszra ér a golyó, akkor ahogy mondják, "kijön belőle a fals", megjelenik az oldalirányú forgás eredménye, és a golyó kissé ferde szögből csapódik a bábuk közé. Olyan szögből, ahonnan egyébként nem tudnánk a golyót elgurítani.

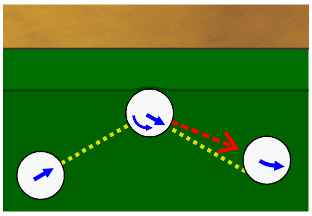
Nyilván okom van ezt elmesélni neked. Már láttad ezt a törvényt, de most erősítsük meg:

Zárt rendszerben a merev testek kinetikus energiáinak összege állandó.

Ebből az következik, hogy a golyóban levő mozgási és forgási energia *összege* állandó. Ha a guruló golyónak változik a forgási sebessége, de a zárt rendszer miatt ezt nem okozhatja *külső* erő, akkor ellentétesen változnia kell a mozgási sebességének is. Ha a csúszva érkező golyó a tapadós felületre érve hirtelen *gurulni* kezd, akkor a megforgatásához szükségessé vált energiát a mozgási energiájából kell elvennie. A mozgási energia a tömegből és a sebességből áll, márpedig akkor valamelyiknek csökkennie kell, és ritkaság, hogy a tömeg csökkenjen valamiért. Ha tehát a csúsztatott golyó gurulni kezd, akkor egy kicsit *lelassul*. Különben a kinetikus energiák összege nem maradhatna állandó. Az előző számításnál láthattad, hogy ennek a mértéke hogyan lesz kideríthető.

Az impulzusról és az ütközésekről szóló példákban ezért ragaszkodtunk mindig a testek pontszerűségéhez. Hiszen ha a mozgási energia a forgás miatt változik, akkor változik a sebesség, külső erő beavatkozása nélkül, de akkor változik az impulzus is, a megmaradási törvényt használhatatlanná téve.

A biliárdgolyót a gyakorlott játékosok sokszor lökik meg úgy, a golyó az útja egy részén ne előrefelé guruljon, hanem valamilyen eltérő irányú forgást vegyen fel. Amikor a golyó forgása szabályos gurulássá alakul, akkor a forgási és mozgási energiák között kis átrendeződés történik. A profik már érzésre tudják, hogy ez milyen sebességváltozást és irányeltérést okoz.



A mozgási és forgási energiák egymásba alakulása az oka a biliárd egy másik ismert jelenségének. Amikor a golyót ferdén a fal (a *mandiner*) felé lökjük, akkor azt várjuk, hogy a golyó ugyanolyan szögben pattanjon vissza, mint amilyen szögben ütközött. Ezzel szemben a visszapattanás szöge laposabb. Ennek az (egyik) oka az, hogy a fal az ütközés során kicsit benyomódik, csak egy pillanatra, de ez alatt az idő alatt a fal oldalról a golyóhoz nyomódik, ad neki egy rövid nyomatéklökést. Az ütközés emiatt a mozgó golyót a guruláson kívül egy kis oldalirányú forgásra is kényszeríti. Ez a létrejövő forgás elvesz a golyó mozgási energiájából, és ez a létrejött pörgéssel és a nem tökéletesen rugalmas ütközéssel miatt kisebb visszapattanási sebességgel együtt megváltoztatja a golyó útját. Ez az oka annak, hogy az egyszerű számításokban ideálisan merev testek alakváltoztatás nélküli ütközését szabad feltételeznünk, elhagyva az effajta extra hatásokat a példákból.

Persze olyan esetek is vannak, amikor az előrefelé "kipörgő" golyó a forgási energiájából lassan lead, és az mozgási energiává változik, hozzáadódva a golyó gurulási sebességéhez.

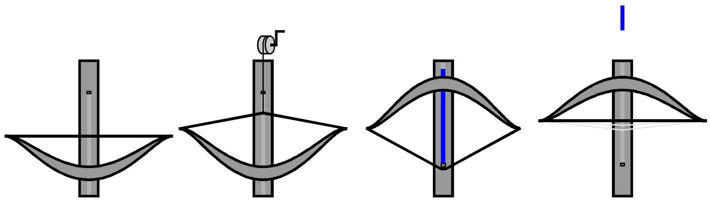
A súrlódás természetesen itt is veszteséget okoz, leveszi a szokásos vámot az energia átalakulása során, kopás és hőenergia alakjában elszivárogtatva a golyó és az asztal nem zárt rendszeréből.

Potenciális energia [redacted]

A testekben tárolódó energia egy része olyan, hogy nincs közvetlenül látható jele, és az energia ezekben a testekben csak *lehetőségként* van jelen, tehát csak potenciálisan. (A név másik jelentése később szóba kerül.) Kinyerhető belőle energia, munkát tudunk vele végeztetni, de az energia kihasználatlanul maradhat hosszú időn át, el nem vész, és bármikor, kis adagokban is felhasználhatjuk. A 'potenciális' szó jelentése: 'rejtett, lappangó, lehetőségként létező'. A potenciális energia kifejezést sokszor mind-össze a *helyzeti energia* szóval azonosként kezelik (lásd később), de valójában **többféle** "lehetőségként létező" energiafajta is ebbe a csoportba tartozik. Ha neked másképp tanítják, akkor is használhatod ebben az értelemben, de a tanárnak ne felejtsd el hozzátenni, hogy te a helyzeti, rugalmassági és más nem kinetikus mechanikai energia összefoglalására használod.

A potenciális energia **nem kinetikus**, ebben az esetben <u>nem a mozgás</u> tárolja az energiát. Úgy is mondhatjuk, hogy **a potenciális energia *statikus***.

A potenciális energiára megjegyezhető alappélda a felhúzott számszeríj.* A felhúzásához munkát kell végeznünk rajta, puszta kézzel, vagy fejlettebb típusoknál egy emelőszerű eszközzel, máskor pedig egy csigás (pontosabban hengerkerekes) szerkezettel. Az utóbbi két esetben a felhúzáshoz nagyobb erőt tudunk kifejteni, tehát több energiát tudunk betáplálni. A csigás módszernek megvan az az előnye is, hogy nem kell egyetlen lendületből végigvinni a felhúzást, hanem az lépésenként is befejezhető. A munkát az íj teste "veszi fel" azzal, hogy *rugalmas alakváltozást* hozunk létre rajta, ebben tárolódik az íj potenciális energiája (nem a húr nyúlik meg). A felhúzás után egy kis pöcök megtartja a húrt abban a helyzetben, az íj teste megmarad a deformált, az eredeti helyzetébe visszaállni próbáló alakban, telve energiával, kilövésre készen. Ha a pöckötöt elvesszük húr útjából a ravasz meghúzásával, akkor az íj visszapattan a kezdeti alakjába, a húrt is visszarántva, és ha a húr elé odateszünk egy nyílvesszőt, akkor azon az íj munkát végez, kilövi.



A számszeríjban a közönséges íjhoz vagy csúzlihoz képest az a jó, hogy a kifeszítéséhez szükséges munkát nem kell közvetlenül a kijövés előtt elvégezni. Felhúzzuk, reteszeljük, és *elvileg* akár napok (vagy évmilliók) múlva is szabadjára engedhetjük. A gyakorlatban ez csak azért nem lehetséges, mert a deformált fa és fém szerkezete lassan átalakul egy kicsit, engedve a nagy erőnek, így végül rövidebben és gyengébben csapódik vissza az íj húrja, kevesebb munkát tud végezni a nyíl felgyorsítása érdekében. A kezdetben bevitt energiának néhány nap elteltével egyre nagyobb része kezd rugalmatlan alakváltozásban visszanyerhetetlenné válni. Újabb példa arra, amikor az energiatároló "szivárog".

Mi tárolja a felhúzáskor belevitt energiát a számszeríjban?

Az ENERGIATÁROLÓkról már olvashattál egy önálló fejezetet, most még egyszer összeszedem a fontos tulajdonságait:

1. A szerkezeten végzett munkával beletáplált energia <u>tárolható</u>, viszonylag huzamos ideig. A betáplálás történhet jóval a felhasználás előtt.
2. Az energia betöltését <u>végezheti más</u>, mint aki/ami aztán az energiát hasznosítja.
3. A betöltött energia (például a számszeríj esetében) <u>szállítható</u>, tehát a felhasználás helye lehet máshol, mint a betöltés helye.
4. Az energia <u>bevitele történhet kis adagokban</u> is (például a csigás szerkezetet végül kis lépésekben tekerve), ezek az adagok végül *összeadódva* tárolódnak.
5. Az energia kiürülésének a <u>sebessége</u>, az általa végzett munka ideje <u>lehet egészen más</u>, mint a bevitelének a sebessége. (Gyorsabb is, lassabb is.)
6. Az eszköz a kiürítés után <u>újra feltölthető</u> energiával, újabb munkát végezve rajta.

Nem mindegyike teljesül minden energiatároló eszköznél, például a szállíthatóság, de ettől még az általános elvi szabályok közé vehető. Az újratöltés a gyakorlatban néha túl vesződséges – például a sziklát visszagörgetni a hegy tetejére –, de elméletileg mindig lehetséges.

A potenciális energiával rendelkező rendszer energiatárolónak tekinthető.

A potenciális energia kinetikus energiává, mozgássá alakítható át.

---

* A számszeríj nevének, ez érdekes, nincs köze a számhoz, szerhez, szerszámhoz és még az íjhoz sem. Igazából valamilyen szláv nyelvből ered, a "számo sztrelij" eltorzult, "megmagyarított" ejtéséből, ami annyit jelent, hogy "magától lövő". Mint az automobil, ami "magától mozgó".

Potenciális energiája *a felhúzott* íjnak van. Ilyenkor az energiatároló valamennyire *fel van töltve*. A leeresztett, kilőtt íj semleges, "kiürített" állapotú.

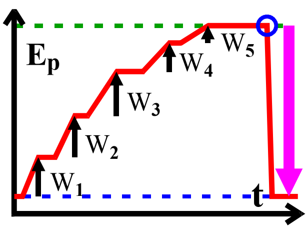
A rendszerben tárolódó potenciális energiát munkával kell létrehozni, mint mindig. A számszeríjat munka végzésével kell felhúzni, és a befektetett energiát kapjuk vissza tőle. Ezért a munkatétel ebben az esetben is érvényes:

Egy test mechanikai potenciális energiájának növekedése egyenlő a testre ható erők munkáinak előjeles összegével. Negatív munkaösszeg a potenciális energiát csökkenti. A tárolt potenciális energia akkor is csökken, amikor munkát végez.

A potenciális energia kinetikus? És mechanikus?

A bevitel és felhasználás **sebessége** több példán is illusztrálható. Az íjat lassan húzzuk ki, de az gyorsan ugrik vissza a kezdeti állapotába, és ezt a gyorsaságot puszta kézzel nem is érhetnénk el, a nyilat nem tudjuk ilyen gyorsan eldobni. A pár másodperc alatt felhúzott órában levő rugó viszont egy-két nap alatt jár le teljesen, tehát ennyi ideig tart, amíg a beletett energiát visszanyerjük, igen kis adagokban, szakaszosan, az óraszerkezetben végzett munka alakjában. Egy PET palackból fabrikált rakétában mi állítjuk elő a túlnyomást, adagonként belepumpált levegővel, utána az így belevitt potenciális energia szinte egy löketben szabadul fel belőle (az akció–reakció elvén működő mozgást létrehozva). Potenciális energiát halmozunk fel akkor is, amikor felballagunk a domboldalra, hogy aztán mozgásként kapjuk vissza, amikor a szánkóra ülünk.

Az energia betöltését végezheti "más" is: ez természetesen nem csak másik embert jelenthet, hanem bármilyen munkavégzésre képes dolog, állat, gép, anyag, természeti jelenség.



A diagramon azt látod, ahogy egy katapultot, egy hajítógépet felhúznak. (A képen a szerkezet felhúzott állapotban látható.) A vízszintes tengelyen az idő, a függőlegesen a potenciális energia van. A kezdeti helyzetben a kilövőkar a kanállal a felső, *majdnem* feszítetlen állapotban van. Ekkor is fel van húzva valamennyire, épp csak annyira, hogy a rúdja a keresztrúdhoz nyomódjon, és ne dőljön jobbra-balra. Ezt a helyzetet *előfeszítettség*nek hívjuk. A potenciális energia nem nulla, ebből a kezdeti értékből indul, és a kilövés után ugyanide fog visszaesni, mert a kilövőkar ugyanúgy előfeszített állapotban fog megállni.

A csapat öt húzással állítja a kart megfeszített, kilövésre kész helyzetbe. Az első húzással W_1 munkát végeztek, ennyivel növelték a katapult energiáját. A diagram szerint mindegyik húzás egyre nehezebb lehetett, mert egyre lassabban érnek véget. (Hasznos képesség, ha egy diagramot nézve rekonstruálni tudsz egy műveletsort.) Aztán egy ék mindig megtartja a hengerkereket, amíg a csapat új fogást vesz rajta. A harmadik húzás után láthatóan szusszantak egy kicsit. Az utolsó húzás már rövidebb volt, a felhúzás elérte a kívánt mértéket, a katapult energiatároló kapacitásának határát. Aztán betették a követ (vagy tehenet)* a kanálba, és a kör jelzi azt a pillanatot, amikor a rögzítőhorgot kioldották. A kar meglendül, és a gép a vaskos kötélrugó energiáját a lövedék (és a kar) mozgatására használja fel. Nem egyetlen pillanat alatt, mert az nem is lehetséges, hanem nagyon rövid idő alatt.

Az energia betáplálásához végzett munka időben elhúzódva, öt külön adagban történt meg, mindig a nyíllal jelölt mennyiségű munkát végezve. Nem tudjuk, hogy mekkora *erő* kellett hozzá, de a katapult energiája ennyivel nőtt, tehát az emberek által végzett hasznos munka is ennyi volt, ez biztos.

A lövedék mozgatására szánt energiát jóval lassabban és adagonként gyűjthettük össze, a katapult rugójában. A szerkezetet felhúzó emberek hiába képesek a szükséges energiát összerakni, nem tudnák azt egyben, a szükséges hosszú úton és kellően rövid idő alatt munkára fogni. Ezért van nagy gyakorlati jelentősége a mechanikai energia *felhalmozására és gyors felhasználására* kitalált eszközöknek.

Tudsz még ide illő mechanikus példát mondani, nem fegyvert? Lassú feltöltés, gyors felhasználás.

A potenciális energia a katapultnál *nem nulláról* indult, és a befektetett munka sem onnan kezdődik, hanem egy alsó (kék) *energiaszintről* eljuttatva a katapultot egy felső (zöld) energiaszintig. A kilövéskor a két szint közötti összes munkamennyiséget kapjuk vissza egyetlen gyors mozdulatban. A felhúzáskor elért potenciális energiát pontosan nem ismerhetjük, *csak az alsó szinthez viszonyított különbségét.* Emlékszel még a RUGÓERŐ fejezetben a vasúti kocsi rugójának mérésére? Ott is csak akkor tudhatnánk meg a rugó tényleges erejét, ha a kocsit szétszednénk, viszont tudjuk az erők különbségét két állapot

* Az alapműveltségnek van egy minimuma.

között. Ahhoz hasonló a helyzet itt is, így az energia helyett **csak az energia *változását* tudjuk megadni**, a végzett munkáink összegeként:

$$\Delta E_p = \sum_{i=1}^{5} W_i$$

Látni fogod, hogy épp azért, mert magát az energiát, annak számszerű értékét nem mindig ismerjük, csak a belefektetett munka által létrehozott energiakülönbséget, a potenciális energiát mindig valamihez viszonyítva számoljuk.

Minek a mértékegységével azonos az energia mértékegysége?

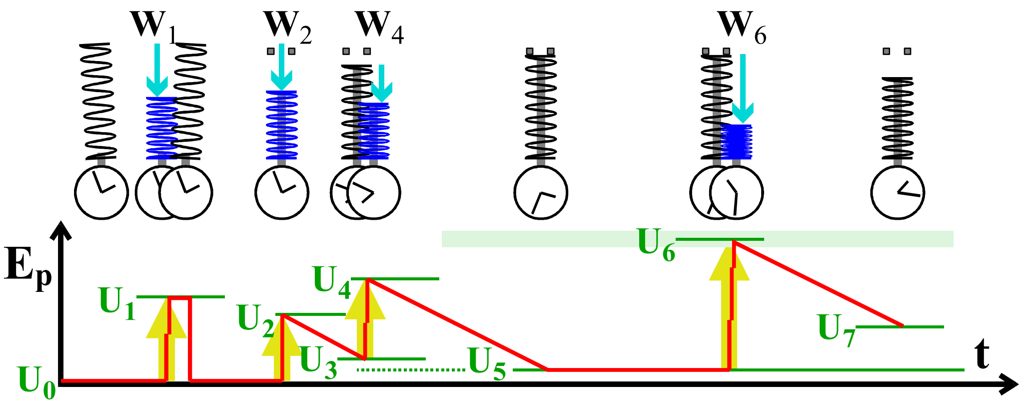
A mechanikai potenciális energiának mi négy fajtáját fogjuk részletesebben megnézni: **a magassági, a helyzeti és a rugalmassági energiát, valamint a mágnes potenciális energiáját**.

Energiaszintek

Képzeljük el, hogy egy rugós karórát valamiért szétszedünk; a képen közönséges csavarrugóval ábrázolom a lényeget. A teljesen erőmentes rugóban nincs potenciális energia. Ezt az állapotot vegyük a továbbiakban **nullszint**nek (U_0). Nem kötelező, hogy pontos számokat ismerjünk, mert itt csak az elv lesz a téma. A diagramon a rugóban levő E_p potenciális energiát az eltelt t idő szerint ábrázolva látod, vagyis a rajz elmeséli a rugó "történetét". Kövesd a szöveget az ábrán is.

Az óra összerakásakor az erőmentes rugót W_1 munkával valamennyire felhúzzuk a rugót, beletáplálva így W_1 mennyiségű potenciális energiát. Ehhez most feltételezzük, hogy a végzett munka 100% hatásfokkal, veszteség nélkül alakul tárolt energiává. Mondjuk azt, hogy a rugó potenciális energiájával elértük az U_1 **energiaszintet**. Elengedjük a rugót, és mivel elfelejtettük összekötni a szerkezettel, a rugó azonnal kirúgja magát, a semmire vesztegetve a benne felgyűjtött energiát, visszaesve a nullszintre.

Bosszankodva újra összerakjuk, most már jól. W_2 munkával felhúzzuk, ennyivel emeltük fel a rugó energiáját az U_2 energiaszintre. Most már az óra szerkezetében levő gátkerék csak apró lépésekben engedi a rugó kinyúlását. Fél nap alatt a rugó energiája visszaesett az U_3 szintre, az időközben apránként leadott energia nagy részét az óra ketyegtetésébe fektetve. Ezután W_4 munkával felhúzzuk a rugót újra, két tekeréssel, nem teljesen, az U_4 szintig, majd letesszük az asztalra. Figyeld meg a diagramon, hogy $W_4 = U_4 - U_3$, vagyis a munkával a rugót az egyik energiaszintről egy másik, magasabb szintre töltöttük.



Ezután az órát az asztalon felejtjük, a rugó pedig lejár. A rugó teljes kinyúlását egy pöcök megakadályozza (mert a feszítés nélkül maradó óraszerkezet megszorulhat), ezért az energiaszint nem esett le az U_0 nullszintig, csak egy annál magasabb U_5 szintig. A pöcök miatt az órarugó potenciális energiája ezután soha többé nem esik nullszintre, sosem ürül ki teljesen, mindig marad benne egy kevés felhasználatlan és felhasználhatatlan energia. Azt is láthatod, hogy amikor az óra előző alkalommal az U_3 szintig fogyasztotta az energiáját, akkor nem volt már messze attól, hogy lejárjon, ami az U_5 szintnél következik be.

Két nap múlva rájövünk, hogy elfelejtkeztünk az óráról, ekkor (a diagram szerint összesen három tekeréssel) teljesen felhúzzuk, az U_6 szintig, utána beállítjuk és felcsatoljuk. A "teljesen" felhúzás határa nem pontosan megadható, csak egy sávot vehetünk ennek, mert a már feszülni kezdő rugót nem erőltetjük túl, de vegyük úgy, hogy a "nagyon magas" energiaszintig feltöltöttük potenciális energiával. Aztán jár tovább, a jelenlegi energiaszintje U_7.

Követted figyelmesen? Nézd meg: amikor mi végeztünk munkát a rugón, megemeltük a potenciális energiája szintjét. Amikor a rugó végzett munkát, akkor az energiaszintje alacsonyabb lett, fogyasztottunk belőle. **Az energia befektetése munkával történt, a felhasználásakor munkát kaptunk vissza.** Pont úgy, ahogy egy energiatárolótól elvárjuk, és a rugó itt energiatároló. Az *energiaszint* fogalmával egyszerűen tudunk egymással összehasonlítani, összekapcsolni bizonyos jellegzetes energiaállapotokat, mint például a lejárt óra rugójának potenciális energiaszintje esetében. A fogalomban nincs semmi forradalmi, pusztán egy célszerű szóhasználat, amit most már te is ismersz.

A potenciális energia szintéjének növelésekor azért végeztünk pozitív munkát, mert a rugó erejével szemben nekünk egy (ellen)erőt kell kifejtenünk ahhoz, hogy össze tudjuk nyomni, és ennek irányában történik elmozdulás. Utána az energiatárolót (rugót) magára hagyjuk, és innentől a rugó tolja a saját ereje irányában az óraszerkezet megfelelő kis alkatrészét, tehát a rugó végez pozitív munkát.

Melyik volt az órarugó legmagasabb energiaszintje? Mennyi a felhúzott óra hasznosítható energiája?

Látható, hogy a rendszert újra és újra fel tudjuk tölteni valamennyi energiával, különféle mennyiségű munkákat különféle időpontokban elvégezve rajta, és ez a munka összegződött. A munkánkat mindig két energiaszint közötti eltéréssel fejezhetjük ki, az összes ***b**efektetett* munka e pillanatban

$$\mathbf{W}_\mathrm{B}=(\mathbf{U}_1-\mathbf{U}_0)+(\mathbf{U}_2-\mathbf{U}_0)+(\mathbf{U}_4-\mathbf{U}_3)+(\mathbf{U}_6-\mathbf{U}_5)$$

az óraszerkezet mozgatásában eddig ***v**isszakapott* összes munka

$$\mathbf{W}_\mathrm{V}=(\mathbf{U}_2-\mathbf{U}_3)+(\mathbf{U}_4-\mathbf{U}_5)+(\mathbf{U}_6-\mathbf{U}_7)$$

Egyszer elpazarlódott egy $(\mathbf{U}_1-\mathbf{U}_0)$ munkánk, a rugóban jelenleg még levő kinyerhető potenciális energia pedig $(\mathbf{U}_7-\mathbf{U}_5)$. A lejárt szerkezetben mindig ott marad $(\mathbf{U}_5-\mathbf{U}_0)$ energia, felhasználhatatlanul. A teljesen felhúzott óra rugójában levő potenciális mechanikai energia $\mathbf{U}_6-\mathbf{U}_0$ ($=\mathbf{U}_6$!) a legnagyobb *hasznosítható* potenciális energia $\mathbf{U}_6-\mathbf{U}_5$. Ha megismernénk a pontos adatokat, tehát a rugóállandót és a hosszváltozásokat, számszerű adatokat is kaphatnánk, de itt az elv megfigyelése volt a cél.

Nyilvánvaló, hogy teljesülnie kell az alábbi állításnak:

$$\mathbf{W}_\mathrm{B}\geq\mathbf{W}_\mathrm{V}$$

A gyakorlatban az egyenlőség <u>sem</u> teljesül soha, mert a munka befektetése során lehetetlen minden veszteséget kiküszöbölni.

Az a veszteség munkaveszteség vagy energiaveszteség? A bevitt munka hatásfoka kisebb 1-nél vagy az energia felhasználásáé? Valószínűleg is-is. Ha végezzük a munkát, és annak egy kis része súrlódásban és egyébben elnyelődik, akkor az energiatárolóba csak a maradék kerül. Egész pontosan mi feltöltjük az energiatárolót valamilyen szintre, de ehhez több munkát kellett elvégeznünk, mert a veszteség lenyelte a többit. Amikor pedig a tárolt energiát használjuk fel általa végzett, általunk kapott munkaként, akkor a tárolóból kijövő energia egy része tűnik el veszteségként, és csak a maradék hasznosul.

> Megjegyzés: Bizonyos esetekben az energiaszintet **potenciál**nak hívhatjuk, a potenciális energia valójában innen kapta a nevét. Az energiaváltozást, a végzett munkát ekkor az energiapotenciál változásaként írjuk le. Az elektromos potenciálkülönbségre van is egy jól ismert szó: feszültség.

A lejárt állapothoz képest most mekkora energia van az órarugóban?

Mi van, ha egyszer valaki azt kérdezi, hogy *mennyi* a felhúzott rugó energiája? Hány joule? Ilyenkor csak kérdéssel lehet válaszolni: **Mihez képest?**

Általánosságban a potenciális energiának *nincs* abszolút mennyisége. Egyes esetekben persze sokszor van, hogy a kérdést értjük, és konkrét számmal tudunk rá válaszolni, de ez nem kötelező tulajdonsága a potenciális energiáknak. Ki tudjuk azt jelenteni, hogy egy összenyomott rugó energiája 68 J, de ekkor mi (feltehetőleg) automatikusan azt az állapotot vettük 0-nak, amikor a rugó erőmentes. Nem kötelező, hogy ez így legyen. **A potenciális energiáknál a 0 energiát tároló helyzet, a nullszint helye megegyezés kérdése.** Ezért ha az energia értékét közöljük, mindig tisztázni kell, hogy <u>a nullszint helyét mi hol állapítottuk meg</u>.

Ne értsd félre, <u>a rugó *ereje* továbbra is teljesen egyértelmű adat</u>. De az, hogy a rugóban mennyi *energia* van, és még inkább egy felemelt kalapácsban, víz alá nyomott légtartályban, szélbe tartott vitorlában, felmelegített hőlégballonban mennyi potenciális energia van, **az csakis egy kijelölt nullszinthez <u>viszonyítva</u> adható meg**.

A potenciális energia értéke mindig az adott energiamennyiség és a nullszintnek kijelölt energiamennyiség közötti különbség.

Tulajdonképpen a kinetikus energiákkal is ez lehetne a helyzet, de ott a nullszintet mindig az álló helyzet energiájához rendeljük, az álló helyzetben tárolt energiát vesszük nullának, ez elég nyilvánvalóan adódik. A mozgási energia akkor nulla, amikor a mozgás sebessége nulla. Csakhogy ha visszaemlékszel az inerciarendszerekre, és arra az esetre, amikor a kocsival a mozgó teherautó platójára hajtottunk fel, eszedbe juthat, hogy *a sebesség is csak attól függ*, hogy mit választunk vonatkoztatási rendszernek. Szóval bizony, a mozgási energiánál is bonyolultabb a helyzet, mint elsőre gondolnánk, csak ezzel nem szokás foglalkozni. Te nem fogsz olyan feladatot látni – hacsak nem kapsz kedvet a fizikaversenyeken való induláshoz –, amelyben ez a kérdés egyáltalán szóba kerülne.

Ha két test ugyanabban a rendszerben azonos potenciálisenergia-szinten van, az azt jelenti, hogy ugyanahhoz a kijelölt nullszinthez viszonyítva a potenciális energiájuk ugyanannyi.

Mindezekből az is következik, hogy az órarugós példánkban nem lett volna kötelező nullszintnek azt az energiaállapotot választani, amely az erőmentes, teljesen elengedett rugóhoz tartozik. A diagramon a nullszintet máshová is áthelyezhetjük. Általában az a helyes, hogy ha a nullszint az összes többi energiaszint alatt van. Csak arról ne feledkezz el, hogy ha a nullszint helye nem értelemszerű, ha nem biztos, hogy mindenki ugyanarra gondol, akkor neked meg kell határoznod, hogy a nullszintet hol jelölted ki.

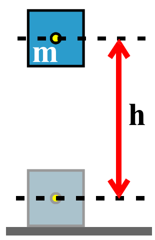
Magassági energia

Helyzeti energiának általánosságban az olyan mechanikai potenciális energiát nevezzük, amely egy testben attól létezik, hogy a test *valamilyen helyen valamilyen helyzetben van*.

A legegyszerűbb esete az, amikor egy testet felemelünk, munkát végezve rajta, és ezt a munkát energiaként "beletöltjük". Amikor a test leesik, mozgási energiaként visszaadja ezt a munkát. A befektetett munka formája az volt, hogy a nehézségi erő *ellen* kifejtett erőnk hatására a test felfelé elmozdult. Magasabbra került, ezzel arányosan nőtt az energiatartalma is, ezért az így létrehozott és így tárolódó helyzeti energiát **magassági energiának** hívjuk. Ennek az általános képlete:

$$E_h = m \cdot g \cdot h$$

ahol $\mathbf{E_h}$ az $\mathbf{m}$ tömegű test magassági energiája, $\mathbf{h}$ a test helyének magassága a kijelölt alapszinttől mérve, $\mathbf{g}$ a nehézségi gyorsulás. Az $\mathbf{m \cdot g}$ nem más, mint a nyugalomban levő test súlyereje.



*Sok tankönyv egyszerűen a **magassági** energiát hívja **helyzeti** energiának. A helyzeti energiákról külön fejezetben lesz szó, és a magassági energia csak annak a legismertebb fajtája. Neked kell tudnod, hogy ti az órán melyik szót használjátok, de a magassági energia kifejezés nem hibás. A feladatok szövegéből mindig ki fog derülni, hogy helyzeti energián mit kell érteni.*

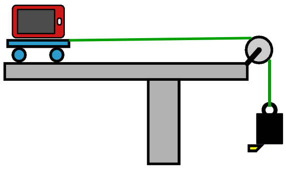
A magassági energia csak azért létezik, mert a gravitáció a testre erőt fejt ki, és ennek következményeként a test le akar esni. Megpróbálom ezt érthetővé tenni.

Képzeld el, hogy a macskádat leteszed a szoba túlsó végébe, és a pórázát rákötöd egy doboz sörre. A macska nem mozdul, inkább alszik egyet. De te leteszel magad elé a padlóra egy kistányért, benne egy szelet szalámival. Ennek következtében a szobában megjelenik a gravitáció, a szalámi a macskára vonzerőt fejt ki. :-) A macska a vonzásnak engedelmeskedve a szalámi felé kezd "esni", és közben munkát végez, odahúzza hozzád a doboz sört.

Jön a kulcsmozzanat. Te felemeled a macskát, és *visszaviszed* a szoba túlsó végébe, majd rákötsz egy újabb doboz sört. A szalámi gravitációja nem szűnt meg, így a macska ismét a szalámi felé fog "esni", munkát végezve, mert odahúzza hozzád az újabb doboz sört.

Mi a tanulság? A macskában azért lett "magassági" energia, mert te visszavitted, távolabb tetted a szalámitól, aminek köszönhetően ő **újra elindulhat felé**. A macskában annyi helyzeti energia lett, amennyit te *azzal a munkával tettél bele*, amennyivel a macskát visszavitted.

Tény, hogy ez egy elég hülye példa volt, de talán elég szuggesztív ahhoz, hogy emlékezz rá. Keresek egy kicsit értelmesebb példát is, ami közelebb van a tényleges magassági energiához.



Felszerelsz az asztalod szélére egy csigát, kerítesz egy kis műanyag kocsit és egy nehezéket, és zsineggel összekötöd őket. A nehezéket felemelt helyzetében valamivel rögzíted, a kocsira pedig ráteszed a mobilodat.*

Eljön hozzád a haverod, és épp az asztalnál ültök, amikor megszólal a mobilod. Te elegánsan elmozdítod a nehezék elől a rögzítést, és a szerkezet szépen odahúzza eléd a telefont, remélhetőleg kiváltva némi elismerést. (A kocsi gyorsulni fog, még mindig F=m·a, ezért figyelj, hogy a telefon végül ne essen le róla.)

Mi végezte a telefon szállításának a munkáját? *A Föld*, amely a tömegvonzásával erőt fejt ki a nehezékre. A nehezék a súlyával húzza a zsineget, a zsineg továbbítja ezt az erőt a kocsihoz, a csiga pedig nem csinál mást, mint megváltoztatja a zsineg és a benne levő kötélerő irányát. (A nehezéket hívhatnám súlynak, ahogy az egyébként szokás, csak nem akarom, hogy a fizikai súllyal összekeverhesd.)

Mi lassítja a nehezék esését? Melyik törvény alapján állapítható meg a nagysága?

Mit kell tenned ahhoz, hogy ezt a kis mutatványt újra kipróbálhasd? Vissza kell tolnod a kocsit. Az a baj, hogy **ezzel fel kell emelned a nehezéket is**. Neked is munkát kell végezned azért, hogy a kocsi a helyére eljuthasson. A kocsi oda-vissza útja egyforma, jelöljük **s**-sel. Nyilván látod, hogy amennyi utat a kocsi megtesz vízszintesen, ugyanakkora utat tesz meg a nehezék függőlegesen. Ha a nehezék tömege **m**, akkor a kocsit húzó erő **F=m·g**.

Amikor a nehezék (a kocsi tehetetlensége miatt fékeződve) leesik, a Föld **F** erőt fejt ki rá, és a nehezék annak irányában **s** utat tesz meg. A Föld kocsin végzett munkája így **F·s**.

Amikor a kocsit visszatoljuk, erőt kell kifejtenünk rá, hogy legyőzzük a nehezék súlyát. A kifejtendő erőnk szintén **F**. A kocsi visszatolásának elmozdulása szintén **s**, tehát a mi munkánk is **F·s**. Sőt, ha beleszámítjuk a súrlódás miatt várható *veszteséget* is, a munkánk még az **F·s**-nél is több.

> Nem került szóba sem a kocsi, sem a telefon tömege vagy súlya! Az erő nem függ tőlük, csak a nehezék tömegétől.

Ha a nehezék felemeléséhez nem kellene erő, akkor a nehezéket lefelé sem akarná mozgatni semmi. **Nehézségi erő nélkül nincs magassági energia.**

> A "magasság" szavunk jelentheti a test függőleges kiterjedését is, aljától a tetejéig, és valamitől mérhető függőleges távolságát is. A magasságom 175 cm, továbbá 223 méter, a tengerszint felett. Az asztal magassága 110 cm volt, és nyilván meg lehet tippelni, hogy ez melyiket jelenti. Csak figyelj oda rá.

A magassági energia eredetére kétféle magyarázat használható:

Az egyik, a feladatok megoldásához használt változat úgy szól, hogy amikor erőt kifejtve megemelünk egy testet, akkor munkát végzünk, és **ezt a munkát tárolja** a test magassági energiaként. Amit majd a test által végzett munka alakjában visszakaphatunk. A megemeléssel tehát "energiát töltünk" a testbe.

> Amikor a test a kapott magassági energiát végzett munka alakjában visszaadja, akkor igazából **a Föld végzi a munkát**, a test közvetítésével. A Föld a gravitációjával nem tud rugalmassági energiát, vagy például vízszintes irányú mozgási energiát *közvetlenül* létrehozni, ehelyett a tömegvonzásával egy, az erejét közvetítő testet mozgat meg.
>
> A gravitáció mindig kész a munkavégzésre, akármilyen magasan is van a test, csak nekünk nem lenne hasznunk abból, ha az előbbi kis szerkezet nehezéke a padlóról a pincébe akarna mozogni, aztán még lejjebb. A Földnek, a gravitációnak, de még a testnek is mindegy lenne, nekünk viszont alkalmatlan. Ezért mindig fel kell emelnünk a nehezéket olyan magasra, hogy onnan a padlóig mozogva végezhesse el a tőle elvárt munkát. És amikor elvégezte, akkor újból visszavinni, ahányszor csak kell. Tehát a valóságban mi nem energiát adunk a testnek, hanem előkészítjük a következő munkavégzésre. **A mi munkánk nem a létrehozója, hanem az *ára*** annak a leendő munkának, amit majd kapni fogunk.
>
> Ha a gravitációt *ki lehetne kapcsolni* csak arra az időre, amíg mi a testet felemeljük, ingyen energiához juthatnánk, és tényleg meg lehetne csinálni egy nyereséges erőgépet, egy örökmozgót. Így viszont sajnos a test leejtésre kész állapotba hozásához munkát kell végeznünk pont az ellen az erő ellen – a gravitáció ellen –, amely majd a munkát végezni fogja, valamikor.
>
> Ez a kétféle értelmezés egyáltalán nem ütközik egymással, de az első megfogalmazás jóval egyszerűbb, ezért kényelmesebb, és nyugodtan használhatjuk ezután is.

---

* A bekapcsolt mobilodat sose tedd fém tárgyra, a laptopodra, vagy közvetlenül másik telefon mellé. A kibocsátott rádiósugárzás erős visszaverődése vagy a nagyon közeli mágneses tér zavarja a telefont, rossz esetben még kárt is tehet az áramköreiben.

Egy könyv egy 0,8 m magas asztalkán fekszik, a tömege 0,15 kg. Mennyi a magassági energiája? A képlet szerint E_h=m·g·h=0,15·g·0,8. Ha a g értékét 10-nek vesszük, akkor az energia 1,2 J, ha pedig a szabványértékkel számolunk (9,80665 m/s^2), akkor 1,18 J.

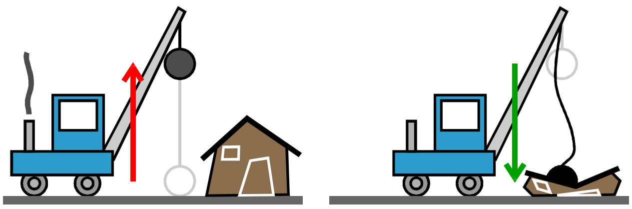
Ha tudjuk, hogy a test tömege 2,5 kg, és a h_2 magasságban a magassági energiája 120 J, akkor mennyi a h_2? A képletben most a h (=h_2) az ismeretlen, h=E_h/(m·g), a test 4,89 m magasan van.

Súlytalanságban van-e nehézségi erő?

Mihez kezdünk a test energiájával? Idézzük fel a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

Zárt rendszerben a testek mechanikai energiáinak összege állandó marad. Az energia átrendeződhet, átalakulhat, de nem semmisül meg és nem keletkezik.

A magassági energia sorsa az, hogy utána felhasználjuk valamilyen munka elvégzésére. Mi a munka definíciója? A munka egy erő és az irányában történő elmozdulás szorzata. A munka *elmozdulás*. Ez azt jelenti, hogy a nyugalomban levő testek magassági (és más potenciális) energiája adandó alkalommal *mozgássá alakul*. **A magassági és a mozgási energia** is a mechanikai energiák közé tartozik, ezért **egymásba átalakulhatnak**.



Vagyis ha egy daru felemel egy hatalmas vasgolyót, majd leejti, a vasgolyó lerombolja a bontás alatt levő kunyhót. Ha egy ingaóra nehezékét felhúzzuk, akkor utána a súlyereje a láncon át az óraszerkezet mozgatását végzi. A nehezék leereszkedését az óraszerkezet napokra elnyújtja, vagyis a súly magassági energiáját igen apró részletekben használja fel. Ha egy vécétartályba összegyűlt víznek utat nyitunk, akkor a magassági energiája elfogy, mozgássá alakulva.

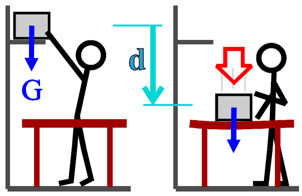
Ne felejtsd el az energia értelmét: az energia nem más, mint leendő munka, konzervben. Amikor a konzervet kinyitjuk, munkát kapunk, és a munka mozgáshoz tartozik.

Minden energia munkává alakulása azzal jár, hogy az energia csökken, végül elfogy. A magassági energia képlete ez volt:

$$E_h = m \cdot g \cdot h$$

Tömeg, nehézségi gyorsulás, magasság. Mi az, ami ezekből megváltozhat? A tömeg változása speciális eset, nem gyakori, de nem szabad elfeledkezni a lehetőségéről. A nehézségi gyorsulás a helyhez kötött, és csak akkor változhatna, ha az egész rendszert átszállítanánk máshová, vagyis ez nem érdekes. Ahhoz, hogy a test magassági energiája csökkenjen, a legegyszerűbb esetben **a magasságának kell csökkennie**.

A mechanikai energia megmaradásának törvénye szerint **a magassági energia csökkenése esetén valami más energiának nőnie kell**, hogy az összeg megmaradjon.



Egy polcon 2 m magasan van egy 6 kg tömegű doboz. Van előtte egy asztal, 110 cm magas. A dobozt lelökjük a polcról, az az asztalra zuhan. Mekkora sebességgel érkezik?

A magassági energiája a polcon, a padlóhoz viszonyítva, közelítőleg 120 J. Az asztalra érve 66 J-ra csökken (6·g·1,1). Hová kerül át a felszabaduló 54 J magassági energia? Ha a doboz leesik, akkor sebessége lesz, igaz? Ha van sebessége, akkor van mozgási energiája is. A képlet: E_m=1/2·m·v^2. Ha mind az 54 J energia mozgássá alakul, és a tömeg 6 kg, akkor v=4,24 m/s^2. Ennyi a doboz sebessége akkor, amikor eléri az asztal szintjét. Ugyanezt kiszámíthatjuk a gyorsuló mozgás képleteivel is, de ez jóval egyszerűbb volt, igaz?

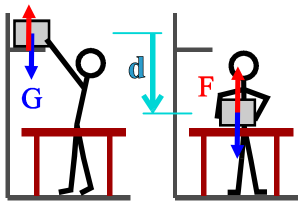
A mozgási energia miért nem -54 J lett?

Ha valamit felemelünk, kézi erővel, géppel, léghajóval, az **nem csak leesni tud, hanem le is tehetjük**. Ez történhet olyan lassan is, hogy mozgási energiáról szinte fölösleges is beszélni ezzel kapcsolatban. Azt mondtam, hogy a magassági energia mozgássá, és abban jelen lévő mozgási energiává alakulhat. Ez a gyakori eset, de nem az egyetlen. Vegyük csak elő azt a munkatételt!

$$\Delta E = \sum_i W_i$$

Az energia változása a bevitt munkák összegével egyenlő. Ez még mindig igaz, és nem csak akkor, amikor a test magassága nő. Hogy mennyi az **i**, tehát hány darab munkát összegzünk, az mindegy, legyen most 1 munka, akkor írhatjuk így: $\Delta E = W$.

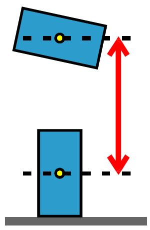
Amikor a dobozt <u>leteszed</u> a polcról az asztalra, akkor a magassági energiája 66 joule-ra csökken, a változás, a $\Delta E = -54$ J. (A csökkenés negatív változás.) Eszerint kijelenthetjük, hogy a doboz lejjebb kerülésekor **a dobozon −54 J munkát végez valaki vagy valami**. A doboz lefelé mozog, a <u>negatív</u> munkához pedig a mozgással ellentétesen kell erőt kifejteni, vagyis a munkatétel most akkor teljesül, ha a dobozt *valami felfelé nyomja, miközben lejjebb kerül.*



Mi magunk fejtjük ki ezt az erőt! Nem engedjük, hogy a doboz szabadesésben tegye meg az utat lefelé, hanem gyorsulás nélkül engedjük lejjebb, egy felfelé ható erővel ellensúlyozzuk a nehézségi erejét. <u>Tehát negatív munkát végzünk, és ezzel csökkentjük a magassági energiát</u>.

Pontosan mi a súly? Mennyi a doboz súlya?

Azt hihetnéd, hogy a magasság megállapítása teljesen nyilvánvaló. Ha van az asztalon egy doboz, amit megemelsz, akkor te hol méred le, hogy mennyivel került magasabbra? Észben kell tartanod, hogy a fizikában a testeket a tömegközéppontjukba helyezett pontszerű tömeggel tudjuk és szoktuk helyettesíteni, sok esetben. Ez a magassági energia számításakor is így van.



Ha kell, akkor bele kell venned a számításokba a testek kiterjedését is, pontos értékekkel. Hiszen mi történik, ha a megemelt test közben elfordul? Ha egy feladatban megmondják a test valamelyik méretét, máris gyanakodhatsz arra, hogy ennek szerepe lehet. Ha viszont a feladat csak annyit mond, hogy "egy ládát felemelünk 12 méterre, majd…", akkor valószínűleg kezelhető az a láda pontszerű testként is.

A magassági energiát mindig a tömegközéppont magassága alapján kell kiszámítani.

A potenciális energiákat és az energiaszinteket már ismerheted, volt szó róluk. Felidézek onnan egy már mutatott tételt: *Ha két test ugyanabban a rendszerben azonos potenciálisenergia-szinten van, az azt jelenti, hogy ugyanahhoz a kijelölt nullszinthez viszonyítva a potenciális energiájuk ugyanannyi.* Ez a testek magassági "szintjeiről" is elmondható, tehát

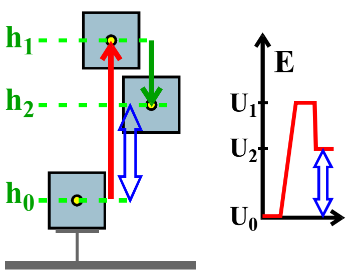
Ha két test (ugyanazon a helyen) azonos magasságban van, akkor a magassági energiájuk ugyanannyi.

Tudjuk, hogy számít a nehézségi gyorsulás (g), azaz maga a gravitáció. Ez a különböző helyeken más-más érték lehet, ezért kell az összehasonlított testeknek "ugyanazon a helyen" lenniük.

Megjegyzés: Ez az "ugyanazon a helyen" levés azért tényleg nem valami szakszerű definíció. Ha az interneten keresgélsz választ a kérdéseidre, hamar belefutsz olyan leírásokba, amelyekben már a második sor valami olyan képlet, amilyet még az életben nem láttál, egyébként is csak deriváltról, potenciálfüggvényről, vektorterekről és még vadabb dolgokról beszélnek. Én sem mindig értem. Akik ezeket írják, kicsit villogni is akarnak, és ez a Wikipédiára is nagyon érvényes. Ne izgasd magad, nem várja tőled senki sem a halálosan precíz, sem a tudálékos megfogalmazást, nem az az elérendő cél. Ha megpróbálod tartani magadat az általam használt nyelvezethez, már az is teljesen elég.

Mihez képest kell azonos magasságban lenniük?

A magassági energia a <u>potenciális energiák</u> egyik fő típusa. Ezek változásait az energiaszintek közötti különbségekkel fejezhetjük ki, ezt már láttad. Az energiaszinteket általánosságban, mindenféle potenciális energia kapcsán használjuk, de ha tudjuk, hogy a magassági energiáról van szó, akkor az energiaszintek a magasságokhoz is köthetők. Az előbbi tétel már meg is határozta azt, hogy ha a ugyanahhoz a 0 magassághoz képest a magasság azonos, akkor a magassági energia is azonos.



Az ábrán a test magassága kétszer is megváltozik, ezzel a magassági energiája is változik, a diagramon láthatod is. A diagram többet árul el, mint amennyi a rajzról kiderül: jelzi az energiaváltozás idejét és hosszát. Emlékezhetsz, hogy a katapultgép felhúzásáról egész kis mesét lehetett mondani a diagramot "olvasva".

Már kiderült, hogy a magassági energia számításakor nagy jelentősége van az alapmagasság megválasztásának, erre még visszatérünk. A test a $\mathbf{h}_0$ magasságban egy kis állványon áll, és nem tudjuk, hogy az asztalhoz vagy a padlóhoz viszonyítva ez milyen magas. De erre nincs is mindig szükségünk. A magassági energia értékének közvetlen kiszámítása helyett biztosabb **az energia változását** nézni:

$$\Delta E_h = m \cdot g \cdot \Delta h$$

azaz **a magassági energia változása egyenesen arányos a magasság változásával**.

Egy szerszámos ládát egy alsó polcról egy magasabb polcra teszel át. A láda tömege 9 kg, a magassága először 0,4 m, utána 1,5 m. *Mennyivel változott* a magassági energiája? Ahogy látod, a feladat nem igényli a tömegközéppont magasságának és a doboz méreteinek precíz elemzését, mert lényegében közvetlenül megadja a változást, ami +1,1 m, a test magasabbra került, ezzel a magassági energiája növekedett. Az itt látható képlet szerint a változás 9·g·1,1 joule, a g-t pontosan számolva a változás 97,09 J.

A változást persze kiszámolhatod úgy is, hogy kiszámolod mindkét magassági energiát, és kivonod a másodikból az elsőt.

***Mennyi* a láda magassági energiája ezután?** Akkor a fő képlet kell nekünk: E_h=m·g·h, vagyis a h helyére most a megadott magasságérték, 1,5 m helyettesítendő, tehát a láda magassági energiája 132,39 J.

Meggondoltuk magunkat, és áttesszük a ládát 0,6 m magasra. Mennyi a helyzeti energia változása? A magasság változása kell hozzá, ami most −0,9 m. Mínusz, ugye nem felejtetted volna el? Kisebb lett a magasság, kisebb az energia, 79,43 J-lal csökkent. (Tudod: dzsú**ll**al, tehát joule-lal, J-lal. A joule után a kötőjel csakis azért kell, mert az e-t itt nem ejtjük ki. De newtonnal, itt nem kell kötőjel.) Az, hogy csökkent a magassági energiája, azt jelenti, hogy ha a láda innen leesik, kisebbet puffan, kevesebb kárt okozhat.

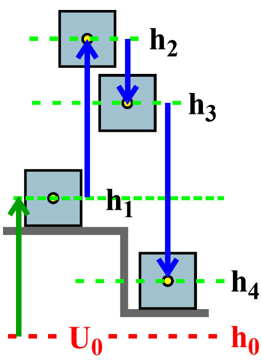
Kiveszünk a ládából egy 3 kg tömegű fúrógépet. Mennyi most a láda magassági energiája? E_h=m·g·h, az új tömeg 6 kg, a magasság 0,6 m, 35,30 J. **Mennyi a változás?** Abból, hogy a tömeg 9-ről 6-ra csökkent, tudhatjuk, hogy most az eredeti energia kétharmada van benne, de ha ez komplikált, akkor számoljuk ki 9 kg-ra is: 9·g·0,6=52,96 J. A változás −17,66 J. (6/9=2/3, 52,96·2/3=35,30, rendben.) Egyszerű, nem igaz? Ne felejtsd el az alapszabályt, vagyis hogy *mindig készíts magadnak egy egyszerű vázlatot* a feladatról, hogy követni tudd, mit számolsz ki.

A képlet szerint mennyi a magassági energia és a magasság változásának aránya?

Nézzünk egy érdekesebb helyzetet. A példában a szerszámos láda kiinduló helyzete 0,4 m magasan volt, az $\mathbf{U}_1$ energia 35,30 J volt. Mi van, ha a ládát levisszük a pincébe?

Az ábrán a test a $\mathbf{h}_1$ magasságról három lépésben eljutott a $\mathbf{h}_4$ magasságra. Most a test *lejjebb van*, mint ahol kezdetben volt. Lehet, hogy a magasság számértéke ezzel negatív lett? A kinetikus energiák nem lehetnek negatív értékűek, a potenciális energiák viszont igen. A nullszint alatt is vannak energiaszintek, negatívak. Csak számolni kell velük szabályosan, előjelhelyesen, és az eredmény jó lesz.

De mit tehetünk, ha *mégis* szeretnénk elkerülni a negatív értékek születését?



Emlékszel még arra, hogy mi a helyes válasz arra a kérdésre, hogy *mennyi* az $\mathbf{U}_4$ szint energiája? Az, hogy "*Mihez képest?*". Milyen magasan van most a számítógéped? Mondjuk, 1,2 m. A padlóhoz képest. Megadhatnád az utcaszinthez képest is, ami lehet sokkal nagyobb érték is (alagsori lakásban vagy atombunkerban kisebb is). Ha egy dombon laksz, megadhatnád a völgy szintjéhez képest. Vagy az átlagos tengerszinthez képest is. Épp azért szokták az utóbbit választani a földrajzi magasságok közlésekor, hogy legyen egy általánosan használható, egységes nullszint. De a repülőgépek magasságát a pilóták mérik a talajszinthez vagy a célrepülőtér szintjéhez képest is.

A 0 magasság kijelölése megegyezés kérdése, és azzal együtt az energia nullszintje is szabadon választható. Ha nem akarsz negatív energiaszinteket, *akkor válassz olyan nullszintet, amely mindegyik energiaszintnél kisebb!* A pirossal jelölt $\mathbf{U}_0$ szint teljesíti ezt, de kijelölheted bárhol máshol is, ha kell.

A magasság viszonylagos, a magassági energia is viszonylagos, és a nullszint szabadon kijelölhető, de az adatok közlésekor a nullszintet is meg kell határozni.

Persze azért nem kell túlzásba vinni a precizitásra törekvést. Amikor az előbbi feladat azt mondta, hogy a ládát 1,5 m magasra tettük, és nem mondott semmit a nullszintről, a viszonyítási alapról, akkor merhettük feltételezni, hogy a padló feletti magasságról van szó. Viszont azért, hogy a magasság és a magassági energia *egyenesen arányos* lehessen, kell egy kikötés:

A 0 magasság tartozik a 0 magasságienergia-szinthez. Ezt nevezzük nullszintnek.

Ha ez valamiért nem lehetséges, akkor legyél különösen elővigyázatos, de ne felejtsd el azt sem, hogy a magassági energia *változására* is van képleted, amihez nem kell nullszint.

Mondom még egyszer: ha azt olvasod, hogy a test (tömegpont) magassága 0, akkor ebből nem derül ki az igazi magassága, csak az, hogy ehhez lehet mérni más magasságokat. **Nincs "igazi" magasság. Csak valamihez viszonyított, relatív magasság van.** Ha bizonytalan vagy, és van a dolognak jelentősége, akkor inkább kérdezd meg vagy add meg, hogy mi az alap. Ez nem tudálékoskodás.

Hol van a nullszint?

Állsz egy széken, az öcséd odaad neked egy dobozt, amit te felteszel a szekrény tetejére. Onnantól, hogy a dobozt megkapod, te 1,6 m magasra emelted fel. Mennyi magassági energia van a 4 kg tömegű dobozban? *Készíts vázlatot!*

Nincs válasz. *Mihez képest* mennyi az energia? A padlóhoz, a székhez, a derekadhoz? Akkor módosítom a kérdést: *te* mennyi magassági energiát halmoztál fel a dobozban? Akkor ehhez a számításhoz nullszintként azt a magasságot jelöljük ki, amelyen a dobozt átvetted. Ahhoz képest 1,6 m magasan van a doboz, a tömege 4 kg, a magassági energiája így nézve m·g·h=62,76 J.

Az öcséd a dobozt 0,7 m magasra emelte. Mennyi magassági energia szabadul fel a ládából, ha a szekrény tetejéről leesik a padlóra? Nincs meghatározva, hogy a 0,7 m honnan számítandó, de az a kézenfekvő értelmezés, hogy a padlótól. (Így nem is válik a magasság és az energia negatívvá.) Ő megemelte 0,7 méterre, onnan te megemelted 1,6 méterre, tehát most h=2,3 m, E_h=90,22 J.

Mennyi munkát végzel, ha a dobozt a szekrényről leemeled és leteszed a székre, amely 45 cm magas? Mennyivel változott a magasság? 2,3 m-ről 0,45 m-re *csökkent*, a padlóhoz viszonyítva. A 2,3 m-hez az előbb számoltuk ki az energiát, 90,22 J, a 0,45 m-hez E_h=17,65 J. Mi köze az energiához a te munkádnak? A munkatétel szerint a te munkád változtatja meg a doboz energiáját. Eszerint ha tudjuk, hogy mennyi volt az energia változása, akkor tudjuk a munkádat. A változás 90,22−17,65=72,57 J. Ennyivel *csökkent* az energia, igaz? Akkor *a változás negatív*, azaz a munkád is negatív lesz! Ha ezt az apróságot elszúrod, a feladat lényegét érintő dologról feledkezel el, a pontok fele ugrik. Tehát a te munkád −72,57 J. Azért is negatív, mert a ládát te nem lehúztad, hanem úgy vetted le, hogy közben a mozgással ellenkező irányban, felfelé fejtettél ki erőt. Mostanra már biztosan megjegyezted ezt.

Ha erre kitalálom, hogy az energiát a pincéhez képest kérem, ami 2,7 m-rel lejjebb van? A nullszintet lejjebb helyezem 2,7 méterrel. Akkor minden magasságadatot meg kell növelni 2,7 méterrel, vagy minden energiához hozzáadni a 2,7 méterhez tartozó magassági energiát, ami a 4 kilós doboznál 105,91 J, és legyek hétszer átkozott. De figyelj, az energiában az előbb létrehozott *változás* ugyanannyi marad!

És ha azt mondom, hogy mennyi munkát végzel, ha mindezek után 30 centivel feljebb teszed a dobozt? Most lett eleged, már a franc se tudja, hogy hol van a nullszint, milyen magasságnál tartasz. Semmi baj, *tudunk egy rövidebb utat*. Az utolsó kiemelt képlet a magassági energia *változásáról* szól, vessük be azt.

$$\Delta E_h = m \cdot g \cdot \Delta h$$

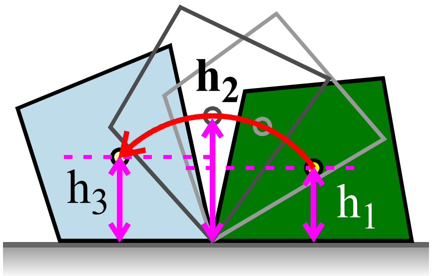
Nem kell ide nullszint, sem magasság, elég tudnunk a magasság *változását*. Az +0,3 m, tiszta ügy, a magassági energia változása +11,77 J, értelemszerűen neked ennyi munkát kellett ehhez végezned.

Ehhez a 30 centis emelkedéshez mennyi munkát kellett végezned, ha annak a hatásfoka valamiért csak 0,78? Ettől a kérdéstől szoktak sírva fakadni a rossz idegzetűek, pedig nincs benne semmi nehéz. A 11,77 J munkát el kellett végezned, ez világos, hiszen a láda magassági energiája ennyivel nőtt. Tehát $\mathbf{W}_{\text{hasznos}}$=11,77, ez jelenti a 78%-ot, ami a $\boldsymbol{\eta}$ hatásfok. A munka hatásfokának képlete:

$$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{W}_{\text{hasznos}}/\mathbf{W}_{\text{összes}}$$

Behelyettesítünk, 0,78=11,77/$\mathbf{W}_{\text{ö}}$, ebből $\mathbf{W}_{\text{ö}}$=11,77/0,78=15,09 J. Ennyi munkát kellett végezned ahhoz, hogy abból létrejöjjön 11,77 J magassági energia. 15,09 78%-a 11,77, vagyis a számítás jó.

Szerinted milyen magasan van a madárfészek a fa tetején? Ha a fa fent áll a dombtetőn? :-)



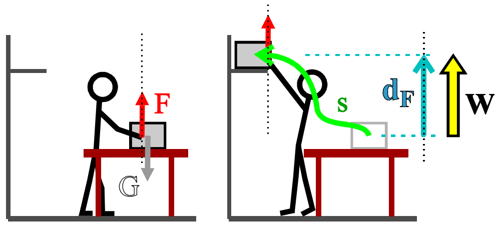
A magassági energia emlegetésekor el szoktunk feledkezni arról, hogy végül is mindig a tömegközéppont magasságának változásáról lenne szó. És van, amikor ez a változás nem annyira nyilvánvaló. Az ábrán látsz egy zöld testet, ami az asztalon nyugszik, és a tömegközéppontjának a magassága az asztalhoz képest $\mathbf{h}_1$. Ezt a testet nem emelgetjük, csak átbillentjük egy másik (a kék) helyzetbe. Ahogy látod, a tömegközéppontja egy körívet ír le az eseti forgáspont körül, ezen az íven a tetőpont magassága $\mathbf{h}_2$, végül megáll $\mathbf{h}_3$ magasságban. Munkát kell végezni a $\mathbf{h}_1/\mathbf{h}_2$ emelkedéshez, erőre van szükség, majd a test a $\mathbf{h}_2/\mathbf{h}_3$ szakaszon már magától billen át. Itt kicsiben a magassági energia megnövelése, majd csökkenése játszódik le, és mivel $\mathbf{h}_3>\mathbf{h}_1$, a test magassági energiája összességében nőtt $\mathbf{h}_3-\mathbf{h}_1$ értékkel.

Nyilván látod, hogy a kék és a zöld helyzet is (kényszer)stabil egyensúly. Ha a testet újra meg akarnánk billenteni, akkor a tömegközéppontja újra emelkedni kezdene, munkát kellene végeznünk. A harmadik témakör STABILITÁS fejezetéhez így hozzátehetünk egy kiegészítő tételt:

Egy test akkor van stabil nyugalomban, amikor a tömegközéppontjának a helyzeti energiája helyileg a legalacsonyabb (lokális minimumon van).

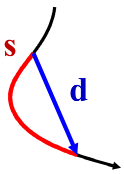
A "helyileg legalacsonyabb" azt jelenti, hogy ha jobbra vagy balra kitérítjük, akkor az energia mindenképpen emelkedni kezd, így egy adott tartományon belül itt van a legalacsonyabban.

Mi az az eseti forgáspont?

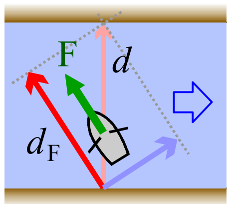


Láttuk, hogy a dobozok emelgetése és levétele hogyan hat az energiára és tőlünk milyen munkát kíván. **De mi van, ha az asztal messzebb van?**

Eddig nem törődtünk azzal, hogy a polcról az asztalra vezető útján a doboz oldalirányban mennyit mozdul el. Eddig elhanyagolható mértékű volt, mondjuk. Akkor tegyük az oldalirányú mozgást nem elhanyagolhatóvá. A rajzon azt látod, ahogy az asztalról felteszünk egy dobozt a polcra, de eközben egy $\mathbf{s}$ hosszúságú, kanyargós utat teszünk meg vele a levegőben. Mennyi a munkánk?

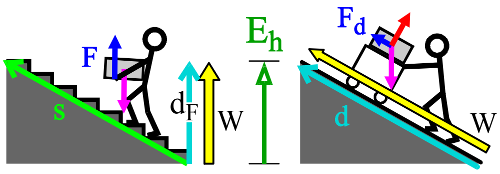


Elsőként idézzük fel a munka meghatározását: az erő szorozva az erő hatásvonalának irányában történő elmozdulással. Az elmozdulást az ÚT fejezetben már megtárgyaltuk, olyan értelemben, hogy a bármilyen kanyargós út ($\mathbf{s}$) esetén is az elmozdulás ($\mathbf{d}$) csak a kezdő- és végpontot összekötő egyenes szakasz hossza.



De aztán a MUNKA fejezetben, a témakört megalapozó fogalom bemutatásakor előkerült egy olyan példa, amelyben a megtett elmozdulást ($\mathbf{d}$) felbontottam két összetevőre, úgy, ahogy az erőkkel azt már megszoktad. Azért, hogy megkapjuk az elmozdulásnak azt az összetevőjét ($\mathbf{d}_\mathrm{F}$), amely alkalmas arra, hogy az erővel összeszorozzuk, ez az $\mathbf{F}$ erő irányába történt elmozdulás.

A munkába csak az erő irányába megtett elmozdulás számítandó be. Ennek biztosítására két lehetőségünk van: vagy az elmozdulást igazítjuk az erő irányába, vagy az erőnek csak az elmozdulás irányába mutató komponensét vesszük figyelembe. Megmagyarázom.



Amikor a ládát a lépcsőn viszed fel, a ládát mindvégig emeled, és csakis emeled. Más, vízszintes irányú mozgatásához nem kell *erőt* kifejtened, mert azt nem nehezíti semmi. És annak ellenére, hogy a lépcsőn az $\mathbf{s}$ utat teszed meg, az nem az erőd hatásvonalát követi, ezért nem ezt, hanem annak a *függőleges* irányú összetevőjét vesszük figyelembe, a $\mathbf{d}_\mathrm{F}$-et. Most ezt nevezzük erő-irányú elmozdulásnak. (Mondhatnánk úgy is, a geometriából vett szóval, hogy az $\mathbf{s}$ út függőleges *vetületét*.) Az indexben az F azt jelöli, hogy az $\mathbf{F}$ erő irányához igazodunk.

Ha viszont az elmozdulás kényszerítetten más irányú, akkor az erőnek is abba az irányba kell mutatnia. A lejtőről tudjuk, hogy amikor kocsin tolod fel a ládát, akkor az elmozdulás lejtő irányú lesz. Beásni sem fogja magát a kocsi, és felszállni sem fog. A munka kiszámításához az erőnek és mozgásnak azonos irányba kell mutatnia. Most az erő igazodik az elmozduláshoz, tehát az erő elmozdulás-irányú összetevőjét vesszük figyelembe. (Lásd AZ EREDŐ ERŐKOMPONENSEI, az *Erők* témakörben.) A két változat:

$$W = F \cdot d_F \qquad \text{és} \qquad W = F_d \cdot d$$

(A két képlet *általánosan* igaz. Most viszont az **F** erőről tudjuk, hogy függőleges hatásvonalú, felfelé mutat. Ha korrektül akarjuk a dolgokat jelölni, akkor maradjon $\mathbf{d}_F$ általában véve az **F** irányú elmozdulás, és használjunk $\mathbf{d}_f$-et a *függőleges* elmozdulásra.)

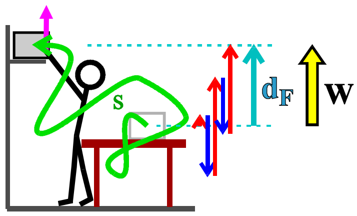
A munka, a **W** a kétféle esetben azonos. A lejtőn tolva az út és elmozdulás hosszabb, viszont kisebb a toláshoz kívánt erő. A szorzat ugyanannyi lesz. Az is egyforma, hogy a test magasságát mennyit növeltük. Láthatod, ugyanarról a kezdőmagasságról ugyanaddig a magasságig jutottunk.

Ha két munkavégzés esetében a munka (W) azonos és a függőleges irányú elmozdulás ($\mathbf{d}_f$) is azonos, akkor a munkánkkal létrehozott magassági energia ($\mathbf{E}_h$) is azonos. Az érték *nem függ* a vízszintes elmozdulástól és a függőlegesen megtett teljes úttól.

Azért törődünk csak a *függőleges* elmozdulással, mert a magassági energia a *magasság* változásából keletkezik, az pedig mindig függőleges irányban történik.

Mindezzel nem mondtam el semmi újat, csak segítettem összekapcsolni benned a munka és a magassági energia külön-külön már megismert jelentését.

A lépcsőn az F miért függőleges irányú? Miért nem szerepel vízszintes erő?



Mi van akkor, ha nem csak ívelt úton mozgatjuk a dobozt, hanem egy lassú és igazán kacskaringós utat járatunk be vele, felkeltve több neves ideggyógyász figyelmét?

Mi a különbség az előbb megbeszélthez képest? Az, hogy a rajzon látható úton a doboz mozog *lefelé* is. Ilyenről eddig még nem beszéltünk. Megnyugtathatlak, hogy a végeredmény ugyanaz lesz.

Az ÖSSZETETT MUNKAVÉGZÉS fejezetben olvashattál egy tételt:

Ha a munkavégzés során az erő iránya vagy nagysága változik, akkor a munkát szakaszokra kell bontani, és az azokon végzett munkákat összeadni. Egy szakaszon belül az erővektor változatlan legyen.

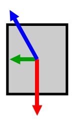
Hogyan változik az erő iránya és nagysága a rajzon? **…** **…** Gondolkozz el komolyan.

Az egyesített mozgástörvény azt mondja ki, hogy ha a testre ható erők eredője nem nulla, akkor a test gyorsulni fog, a dinamika alaptörvényében leírt F=m·a összefüggés szerint. A dobozra mindenképpen hat egy erő, mi ez? **…**

Én a nehézségi erőre gondoltam, ami akkor is hat, ha a dobozt elengedjük. Van egy másik erő is, az, amivel mi tartjuk a dobozt. Mi történik, ha a mi erőnk nagysága eltér a nehézségi erő nagyságától? **…**

Akkor a két erő eredője nem nulla. Tehát: a doboz gyorsulna: leesne vagy felrepülne. De mi a dobozzal *lassan* hadonászunk, azért, hogy a jelentős sebességváltozás zavaró tényezőjét kivegyem a problémából. Így a valóságban a doboz sebessége nem változik. Következtetés: ha a sebesség nem változik, akkor a dobozra ható erők eredője nulla. Ebből mi derül ki a mi erőnkről? **…**

Az, hogy eszerint a mi erőnk végig azonos nagyságú a nehézségi erővel. A nehézségi erő változik? Nem. Akkor változik a mi erőnk? Akkor nem változhat. *A mi erőnk állandó nagyságú.*



Akkor mi van, ha a mi erőnk akkora, mint a nehézségi erő, de nem függőleges? Rajzold le magadnak, és rögtön látod a *nem nulla* eredőjüket. Most mondtam el, hogy ilyenkor a test gyorsulna, vagyis ez a helyzet elfelejthető. *A mi erőnk állandó irányú is, függőleges.*

Tehát a rajzon a test helye változik, a tömegközéppontja kanyargós utat jár be, de a dobozra ható erőnk állandónak tekinthető, a változásai itt elhanyagolható nagyságúak.

Akkor mitől kanyarog a doboz útja? Mert valójában mégis vannak kis erők, apró gyorsulások, de elhanyagoljuk őket, ebben a problémában nincs jelentőségük.

Kapásból: hogy szól az egyesített mozgástörvény? Keresd is meg!

Az összetett munkavégzés idézett tétele szerint akkor kell szakaszokból összeadni a munkát, ha az erő iránya vagy nagysága változik. De ahogy megállapítottuk, most egyik sem változik. Vagyis a kanyargós utat vehetjük egyetlen munkaszakasznak, amelyre még mindig érvényes a $\mathbf{W}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}_F$ szabály. Az **F** erő a nehézségi erővel azonos nagyságú, tehát $\mathbf{F}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{g}$. A $\mathbf{d}_F$ elmozdulás egyenes, és függőleges, nincs rá hatással az oldalirányú elmozdulás. Vagyis ez gyakorlatilag a test *magasságának változása*. $\mathbf{d}_F=\Delta\mathbf{h}$. A

W munka célja itt a magassági energia változtatása. Ha a munka hatásfoka 1, akkor a teljes munka magassági energiává alakul, azaz $\Delta E_h = W$. Rakjuk össze a kapott egyenlőségeket!

$$\boxed{W = F \cdot d_F \quad = \quad m \cdot g \cdot \Delta h = \Delta E_h}$$

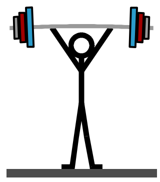
A magassági energia változása független a test által megtett út hosszától és a vízszintes irányú elmozdulástól. Az értéke minden esetben a test nehézségi erejének (súlyának) és a magasság-változásnak a szorzata.

Ennek feltétele, hogy a magasság mindvégig csak a munkavégző erő hatására változzon.

A feltétel azt jelenti a gyakorlatban, hogy a testet *sem ejteni, sem dobni* nem szabad. Ha mégis történik ilyen, akkor a munka és az magassági energia változása nem lesz egyenlő, mivel a magasságváltozás egy része a mi munkánk nélkül következett be.

Szóval az előbbi szuperkanyargós úton is csak annyi számít, hogy a doboz milyen magasságból milyen magasságba került. Egyébként a rajzon láthatod, hogy részletenként megjelölgettem a le- és felfelé történt elmozdulásokat, és láthatod, hogy a $\mathbf{d}_f$ vektor pont az összege ennek az öt vektornak. De amint kiderült, ez teljesen mindegy.

Az erőemelők versenyein a súlyt nem szabad ledobni, hanem lassan le kell tenni, vagyis aközben is emelni, tartani kell. A képen látható versenyző felemeli a 280 kg-os súlyt 155 cm magasra, háromszor kinyomja a feje fölé, átlagosan 208 cm magasra, majd a szabálynak megfelelően, "kontrolláltan" leteszi. Összesen mennyi a súlyon végzett fizikai munkája? …



A válasz nagyon egyszerű, és a számszerű adatokat csak félrevezetésül soroltam fel. A súly hosszú útjának mi volt a kezdőpontja? A padló. A végpontja? A padló. Az elmozdulás? Nulla. A versenyző a súly *teljes* útját erőkifejtéssel kísérte végig? Igen. A munka összeadogatható lenne az útszakaszokon végzett munkákból, de mivel vehetjük úgy, hogy folyamatosan ugyanazt az erőt fejtette ki változatlan irányban, felfelé, ezért a munka összege az erő szorozva az elmozdulással. Nulla.

És ha ledobja a súlyt? Akkor kimarad egy negatív munkaszakasz, így az összmunka nullánál nagyobb.

Egy test **magassági energiája** a tömegközéppontja magasságának és a test súlyának a szorzata.

A magasságot mindig valamilyen alapmagasságtól mérjük. Az alapmagasság kiválasztása a feladattól, a helyzettől függ, *nincs rá előírás*. Ezért néha jobb **a magassági energia változását** (ΔE_h) számolni.

Az energia nullszintje a kijelölt 0 magassághoz tartozik.

Ha el akarjuk kerülni, hogy egy magassági energia értéke vagy egy magasság negatív legyen, akkor a nullszintet helyezzük minden másnál alacsonyabbra.

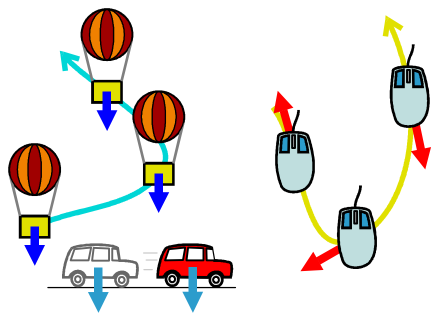
A munkatétel érvényes: a test magassági energiája rajta végzett munkával változtatható meg.

Egy test magassági energiája más mechanikai energiává alakulhat át, ha a test magassága csökken.

A magassági energiát sok helyen **helyzeti energiának** hívják.

Konzervatív erőtér

A konzervatív erő nem egy eddig még meg nem ismert erőtípus, hanem a már ismert erők sorolhatók a **konzervatív** és a **nem-konzervatív** erők csoportjaiba, a munka kapcsán.



A konzervatív erőtípus a munkavégzés közben **az irányát nem változtatja**. Amikor a gravitációnak engedelmeskedve egy test leesik, akkor a gravitációs erő munkát végez a testen. Ha a léghajó emelkedik, a gravitációs erő akkor is hat rá, csak a munkája negatív. Az elmozdulás történhet *oldalirányba* is, mint az autónál, a gravitációs erő mégis mindvégig ugyanabba az irányba mutat. A gravitációs erő konzervatív erő.

A konzervatív erő *időben állandó*. Ez azt jelenti, hogy **az adott helyen az erő mindig ugyanannyi**.

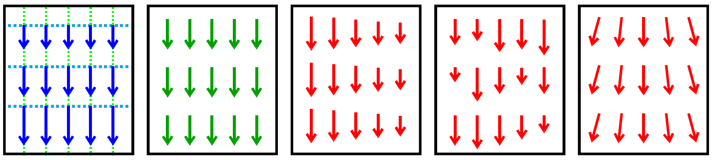
A piros nyilak a mozgatott egérre ható csúszási súrlódási erőket mutatják. Ezek mindig a mozgással ellentétes irányúak, de a mozgás iránya változik, ezért a súrlódási erő iránya is változik. A súrlódási erő nemkonzervatív erő.

A "konzervatív" erő, jegyezd meg erről, képes összegyűjtött potenciális energiát tárolni, *konzerválni*. Mindjárt elmondom, hogyan.

A léghajót a levegő felhajtóereje emeli, az úszógumit a víz felhajtóereje. Ezek vajon konzervatív erők?

Az **erőtér** egy elméleti fogalom, és nem láthatsz belőle többet, mint amennyit most magad körül a gravitációs erőtérből látsz. (Vagyis semmit.) A gravitációs erő erőteret alkot. Az erő akkor válik láthatóvá, amikor egy testre hat. Ha valahol a körülötted levő térben elhelyezel egy testet, akkor a test lefelé mozdul, vagy próbál mozdulni, igazolva, hogy egy erő hat rá. Az, hogy a testre erő hat, bárhová is teszed a testet, azt jelzi, hogy a test egy erőtérben van. Ha a testet csak egy picit teszed odébb, ott is megmarad a nehézségi ereje, mert a gravitációs erőtér *folytonos*, nincsenek benne hézagok, üres sávok.

A konzervatív erőtér folytonos, az erővektorai egymással párhuzamosak, időben állandóak, a nagyságuk az erővonalakra merőleges vonalakon azonos.



(Igazság szerint ettől eltérő szerkezetű erőterek is lehetnek konzervatívak, de ezt hagyjuk.)

Az ábrán erőtereket látsz, ellenőrizhetjük, hogy teljesül-e rájuk a konzervativitás mindegyik feltétele. **Erővonal**nak az egymást követő vektorok által adott vonalat nevezzük. Ezek sem láthatóak, csak a rajzokon léteznek.

A kék erőtér erővonalai párhuzamosak. A rajzon csak öt erővonal van, de valójában végtelenül sűrűn vannak egymás mellett erővonalak, csak nem lehet mindet lerajzolni, mindenesetre ez az erőtér *folytonosnak* tekinthető. Ez nem animáció, de becsszóra állítom, hogy a nyilak nem hullámzanak, hanem az erő változatlan marad minden ponton, tehát *időben is állandó*.

Az erővonalakra merőlegesen meghúztam három segédvonalat. Ha egy ilyen vonalon végigmegyünk, azt találjuk, hogy a vonalon az erők nagysága *végig azonos*. A kék erőtér konzervatív.

Megjegyzés: az erőterek nem csak síkban, hanem *térben* léteznek, csak 3D ábrán lennének ábrázolhatók. A térbeliségből az következik, hogy az erővonalakra merőleges vonalak helyett inkább egy merőleges sík felületet kellene mutatnom. A neten kutatva hamar találkozhatsz az ekvipotenciális felületek emlegetésével, hát ezek azok. De ennyire nem kell belemerülnünk.

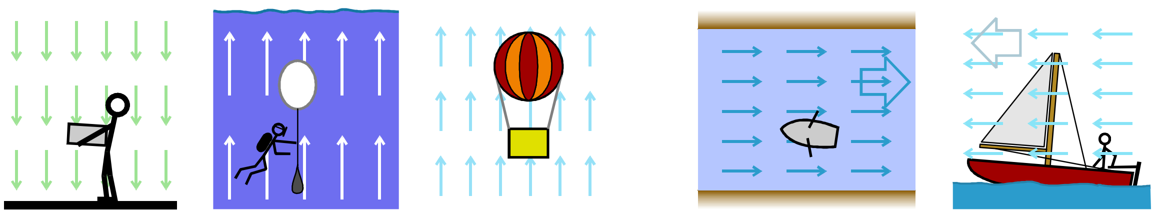
A zöld erőtér tökéletesen konzervatív, *homogén* erőtér. A homogenitás a sűrűség kapcsán már szóba került, és azt jelenti, hogy egyenletes eloszlású. A homogén erőtérben nem csak az erővonalakra merőleges egy-egy vonalon, hanem az egész erőtér *minden* pontján azonos erő uralkodik. Ebből eredően az elmozdulás és a munka egymással mindig egyenesen arányos, inhomogén erőtérre ez nem igaz.

A kék erőtérben a keresztirányú vonalak mentén az erők mindig állandók, ezért konzervatív. De az erő hosszirányban nem egyenletes (lehetne akár hullámzó is). Ez az erőtér *inhomogén*.

A három piros erőtér nemkonzervatív. Az elsőben keresztirányban az erők nem állandóak, a másodikban teljesen összevisszák, a harmadik példában viszont az erők nem párhuzamosak.

A gravitációs erőtér konzervatív. Igaz, hogy ha elég távolról kezdjük nézni, ahonnan a Föld már gömbölyű, akkor a gravitációs erővonalak már nem párhuzamosak, de ezzel nem kell törődnünk. Konzervatív erőtér a víz vagy a levegő felhajtóereje is, az utóbbi felfelé haladva érezhetően gyengülő, vagyis nyilvánvalóan inhomogén. Egy folyó sodrása egy egyszerű példában szintén vehető konzervatív erőtérnek, de csak a parttól elég távol. Vehetjük konzervatívnak a szél erejéből álló erőteret is, ha kizárjuk az örvénylést, ingadozást. Ebben a két esetben a víz és a levegő mozog, a közegellenállása okozza a létrejövő erőket.

Az egyszerűség kedvéért az összes felsorolt erőteret homogén, tökéletesen konzervatív erőtérként fogjuk kezelni.



Konzervatív erőtér van egy olyan helyen, ahol ha elhelyezel egy tárgyat valahová, azt mindenhol *ugyanabba az irányba* húzza valami erő, amely egy szabályos rendbe sorakozó erősokaság eleme, a szabályokat az előbb felsoroltam. Nagyon leegyszerűsített esetben az erők egyformák.

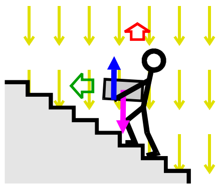
A tér egy pontja több erőtér hatása alatt is lehet. Ahol fúj a szél, ott is van gravitáció, stb.

Láttál már mágneses erővonalakat. Szerinted a mágneses tér konzervatív?

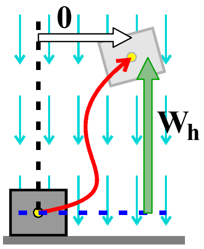
A konzervatív erőtérnek a fentiek nem igazán pontos meghatározásai voltak. Az igazi fizikai meghatározás a következő:

Konzervatív vagy útfüggetlen az az erőtér, amelyben ha egy testet egy adott pontból egy másikba viszünk, akkor az ezzel végzett munka független a két pont közötti útvonal alakjától.

Mivel a magassági energiáról épp ezt állapítottuk meg két oldallal ezelőtt, újból kiderül hogy a gravitációs erőtér konzervatív. Most ugyanazt fogalmazhatjuk meg egy kicsit másképp. A definíció nem csak azt mondja, hogy a konzervatív erőtér ilyen, hanem azt, hogy ha egy erőtér ilyen, akkor az konzervatív.



Ismétlés. Amikor egy ládát kellett felvinni a következő emeletre, akkor végig kellett cipelni a folyosón a lépcsőig, ott felmenni, majd végig a másik folyosón. A munka végül csak annyi, amennyit a láda felfelé mozgatásával megtettél, mert a kifejtett erőd mindvégig felfelé mutat, és $\mathbf{W=F_d \cdot d}$. Az erőd azért mutat mindenhol felfelé, *mert a gravitáció konzervatív erőterében a láda mindenhol lefelé akar esni, neked ezt felfelé ható erővel kell megakadályoznod.* Ha a ládát elengeded, az az erőtérnek engedelmeskedve leesik. Ha kicsit odébb viszed, akkor is, mert a gravitációs erőtér folytonos, és az erői párhuzamosak. Az erőddel *az erőtérrel szemben* végzel pozitív munkát.



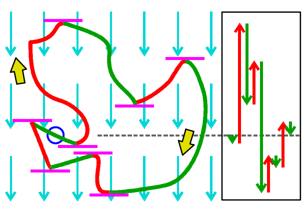
Ezt a dobozt pedig elmozgatjuk (felemeljük) az egyik pontból a másikba, egy kanyargós úton. Összességében h magasságba emeltük a testet, a függőleges elmozdulás h. Az erőtér lefelé hat, a testet lefelé vinné, ezért a test mozgatásához nekünk felfelé kell erőt kifejtenünk, és most csakis arra. Oldalirányba nem kell erő, ezért oldalirányban a végzett munkánk 0. Felfelé irányban kellett erő, a munka W_h. Az, hogy a piros útvonal *milyen hosszú és milyen alakú*, egyáltalán nem érdekes.

Hogy minek mondom el mindezt megint? Ezeket már megbeszéltük a magassági energiáról szóló fejezetben. Most elmondtam azt is, hogy azt a gravitáció, mint konzervatív erőtér működése magyarázza. Ebből az következik, hogy ahogy a gravitációs erőtérben magassági energiát tudunk létrehozni, ugyanúgy más konzervatív erőterekben másféle (potenciális) helyzeti energia lesz létrehozható. Általánosítjuk a gravitációnál megfigyelteket. Ez az egyik fő előnye annak, hogy a fizikában szigorú szabályokat kötünk össze szigorú logikával.

Milyen az inhomogén konzervatív erőtér?

Konzervatív erőtérben bármilyen önmagába záródó úton végzett munka végösszege 0.

A rajzon egy karika jelöli azt a helyet, ahonnan indulva egy testet mozgatni kezdünk a konzervatív erőtérben. Mindig mi végzünk pozitív munkát akkor, amikor legalább részben az erőtérrel szemben mozgunk, ezek a szakaszok piros színűek, és negatív a munkánk, amikor az elmozdulás függőleges (azaz erővonal-irányú) összetevője az erőtér irányába mutat, ezek a zöld szakaszok. Lila vonalakkal jelöltem meg, ahol megfordul a munka iránya és előjele.



A magassági energiáról beszélve ugyanezzel már találkoztunk, akkor a piros szakaszokon felfelé viszünk valamit, a zöld szakaszokon lefelé, de nem ejtve.

Ezen az útvonalon végül újra eljutunk a körrel jelzett kiindulópontig. Megtehetjük ezt a sárga nyilak irányában vagy ellenkezőleg is. Ha könnyebb úgy összehasonlítani ezt a mozgást és munkavégzést az eddig megbeszéltekkel, ha csak egy-egy útszakaszon való mozgást nézel egyszerre, akkor megfigyelheted, ahogy az ábra jobb oldalán a pályaszakaszokat "kivonatoltam" egy-egy függőleges elmozdulással. A hurokpálya bejárásakor ezek az elmozdulások sorra összeadódnak, a végösszegük **0**.

A súlyemelő, amikor felemelte, egy hosszú, le-föl haladó pályán mozgatta, majd ugyanoda leetette a súlyt, végig erőt fejtett ki a konzervatív erőtérrel szemben, és a munkája fizikai szempontból nézve épp ezért a legvégén **0** lett.

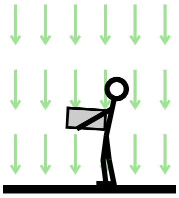
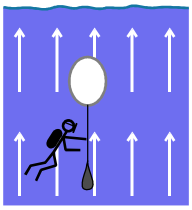
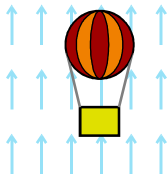
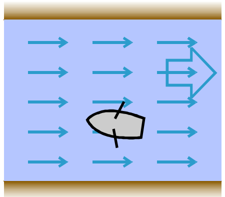
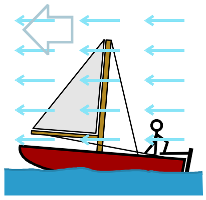
A példák csak olyan esetekre működnek, amikor olyan zavaró erők kimaradnak a rendszerből, mint például a súrlódás. *Egyszerre több* erőtérben végzett munka pedig összegezhető.

Ez a szabály a garancia arra, hogy ha egy munkát (veszteségek nélkül) befektetsz magassági energia létrehozásába, akkor azt hiánytalanul kapod vissza később. Ha a le-föl mozgások végeredménye energianyereség lenne, az egy út volna egy örökmozgóhoz. Ha energiaveszteség, az viszont lehetetlenné tehetné számunkra a mechanikai gépek megépítését.

Helyzeti energia

A helyzeti energia a potenciális mechanikai energiáknak az a csoportja, amikor az energiát egy test mindössze azzal tárolja, hogy egy konzervatív erőtér valamelyik pontján van. A MAGASSÁGI ENERGIA a helyzeti energiák legismertebb példája, és szinte minden lényegeset megbeszéltünk abban a fejezetben. Itt csak általános érvénnyel elmondom az ott megbeszélt legfontosabb szabályokat.

Sok tankönyv magát a magassági energiát hívja helyzeti energiának.

A helyzeti energia lényege mindig az, hogy a test egy állandó irányba el akar mozdulni. Ez az irány mindig az erőtér erőinek iránya. Amikor ezt az elmozdulást megengedjük neki, munkát végez. Például leesik egy nehezék, felszáll egy léggömb. Amikor a testet visszatesszük a kiindulási helyére, *nem tudjuk kiemelni az erőtérből*, ezért mi az erőtérrel szemben kénytelenek vagyunk munkát végezni a testen. A különféle veszteségek miatt a mi munkánk mindig több valamivel, mint amennyit végül a testtől munkaként megkapunk.

Amikor a testbe a helyzeti energiát betöltjük, akkor a testet mindig az erőtérben hátrafelé mozgatjuk. (Mintha felhúznánk az íjat.) Például amikor felemelünk egy ládát, a "fel" a gravitációs erőtérben "hátrafelé" mozgás, az erőtér erőivel ellentétes irányú. Amikor a test helyzeti energiája felszabadul, annak során a testet az erőtér előrefelé mozgatja. **A testben tárolt helyzeti energia az erőtér erőinek irányában tud hasznosulni.** A tárolt energia *mennyisége* attól függ, hogy a test mekkora "kifutási" távolságon tudja azt munkaként átadni.

Bármilyen irányú is az erőtér, a helyzeti energia szempontjából csak annak az elmozdulásnak a mértéke számít, ami az erővonalak irányában zajlik. A keresztirányú elmozduláshoz (zavaró erők hiányában) nem kell erő, ezért az energiát sem termel, nem is fogyaszt.

A tárolt helyzeti energiát a test mindig a mozgásával végzett munkaként adja vissza.

A munkatétel általánosságban a helyzeti energiára is érvényes:

$$\Delta E = \sum_i W_i$$

vagyis a helyzeti energia változása a testen végzett munkák összegével egyenlő.

$$\boxed{E_p = F \cdot z}$$

vagyis a helyzeti energia ($\mathbf{E}_p$) függ attól az $\mathbf{F}$ erőtől, amit az erőtér a testre kifejt (magassági energiánál ez a súly), és a testnek a nullszinttől mért távolságától ($\mathbf{z}$).

A nullszint most is merőleges az erővonalakra, és bárhol elhelyezhető. A z távolság a mindenkori nullszinttől mérendő, a 0 helyzeti energia is ezen a helyen nulla. Ha a nullszinttől függetlenül akarjuk a helyzeti energia változását kifejezni, akkor az a nullszinttől mért távolság *változásával* arányos:

$$\boxed{\Delta E_p = F \cdot \Delta z}$$

A test helyzeti energiáját nem változtatja meg olyan elmozdulás, amely nem változtat a tömegközéppontjának a nullszinttől mért távolságán.

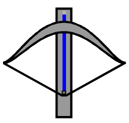
Talán segít, ha összefoglalom egy táblázatban a magassági energiánál megbeszélt összes dolgot úgy, hogy mindennek megadom az általánosan a helyzeti energiákra értelmezett megfelelőjét. Ne felejtsd el, hogy **a magassági energia is egy helyzeti energia**.

magassági energia	minden helyzeti energia
Alapja a gravitációs erő. A gravitációs erőtér erővonalai függőlegesek, egymással párhuzamosak.	Alapja egy konzervatív erőtér. Az erővonalak párhuzamosak, az irányuk az erő forrásától függően bármi lehet.
Energia létrehozásához a testet felfelé kell elmozdítanunk.	Energia létrehozásához a testet az erőtér irányával ellentétesen, "hátrálva" kell elmozdítanunk.
A test vízszintes irányú elmozdítása nem változtat az energián.	A test erővonalakra merőleges irányú elmozdítása nem változtat az energián.
A magassági energia a test tömegközéppontjának a magasság nullszintjétől való távolságával arányos.	A helyzeti energia a test tömegközéppontjának a nullszinttől való távolságával arányos.
A magasság nullszintje (**h_0**) egy vízszintes vonal (sík), amit szükség szerint bármilyen magasságban kijelölhetünk.	A távolság nullszintje (**z_0**) az erővonalakra merőleges vonal (sík), amit szükség szerint bárhol kijelölhetünk.
Az energia a testre ható nehézségi erővel is egyenesen arányos.	Az energia az erőtér által a testre kifejtett erővel is egyenesen arányos.
A magassági erőtér képlete **$E_h=m\cdot g\cdot h$**, ahol **$m\cdot g$** a test nehézségi ereje, **h** a nullszinttől mért magasság.	A helyzeti energia képlete **$E_p=F\cdot z$**, ahol **F** az erőtér ereje az adott ponton, **z** a nullszinttől mért távolság.
Az energia felszabadulásakor a munka a test lefelé mozgásából kapható meg.	Az energia felszabadulásakor a munka a testnek az erőtér irányában történő mozgásából kapható meg.

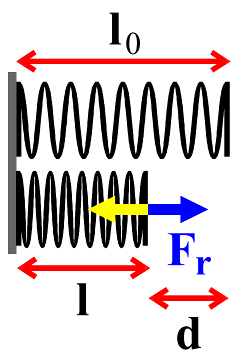
Rugalmassági energia

A munka egyik formája, amikor egy testet elmozdítunk. Egy másik formája **testek alakváltozását** okozó munka. A meghajlított vasrúd, az eltört bot vagy a szétlapított gyurma olyan munkánkat fogyasztotta, ami visszanyerhetetlen veszteség, elnyelődött, szétszóródott.

Az alakváltozás lehet rugalmas is, amikor a test az alakját visszanyeri, amint a rá ható deformáló erő megszűnik. Az *Erők* témakör ALAKVÁLTOZÁSOK és RUGALMASSÁGI ERŐ fejezetei részletesen ismertették az ezzel kapcsolatos fogalmakat és szabályokat.



Munkát kell végezni ahhoz, hogy a testen alakváltozást érjünk el, de ha a test rugalmas, akkor a rajta végzett munkát potenciális energiaként tudja tárolni, és később ellentétes irányú alakváltozásként visszaadni. Ennek az egyik iskolapéldájaként mutattam be a POTENCIÁLIS ENERGIA fejezetben a számszeríjat. A szerkezetre először erőt kell kifejtenünk, a húr hátrahúzásával, amivel az íj testét alakváltozásra bírjuk rá. Ebben a helyzetben rögzítve a betöltött energia tárolható, szállítható, majd a kívánt pillanatban visszanyerhető, az íj húrjának visszacsapódása alakjában. Az energiát az íj rugalmas alakváltozása hozza létre és tárolja, ezért ezt **rugalmassági energia** néven soroljuk be a potenciális energiák közé.



Tudjuk, hogy a rugók, gumiszálak és más rugalmas testek egy részére érvényes a lineáris erőtörvény:

$$F_r = D\cdot(l_0 - l) \quad \text{vagy} \quad F_r = D\cdot d$$

ahol $\mathbf{F_r}$ a rugóban ébredő erő, **D** a rugóállandó, $\mathbf{l_0}$ a rugalmas test mérete (hossza) a terheletlen állapotban, **l** a test jelenlegi mérete, **d** az összenyomódás. Ha a terheletlen méret nem ismert, akkor használható egy másik képlet:

$$\Delta F_r = D\cdot\Delta l$$

amelyben csak a méret és a rugóerő változásai kapcsolódnak egymáshoz a rugóállandóval. Ez nagyon hasonlít ahhoz, amikor egy helyzeti energia nullszintjét kijelöljük valahol, hogy ahhoz igazodva számolni tudjuk az elmozdulást és az energiát.

A **rugalmassági energia** képlete a lineáris erőtörvény szerint működő rugó esetén a következő:

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (l_0 - l)^2$$

ahol $\mathbf{E_r}$ a rugalmassági energia, $\mathbf{D}$ a rugóállandó, $\mathbf{l_0}$ a rugó hossza a terheletlen állapotban, $\mathbf{l}$ a rugó jelenlegi hossza. $\mathbf{l_0}$-$\mathbf{l}$ helyett használható a $\mathbf{d}$ is.

Ha a terheletlen hossz nem ismert, akkor használható egy másik képlet:

$$\Delta E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta l)^2$$

Ha az adott rugalmas test deformálódása és visszaható ereje nem a lineáris erőtörvény szerinti kapcsolatban van egymással – például egy gumigolyóban –, akkor ezek a képletek nem jók.

A rugó "erőtere" az erőmentes helyzet és a teljesen összenyomott/megnyújtott helyzet közötti területre korlátozódik, általában nem is útfüggetlen, ezért a rugóerőt nem tekintjük konzervatív erőnek. A rugalmassági energia azért sem vehető helyzeti energiának, csak potenciális energiának, mert az energiát a rugó tárolja, amely nem változtatja meg a helyét, csak az alakját.

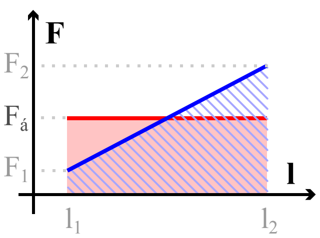
Mi a rugóállandó mértékegysége?

A rugón végzett munka meghatározása kissé eltér az eddigi gyakorlattól, bár az alapelv hasonló: az erő és az erőirányú elmozdulás szorzata. Az elmozdulás most nem az egész rugóé, mert az a helyét normális esetben nem hagyja el, hanem a rugó nyomott/húzott vége mozdul el.

A problémát a munka (az energiaváltozás) kiszámításában az okozza, hogy a rugó (és más rugalmas test) ereje nem állandó, hanem az alakváltozással arányosan, egyenletesen változik. A rugóra kifejtett munkavégző erő pedig minden pillanatban pontosan annyi, amennyi a rugó ereje az adott összenyomódásnál. Azaz: a $\mathbf{W=F \cdot d_F}$ képletben az $\mathbf{F}$ folyamatosan változik.

Ha a rugó kezdeti – nem a terheletlen – hossza $\mathbf{l_1}$, a munkavégzés utáni hossza $\mathbf{l_2}$, akkor tartozik hozzájuk egy arányos $\mathbf{F_1}$ és $\mathbf{F_2}$ erő. A megoldás alapja az, hogy az erő változása egyenletes, a hosszváltozással egyenesen arányos. Ennek köszönhetően a munka számításához a két erő számtani közepét vehetjük. A munka elején a rugóerő kisebb az átlagnál, a végén pedig nagyobb, ezért úgy vesszük, hogy **a munkát a két erő átlaga ellen végeztük**.

A tankönyvedben valószínűleg van egy, az alábbihoz hasonló diagram. Azt ábrázolja, hogy hogyan számítsuk ki az egyenletesen változó erővel egy adott elmozduláson végzett munkát. A kék vonal az erőt mutatja az összenyomás függvényében. Bármilyen alakú is ez a vonal, a munka értéke egyenlő a vonal alatti terület mérőszámával.

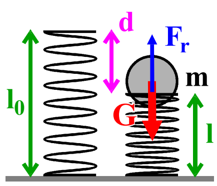


Az állítás matematikai igazolása nekünk nem érdekes. De ha esetleg az *integrál* fogalmát látod emlegetni bármikor, akkor tudd, hogy az való a függvénygörbe alatti terület kiszámítására. Lehet, hogy 12.-ben (4.-ben) tanulni is fogod, de nem biztos.

A vonal alatti terület a bevonalkázott trapéz. Mértanból régebben már tanultad, de szabad szemmel is jól látszik, hogy ez a terület egyenlő a rózsaszín területtel. A piros vonal épp felezi a kék vonalat ezen a szakaszon, és a F tengelyen az F_2 és F_1 számtani közepe tartozik hozzá. Vagyis egy korrektebb módszerrel is arra a következtetésre jutottunk, hogy a munka vehető úgy, mint ha ezzel az átlagerővel végeznénk. Nem szórakoztatlak vele, de az energiaváltozás (azaz a munka) képlete ebből kimatekozható.

Mutatok egy nagyon érdekes, paradoxonszerű feladatot.

Van egy rugó, a rugóállandója $\mathbf{D}$, a terheletlen hossza $\mathbf{l_0}$. Ráteszek egy $\mathbf{m}$ tömegű golyót. A rugó persze összenyomódik, és végül megállapodik egy olyan helyzetben, amelyben az összenyomódás hossza $\mathbf{d}$, a rugó hossza $\mathbf{l}$. Megállapíthatjuk, hogy a rugó energiája 0-ról $\mathbf{1/2 \cdot D \cdot d^2}$ lett. A golyó által a rugóra gyakorolt erő $\mathbf{G=m \cdot g}$, a rugó ellenereje $\mathbf{F_r=D \cdot d}$. A golyó magassági energiája $\mathbf{m \cdot g \cdot d}$-vel csökkent. Ezen a két energiaváltozáson kívül más nem látunk. Ha a rugalmassági energia növekedésének a csökkenő helyzeti energia a fedezete, akkor



$$E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d^2 \;=\; m \cdot g \cdot d = E_h$$

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot d = m \cdot g$$

Az egyensúlyi helyzetben az összenyomott rugó ereje egyenlő a golyó súlyával: $D \cdot d = m \cdot g$
Ezt felhasználva kapjuk azt, hogy

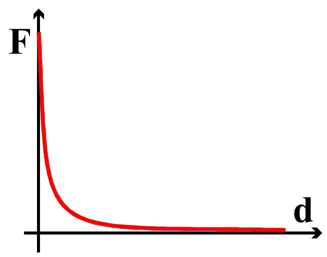
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot g = m \cdot g$$

Ez nyilván nem lehetséges, mert $\mathbf{m}$ és $\mathbf{g}$ is nagyobb 0-nál. *Hol van a hiba?*

Ez olyan feladat, hogy érzék és látás kell hozzá, nem matekozás. Én tudom, hogy mi a magyarázat, ezért elárulhatom, hogy a magyarázat elbújik valahol. Csalás nincs benne, csak egy elsikkadt, de lényeges tényező. A magyarázatot az ÁTALAKULÁSI PÉLDÁK fejezet elején találod. Törd a fejed.

Mágnes

A mágnes is tárol egy olyan típusú potenciális energiát, ami a rugó energiájához kicsit hasonlít, és megérdemel néhány szót. Főleg azért, mert a mágneses erő, a "magnetizmus" mindig is elbűvölte az embereket, a semmiből energiát termő varázslatot látva benne. Így aztán az örökmozgók tervei között sok olyan van, ami mágnesektől várja a vég nélküli mozgás fenntartásához szükséges erőt. Sőt, mindig van, aki azt állítja, hogy az ember testére tett állandó mágnesekkel mindenféle "pozitív energiákat" tud mozgósítani, meg hatni tud a vérben levő vasra, és sajnos ezért az ökörségért egy csomó ember még fizetni is hajlandó nekik.*



A mágnes viselkedésének elvét két év múlva fogod tanulni. A mágnes vonzási erejének még a megfogalmazása is elég bonyolult dolog, de az ábrán levőhöz hasonlító görbét ad. F a vonzás ereje, d a mágnestől mért távolság. Azt látjuk, hogy egy nagy, de nem végtelen nagy erőtől indul, a mágnestől távolodva az erő gyorsan csökken, aztán a változás és az erő is minimálissá válik. Ez a gyors esés az erőfüggvényben korlátozza a mágneses erő munkára fogását.

A mágnes a közvetlen közelébe tett vasdarabot magához húzza, *munkát végez rajta*, tehát a mágnes egy potenciális energia hordozója. A mágneses erőtér nemkonzervatív, és a működése inkább a rugalmassági energiához hasonlít, de a lényeg itt is az, ami máskor is: ahhoz, hogy a mágnes munkát végezhessen, először a vasdarabot el kell távolítani tőle. Ez pedig a veszteségek miatt több munkánkba kerül, mint amennyi munkát a mágnes végül végezni fog. Ha most az jutott eszedbe, hogy egy elektromágnes kikapcsolható addig, amíg a vasat eltávolítjuk tőle, akkor sajnos azt kell mondanom, hogy ez már másnak is eszébe jutott, de az elektromágnes működtetéséhez szükséges *elektromos energiát* is elő kell állítani valahogy, és ezért az eljárást eddig nem tudtuk összességében energianyereségessé tenni

Potenciális energia és kinetikus energia

Amikor egy testet magasabbra emelünk, akkor pozitív munkát végzünk, annak megfelelő magassági energiát tárolva a testben. Amikor a test alacsonyabbra kerül, akkor csökken a magassági energiája, amit vagy mi veszünk át tőle negatív munkával, vagy…

Idézzük fel újra a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

Zárt rendszerben a testek mechanikai energiáinak összege állandó marad. Az energia átrendeződhet, átalakulhat, de nem semmisül meg és nem keletkezik.

Akkor tehát ha egy test magassági energiája csökken, és nem azért, mert valami negatív munkát végez rajta, akkor a felszabaduló magassági energia elmozdíthat vagy megforgathat valamit, vagy alakváltozást okozhat egy rugalmas vagy rugalmatlan testen. Röviden: **a felszabaduló energia részben**

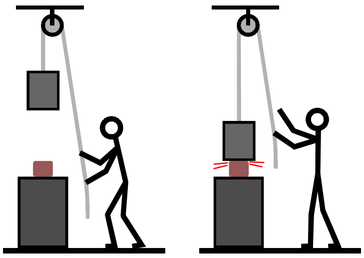
* Az ilyen sarlatánok mindenféle értelmetlen és zavaros szöveggel magyarázzák a tudományukat, amihez persze mi, halandók, nem értünk. Vitatkozni velük nem érdemes, kétkedni igen. Egyet jegyezz meg: *ha egy ilyen ember magyarázatát nem érted, az nem jelenti azt, hogy igaza van.*

vagy egészben átalakulhat más típusú munkává is, amelynek eredményeként utána másféle energiaként is tárolódhat.

A hőveszteség, súrlódás most azért nem számítanak, mert a törvény zárt rendszerre vonatkozik. De ettől még nem biztos, hogy a testek által végzett munka nekünk hasznos, csak annyi biztos, hogy pontosan el tudunk számolni az energiákkal és munkákkal.

Vagyis: ha egy nagy golyó leesik, akkor az meglódíthat egy másik testet, amely összenyom egy rugót, eltárolva benne a kapott energiának azt a részét, amit nem fogyasztott el valami más munka. És még egy csomó lehetőség kitalálható.

A lehető legegyszerűbb példa erre az átalakulásra, ha valamit felemelünk, majd elengedjük. Amikor felemeljük, akkor munkát végzünk rajta azért, hogy magasabbra kerüljön, vagy ahogy még nézni lehet: hátráljon a konzervatív gravitációs erőtérben. Elhelyezzük a testet egy képzeletbeli pálya felső végén, lehetővé téve, hogy azon a pályán végighaladva munkát végezhessen. Aztán megszüntetjük azt az erőt, ami a testet mozdulatlanul tartotta, és a test esni kezd.

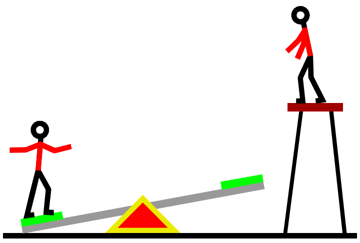


Csökken a magassági energiája, de ezzel mi mit nyerünk? Több lehetőség is van: a leeső test húz valamit (emlékszel a mobilhordó kis kocsira?), haladás közben nyom valamit, vagy amikor leérkezik, akkor meglök, megüt valamit. Egy kovácsműhelyben ez bevált módszer mindmáig, csak éppen régen egy kötéllel húzták fel a kalapácstömböt, ma meg hidraulikus gépezet emeli a magasba.

A magassági energia végez alakváltoztatást a vasdarabon? Szerinted? **…**

Nem a magassági energia deformálja a vasat. A magassági energia először mozgási energiává alakul át, és az végzi végül az alakváltoztatási munkát.

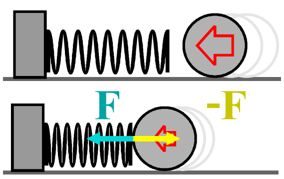
Mi a csiga szerepe ebben a helyzetben?



Kicsit másik példát látsz ezen a képen. Az állványon levő artista azt mondja, hogy hepp!, és leugrik, rá a libikóka magasban levő végére. Csökken a magassági energiája, és teljes egészében mozgási energiává alakul. Amikor megérinti a libikókát, a mozgási energiája egy hosszú, bár gyors folyamatban elmozdítja a kétkarú emelőt, amelynek a másik végén levő társa ezzel gyorsulni kezd, mozgási energiát kap. Csakhogy eközben emelkedik, nő a magassági energiája, ami csak más energia fogyasztásával lehetséges, a mozgási energia fogyásával, ezért lassul. Egy bizonyos magasságon eljut a mozgása a holtpontig, egy pillanatra a levegőben áll. Aztán újra leesik, és történhet sokféle dolog, ez most már nem érdekes.

Ha a magassági energiákról beszélünk, és össze is hasonlítjuk egymással a két artistáét, akkor lényeges, hogy **közös nullszintet** használjunk. Ha számításokat is végzünk velük, akkor meg is kell adni, hogy mi a nullszint. Ha nem teszed ezt, és a feladat sem mondja, akkor alapértelmezésként elfogadhatjuk, hogy a talaj magassága a 0.

Valamit nem szabad kifelejtenünk az elemzésből. Amikor a jobb oldali artista megérinti a libikókát, az onnantól felfelé mutató, lassító erőt fejt ki rá. De ekkor még van magassági energiája a talajhoz képest! Legvégül az artista a talajszinten fog megállni, ezért ez az energia is elfogy. Vagyis az energia átadása <u>nem egyenletes</u> volt és végül <u>egyszerre kétféle</u> energia tevődött át a másik artistába.



Nézzük meg, mi történik, amikor egy golyó nekigurul egy rugónak, ahogy a képen látod. A golyó a rugó érintése előtti pillanatig állandó sebességgel gurul, van egy mozgási energiája. Amikor a rugót összenyomni kezdi, akkor az ellenerőt fejt ki rá, a golyót negatív gyorsulásra kényszerítve, tehát annak csökken a sebessége, csökken a mozgási energiája. Eközben a rugó egyre jobban összenyomódik. Az energia nem vész el, most éppen egy rugalmas alakváltoztatásra lett fordítva, és a rugó ezt visszanyerhető energiaként tárolja. Amennyivel csökken a golyó mozgási energiája, annyival nő a rugó rugalmassági energiája. Végül a golyó megáll, és a rugó rugalmassági energiájának ekkor <u>pontosan annyinak kell lennie</u>, mint amennyi a golyó mozgási energiája kezdetben volt. A valóságban persze vannak veszteségek, de a feladatokban ezeket nem kell számításba venni, hacsak a feladat közvetlenül meg nem említi.

A golyó lassulása nem egyenletes, mert a rugóerő az összenyomódás közben egyre nő. Ezért a dinamika alaptörvényét nem tudjuk közvetlenül használni a mozgás kiszámítására.

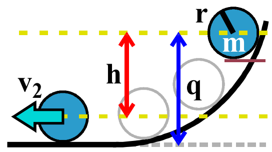
A folyamatokban vannak egyszerűen leírható alappillanatok, például amikor a golyó éppen megérinti a rugót, vagy amikor megáll, vagy amikor az artista leér a talajszintre és így tovább. Ilyenkor az energiákat egyszerűbb lehet kiszámolni, mint egy átadódás közepén, az ilyen alappillanatokban érdemes felmérni az energiák elhelyezkedését és értékeit.

Az m=0,4 kg tömegű golyó v_1=1,2 m/s sebességgel érkezik. Mennyivel nyomja össze a rugót, amelynek a rugóállandója D=45 N/m? Az energiák közül kezdetben csak a mozgási nagyobb nullánál. $E_m=1/2\cdot m\cdot v^2$, ebben az esetben E_m=0,288 J. Az összenyomódás végén a golyó megáll, a mozgási energiája 0 lesz, áthelyeződött a rugóba, felhalmozott rugalmassági energiaként. $\Delta E_r=1/2\cdot D\cdot(\Delta l)^2$., az energia 0-ról 0,288 J-ra változott. Az ehhez tartozó Δl értéke 11,3 cm.

Mi történt a golyó impulzusával? Az értéke nem kérdés, de $I=m\cdot v$=0,48 kgm/s. A golyó megállt, az impulzusa 0 lett, de az impulzus, az energiával ellentétben, nem alakul át, valaminek az impulzusa lesz. A rugót tartja valami a túlsó oldalról, abba megy át, de az rögzítve van az asztalhoz, ezért az asztalba adódik át. De az asztal lábának a tapadási súrlódása feltehetőleg nem szűnik meg ekkora erőlökéstől, ezért az asztal átadja az impulzust a padlónak, a háznak, ami végül átadja a Földnek. Ott nem "eltűnik" az impulzus, hanem hozzáadódik a meglevőhöz, csak megmérhetetlenül kicsi.

Milyen magasra ér fel a másik artista? Ellenőrizd az energiák összegét!

Nézzük meg az egyik klasszikus feladatséma két egyszerű variációját ebben a témában!



Az ábra szerint álló helyzetből elengedünk egy m=0,6 kg tömegű, r=0,1 m sugarú golyót, a tömegközéppontja a padlótól q=0,8 m magasan van. Végül mekkora v_2 sebességgel fog haladni a golyó?

Mi a séma? Magassági energia átalakulása mozgási energiává. Egyszer már számoltunk ilyesmit, amikor a polcról az asztalra löktünk egy dobozt. Úgy csináltuk, hogy kezdetben magassági energia van, mozgási energia 0, leérkezéskor mozgási energia van, magassági energia 0, az összegük nem változott, kész.

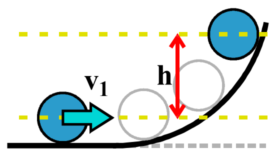
Viszont ott a dobozt csak elejtettük, és az csak leesett, függőlegesen ért az asztalra, *itt viszont vízszintesen gurul!* Nos, a mechanikai energiák átalakulásában pont az a jó, hogy **a mozgási energiának nincs iránya**. A golyó magassági energiája $E_h=m\cdot g\cdot h$. Ahogy látod, $h=q-r$, nekünk azt a magasságot kell nullszintté tennünk, ahol a golyó tömegközéppontja végül haladni fog. $E_h=0{,}6\cdot g\cdot 0{,}7$=4,119 J.

Ha már van számológép a világon, akkor tessék a **g** értékét pontosan használni, 9,80665, de legalább **9,81**, nem tart sokáig beírni. Ha a feladatban azt mondják, hogy 10, akkor lehet 10.

Mennyi volt a mozgási energia odafent? Nulla, hiszen a golyó állt. Mennyi a magassági energia lent? Nulla, ott van a nullszintünk. Mennyi a mozgási energia? $E_m=1/2\cdot m\cdot v^2$. Az energiák összege (E_m+E_h) nem változott, tehát

$$0+4{,}119 = 1/2\cdot m\cdot v_2^2 + 0$$

Ebből v_2=3,71 m/s. És *mindegy*, hogy e pillanatban ezzel a sebességgel milyen irányban halad.

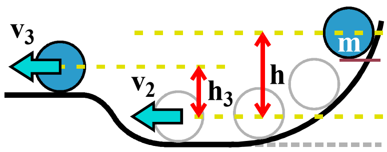


Jöjjön ugyanez visszafelé, mert úgy is lehet. **A golyó érkezik v_1=5 m/s sebességgel, mekkora h magasságra emelkedik, amikor a sebessége 0-ra csökken? A tömege 0,6 kg.**

A séma ugyanaz: mozgási+magassági = mozgási+magassági. Kezdetben mennyi a mozgási energia? $1/2\cdot m\cdot v_1^2$=7,5 J. És a magassági energia? Ha ez a nullszint, akkor 0. Végül mennyi a mozgási energia? A csúcsponton a golyó megáll, vagyis 0.

$$7{,}5 + 0 = 0 + m\cdot g\cdot h$$

Ebből h=1,27 m.



Mi történik a jobbra látható helyzetben? A golyó legurult **h** magasságból, a magassági energiája elfogyott, mozgásivá alakult át az összes, a sebessége $\mathbf{v_2}$. Aztán felgurult a $\mathbf{h_3}$ magas platóra, újra lett valamennyi magassági energiája, és a mozgási annyival kevesebb lett, a $\mathbf{v_3}$ sebesség kisebb. Végül tehát lett valamennyi magassági energiája, és még valamennyi mozgási energiája, de a kettő összege még mindig ugyanannyi.

Ha ki kellene számolnom ugyanezt a gyorsuló mozgás egyenleteivel, nem lennék boldog, de hála az energiamegmaradás törvényének, és az energiaveszteségeket nagyvonalúan elengedő feladatíróknak, egy kis összeadogatással lerendezheted az egészet, a magasság végeredményben $\mathbf{h-h_3}$-mal csökkent, ennyi energia vált mozgássá.

Újra elmondom, mert biztos akarok lenni abban, hogy megjegyezted: Amikor azt mondtam, hogy "a magassági energiája elfogyott", az csak akkor érvényes, ha a 0 magasságot ahhoz a szinthez rendeljük, ahol a golyó a lejtő alján vízszintesen gurul. Bárhol máshol is kijelölhetnénk a 0 magasságot és az energia nullszintjét, és akkor a magassági energia sem "elfogyna", hanem csak valamilyen értékre csökken. Pozitívra vagy negatívra, ez csak a nullszint helyétől függ. Tehát ha bárhol azt olvasod, hogy a magassági energia nullára csökkent, az csak *egy egyszerűsítő megközelítés*, és azt feltételezi, hogy a 0 magasság épp a megfelelő magassághoz van rendelve, a számítás megkönnyítésére. Asztal, padló, föld, tengerszint, a Kékes-tető, a Balaton legmélyebb pontja, a kutyaól teteje, bármi kiválasztható.

Mindig a feladat alapján érdemes eldönteni, hogy mit veszünk nullának. És ha a magassági vagy más helyzeti energiáról bárki bármit mond, az csakis egy bizonyos kijelölt nullszint ismeretében válhat értelmes információvá. Ha nem mondják meg, hogy az hol van, akkor feltételezd a legnyilvánvalóbbat. De ne felejts el gondolni rá.

Mekkora volt a golyó sebessége a legmagasabb ponton?

A tankönyvedben valószínűleg ott áll még egy részlet, ezt nézzük meg. Ha egy magassági energia teljes egészében mozgási energiává alakul át – az előbb láttunk ilyet oda és vissza –, akkor tulajdonképpen a kétféle energia egyenlősége alakul ki, ha a nullákat kihagyjuk az előző egyenleteinkből.

$$E_h=E_m$$

$$m\cdot g\cdot h=1/2\cdot m\cdot v^2$$

A tankönyv rámutat arra, hogy az m-mel itt egyszerűsíteni lehet, és kijön az, hogy egy ilyen helyzetben a test tömegének nincs semmi szerepe, mert

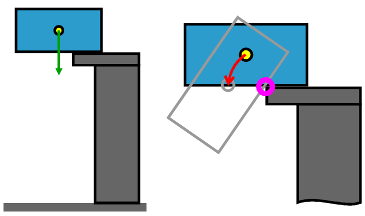
$$\boxed{g\cdot h=\frac{1}{2}v^2}$$

Régebben volt már szó valamiről, ami független a testek tömegétől, emlékszel rá?

Öt mechanikaienergia-típusról beszéltünk: **mozgási, forgási, magassági, helyzeti és rugalmassági**.

$$E_m=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \qquad E_f=\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\omega^2 \qquad E_h=m\cdot g\cdot h \qquad E_p=F\cdot z \qquad E_r=\frac{1}{2}\cdot D\cdot(l_0-l)$$

Ismét megjegyezve, hogy a magassági energia is helyzeti energia, és ha a magassági energiával kapcsolatban olvasol valamit, azt valószínűleg alkalmazhatod más helyzeti energiákra is.



Figyeld meg az ábrát! A téglatest úgy van feltéve a polcra, hogy a súlypontja kijjebb van, mint az alátámasztása. A második rajzon kicsit közelebbről mutatom, és láthatod, hogy a test lebillen. Miért is? Azért, mert a lila körrel jelölt helyen eseti forgáspont tud kialakulni, és erre a pontra viszonyítva a test nehézségi erejének, amely a tömegközéppontban támad, pozitív forgatónyomatéka van. Ha nincs olyan erő, ami ezt azonos negatív forgatónyomatékkal ellensúlyozni tudja, akkor a testnek el kell fordulnia. Nincs semmilyen más erő, a test billen, és leesik.

Mennyi ekkor a test mozgási energiája? Az első pillanatban még nulla.

Ha a padlóhoz illesztjük a nullszintet, akkor a padlóra érve mennyi lesz a test magassági energiája? **…** Attól függ, hogy melyik oldalára esik. Hiszen a magassági energiát a test *tömegközéppontjának* magasságából számítjuk ki, ugye? Ha a test a rövidebb oldalán áll meg, akkor kicsivel több magassági energia marad benne, mint ha a hosszú oldalára lefekve áll meg. De a padlóhoz képest az sem nulla. De nekünk most nem ez a lényeg, hanem az artisták esetéhez hasonló átalakulás.

A testnek van magassági energiája, ami a leeséstől csökken. Mennyi lesz az összes mozgási energiája a padlóra érve? A kérdés nehezebb, mint amilyennek látszik! **…**

Ötféle mechanikai energiát emlegettünk: mozgási, forgási, magassági, egyéb helyzeti és rugalmassági. (Mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó.) A mechanikai energia megmaradásának törvénye ezt mondta: **Zárt rendszerben a testek mechanikai energiáinak összege állandó marad.**

$$\boxed{E_m+E_f+E_h+E_p+E_r=\text{állandó}}$$

Minden mechanikai energiát össze kell adni!

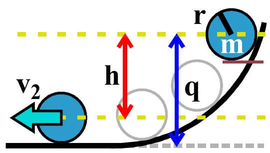
Amikor a test a polc szélén van, a magassági energiája kivételével minden nulla. És amikor leér? Van egy kevés magassági energiája, van mozgási energiája, valamint *van forgási energiája is*. Amikor a test lebillent, akkor forogni kezdett, és ezt a forgást nem állította le semmi. Kipróbálhatod a tolladdal, látni fogod, ahogy esés közben lassan forog.

Így tehát ha konkrét számítást kellene végezni egy ilyen esetről, nem szabadna elfeledkezni arról, hogy a kezdeti magassági energia végül három energiafajtában oszlott szét, amelyekből valószínűleg a mozgási lesz a legtöbb, de a magassági és forgási energiákat nem szabad kihagyni a számításból. Azaz a test egy *kicsivel lassabban esik*, mint ha csak simán leejtenénk, mert az induláskor az energia egy része a forgásba alakult át. Nem azt állítom, hogy kisebb lett a nehézségi gyorsulás, hanem azt, hogy a test sebessége úgy alakul, mintha egy kicsit alacsonyabbról ejtettük volna le forgás nélkül.

Az így keletkező forgás sebességét elég nehéz lenne kiszámítani, ezért ilyen példát nem fogsz kapni, de figyeld meg az általános tanulságot: *minden* energiával el kell számolnod.

Ha az energiák összege állandó, akkor honnan keletkezik az az állandó érték? *Külső*, rendszeren kívüli munka beviteléből. Amikor a testet valaki feltette a polcra, például.

Miért nem nulla a padlóra esett tégla magassági energiája a padlóhoz képest?



Az ábra szerint álló helyzetből elengedünk egy m=0,6 kg tömegű, r=0,1 m sugarú golyót, a tömegközéppontja a padlótól q=0,8 m magasan van. Végül mekkora v_2 sebességgel fog haladni a golyó?

Mi a bajom ezzel? Az előbb megoldottuk, akkor most miért veszem elő megint? Gondold át az eseményt úgy, hogy most *mindenre* gondolsz. **…**

A lelkedre kötöttem, hogy *minden* energiafajtát össze kell adni. "Mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó." Mit hagytunk figyelmen kívül az előbb? Úgy van, a forgást. A golyó a vízszintes pályán már forog is, egyenletes szögsebességgel. Külön fejezet volt erről, A GURULÓ GOLYÓ címmel. Nézd meg, úgyis szükségünk lesz a képletekre.

Akkor most oldjuk meg a példát úgy, hogy tényleg figyelembe veszünk minden mechanikai energiát!

A felső ponton mik voltak a mechanikai energiák? v_1=0, E_m=0 (a golyó áll), E_f=0 (nem is forog), E_h=m·g·h, E_p=0 (nincs jelen más erőtér) E_r=0 (nincs összenyomva semmi). Az alsó ponton E_p=0, E_r=0. De a golyó mozog és forog, ugyanakkor E_h=0 lett.

A rendszerben kezdetben levő mechanikai energia m·g·h=**4,119 J**. Ez változik át mozgási+forgási energiává.

$$0 + 0 + 4{,}119 + 0 + 0 = E_m + E_f + 0 + 0 + 0$$

$$E_m=1/2\cdot m\cdot v_2^2 \quad E_f=1/2\cdot\Theta\cdot\omega^2$$

Minden adatunk megvan a megoldáshoz, és nem is nehéz, figyelj. A golyó szabályosan, csúszás nélkül gurul, emiatt a kerületi sebessége a haladási sebességével egyenlő. A kerületi sebességből a sugár ismeretében kiszámítható a szögsebesség, a gömb tehetetlenségi nyomatéka pedig a tömegből és a sugárból. A v_2 haladási sebesség a kérdés. Mondtam, hogy hol találod meg a képleteket, most felhasználom azokat:

$v_2=r\cdot\omega$, $\omega=v_2/0{,}1$. $\Theta_{gömb}=2/5\cdot m\cdot r^2=0{,}0024$. Az ω-t is behelyettesítve leírom a teljes egyenletet:

$4{,}119=E_m+E_f = 1/2\cdot 0{,}6\cdot v_2^2+1/2\cdot 0{,}0024\cdot(v_2/0{,}1)^2$. Engedelmeddel nem húzom az időt:

$4{,}119=0{,}3\cdot v_2^2+0{,}12\cdot v_2^2$, ebből **$v_2$=<u>3,13 m/s</u>**.

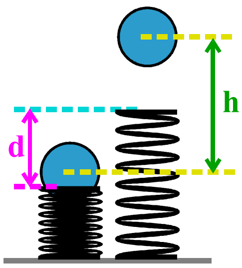
Amikor a golyó forgását figyelmen kívül hagytuk, akkor az eredmény a golyó sebességére **3,71 m/s** volt! Kitűnően látszik, hogy azzal, hogy a magassági energia egy részét a golyó megforgatására kellett elhasználni, *kevesebb alakulhatott át mozgási energiává*, emiatt a sebesség *jelentősen* kisebb lett. Persze ha nem golyó, hanem szánkó csúszik le a lejtőn, annak a gurulása nem tartozik a tervhez, de a lényeg az, hogy most láttál példát arra, amikor megosztottuk az energiát, úgy, hogy közben *egymástól is függ* a két érték. Épp azért, mert egymástól függ, van bennük egy közös tényező, ami most a golyó haladási sebessége volt, a v_2.

Légy szíves ezt a feladatot lépésenként újra átnézni, majd csináld meg önállóan, elölről. Az **új** értékek a következők: **m=1,1 kg, r=0,08 m, q=1,4 m. Mennyi a v_2 sebesség a forgást is figyelembe véve és anélkül?** (Ellenőrzésül: a különbségük 0,79.)

Az ilyen lejtős-gurulós feladatban mindig ott van a kérdés, hogy miért változhat a golyó mozgásának iránya úgy, hogy ahhoz nem kell energia. Már említettem, energia nem kell, de a lejtő közreműködése igen, annak erőt kell kifejtenie lentről és oldalról. Ezek erőlökésként érvényesülnek, az egyik nullára csökkenti a golyó lefelé mutató impulzusát, a másik pedig oldalirányú impulzust ad neki. Ezek a hatások a Földbe vezetődnek, de annak hatalmas tömege miatt észrevétlenek maradnak.

Mennyi lett a példában szereplő golyó impulzusa?

Nézzünk meg még egy átalakulástípust! **Egy D=2100 N/m állandójú rugót a terheletlen hosszához képest d=0,06 méterrel összenyomunk, és ráteszünk egy 2 kg tömegű golyót. A rugóra érvényes a lineáris erőtörvény. Amikor a rugót elengedjük, akkor ebből a helyzetből milyen magasra emelkedik a golyó?**



Elsőként nézzük meg, hogy a rugóban mekkora erő gyűlik össze az összenyomott helyzetben. $F=D \cdot d$, ahol d a terheletlen hossztól mért hosszváltozás. Az erő eszerint F=**126,00 N**. (Hogy látsszon, hogy ez nem kerekítés.)

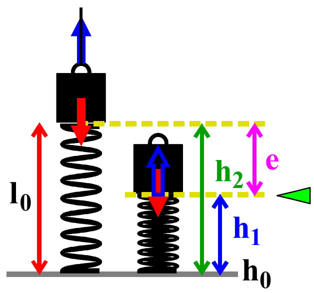
Kiszámíthatnánk a magasságot a függőleges hajítás képletével, de a gyorsítás ütemének megállapítása kicsit problémás. Úgyis a mechanikai energiákat akarom most felhasználni a számításhoz, hiszen az jóval egyszerűbb. Mennyi rugalmassági energia van a rugóban az összenyomott helyzetben? A képlet ismert: $\mathbf{E_r=1/2 \cdot D \cdot (l_0-l)^2}$. Itt $d=l_0-l$, vagyis $E_r=1/2 \cdot 2100 \cdot 0{,}06^2=$**3,780 J**.

Mi történik ezzel az energiával? A golyó megindul felfelé, ahogy rugóból felszabadul a benne tárolt rugalmassági energia, és először átalakul a golyó *mozgási* energiájává, annyira, hogy a sejtésem szerint – amit vagy igazol majd a számítás, vagy cáfol – a golyó fel is fog emelkedni a rugóról. Történhetne úgy is, hogy a rugó csak kinyúlik, és a golyó ott marad rajta, ha az energia nem elég a feldobására is. A mozgási energia végül csökkenni kezd, ahogy átalakul a golyó magassági energiává. Végül elérkezik egy olyan helyzet, amikor az öt energiatípusból (mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó) csak a magassági energia lesz nem nulla, a függőleges hajítás holtpontján. Szóval a 3,78 J magassági energiává alakul, az $m \cdot g \cdot h$-ból azonnal kapjuk, hogy h=**0,193 m**. Felugrik-e a golyó a rugóról? **…**

A rugó 6 centivel volt összenyomva, a golyó pedig 19 centivel kerül magasabbra, vagyis a válasz igen.

Fontos kérdés következik: Honnan kell ezt a 0,193 m magasságot mérnünk?

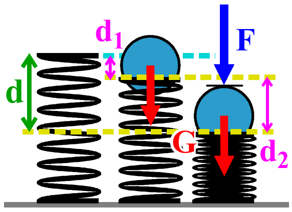
Az egyik lehetőség a kiindulási helyzettől, az összenyomott állapottól mérni. De *van másik lehetőség is*, a terheletlen rugó végpontjától, a fenti képen kékes színnel jelölt vonaltól. Hiszen a rugó energiája akkor lesz nulla, amikor eléri ezt a vonalat, és csak ez után marad magára a golyó, mindeddig a rugó erőt fejt ki, ugyan folyamatosan csökkenőt, de az csak itt válik nullává.



A kérdés egyáltalán nem alaptalan, az eldöntéséhez nézzük meg ezt a másik ábrát. Ezen fordítva járunk el, a terheletlen rugóra teszünk egy testet. A testnek a h_0 szinthez mérve van egy magassági energiája, $m \cdot g \cdot h_2$. Ahogy a testet ráengedjük a rugóra, az összenyomódik, ezt e-vel jelöltem. A test magassági energiája $m \cdot g \cdot h_1$-re csökkent, és a rendszer nyugalmi helyzetbe került. Ha most a magassági energia nullszintjét *feltoljuk* h_1-gyel, hozzáigazítva az előre nem ismert, de végül kialakult egyensúlyi helyzethez, akkor úgy állunk, hogy a testnek 0 a magassági energiája, a rugónak pedig $1/2 \cdot D_2 \cdot (h_2-h_1)^2$ a rugalmassági energiája. Ha a testet ekkor megemeljük a h_2 magasságba, akkor a magassági energiája 0-ról $m \cdot g \cdot (h_2-h_1)$ lett, ugyanakkor a rugó rugalmassági energiája 0. Az egyik teljesen átalakult a másikba. Ez akkor lett lehetséges, amikor a test magassági energiáját a zöld háromszöggel megjelölt magasságtól számítjuk. Hasonlít ez a helyzet ahhoz, amikor az artista ráugrik a libikókára, és az már ellenerőt fejt ki rá, miközben a magassági energiájának átadása tovább zajlik, egészen a földig.

Tehát azt kaptuk, hogy a rugó energiájának átadódását az összenyomott állapottól kezdhetjük számolni, az eredeti példában d-vel a terheletlen hossz alatt. A feladat kérdésére a válasz az, hogy a golyó az összenyomott helyzetből mérve 0,193 m magasra ugrott, a tömegközéppontja ennyit emelkedett.

Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót csak rátesszük? (Nem mennyi*re*! Annak a rugónak nem ismerjük a terheletlen hosszát, és a szó félreérthető.) A képen ez a középső állapot. A golyó tömege 2 kg, vagyis a nehézségi ereje **G**=m·g=**19,6 N**. A rugó ereje d_1 összenyomódásnál válik egyenlővé a golyó súlyával, "$F_r=D \cdot (l_0-l)$", itt ugyanez $G=D \cdot d_1$, ebből $\mathbf{d_1}=G/D=$0,00934 m. 9,34 mm.



Ebből következik, hogy a golyót nyomnunk is kell lefelé ahhoz, hogy a rugó megadott 6 cm-es összenyomódása létrejöjjön. **Mekkora erővel kell nyomnunk?**

Már kiszámoltuk, hogy a rugóerő abban a helyzetben 126 N, tehát *összesen* ekkora erővel kell a rugót terhelni. Azért összesen, mert a rugóra ekkor már két erő hat, a golyó G súlya, plusz az általunk kifejtett F erő. A rugó 126 N-os ereje ezeknek az *eredőjét* egyenlíti ki, mert nyugalmi helyzet van. A mi erőnk tehát **F**=126−19,6=106,4 N.

Mennyi munkát végzünk, amikor a rugót az e=0,06 m hosszváltozásig nyomjuk? Az adatok nem változtak, D=2100 N/m, a golyó tömege 2 kg. Nemcsak mi, hanem a golyó súlya is végez valamennyi munkát, mivel az egy erő, amerre elmozdulás történik. Most két egyszerre történő munkavégzés okoz energiaváltozást. A kérdés *csak a mi munkánkra* vonatkozik. A feladat kicsit bonyolultabb annál, amilyennek látszik.

A munkatétel minden változata azt mondta ki, hogy az energiaváltozást munka hozza létre, méghozzá a testen végzett munkák összege. Ez azzal a remek tanulsággal jár, hogy **a munka a mennyisége a létrejött energiából is megtudható**, emellett az is jó nekünk, hogy a golyó munkáját és a mi munkánkat össze kell adni. Akkor először hagyjuk a golyót dolgozni, és mi a munkánkat csak az után, külön számítási menetben tehetjük hozzá, nem kell egyidejűleg két munkát számolnunk.

Első fázis: a golyó a rugót d_1 hosszal összenyomja. Mennyi a golyó munkája?

Az erőmentes (vagy terheletlen, mindegy) rugóban levő rugalmassági energia $E_{r(0)}$=0. Ha csak rátesszük a golyót, akkor G=D·d_1, ebből d_1=**0,0093 m**, ez már volt. Mennyi ekkor a rugó rugalmassági energiája? $E_{r(d1)}$=1/2·2100·d_1^2 =**0,0916 J**. Ezt teljesen egészében a golyó munkája hozta létre, ami tehát $W_{golyó}$=0,0916 J.

Második fázis: most jövünk mi, és összenyomjuk a rugót összesen d_2 hosszon. A szakasz kezdetekor a rugóban van $E_{r(d1)}$=0,0916 J energia. Az összenyomott rugó összenergiája $E_{r(d)}$=1/2·2100·0,06^2=**3,78 J** lesz, ezt már tudjuk. Az energiakülönbözet a második fázisban kerül a rugóba, azaz W_{d2}=3,689 J. Ennyi a mi munkánk? **…**

Képzeld magad elé, ahogy a rugón levő golyóra ránehezedsz, és lassan összenyomod a d_2 hosszú szakaszon. És most gondold át, hogy milyen erők vettek részt ebben. Te meg a golyó. *Mindketten*. Amikor te nyomod lefelé a rugót, a golyó súlya még mindig hat, és ugyan a golyó egymagában nem tudja ennyire összenyomni a rugót, a súlya hozzájárul az elvégzett munkához. Az elmozdulás közben a rugóra hatott a golyó súlya, és abban az irányban történt az elmozdulás. Akkor bizony a golyó a d_2 szakaszon is munkát végzett. Így van ez akkor is, ha valójában azt érzed, hogy a golyó szeretne felemelkedni, ellenállva a te erődnek. Ez nem a golyó ereje, ez a rugó ellenállása a *ti* erőtökkel szemben.

Azért kellett megtanulnod az erők pontos ábrázolását, hogy aztán használni tudd. Nézd meg a rajzot, látod rajta a piros és a kék erőt is egyszerre. Akkor tehát a kiszámolt W_{d2} munka a *közös* munkátok, ezért ez nem válaszolta meg a kérdést. Más módszer kell. A munkát most nem az energiák változásából tudjuk meg, hanem az *erők és elmozdulások* alapján számítjuk ki. Jegyezd meg a módszert.

A RUGALMASSÁGI ENERGIA fejezetben elmondtam, hogy a lineáris erőtörvény szerint működő rugón történt munkavégzést **az elmozdulás két végpontján kifejtendő erők *számtani közepével* számítjuk**.

Próbáljuk ki. A d_1 szakasz kezdetén a rugóban ható erő 0, a d_1 szakasz végén *G*, ellenőrizd az ábrán. A munka "$W=F\cdot d_F$", az első szakaszon végzett munka tehát

$$W_{d1}=\frac{0+G}{2}\cdot d_1$$

A második szakasz elején az erő G, a végén G+F. Ez az F most a d_2 szakasz végén általunk kifejtett erő, a kék nyíl jelöli, F=106,4 N. Akkor a munka, újra az átlagot véve:

$$W_{d2}=\frac{G+(G+F)}{2}\cdot d_2$$

Összesen

$$W_d=\frac{G}{2}\cdot d_1+\frac{2G+F}{2}\cdot d_2$$

Behelyettesítve W_d=0,0916+3,6888=**3,78 J**. Ez stimmel, ennyinek is kellett kijönnie.

Végezzük el újra a számítást csak a mi erőnkre. A d_1 szakaszon mi nem avatkozunk be, ott a munkánk 0. A d_2 szakasz elején mekkora erővel nyomjuk a golyót és a rugót? 0. A szakasz végén? F. Tehát

$$W_{mi} = \frac{0+F}{2} \cdot d_2$$

Behelyettesítve megkapjuk az eredményt: a munkánk **2,695 joule**.

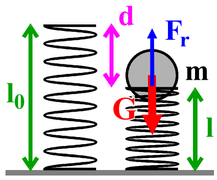
Összefoglalva: a rugó mindenkori ereje a lineáris erőtörvény szerint, a szokásos módon számítandó ki. Ha a rugó két különböző összenyomása közötti *munkát* keressük, akkor az megegyezik a rugóban az adott pillanatokban tárolt rugalmassági *energiájának* különbségével. De a munkát megkapjuk a kezdeti és végső erők átlagának és az elmozdulásnak a szorzatából is.

Egy villámkérdés: *hány méterre emelhetsz egy 100 kilós tömböt 500 watt energiával?* **…** Ha egyetlen másodperced van rá, akkor fél méterre. Ha kapsz rá egy évet, akkor 16 ezer km-re.

A watt *nem* az energia vagy munka mértékegysége, hanem a teljesítményé. Csak emlékeztetlek rá, nehogy keverd, mert a villamos *energiát* emlegetve gyakran beszélnek megawattokról. A munkánál mindegy, hogy mennyi idő alatt végzed, a teljesítménynél nem.

Átalakulási példák

A RUGALMASSÁGI ENERGIA fejezet legvégén láthattál egy érdekes feladványt. Röviden megismétlem, és elmondom a megoldást.



A rugóra tesszük az **m** tömegű golyót, a rugóállandó **D**. A rugó összenyomódik, és végül megállapodik egy olyan helyzetben, amelyben az összenyomódás **d**, a rugó hossza **l**. A rugóenergia $1/2 \cdot D \cdot d^2$. A golyó ereje $G = m \cdot g$, a rugó ellenereje $F_r = D \cdot d$. A golyó magassági energiája $m \cdot g \cdot d$-vel csökkent.

$$E_r = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d^2 \;=\; m \cdot g \cdot d = E_h$$

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot d = m \cdot g$$

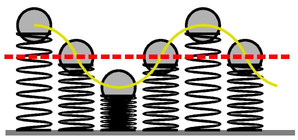
Az egyensúlyi helyzetben az összenyomott rugó ereje egyenlő a golyó súlyával: $D \cdot d = m \cdot g$ Ezt felhasználva kapjuk azt, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot g = m \cdot g$$

A levezetés eredménye lehetetlenség, valahol hibának kell lennie benne.

A hiba valójában egy úgynevezett *csúsztatás*. Nem hazugság, csak valami fölött kissé túl egyszerűen siklottunk át, nem fordítottunk rá kellő figyelmet. Ami ebben az esetben szándékos volt tőlem.

Azt mondtam, hogy a rugó összenyomódik, majd megállapodik. Hát ez az. *Nem állapodik meg*. Amikor a golyót rátesszük a rugóra, abban a pillanatban a rugó tartóereje nulla. Ezért a golyó esni kezd. Ahogy nyomja össze a rugót, abban egyre nagyobb ellenerő ébred, de az a golyót nem állítja meg azonnal, a golyó mozog, egy pontosan meghatározható utat tesz meg lefelé. Ha mozog, akkor mozgási energiája is lesz, és *ide került* a számításunkból hiányzó energia.



Emlékszel a rugóval összekötött, a jégen együtt csúszó testekre A CENTRUM TEHETETLENSÉGE fejezetben? A golyó most is mozog, gyorsul, átlódul a középső helyzeten, majd lassulni kezd, végül megáll. Aztán elkezd visszafelé mozogni, gyorsul, aztán lassul, és megáll ugyanott, ahonnan először indult. És ezt ismétli akármeddig, a távolság a középső helyzettől felfelé és lefelé is d.

A golyó nem állapodik meg magától. Ahhoz, hogy megálljon, valamivel le kell lassítani, szakszóval a mozgást *csillapítani* kell. Ez súrlódással vagy másféle mechanikai munkával lehetséges, tehát ezen az úton a rendszerből energia távozik. Ezt az energiát is bele kell foglalni az egyenletbe:

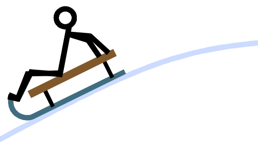
$$W_{csill} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot g = m \cdot g$$

Az egyenlet arról árulkodik, hogy a csillapításhoz szükséges munka összesen 1/2·m·g.

A hintázás csillapodására másik lehetőség is adódik. Minden alakváltoztatás munkát fogyaszt és hőt termel, ez a rugóra is igaz. Ha nagyon sokára, nagyon kis adagokban is, de végül a rugó is elnyeli az őt ismétlődően deformáló erőt, ezért a hintázás végül mindenképpen megáll. A rengeteg pozitív és negatív irányú munka előjeles összege legvégül ki fogja adni az 1/2·m·g értéket.

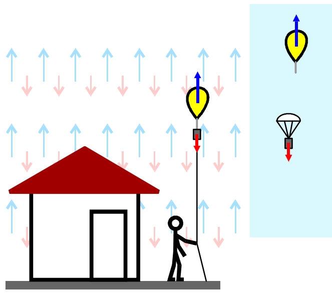
Nézzünk pár példát, számolás nélkül, a mechanikai energia átalakulásaira! Az energia mindig valamilyen munkavégzés hatására változik, a munkához elmozdulásra van szükség, tehát az energiaváltozás mindig elmozdulást igényel.

Felmegyünk a domb tetejére a szánkóval, majd lecsúszunk.



Az izomerőnkkel munkát végzünk a szánkón és *saját magunkon* azzal, hogy felmegyünk a domb tetejére. Vízszintes irányban nem kellett munkát végeznünk, mert abba az irányba nem gátolja ellenállás a mozgásunkat. (A szánkó csúszási súrlódási ereje elhanyagolható.) A mozgásunk függőleges összetevője a gravitációs erőtérben az erőkkel szemben mozgat, a magasságváltozásnak megfelelő magassági energiát felhalmozva a szánkóban és bennünk. A szánkóra ráülve a kettőnk tömege együtt indul lefelé, a gravitációs erő végez rajtunk munkát, a magassági energiánk felszabadul, és mozgási energiává alakul. A függőleges elmozdulásunkat a lejtő alakítja át ferde irányú mozgássá.

Héliummal töltött ballon van egy zsinegen kikötve. Lehúzzuk, ráerősítünk egy mérőműszert, majd visszaengedjük. Végül a zsineget elvágjuk. Egy bizonyos magasságban a műszer leválik, és ejtőernyővel földet ér.

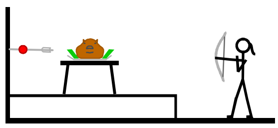


A ballonra a légkör felhajtóereje hat, ami inhomogén konzervatív erőteret képez, az erők felfelé mutatnak. Ebben az erőtérben végzünk munkát a ballonon, az erőtérrel szemben *lefelé* mozgatva, ezzel helyzeti energia gyűlik össze benne az eredeti magasságának nullszintjéhez viszonyítva. Amikor a ballon a műszerrel együtt visszaemelkedik, amíg a zsineg engedi, a felhajtóerő munkát végez rajta, ezzel helyzeti energia szabadul fel. Amikor a zsineget elvágjuk, a helyzeti energia egy nagyon magasan kiválasztott nullszinthez képest tovább csökken, a felhajtóerő további munkát végezve emeli a ballont a magasba. Kövesd végig az elmondottakat, és látni fogod, hogy minden pont fordítva van, mint ahogy a magassági energiával és gravitációs erőtérrel már megszoktad.

De az emelkedő ballon a műszer magassági energiáját növeli, mivel azt a gravitációs erővel szemben emeli, munkát végez rajta. *Egyszerre két erőtér* hatása érvényesül, amelyek egymással ellentétes irányúak. Van felhajtóerő is és gravitációs erő is.

Amikor a műszer leválik, a gravitációs erő hatására esni kezd, a megszerzett magassági energiáját mozgási energiává alakítva. Az átalakulás akkor lenne teljes, ha szabadon esne a földig, ahol a mozgási energia a talaj és a műszer alakváltoztatásában nyelődne el. De az ejtőernyő fékezi az esést, mozgási energia helyett az ejtőernyő alatt örvénylő levegő megmozgatásának munkájába irányítva a felszabaduló magassági energiát.

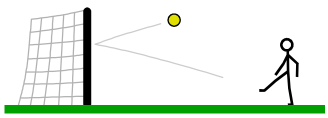
Íjjal kilőjük az almát a feltálalt sült vadkan szájából, és a nyíl a falba fúródik.



Az íjon az izomerőnkkel alakváltozást hozunk létre. Az íj teste rugalmas, visszacsapódik a kezdeti állapotába, a húr meghúzásával beletöltött rugalmassági energiát áthelyezve a nyílvesszőbe. A nyílvessző az almával találkozva kis alakváltozást hoz létre benne, ennek felhasználásával a nagy mozgási energiája egy részét az alma mozgási energiájává teszi. Ez az esemény a nyílvessző impulzusának kettéosztásával is jár. A falhoz érve a nyílvessző mozgási energiája a fal kemény anyagának alakváltozásában és minimális hőveszteségben nyelődik el. A nyíl és az alma impulzusa a falnak adódik át, amely azt végül a Földbe vezeti.

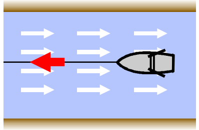
Az íj egyébként a felhúzatlan állapotában is rugalmassági energiát tárol. A húrt a huzamosabb tárolás idejére leakasztják az íj egyik végéről. A felhelyezéséhez, a *felajzáshoz* az íj testét valamennyire meg kell hajlítani. Általánosabb kifejezéssel ez az előfeszítés. Az íj megfeszítése ebből az állapotból indul. Ha a megfeszítetlen íj húrját elvágnánk, az a felajzatlan, erőmentes alakjába ugrana vissza.

Tizenegyest rúgunk, de kapufa lett.



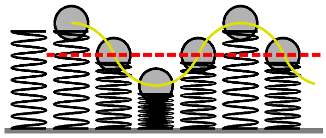
A földön álló labdával ütközik a nagy sebességgel érkező lábfejünk. A labda a tehetetlensége miatt nem veszi fel azonnal a lábunk sebességét, ezért a lábunk rugalmas alakváltozást hoz létre rajta. A labda sebessége a lábunk által rá kifejtett gyorsító erő hatására gyorsan nő, és az alakváltozásból visszaalakulva, a lábunkról "elrugaszkodva" további sebességre tesz szert, összességében nagy mozgási energiát szerez. A pályája kissé ívelt, és a kapufával is a földnél magasabban találkozik, a kapott magasság által felvett magassági energia a mozgási energiából szokás szerint levonódik. Végül a kapufának ütődve újra jelentős alakváltozásra kényszerül, a mozgási energiája nagy része ebbe alakul át, egy része pedig a kapufa kis mértékű meghajlításába. A labda, ahogy visszanyeri az alakját, a benne felgyűlt rugalmassági energiát újra mozgási energiává alakítja.

Kötélen vontatunk egy csónakot a folyón felfelé, majd a kötelet elengedjük.



A húzáskor a csónakra az áramló vízben közegellenállási erő hat. Ilyen erők képezik a folyó erőterét, amelyet a folyómeder középső sávjában konzervatívnak vehetünk. (A part mellett a folyó sodra lassul, az erőtér erői ott csökkennek, ezért nem lehet az egész folyót konzervatív erőtérként kezelni.) A csónak húzásakor az erőtérrel szemben munkát végzünk, helyzeti energiát töltve a csónakba, a folyón valahol kijelölt nullszinthez képest. Amikor a csónakot elengedjük, az erőtér végez munkát a csónakon, ezzel a felhalmozott helyzeti energia felszabadul.

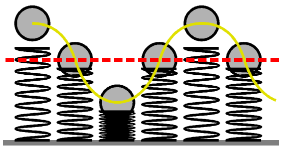
Az asztalon álló csavarrugóra ráteszünk egy golyót. Mi történik?



A golyó lefelé mozdul, és a lendülete miatt súlyánál nagyobb erővel nyomja össze a rugót, jobban, mint amennyire a súlya önmagában képes lenne. A rugó a golyót megállítja, majd visszafelé mozdítja, periodikus mozgást folytatva. A kezdeti magassági energia egy része fokozatosan rugalmassági energiává alakul, a mási része mozgási energiává alakul, amelyből szintén rugalmassági energia lesz. A mélyponton, az összenyomott rugón egy pillanatra mozdulatlanul álló golyó helyzetében a rendszerben már csak rugalmassági energia van.

Felugrik-e a golyó a rugóról?

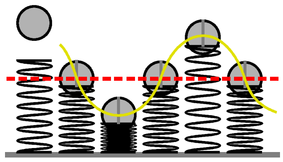
Nem, mert a kezdeti helyzetben a mechanikai energiák összege a golyó magassági energiája volt. Felugráskor ennél magasabbra kerülne, amihez szükséges energia nincs meg a rendszerben.



A golyót magasabbról ejtjük rá a rugóra. Felugrik-e róla a golyó?

A golyónak van mozgási energiája abban a helyzetben, amikor a terheletlen rugót megérinti. Az előző esethez képest ez az energia többletet jelent, amit a golyó a rugó újbóli kinyúlásakor további emelkedésben alakít magassági energiává. Összességében a golyó visszaugrik a kiindulási magasságára.

A golyót magasról ráejtjük a rugóra, és a golyó a rugóhoz ragad. Mi történik?



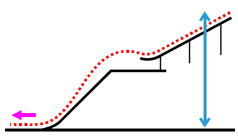
Egy ideig az előző eset figyelhető meg: a golyó összenyomja a rugót, a mélyponton a teljes magassági energia rugalmassági energiává alakul, visszafelé a rugó az eredeti terheletlen hosszáig gyorsítja a golyót. Ennek elérésekor a golyónak még van mozgási energiája, felfelé mozog, az előző esetben ez az energia alakul vissza helyzeti energiává, megállítva a golyót a kiindulási magasságban.

Most viszont a golyó a mozgási energiájával húzni, nyújtani kezdi a rugót felfelé. Negatív irányú rugalmassági energia születik, ami a golyó felfelé tartó mozgását fékezi. A mozgási energia elfogy, és egy része a rugó megnyújtásába alakul át. Ám a golyó eközben emelkedik valamennyit, vagyis a mozgási energia másik része az így létrejövő magassági energiává alakul vissza. Összességében a golyó egy olyan magasságban áll meg, amely alacsonyabban van a kiindulási magasságnál, és a magassági energiák különbözete a rugó energiájává vált. Innen a golyó a rugó húzására ismét lefelé indul, és most már ez a mozgássorozat ismétlődik.

Vannak tipikus helyzetek és tipikus feladatok, amelyek megoldásának a kulcsa az, hogy az energia megmaradásának törvényét használjuk: a különféle energiák egymásba átalakulhatnak, de az összegük nem változik. Légy szíves minden számítást ellenőrizni, és persze mindenekelőtt addig gyúrni, amíg nem érted minden részletét. Közeleg az év vége, már nem veszhetsz el egy levezetésben.

Síugró

A sánc tetején a tengerszint feletti magasság 1830 m. A versenyző lecsúszik, majd ferde hajítással repül, aztán egy lejtőn földet ér, végül vízszintes terepen lefékez és megáll. A versenyző súlya 82 kg. A sánc egyenes szakaszának meredeksége 30 fok, hossza 61 m, a dobbantószakasz ezt körívesen folytatja, a sugara 34 m, ívhossza 35 fok. A földet érés pontján a talaj lejtése 40 fok, innentől 85 méter sugarú köríven megy át vízszintesbe, a tengerszint felett 1660 m magasan. Súrlódás, légellenállás nincs. A vízszintes szakaszon, mielőtt fékezne, *mekkora a sebessége?*



Ez a feladat már annyira primitív, hogy sírni kell rajta, igaz? Először is: mennyi a versenyző súlya? Aaaargh! 82 kg a *tömege*, ugye rám szóltál?!

A jó matekos talán nekiáll a pályaelemek számításának, gyorsulás, lejtőerő, miegymás, a jó fizikás pedig mulat rajta, mert ő látja a lényeget. Miután végiggondoltad, egyszerűen ki tudod válogatni a szükséges adatokat a sok teljesen fölösleges közül. Az energiatípusok? Mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó. Fent mije van a síugrónak? Magassági. Mennyi?

Tudod, mi a válasz: mihez képest. Tehát: vegyük nullszintnek a lenti magasságot, a talajt, így mennyi a magassági energiája odafent? A magasságkülönbség h=1830−1660=170 méter. E_{h1}=m·g·h=136705 J. Lent mije van? Csak mozgási energiája. Az energiák összege állandó, ezért E_{m2}=E_{h1}, mert a többi mind nulla. 1/2·m·v^2=136705, ebből v=<u>57,74 m/s</u>.

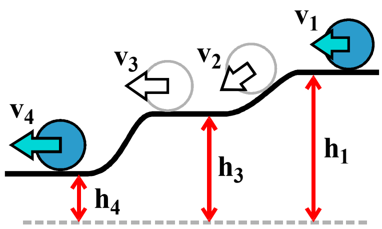
Mondhatjuk azt is, hogy a leugrás során a magasság változása −170 m, ebből az energiaváltozás ΔE_h=m·g·(−170) J. A mechanikai energia állandó, most a magassági fogy, a mozgási nő.

A végsebességre kijött 208 km/h azért kicsit durva lenne. A valóságban nagyon is van légellenállás – az egyik lényege a sportágnak –, a versenyző a lejtőre érve már fékez is, szóval igazából sokkal kisebb sebesség várható, kb. 60-nal érnek a lejtő aljára.

Az a jópofa az ilyen feladatban, hogy pont annyira jön ki a sebesség értéke, mintha a fickó egyszerűen *lezuhanna* 170 méterről. Hiszen akkor is csak a magassági energia alakul át mozgásivá. De az energiának nincs iránya, és a lejtő terelő hatása az energián nem változtat, a túlélési esélyeken igen.

Golyó a lépcsőn

Az ábra szerint jön a golyó, a tömege m=1,8 kg, v_1=1,6 m/s, h_1=0,9 m, h_3=0,7 m, h_4=0,4 m. Mennyi a v_3 és a v_4?



Először is: ahhoz, hogy a magassági energiákkal számszerűen foglalkozhassunk, ki kell jelölni a mullszintjüket. A szürke szaggatott vonal jó lesz erre a célra. Nem tudom, hogy hol van, csak azt, hogy a három magassághoz <u>ugyanazt</u> a nullszintet használjuk, ezért a magasságok különbsége könnyen megállapítható. Maguk a magasságok nem számítanak, az energiák átalakulásakor a *különbségeik* jutnak szerephez.

Mi az öt energia? Mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó. A helyzeti energiát kihúzhatjuk, a rugalmasságit is. A forgási energia, már beszéltünk róla, lényeges tényező lehet egy ilyen számításban, és ha változik a haladási sebesség ($v_{1\text{-}4}$), akkor a forgási sebesség is változik, amire az energiamérlegben tekintettel kell lenni. De most mondjuk azt, hogy a golyó tehetetlenségi nyomatéka kicsi, így elhanyagoljuk.

Marad tehát a magassági és a mozgási energia. Az 1. helyzetben ezek értéke? E_{m1}=1/2·m·v_1^2=2,304, E_{h1}=m·g·h_1=15,89 J. A mechanikai energiák összege tehát ebben a helyzetben 2,304+15,89=***18,19* J**. Törvény mondja ki, hogy ha a rendszer működésébe külső erők nem avatkoznak (a rendszer zárt), akkor *a mechanikai energiák összege nem változik*. Ez most a magassági és mozgási energiákat érinti, és az összegüket megtudtuk. Az energiák bármelyike csak úgy változhat, ha a többi energia ehhez igazodik.

Mennyi a v_3 sebesség? Most is felírhatjuk a két energia képletét: E_{m3}=1/2·m·v_3^2, E_{h3}=m·g·h_3. Miközben a golyó egy lépcsőfokot lejjebb jutott, az összenergiája nem változott: E_{m3}+E_{h3}=*18,19*. A helyzeti energiája csökkent (a golyó lejjebb került), ezért a mozgási energiája megnő. h_3=0,7 m, E_{h3}=**12,356**. E_{m3}=*18,19*−E_{h3} =5,834=1/2·m·v_3^2. Ebből v_3=**<u>2,546 m/s</u>**. Ugyanez a v_4-re is megcsinálható: E_{h4}=m·g·h_4 =7,061, E_{m4}=*18,19*−E_{h4}=11,130=1/2·m·v_4^2. Ebből v_4=**<u>3,52 m/s</u>**.

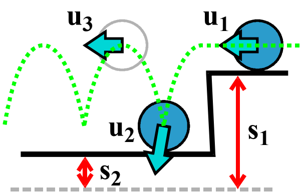
Mi történt? A golyó gurul, lejjebb kerül, ezzel a magassági energiájának egy részét mozgási energiává alakítja, a sebessége automatikusan megnő, és megy tovább.

Az eddigiek alapján úgy néz ki, mintha az elvesztett magassági energia mindig garantáltan mozgási energiává válna. Mintha attól, hogy leülsz a székről a földre, elkezdenél a fenekeden száguldozni. Mindannyiunk szerencséjére ez nem így megy, az átalakulásnak gyakorlati feltétele is van. Talán van valami köze a dolognak ahhoz, hogy ez egy elég furcsa alakú lépcső volt? Nézzünk egy közönséges lépcsőt. Képzeld magad elé! Gurul a golyó a lépcsőn, majd leesik, és mi történik? **…**

Pattogni kezd, úgy van! Ez a hiányzó láncszem a problémában. *Tényleg* megnő a golyó sebessége, de az nem vízszintes mozgásként fog megjelenni, mert az előrehaladás és a felfelé pattanás sebességeinek az eredője lesz ennyi. A mozgási és magassági energiák minden parabola bejárásakor újra meg újra átalakulnak egymásba teljesítve a szokásos egyenletet:

$$E_{h1}+E_{m1}=E_{h2}+E_{m2}\text{ , azaz } m\cdot g\cdot s_1+1/2\cdot m\cdot u_1^2=m\cdot g\cdot s_2+1/2\cdot m\cdot u_2^2\text{ ,}$$

ahol $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ a golyó sebessége. Ebből az is következik, hogy $u_3=u_1$, mert a vízszintes sebesség, az impulzus vízszintes összetevője magától nem fog megváltozni. Ahhoz, hogy a feltételezett energia-átalakulás megtörténhessen, arról kell gondoskodnunk, hogy a golyó pattogásának sebessége is *a vízszintes haladási sebességbe olvadjon*.



Hogyan lehet megakadályozni, hogy a golyó felpattanjon a következő lépcsőfokról? Alátegyünk egy puha szivacsot? Akkor tényleg nem pattan fel, de csak azért, mert a mozgási energiát a szivaccsal *elnyeletjük*. Veszteséggé alakítjuk, egy idő után a szivacs ettől melegedni és rongálódni fog. Ha így tennénk, akkor szándékosan elszivárogtatnánk az így már egyáltalán nem zárt rendszerből a mechanikus energiák egy részét. Ráadásul a szivacs jókora gördülő-ellenállást is teremtene, ezzel a gurulás eleve ki lenne zárva. Ez tehát nem lesz jó, ilyen tényezőt nem vehetünk be a feladatunkba.

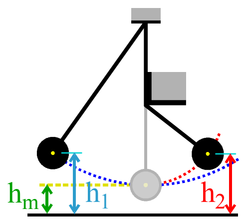
A működő megoldás a **lejtő**. Úgy kell a golyót lejjebb engedni, hogy annak végén ne akarjon felpattanni. Az előző ábrán láthatod, hogy következő szintre lejutást egy zökkenőmentes, lejtős pályával segítettem, sima átmenetet adva a golyó mozgásába. A lejtő előrefelé lódítja a leguruló golyót, és ekkor, de csakis ekkor a felszabaduló magassági energia tényleg mozgási energiává tud alakulni.

Tegyük fel, hogy a pattogás problémáját leküzdjük, és az energia átalakulása simán lezajlik. Az előbb kiszámítottuk a sebességeket, de ehhez megadtam a golyó tömegét. Talán még emlékszel arra, amikor megmutattam, hogy ez nem lenne szükséges. Végezzük el a v_3 kiszámítását m=4 kg-ra is! $E_{m1}=1/2\cdot m\cdot v_1^2$ =5,12, $E_{h1}=m\cdot g\cdot h_1$=35,30, E_m+E_h=40,424 J. E_{h3}=27,459, E_{m3}=40,424−27,459=12,965 $=1/2\cdot m\cdot v_3^2$. Ebből v_3=**2,546 m/s**. Vagyis a sebesség más tömeggel is ugyanannyira jött ki. A tömeg az egyenletekből mindig kiesik: $1/2\cdot\cancel{m}\cdot v_1^2+\cancel{m}\cdot g\cdot h_1=1/2\cdot\cancel{m}\cdot v_3^2+\cancel{m}\cdot g\cdot h_3$.

Mi történik más magasságon? Most tudtuk, hogy h_1=0,9, h_3=0,7 m. És ha pl. h_1=104,5? Akkor h=104,3 lesz, mert ha a nullszintet eltoljuk máshová, a magasságok különbsége nem változik. Csináljuk meg az előbbi számítást ismét, az új magasságokkal, az áttekinthetőség kedvéért megmaradva az m=4 kg-nál. $E_{m1}=1/2\cdot m\cdot v_1^2$=5,12, $E_{h1}=m\cdot g\cdot h_1$=4099,18, E_m+E_h=4104,30 J. E_{h3}=4091,33, E_{m3}=4104,30−4091,33 =12,965 $=1/2\cdot m\cdot v_3^2$. Ebből v_3=**2,546 m/s**. Vagyis a sebesség más nullszinttel is ugyanannyira jött ki.

Inga

Jöjjön egy klasszikus feladat. Egy fonálingát egy adott kitérítésű helyzetből elengedünk, de a fonál útjába teszünk egy akadályt, ami az átlendülésnél megtöri a vonalát. A kezdeti magassághoz képest milyen magasságba jut el a golyó a másik oldalon?



Ahogy látod, most megkíméltelek az adatoktól, mert már átlátsz a szitán. Úgy van, ugyanabba a magasságba, mint amennyi a kezdeti magasság volt. Igaz, hogy a fonálingát csak jövőre tanulod, de ez nem akadály. Mindkét szélső helyzetben az inga egy pillanatra megáll, olyankor nincs mozgási energiájuk. A bal oldali helyzetben az ingának volt valamennyi helyzeti energiája, a mélypontig *valamennyi belőle* átalakul mozgási energiává. Hogy lejtő vagy fonál tereli a golyót másfelé, az mindegy. Majd mivel a mozgása jobboldalt a megállásig lassul, a mozgási energiája visszaalakult helyzeti energiává. Ugyanannyivá, mert az energiák összege nem változhat. Akkor pedig $h_1=h_2$.

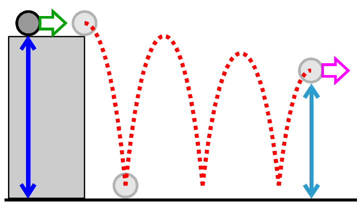
Az energia szempontjából az sem számít, hogy a fonál eközben egy helyen megtörik.

Az, hogy a magassági energiából *valamennyi* átalakul mozgásivá, az már remélhetőleg világos számodra. A mozgási energia viszonylagos, és ha nullszintnek a lenti vízszintes vonalat tekintjük, akkor ahhoz képest van magassági energiája a golyónak a teljes kitérésben ($m\cdot g\cdot h_1$) és a mélyponton is ($m\cdot g\cdot h_m$). A magassági energia *különbözete* változik mozgási energiává, $m\cdot g\cdot h_1-m\cdot g\cdot h_m$.

Az inga esetében nem lejtő okozta a mozgás vízszintessé válását, hanem a zsineg kényszerhatása.

Gumilabda

A 2 méter magas szekrény tetejéről legurul egy labda. A gurulás sebessége 0,2 m/s. Hármat pattan. Minden egyes lepattanáskor elveszti az energiája 5%-át. A harmadik lepattanás utáni holtpontban mennyi a *sebessége*?



A kérdés talán váratlan irányba kanyarodott a végén. Valószínűleg energiával kapcsolatos kérdésre számítottál, de nem baj. A holtpont jellegzetessége pont az, hogy függőleges sebesség nincs, csak vízszintes. Az eredetileg 0,2 m/s volt, a végén mennyi? Itt az az egyetlen eldöntendő, hogy a lepattanás energiavesztesége a vízszintes mozgásra is értendő-e. Döntsünk úgy, hogy nem, nyilván a függőleges lepattanáskor a labda nem tökéletes rugalmassága miatti energiavesztésre gondolt a feladat kitalálója. (Vagyis én.) Akkor a vízszintes sebessége 0,2 m/s. (A valóságban a lepattanás után a labda kicsit pörögni kezdene, mint a falra lökött biliárdgolyó, de ezt most nem kell néznünk.)

Miért változatlan a sebesség? Az előző feladatokban mindig azt variáltuk, hogy az ilyen energia az olyanba alakul, és most is előfordulhatna, hogy kiszámolod a kezdeti mozgási energiát, és hozzácsapod a többihez. Nincs rá semmi okod. **A tehetetlenség törvénye és a vízszintes hajítás szabályai még mindig érvényesek.** A labda vízszintes irányú mozgása *nem szűnt meg*. Nem is próbálta a labda vízszintes mozgását bármi is akadályozni. Akkor a vízszintes sebesség nem is változik.

Az energia *nem mindig alakul át* valami mássá, nem szabad csak menni a megszokott úton, mint a fehér egér. Sok diák felejti el, hogy egy áprilisi dolgozatban is kérdezhetnek januári vagy szeptemberi vagy tavalyelőtti anyagot. Ezeket épp azért tanulod (meg), hogy utána *bármikor* használni tudd. Amikor arra van szükség.

Második kérdés: milyen magasra pattan a labda a harmadik lepattanás után? No, ez már valóban az energia-téma, a labda helyzeti energiája $m \cdot g \cdot h$, és $h=2$. Tényleg 2 méter, nem felejtettük ki a labda sugarát? Köszönöm a kérdést, most tényleg 2 méter, mert a labda aljának magasságát mérjük mindkét esetben, annak ellenére, hogy a rajzon a tömegközéppontjának az útja van ábrázolva.

Nem mondtam meg a labda tömegét. Nem is lesz rá szükség, az egyenletet *paraméteresen* oldjuk meg, vagyis az m-et ismeretlenként benne hagyjuk. Amíg szükség van rá.

Ha h_0 a kezdeti magasság, h_1 az első lepattanás utáni holtpont magassága, akkor a feladat szerint $m \cdot g \cdot h_1 = 0{,}95 \cdot m \cdot g \cdot h_0$, azért, mert az energia 5%-a elvész a pattanáskor. *Egyszerűsíthetünk* $m \cdot g$-vel: $h_1=0{,}95 \cdot h_0$. Ugyanígy: $h_2=0{,}95 \cdot h_1=0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot h_0$, tehát $h_2=0{,}95^2 \cdot h_0$, $h_3=0{,}95^3 \cdot h_0=$**1,71 m**. Nem kellett a labda tömege, ahogy ígértem is.

Az ÜTKÖZÉSEK fejezet legvégén olvashatsz még az ütközéssorozatokról.

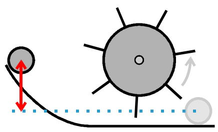
Meteorit

570 km/h sebességgel a földbe csapódik egy 32 g tömegű meteor. Milyen magasra pattan vissza?

Hát épp ez az, nem pattan vissza. Pedig az "égbolton" még volt egy csomó helyzeti energiája, mozgási energiája meg még annál is több. Az energia nem vész el, akkor ez így most hogy? *Zárt* rendszerben nem vész el, a törvény mindig szó szerint kezelendő. A becsapódó meteor *és a talaj* együtt ad zárt rendszert, ekkor tényleg igaz, hogy az energia csak átalakult, hővé, hanggá és a talaj megrengetésének mechanikai energiájává. A meteor minden kinetikus energiája *elnyelődött*. Ilyen is van. Pontosan mennyi energiáról is van szó? $1/2 \cdot m \cdot v^2$, a sebességet helyesen átszámítva 401 joule jön ki. Nem nagy, de nem is jelentéktelen. És ha a meteor 20 tonna és a sebessége 2600 m/s? Az már 67,6 gigajoule. Amikor ez elnyelődik a földben, ott izzó lesz a hangulat.

Malom

A golyó tömege 28 dkg, kezdeti helyzeti energiája, az ábra szerint, 0,6 J. Legurul és megforgatja a malomkereket, amelynek a tehetetlenségi nyomatéka $0{,}7\ kg \cdot m^2$. Milyen magasról indul a golyó? Mekkora lesz a kerék szögsebessége?



A feladat elmulasztotta megnevezni a nullszintet, de ilyenkor a golyó legalacsonyabb helyzetét szokás annak tekinteni. *A feladatokban ugyanígy járj el.* A magassági energia képlete $E_h=m \cdot g \cdot h$. Ebből $h=0{,}6/(0{,}28 \cdot g)=21{,}9$ cm.

Figyeld meg, hogy az ábrán a nyíl a golyó tömegközéppontjától addig a vonalig tart, ameddig a golyó tömegközéppontja jutni fog. **Az energiaszámítások alapesetben a testek tömegközéppontjaira vonatkoznak**, emlékezz a leesés közben elforduló doboz problémájára. De ha ez nem okozhat zavart, akkor húzhatod a nyilat a test aljától a földig is. Az a lényeg, hogy *tudd*, hogy a jelölésed helyes.

A golyó a lejtőről legurul, a lejtő a felszabaduló helyzeti energiáját mozgási energiává alakítja. A golyó ezután vízszintesen gurul, és találkozik az egyik lapáttal, megforgatva a kereket. A golyó a mozgási energiájának rovására forgási energiával látja el a kereket.

Mekkora lesz a kerék szögsebessége? Ha előkapod a forgási energia képletét, akkor láthatod, $E_f=1/2 \cdot \Theta \cdot \omega^2$, a Θ meg van adva. A golyó helyzeti energiája kezdetben 0,6 J, ez átalakul mozgási energiává, ami aztán megforgatja a malomkereket, eszerint $0{,}6=1/2 \cdot 0{,}7 \cdot \omega^2$, amiből $\omega=1{,}31$ rad/s. Kész.

Ez a megoldás *rossz*. Hol rontottuk el, kitalálod? Az ábra is segíthet. **…**

Az ábrán azt látjuk, hogy a golyó *továbbgurult*. Nem adta át az *összes* mozgási energiáját a keréknek, csak annak egy részét. Vagyis az általunk feltételezett eseménysorozat téves volt, olyasmire alapoztunk, ami nem igaz.

Mennyi akkor a malomkerék által felvett energia? Nem tudjuk. Ennyiből kideríthetetlen. És akkor mi a megoldás? "A feladat nem oldható meg, mert a golyó megmaradt mozgási energiáját nem ismerjük."

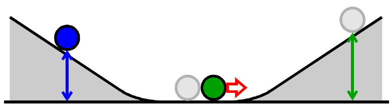
És ha azt mondom, hogy a golyó 0,8 m/s sebességgel gurul tovább? Akkor a maradék mozgási energiája 0,0896 J, a kerék a különbözetet kapta meg, forgási energiává 0,6-0,0896=0,5104 J alakult. $0{,}5104=1/2\cdot0{,}7\cdot\omega^2$, amiből ω=1,208 rad/s. És most nem nézegetjük, hogy ez mennyire illeszkedik a golyó mozgásához.

Ha már itt tartunk, mennyivel megy a golyó a találkozás *előtt*? $0{,}6=1/2\cdot m\cdot v^2$, v=2,07 m/s.

Megjegyzés: A feladatokban örökké azt olvasod, hogy figyelmen kívül hagyjuk ezt, elhanyagoljuk azt. A gyakorlatban szinte semmi sem történik úgy, mint ahogy a feladatokban a helyzetet leírják. Mi értelme van akkor ezeknek a feladatoknak? – kérdezheted. A feladatokban idealizált, leegyszerűesített helyzetekben kell néhány alapfogalmat megtanulnod és célzottan a hozzájuk tartozó számításokat elvégezned. Írni is úgy tanultál, hogy először megtanultál kis köröket és pálcikákat rajzolni. Ha már meg tudsz oldani egyszerű feladatokat, akkor ezek már kombinálhatók is, súrlódást lehet keverni a síelő mozgásába, a vízikerék forgásába, ütközési szögeket és forgást keverni a labda pattogásába és így tovább. És végül eljuthatsz akár a kavicson guruló gumiabroncs gördülő ellenállásának számításáig is, ha akarsz.

Lejtők

Az ábra szerint a lejtőn áll az m_1=0,11 kg-os kék golyó, h_1=0,38 m magasan a lejtők aljához képest, lent várja a zöld golyó, m_2=0,08 kg. Az ütközés tökéletesen rugalmas. Mennyi a zöld golyó ütközés utáni indulási sebessége? Milyen magasra megy fel a másik lejtőn?



A kék golyó helyzeti energiája a megadott nullszinthez viszonyítva $E_{h1}=0{,}11\cdot g\cdot 0{,}38=$**0,410 J**. Legalul a helyzeti energiája nulla lesz, teljes egészében mozgási energiává alakul, $E_{m1}=1/2\cdot0{,}11\cdot v^2=E_{h1}$, ebből v_1=**2,730 m/s**, ez az ütközés előtti sebesség.

Csábító a lehetőség, hogy rávágd: ezután a kék golyó állva marad, a zöld golyó sebessége pedig 2,730 m/s. Ez nagy hülyeség volna, nyilván te is megmosolyogtad az ötletet, nem vagy te már ennyire kispályás. Ehelyett milyen kulcsgondolat következik? **…**

Az érkező golyónak van sebessége és tömege, és ez nemcsak a mozgási energiát határozza meg, hanem az *impulzust* is. $I_1=m_1\cdot v_1$=**0,300 kgm/s**. Ha a kék golyó állva marad, akkor az összes impulzusa átadódik a zöld golyóba, de annak kisebb a tömege, ezért $0{,}300=m_2\cdot v_2$, $v_2=0{,}3/0{,}08=3{,}75$ m/s. Ebből a felfutás magasságát már a tengerimalacod is kiszámolná. Csakhogy…

Két különböző tömegű test ütközik, ilyenkor *nem fog az első test állva maradni*. Valójában nem tudnál mondani semmi olyan szabályt, ami a mozdulatlanságát indokolhatná, igaz? De ha nem ismerjük azt a sebességet, amennyivel a kék golyó az ütközés után gurul, akkor nem tudjuk a feladatot megoldani.

Ebben a témakörben volt egy MOZGÁSI ENERGIA ÉS IMPULZUS című fejezet, amely pont az ilyen helyzetről szólt. Most csak a lényegét idézem fel. Minden esemény során egyszerre kell teljesülnie az impulzus-megmaradás és az energiamegmaradás törvényének. Ez egy olyan egyenletet tesz hozzá az impulzusokról felírható egyenlethez, amivel már egyértelműen megoldható lesz a feladat. Mutatom.

Ha a kék golyó tömege $\mathbf{m}_1$, az ütközés előtti sebessége $\mathbf{v}_1$, az ütközés utáni sebessége $\mathbf{u}_1$, a zöld golyó tömege $\mathbf{m}_2$, az ütközés előtti sebessége $\mathbf{v}_2$, az ütközés utáni sebessége $\mathbf{u}_2$, akkor

$$m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2=m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2 \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2^2=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot u_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot u_2^2$$

Ezek a két golyó együttes impulzusára és együttes mozgási energiájára felírt megmaradási egyenletek, amelyekből most <u>csak</u> az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ ismeretlen, az ütközés utáni két sebesség. A v_2 értéke 0. Az egyenletrendszer megoldása nem nehéz, csak kicsit munkaigényes.

$0{,}11\cdot2{,}73+0{,}08\cdot0 = 0{,}11\cdot u_1+0{,}08\cdot u_2$ és $0{,}11/2\cdot2{,}73^2+0{,}08/2\cdot0^2 = 0{,}11/2\cdot u_1^2+0{,}08/2\cdot u_2^2$

$u_1 = -0{,}727\cdot u_2+2{,}73 \quad\rightarrow\quad 0{,}410 = 0{,}055\cdot(-0{,}727\cdot u_2+2{,}73)^2 + 0{,}04\, u_2^2$, nullára rendezzük

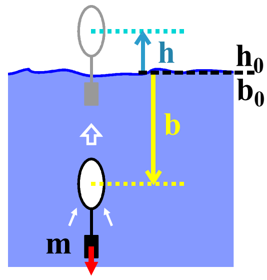
$0 = 0{,}0691\cdot u_2^2-0{,}2183\cdot u_2$, másodfokú egyenlet.

Az eredmény: u_2=**3,159 m/s**. A többi érték nem volt kérdés, de ebből a zöld golyó impulzusa $I_{2*}=m_2\cdot u_2$ =0,253 kgm/s, a kék golyóban maradt impulzus I_{1*}=0,300−0,253=0,047 kgm/s, vagyis a sebessége $u_1=I_{1*}/m_1$=0,427 m/s. Tehát a kék golyó jóval lemarad a zöld golyó mögött, de előrefelé gurul.

Az utolsó lépést már unhatod is: a zöld golyó sebessége 3,159 m/s, ebből a mozgási energiája 0,399 J. Ez magassági energiává alakulva $0,399=0,08\cdot g\cdot h_z$, ebből a zöld magasság, h_z=**<u>0,509 m</u>**. A kék golyó kezdeti magassága 0,38 m volt, a zöld golyóé ennél nagyobb lett, amire azért számítottunk, mert kisebb a tömege.

Jelzőballon

A vízben, **b**=22 m mélységben van egy levegővel töltött ballon, hozzá van kötve egy **m**=2 kg tömegű rádiójeladó. A ballon tömege elhanyagolható, a térfogata 130 liter=130 dm^3. A vízbe merülő tárgyakra felhajtóerő hat, **minden m^3 térfogatra 1000·g newton**. Az <u>1000 a víz sűrűsége</u>, más folyadéknál más érték használandó. A 0,13 m^3 térfogatú ballonra ható felhajtóerő 1274,9 N, a jeladóra hasson, mondjuk, 3 N, összesen **1277,9 N** emeli a ballont a víz felszíne felé. A felhajtóerő nagysága *nem függ a mélységtől*, csak a test térfogatától és a folyadék sűrűségétől: $\mathbf{F_{fh}=\rho\cdot V\cdot g}$. A hidrosztatikai felhajtóerő témáját ezzel nagyjából át is vettük.



A ballon gyorsan emelkedik, végül a lendülete miatt a vízből is kiugrik. Milyen magasra?

Oldjuk meg először úgy, hogy a ballon közegellenállását elhanyagoljuk – ez teljesen valószerűtlen –, és úgy is, hogy az áramlási szorzója víz alatt **Z**=760.

1) A közegellenállás elhanyagolása arra jó, hogy az emelkedést ne korlátozza semmi, lebutítjuk a helyzetet egy példa erejéig. Derítsük ki először, hogy <u>mennyi lesz a ballon sebessége a felszín elérésekor</u>. *Pontos számítást kérek.* Kétféle megoldás is lehetséges, gondold át őket. **…** **…**

a) Kezdjük a mozgástani képletekkel. Ismert a tömeg, a gyorsító erő és az úthossz. A végsebességet keressük. s=v/2·t, t=v/a, a=F/m. Az első kettő a gyorsuló mozgás képletei között van, a harmadik a dinamika alaptörvényének átrendezett alakja.

Mennyi az F, az egészet felfelé gyorsító erő számszerű értéke? *Gondold át háromszor is!* **…**

Ha *nem* **1258,3 N**-t mondtál, akkor légy szíves elpirulni, és elolvasni újra A DINAMIKA ALAPTÖRVÉNYE és az EREDŐ ERŐ fejezeteket. Mert ezek szerint szükséged van erre. A rajzon ott láthatod *pirossal megjelölve* a 2 kg-os jeladó súlyát, ami 19,6 N, ez kivonódik a ballon–adó együttesre ható 1277,9 N felhajtóerőből. A testeket mindig a rá ható erők *eredője* gyorsítja, vagyis itt a súly és a felhajtóerő előjeles összege.

Most már megvan, hogy **a**=1258,3/2=629,15 m/s^2, **s**=22 m. Az egyenletrendszerünk:

22=(**v**/2)·**t** és **t**=**v**/629,15, a másodikat behelyettesítjük az elsőbe: 22=$\mathbf{v}^2$/1258,3. Ellenőrizd!

Ebből **v=166,4 m/s**. Ekkora sebességgel (600 km/h!) vízben semmi nem haladhat, de a feladat leegyszerűsített feltételeit betartva az eredmény ennyi.

b) Jöjjön a másik, sokkal érdekesebb megoldás, **<u>az energiák alapján</u>**. Ez az, amiért ezt a feladatot kiagyaltam. *Veszünk egy nagy dobozt, felemeljük valamilyen magasra, elengedjük, és az leesik. Veszünk egy nagy dobozt, lenyomjuk a víz alá valamilyen mélyre, elengedjük, és az "felesik".* A magassági energia a helyzeti energiák egyike, de azért csak egyike, mert a vízbe merülő testnek is helyzeti energiája születik.

A gravitációs erőtér KONZERVATÍV, rövid távon homogén is, az erői függőlegesen lefelé mutatnak. A folyadékok felhajtóerő-erőtere is konzervatív, a lehetséges 11 km tengermélységen belül homogén is, az erői függőlegesen felfelé mutatnak. Ebből eredően <u>egy test vízbe merítése helyzeti energiát hoz létre</u>. Az energia nullszintjének a víz felszínét szokás kijelölni, és az energia a mélységgel egyenes arányosságban nő. A víz alatt levő test lefelé (erőtér elleni) mozdításához bevitt munka kell, a test felfelé mozdulása helyzeti energiát szabadít fel, ami munkavégzésre fordítható.

A helyzeti energia E_p=F·z, a ballon esetében ez $E_p=F_{fh}\cdot b$=1277,9·22=**28113,8 J**.

Az előbb megróttalak, mert esetleg nem vetted számításba a test súlyát. Most viszont én is csak a felhajtóerő értékét használtam. Nem biztos, hogy ezt megérted, de az előbb a gyorsuló mozgás okozójaként a testre ható összes erő eredőjét vettem, úgy szól a törvény is. Az energiát viszont az adott konzervatív erőtér ereje okozza, márpedig ez az erőtér csak a felhajtóerőből áll.

De ez nem jelenti azt, hogy ha a dolgot az energiák alapján vizsgáljuk, akkor ne lenne jelentősége a súlynak. A ballon és a jeladó ugyanis *nem egyetlen erőtér* hatása alatt állnak. Azért, mert a víz alatt vannak, még nem vonták ki magukat a *gravitáció* hatása alól. Igen, ezek a testek mindkét erőtérben benne vannak, és mindkét erőtérben megvan a saját helyzeti energiájuk. A gravitációs erőtérben a magasság és a nehézségi erő szorzata – ezt magassági energia néven külön tárgyaltuk –, a felhajtóerő erőterében pedig a mélység és a felhajtóerő szorzata. Az utóbbival már végeztünk, nézzük meg a magassági energiát is. Választhatnánk bármilyen nullszintet, én most a vízfelszínt választom. Igaz, hogy a ballon kezdőmagassága ehhez viszonyítva negatív szám, így a magassági energiája is negatív lesz, de ez problémát nem okoz.

$E_h=m \cdot g \cdot h$, m=2 kg, h=−22 m. Ebből $E_h=$**−431,5 J**.

Tegyük tisztává a helyzetet! A ballonnak a víz mélyén van $E_p=28113{,}8$ J **helyzeti** energiája, mert felfelé törekedik. A víz felszínén ez az energia nullára csökken. A ballonnak a víz mélyén van $E_h=-431{,}5$ J **magassági** energiája, ami a víz felszínéig emelkedve *nullára nő*. Emelkedik, igaz? Akkor tehát a magassági energiája növekedik. Mozgás-forgás-magas-helyzet-rugó, a forgási és rugóenergiák nullák, lent a mozgási energia nulla, mert a ballon kezdetben nem mozog. A helyzeti és magassági energiák összege a 22 méteres mélységben 28113,8+(−431,5)=**27682,3 J**. Az összeg a víz felszínére emelkedéskor **0** lesz, mert ott **b**=0 és **h**=0, nézd csak meg az ábrán a nullszintek helyét. Az így felszabaduló energia mozgási energiává alakul át: $\mathbf{E_{h1}+E_{p1}=E_{m2}}$. $27682{,}3=1/2 \cdot m \cdot v^2$, ebből **v=166,4 m/s**. Az eredményünk megegyezik a mozgásképletekkel kiszámítottal, ami megnyugtató.

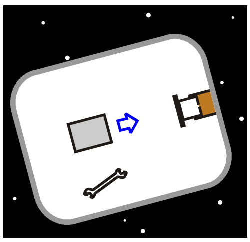
Most, hogy már tudjuk, hogy a ballon mekkora sebességgel bukkan fel a habokból, válaszoljuk meg kérdést a tetőpont **h** magasságáról. Ilyet már csináltunk. Használhatnánk a függőleges hajítás képleteit, de nézzük inkább energiásan: a vízfelszínnél a sebesség miatt van mozgási energia, és a h=0 magasság miatt nincs magassági energia. A tetőpontig minden kezdeti mozgási energia helyzetivé alakul át, tehát $E_{m2}=E_{h3}$. $27682{,}3=m \cdot g \cdot h$, m=2, h=1411,4 m. Mondanom sem kell, hogy a víz alatt sem fog a ballon 600 km/h-ra gyorsulni, és a levegőben sem fog légellenállás nélkül felrepülni másfél kilométernyit. De most ennyi jött ki, a módszert kellett végigkövetned figyelemmel, a számok értelmével meg most nem törődünk. A számítás eleve értelmetlenné vált a közegellenállás kihagyásával.

2) A feladat második verziója szerint tekintettel kell lennünk a víz KÖZEGELLENÁLLÁSára is. A ballonról nem adtam meg a formatényezőt és a homlokfelületet, hanem inkább egyben mondtam egy áramlási szorzót, Z=760, a víz ellenállása erős, ezt te is jól tudod. Amikor egy golyót nagyon nagy magasságból leejtünk, a sebesség növekedésével a légellenállás végül kiegyenlíti a lefelé húzó erőt, a golyó nehézségi erejét, $F_{kö}=G$. (Azért nem súlyról beszélünk, mert itt nincs szilárd test, amelyet a test a súlyával nyomna vagy húzna.) A helyzet tükörképe: a víz mélyéről felfelé haladva a sebesség növekedésével a közegellenállás végül kiegyenlíti a felfelé húzó erőt, a ballonra ható felhajtóerőt. Akkor tehát itt $F_{kö}=F_{fh}$. $\mathbf{F_{kö}=Z \cdot v^2}$. Eszerint $1277{,}9=760 \cdot v^2$, vagyis a sebesség a valóságban a 166 m/s helyett v=**1,30 m/s** értéken állandósul.

Ettől a kérdés még érvényes: ekkora sebességgel felbukkanva milyen magasra ugrik fel a ballon? A számítás módja nem változik: a mozgási energia emelkedés közben magassági energiává alakul. v=1,3 esetében $E_m=1{,}69$ J. Ha ebből magassági energia lesz, akkor $1{,}69=m \cdot g \cdot h$, ebből h=0,086 m.

Lefékeződés

Egy 12 t tömegű űrkabin tehetetlenségi pályán halad. A belsejében egy m=60 kg tömegű láda nyugalmi helyzetben halad v=0,4 m/s sebességgel. Találkozik egy olajcsillapítású ütközővel, amely úgy működik, hogy az olaj egy kis lyukon az egyik kamrából a másikba préselődik. A ládát az ütköző 16 cm távolságon, 0,8 s alatt teljesen lefékezi. Elemezd részletesen az esetet a mozgás és az energia szempontjából!



Az, hogy az űrhajó tehetetlenségi pályán halad, azt jelenti, hogy súlytalanságban van. Az űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. Ebből eredően a ládára érvényes Newton I. törvénye, a mozgása egyenes vonalú, egyenletes sebességű, és a sebesség az űrhajó inerciarendszerében, az ütközőhöz viszonyítva 0,4 m/s.

A láda haladásának az oka nem az űrhajó gyorsulása, mert az űrhajó súlytalan, a láda is súlytalanul lebeg, csak valamitől kapott egy 0,4 m/s-os sebességet.

Amikor a láda eléri az ütközőt, a tehetetlensége továbbrepítené. Mekkora a láda tehetetlenségi ereje? Önmagában ennek a kérdésnek nincs értelme. Tulajdonképpen annyi az ereje, amekkora erővel a sebességén változtatni próbálnak. A dinamika alaptörvénye szerint $F=m \cdot a$, vagyis az erő a gyorsulás függvénye, márpedig itt a gyorsulásról kaptunk adatokat. A láda v_0=0,4 m/s sebességről s=0,2 m úthosszon, t=0,8 s idő alatt megáll, v=0. Két képlet tartozhat ide:

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{és} \quad s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

Az elsőből megtudjuk, hogy a gyorsulás a=−0,5 m/s^2. A második képlet már fölösleges is, mert *mindegyik* adata ismert. Az jön ki belőle, hogy 0,16=(0,4/2)·0,8 m, ez igaz is, ami megnyugtat bennünket afelől, hogy a kapott adatok összeillőek.

Mekkora az ütköző és a láda között a fékezés alatt fellépő erő? F=m·a=60·0,5=30 N. A mozgásegyenletekhez nem volt szükséges a tömeg ismerete, csak a tehetetlenség és a (negatív) gyorsulás kapcsolatához.

A ládának kezdetben van I=m·v=24 kgm/s impulzusa. A fékezés során a láda impulzusa nullára csökkent, tehát teljes egészében átadódott az ütközőnek, ami átadta az űrhajónak. Az erőlökés ΔI=F·t, 24/0,8=30 N, az időtartama 0,8 s.

Egyenletes a láda ereje? Nem biztos, az ilyen mindig az ütköző testek viselkedésétől függ. A feladatban leírt olajfék nagyobb sebességnél nagyobb erővel áll ellen az összenyomásnak (hasonlítva a közegellenálláshoz), vagyis ebben az esetben a fékezés ereje folyamatosan gyengül, és csak átlagosan 30 N. A valóságban könnyen megtörténhet, hogy az ütközővel való találkozás részben rugalmatlan ütközésnek bizonyul, és a láda nem áll meg, hanem a kezdetinél kisebb sebességgel visszapattan. A feladat most azt állítja, hogy a láda megállt, ezért nem kell ezen a lehetőségen gondolkodnunk.

Ha az impulzusa átadódott az űrhajónak, akkor az űrhajó sebessége megváltozott. Az erőlökés 24 kgm/s, az űrhajó tömege 12 t, ΔI=m·Δv, vagyis a sebessége 0,002 m/s-mal változott a láda haladásának irányába. Az űrhajó sebességének sem a nagyságát, sem az irányát nem ismerjük, de biztos, hogy ennyivel módosult.

> Megjegyzés: Ez a sebességváltozás jelentéktelen, igaz? Pedig másodpercenként 2 mm mozgást már szabad szemmel is jól látnánk. Ha egy Hold felé tartó űrhajó az útja elején ekkora oldalsebességet kapna, végül 69 km eltéréssel érne célba, ami bőven elég lehetne a lezuhanáshoz a körpálya helyett. De ha az űrhajósok egy ládát lökdösnek útközben, mindannyian nekimennek néha a hajó falának, erre is, arra is. Az űrhajó, a rakomány és az űrhajósok közös centrumának impulzusa emiatt állandó, és így a centrum útvonala pontosan a kiszámított maradhat.

A mozgó ládának mozgási energiája is van, E_m=1/2·m·v^2=4,8 J. Az űrhajó mozgási energiájának változása (m=12000 és v=0,002 alapján) 0,024 J. A 4,776 J-os különbözet máshová került. Ez esetben semmilyen mechanikai energia nem nőtt az ütközés nyomán, ezért a különbözetnek veszteségként el kellett nyelődnie, a lyukon átpréselődő olaj csekély felmelegedésében.

Kozmosz

Hogy ne nézz hülyén, ha egy centauri útbaigazítást kér tőled.

A csillagászat valószínűleg a legősibb olyan tudomány, amelyben módszeres megfigyeléseket végeztek. A fontosságát az adta meg, hogy az élelemgyűjtési, később a mezőgazdasági munkálatokat a már bevált ütemterv szerint kellett minden évben megismételni. A munkák megfelelő időzítése és a termés mennyisége döntött a fagyos vagy aszályos időszak túlélése és az éhenhalás között. A napok számlálása és főleg *a naptár helyességének ellenőrzése* kőkori eszközökkel nem is olyan egyszerű feladat, és szükségessé tette a szabályok megtalálását.

Mindezeken túl az ember az életének pontosan a felét napnyugta és napkelte között tölti, és egy olyan korban és vidéken, ahol egy kis tűzrakás jelenti a közvilágítást, a csillagos égbolt látványa szó szerint letaglózó élmény. Még ma is az, ha sikerül valahol igazi sötétségben megnézni. Így aztán az égitestek, és a bennünket körülölelő Világegyetem természetes módon foglalkoztatta az emberek kíváncsiságát, és ösztönözte mesék kitalálására is. A látvány magasztossága könnyen megszülte a hitet az égi istenekben és az égi jelenségeknek az életünket befolyásoló erejében is, ezt a hitet még ma is sokan átérzik.

Az ember nem tudta megmagyarázni az égbolton láthatókat, ezért megpróbálta azzal az uralma alá hajtani, hogy gondosan feltérképezte magának. A hozzánk és a Naphoz legközelebb levő öt bolygó távcső nélkül, szabad szemmel is látható az égbolton, külön fejtörést adva azoknak az őskori és ókori tudósoknak, akik a "vándorcsillagok" létezésére befogadható magyarázatot, a mozgásuk előrejelzésére pedig – ami az ismeretlentől való rettegést csillapítja – valamilyen rendszert kerestek.

A későbbi korok csillagászai is hálásak lehetnek az első babilóniai csillagász-papok által megkezdett, majd más nagy kultúrájú népek által szaporított részletes megfigyelésekért, amelyek a hozzájuk tapadó babonák ellenére is pontos adatokat rögzítettek az utókor gondolkodói részére. Ezek segítségével nemcsak elméleti világmodellek felvázolása vált lehetővé, hanem az a nagyon fontos tanulság is levonható volt, hogy *a csillagos ég nem változatlan*.

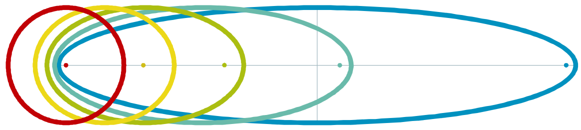
A Kepler-törvények

A kora középkori európai kultúra annak idején az ókori görög filozófusok különféle elméletei közül **Ptolemaiosz** <u>földközéppontú</u> (geocentrikus) kozmikus modelljét vette át. Ezért bárkit is hibáztatni fölösleges, mert *tényleg úgy néz ki*, hogy a Nap, a Hold, minden <u>a Föld körül</u> mozog, a csillagok egy nagy kristálygömbön levő fényes pontok, a Föld pedig mozdulatlan, hiszen ha mozogna, nyilván éreznénk is. Az ókori csillagászok és középkori követőik gondja az volt, hogy a vándorcsillagok közül kettő (Mercurius és Venus) a Napot egy ideig megelőzi, aztán követi, szimmetrikusan. A másik három pedig az égbolton való haladásában néha visszafordul egy időre, majd egy hurok megtétele után folytatja az útját. A mindenki által ellenőrizhető tényhez a korábbi modell bonyolításával próbáltak magyarázatot alkotni, a Föld körül keringő kisebb gömbökkel, körökkel, de az egyre pontosabb megfigyelések által feltárt eltérések egyre nehezebben tarthatóvá tették az elméletet. A keresztény egyház sajnos sok éven át akadályozta, sőt, megtorolta az újfajta magyarázatok közzétételét, a geocentrikus világmodellt tartalmazó Biblia szavahihetőségének és az egyház szilárd hatalmának védelmében.

A német-lengyel **Kopernikusz** (eredetileg Niklas Koppernigk), a görög **Arisztarkhosz** modelljét megvizsgálva, több tanulmánya után végül 1543-ban, halála előtt megjelent főművében a <u>napközéppontú</u> (heliocentrikus) világmodell mellett állt ki, ami sokkal egyszerűbb magyarázatot kínált az égbolton megfigyelt jelenségekre. Eszerint a bolygók, *így a Föld is* <u>körpályákon</u> keringenek <u>a Nap körül</u>. A botrányos az elméletben, a Biblia tanításának megkérdőjelezésén kívül, az volt, hogy a Földet "lefokozta", a többihez hasonló, egyszerű bolygóvá minősítette, a többit pedig a Föld mellé emelte. Ez felvethette azt a hátborzongató gondolatot is, hogy az égen a csillagok között mozgó "planéták" nem puszta fénypontok, hanem a Földhöz hasonló, távoli világok, pedig a Biblia ilyesmiről még csak szót sem ejt.

A látottakat megmagyarázó modell egyszerűbb lett, de a pontosságban még mindig voltak hiányok, a bolygók a számításokon alapuló előrejelzésekhez képest hol siettek, hol késtek. A bajor **Johannes Kepler** a modellt továbbfejlesztette annak az észrevételével, hogy a pontatlanság megmagyarázható, ha a bolygópályákat kör helyett <u>ellipszisekkel</u> helyettesítjük. Az új elmélet részleteit 1609-ben és 1619-ben jelentette meg. A **Kepler-törvények** ma is érvényesek, és később alapot adtak mindenféle más keringési helyzet elemzéséhez is.

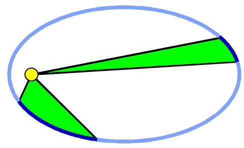
I. Minden bolygó olyan ellipszis alakú pályán kering a Nap körül, aminek az egyik fókusz-pontjában a Nap van.



Az ellipszis fókuszpontjának definiálása itt nem fontos, az ellipszisnek két szimmetrikus fókuszpontja van, a nagytengelyén. Az ábrán példák láthatók, az egyik fókuszpont mindegyiknél a kör középpontja alá van igazítva. A kör olyan speciális ellipszis, amelynek a két fókuszpontja egybeesik. Minél elnyúltabb az ellipszis, annál közelebb van a fókuszpontja a nagytengely végpontjához. A bolygók ezeken a pályákon láthatóan mindenféle súrlódás, ellenállás nélkül haladnak, feltehetően a végtelenségig, tehát a közöttük levő térnek üresnek kell lennie, a tudósoknak már régóta ez volt a gyanúja. (Akik nem tudták elképzelni a levegő nélküli, teljesen üres űrt, azok egy speciális közeg, az éter (aether) jelenlétében hittek, ami anyag, hullámok is tudnak terjedni benne, de mégsem lassítja a bolygókat.)

Ma már ezt mind tudjuk, de akkor még a távcső is vadonatúj találmány volt, és Galilei volt az első, aki az égbolt megfigyelésére használta, 1610-ben, újabb drámai ismereteket szerezve, többek között a Hold felszínéről és a Jupiter addig sosem látott, nem is sejtett holdjairól.

II. A bolygó vezérsugara azonos idő alatt azonos területet súrol.



A *vezérsugár* a Napot és a bolygót összekötő vonal, ami a bolygóval együtt mozog, adott idő alatt végigsúrolva az ellipszis egy cikkét. A törvény szerint a bolygó úgy kering, hogy a sebessége ingadozik: a Naphoz közeledve egyre gyorsul, elhalad mögötte, aztán lassulni kezd, a naptávol-pontban a leglassabb, aztán ismét közeledni és gyorsulni kezd. Az ábrán a példaként vett két zöld terület egyforma nagyságú, így a hozzájuk tartozó két pályaívet a bolygó egyforma *idő* alatt járja be. A sebességek közötti különbség annál nagyobb, minél elnyúltabb az ellipszis. A Föld pályája majdnem kör, de a keringési sebesség ennek ellenére már 29,3 és 30,3 km/s között mozog. Az üstököspályák gyakran nagyon elnyúltak, és a sebességváltozás ott már igazán nagy.

III. A bolygópályák fél nagytengelyeinek a köbei és a keringési idejük négyzetei közötti arány minden bolygónál ugyanaz:

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_3^3}{T_3^2} \ldots = \text{állandó}$$

Ez azt eredményezi, hogy egy távolabbi pályán keringő bolygónak a haladási sebessége kisebb. Tehát a Szaturnusz számára nem csak azért tart egy keringés tovább (29,46 évig), mert hosszabb az ellipszis-pályája, hanem ráadásul a sebessége is kisebb, mint a Földé.

Ez az úgynevezett Kepler-állandó a Nap körüli pályákra kb. $3{,}36165 \cdot 10^{18}\ m^3/s^2$.

Ezek a törvények ugyanúgy érvényesek egy holdnak a bolygója körüli pályára, de a Föld körül keringő űrhajókra is. De a III. törvény **csak ugyanarra a központi égitestre** vonatkozóan érvényes, mert annak a tömegvonzásától (tehát a tömegétől) függ. Vagyis a Kepler-állandó más a Nap és bolygói, és más a Jupiter és holdjai esetében, például.

Ha egy űrhajó (legalább) olyan sebességre gyorsul fel, hogy az ellipszispályája végtelen hosszúságúra nyúlik, akkor elérte az ún. **szökési sebesség**et, és nem tér vissza. Ez már számos bolygókutató űr-szondának, valamint a Holdat elérő űreszközöknek és embereknek sikerült.

A törvényekből következik az is, hogy a keringő égitest távolsága *egyedül a sebességétől függ*, és a sebessége csak a távolságtól és a központi égitest tömegétől függ. Egy bizonyos pályát csak egy bizonyos sebességgel lehet betartani, ekkor a központi égitest vonzása és a centrifugális erő egyfajta egyensúlyba kerül. Bármilyen sebességmódosítás után a test automatikusan másik pályára tér át, új egyensúlyt keresve. Amíg a központi égitesthez viszonyítva a mérete pontszerűnek is vehető, addig a *keringő test* tömege nem számít, ezért a Halálcsillag pont ugyanazon a pályán keringene, mint egy teniszlabda. Mivel ezeken a pályákon a keringő testre csak a gravitációs erő van hatással, a mozgását *egyfajta szabadesésnek is lehet tekinteni*. Az így létrejövő pályákat **tehetetlenségi pályák**nak hívják. A keringés nélkül a test a központi égitestbe csapódna.

A Naprendszer keletkezése során bizonyára nagy volt a kavargás a formálódó és sebességük szerint helyezkedő kisebb-nagyobb égitestek között. De azok, amiket mi ma bolygókként ismerünk, végül a saját sebességükkel megtalálták a saját egyensúlyi pályájukat a Nap körül. Amelyik égitest túl gyors volt, az kisodródott, amelyik pedig túl lassú, az közelebb került a Naphoz. Végül olyan helyzet állt be, aminek teljesülnek a feltételei. Ha egy bolygónak megnövelnénk a keringési sebességét, automatikusan és megakadályozhatatlanul távolabbi pályára állna.

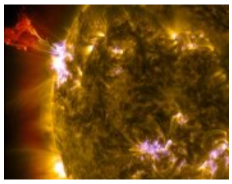
Ez a törvényszerűség az oka annak, hogy a spirálgalaxisok jellegzetes szerkezete létrejött, mert a közös tömegközépponttól távolabb keringő csillagok csak akkor maradhatnak meg a pályájukon, ha lemaradnak a középponthoz közelebbi csillagok mögött.

Kepler törvényeinek hála, ki lehetett számolni a bolygók megfigyelt keringési időiből a pályáik *arányát*. A valódi méretet nem. Ha csak egyetlen távolságot ismernének a Naprendszerben, az összes többi már kiszámolható lenne abból az egyből, sőt a Nap tömege is ismertté válna, amiből már tippelni lehetne a sűrűségére, az összetételére. Történt pár eredménytelen kísérlet, mígnem **1769**. június 3-án a Vénusz elvonult a napkorong előtt. A jelenség megfigyelésére Cook kapitány Tahitira utazott, a magyar **Sajnovics János** pedig, az osztrák Maximillian Hell segítőjeként a fagyos lappföldre.

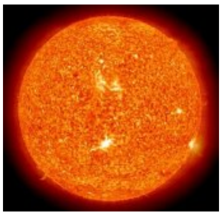
Mindkét expedíciónak sikerült nagy pontossággal megmérnie az átvonulás időtartamát, ebből pedig Edmund Halley korábban megjelentetett módszerével kiszámíthatták a Nap és a Föld távolságát. Végre megvolt egy távolság, és nagy ugrást tettek a Naprendszer megismerésében. "Mellékesen" Sajnovics egy mindent felbolygató tanulmányt írt a lapp és a magyar nyelvek hasonlóságainak részletes elemzéséről, ez volt az első tudományos bizonyíték a magyar nép finnugor eredetére.

Egyre sürgetőbb probléma, hogy a radioaktív hulladéktól valahogy megszabaduljunk. Felvetődik néha az az ötlet, hogy lőjük a szemetet a Napba. Alapvetően jó ötlet is lenne, de minden, ami a Földön van, a Nap körül kering, velünk együtt, kb. 30 km/s sebességgel. Ahhoz, hogy bármilyen űrjármű közeledni kezdjen a Naphoz, *le kell fékezni*. Ennek eredményeként a pályája ellipszissé lapul, és annak a túlsó végén meg fogja közelíteni a Napot, Kepler törvényei ezt meg is magyarázzák. Nincs más lehetőség. A baj az, hogy a kellően szűk ellipszishez legfeljebb 4 km/s sebességre kellene a rakományt lassítani, vagyis hozzánk képest 26 km/s sebességgel visszafelé kilőni. Ha nem fékezzük le eléggé, akkor csak elszáguld a Nap mellett, aztán visszatér a mi pályánk távolságáig. A legerősebb rakétáink teljesítménye egyelőre kb. a fele ennek.

A Naprendszer



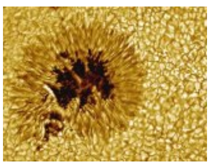
A **csillag** azért látszik, mert fény jön belőle, *minden* egyéb pedig azért, mert a közelben levő csillag (a nap) megvilágítja. A "fény" lehet szabad szemmel nem látható is, például infravörös, röntgen- vagy rádiósugárzás. Vannak jelenségek, amelyek a legjobban úgy figyelhetők meg, ha ezekről a nem látható sugárzásokról készül fénykép. Épp ezért jegyezd meg, hogy *a csillagászati fényképek nagy része nem a valódi színeket örökíti meg*, hanem ún. hamis színezésű képek. Ennek a célja az, hogy a kutatók a szoftveresen generált vagy szűrőkkel kiemelt színek alakjában teszik a maguk számára láthatóvá a sugárzás egyes tartományait, esetleg egymásra illesztenek más-más szűrőkkel készült képeket.



A **Nap** egy csillag, a tömege $2 \cdot 10^{30}$ kg (két kvintillió), az anyaga plazma halmazállapotú **hidrogén** (74%) és **hélium** (25%), szilárd felszíne nincs. A saját tömegvonzása alatt összepréselődő hidrogén folyamatos <u>magfúziós</u> folyamatban héliummá alakul, ezzel a belsejében néhány millió fokos hőmérsékletet létrehozva. A Nap életkora kb. 4,6 milliárd év.

A sugárzásának bizonyos tartományait kiszűri a légkörünk, vagy annak nagy magasságban levő, ózonban gazdag rétege, és a Föld mágneses erőtere is eltereli a Napból érkező részecskesugárzás, az ún. **napszél** nagy részét. Ha ez a szűrés romlik, akkor a földfelszínt veszélyes sugárzás éri el.

A Nap fotoszféra nevű rétegét látjuk napkorongként, ennek a "felszíni" hőmérséklete 5600 °C körüli, az átmérője **1,4 millió km**. Az alsóbb rétegekről csak közvetett adataink vannak. A felsőbb rétegeket, mint a kromoszféra és a korona, már meg tudjuk vizsgálni, a napkorong kitakarásával. A Nap fénye fehér színű.

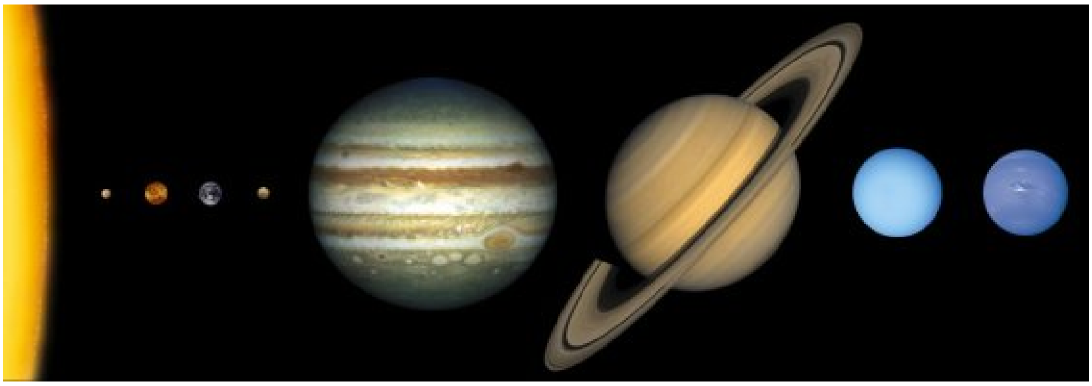


A fotoszféra állandó hőáramlása hozza létre a szemcsés felszíni szerkezetet. A napfoltokat, flereket, napkitöréseket, plazmaíveket, koronakidobódásokat a Nap hihetetlenül erős mágneses terének hullámzásai, örvénylései irányítják. A naptevékenység intenzitása átlagosan kb. 11 éves periódusokban ingadozik.

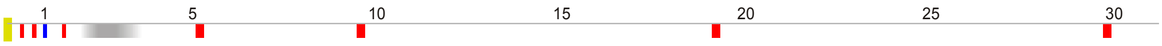
A Föld és a Nap átlagos távolsága a csillagászati egység (CsE, AU), ez kb. **150 millió kilométer** (500 fénymásodperc, azaz fénysebességgel 500 másodpercnyi út).

Néhány szám: a Föld átmérője **12756 km**, az Egyenlítő hossza 40075 km, **a Hold távolsága 384 ezer km**. A Vénusz távolsága, amikor hozzánk legközelebb van, 41 millió km, a Marsé 56 millió km. A Neptunusz távolsága 30 CsE. A Naprendszer átmérője elég bizonytalan fogalom, vehetjük 100 ezer csillagászati egységnek.

A **bolygók** a Nap körül keringenek, azonos irányban, körhöz közel álló ellipszispályákon. A pályák egy síkba esnek. A Naptól való növekvő távolság szerint: **Merkúr, Vénusz, Föld, Mars**, itt következik a *kisbolygóövezet*, **Jupiter, Szaturnusz, Uránusz, Neptunusz**. A belső négy bolygó szilárd kőzetbolygó. A külső négy bolygó gázokból áll, ami a legbelső magban a nagy tömegvonzás súlya alatt folyadékká sűrűsödik, ezért nem lehet rájuk leszállni, mert nincs hová. Ezek a bolygók mind jóval nagyobbak a kőzetbolygóknál, ezek a gázóriások. Az utolsó kettő kivételével mindegyik bolygó látható szabad szemmel is, persze csak csillagszerű pontként, a legfényesebb a Vénusz.



A képen sorrendben és méretarányosan láthatók, de a távolságaik valójában ilyenek:



A **Merkúr** harmadakkora, mint a Föld, teljesen kopár, a Nap felőli oldalán +400, a túlsó oldalán -180 Celsius-fok van. A Naptól mért távolsága 0,31 és 0,47 CsE között mozog. Egy Merkúr-év 88 nap.

A **Vénusz** majdnem akkora, mint a Föld, innen nézve gyönyörű, fényes csillagnak látszik, ő az Esthajnal-csillag. (Hol este, hol hajnalban látható, a Nap körüli keringése miatt, 584 napos periódussal.) A forgási iránya ellentétes a keringési irányával. A légköre sűrű szén-dioxid és nitrogén, kevés kén-dioxid, a felszíni nyomás 92 atmoszféra. A hőmérséklet 420°C, tankönyvi példája az üvegházhatásnak.

A **Föld** légköre 78% nitrogén, 21% oxigén, 1% argon, 0,03% szén-dioxid. A felszíni nyomás 1 atmoszféra, az átlaghőmérséklet 14°C, ami miatt folyékony víz van rajta, ez az élet keletkezésének és fennmaradásának fontos feltétele. Ha az átlaghőmérséklet 2 fokot emelkedik, a tengeri planktonok jelentős része kipusztul, csökken a halállomány, de főleg csökken az oxigéntermelés, valamint a szén-dioxid elnyelése, így a hőmérséklet tovább nő, kezdhetünk csomagolni.

A **Mars** feleakkora, mint a Föld, a nehézségi gyorsulás 0,38 g, a légköre szén-dioxid, felszíni légnyomása 0,008 atmoszféra, az egyenlítői csúcshőmérséklet 0°C körül mozog. A sarkokon van némi fagyott víz. Már több űrszondánk is leszállt rajta, vizet és valami életet keresgélve.

A **Jupiter** a Földről nézve a második legfényesebb bolygó, szilárd felszín nélküli gázóriás. A Naptól mért távolsága kb. 5,2 CsE. A Földnél 11-szer nagyobb, a tömege a Föld 311-szerese, ez 2,5-szer nagyobb, mint az összes többi bolygó tömege *együttvéve*. Az alsóbb légkör kb. 75% hidrogén, 24% hélium. A gázóriások felszíni forgási sebessége nem egyenletes, ezért alakulnak ki rajtuk a több száz km/h sebességű szelek és különféle anyagú felhősávok. A gázburokba eddig 150 km mélyen sikerült behatolni és onnan jeleket küldeni, aztán győzött a (váratlanul nagy) forróság és a nyomás. A Nagy Vörös Foltot már 1664-ben látták, ami egy ezek szerint legalább 350 éve létező hatalmas ciklon, és gőzünk sincs arról, hogy ez hogyan lehetséges. A legnagyobb holdjai: **Io**, **Europa**, **Ganymedes**, **Callisto**, ezeket Galilei látta meg először a távcsövével 1610-ben. Egy egyszerű binokuláris távcsővel is *simán megfigyelhető* fényes pontok a bolygó mellett, izgalmas érzés megnézni.

A **Szaturnusz** mérete a Föld 9 és félszerese, tömege a Föld 95-szöröse, az összetétele a Jupiterhez hasonlít, gázóriás. A felhőzetében 500 km/h sebességű áramlatok is vannak. A gyűrűket egy nagyobbacska távcsővel már észre lehet venni. A vastagságuk csak tíz-húsz méter! Milliónyi kisebb-nagyobb jég- és kődarabból állnak, amelyek a bolygó körül keringenek, azonos síkban. (Több síkban levő gyűrűk nem jöhetnek létre.) A Cassini űrszonda káprázatos fotókat készített, és egészen meghökkentő alakzatokat tett megfigyelhetővé. A gyűrűk valószínűleg egy hold anyagából keletkeztek, amely valami miatt, talán egy üstökössel való ütközés hatására túl közel került a bolygóhoz és az árapályerők szétmorzsolták. A másik három gázbolygó körül is vannak gyűrűk, de óriástávcsővel is alig láthatóak.

Az **Uránusz** 4-szer nagyobb a Földnél, a tömege 14-szer nagyobb, gázbolygó. Anyaga szintén hidrogén és hélium. Sokat nem tudunk róla, a Voyager-2 űrszonda elment mellette, fotózta, méregette. Érdekessége, hogy a forgástengelye "fekszik", nagyjából a keringési síkjába esik, ehhez valami komoly dolognak kellett történnie vele évmilliárdokkal ezelőtt.

A **Neptunusz** majdnem 4-szer nagyobb a Földnél, a tömege 17-szer nagyobb, gázbolygó. Eddig csak a Voyager-2 szonda került a közelébe, ezért alig tudunk róla valami biztosat. A légkörében levő kevés metán miatt szép kék színe van, de a nagyon távoli Nap miatt a sötétségben ez nem lehet túl feltűnő.

Melyik a legkisebb bolygó? Melyeket láthatod szabad szemmel?
Mi a leglényegesebb különbség a belső négy és a külső négy bolygó között?

A **törpebolygók** kategóriája 2006-ban született. Ennek minősítették át a kisbolygóöv legnagyobb égitestét, a **Ceres**t, a Neptunusz pályáján kívül pedig a következők vannak: **Pluto** (felfedezve 1930-ban, 2006-ig bolygó), **Eris** (2003), **Haumea** (2004), **Makemake** (2005). A kritériumuk az, hogy az elég nagy gravitációjuk nagyjából gömb alakúvá formálta őket, és persze hogy a Nap körül keringenek.

A bolygók körül keringenek a kisebb-nagyobb, szilárd felszínű **holdak**. A Merkúrnak és a Vénusznak nincsenek holdjaik. Sok nagy és gömbölyű hold van, mint a mi Holdunk; ha ezek a Nap körül keringenének, törpebolygók lennének. A Jupiter és a Szaturnusz holdjain egy csomó furcsa dolgot lehet látni, a Titánnak még légköre is van, és már minimum két holdról tudjuk, hogy a vaskos jégfelszín alatt folyékony víz lehet. Azokban valamilyen mikroszkopikus életről is lehet már fantáziálni. Törpebolygónak is lehet holdja, a Pluto körül három kis hold is kering.

A **Hold** mérete a Föld negyede, a tömege csak 0,012 földtömeg. Távolsága 384 ezer km (1,28 fénymásodperc), a keringési ideje 27,3 nap, a két újhold közötti idő 29 nap 12 óra 44 perc. Mivel ugyanolyan szögsebességgel forog (mert forog!), mint ahogy kering, állandóan ugyanazt az oldalát látjuk. A **holdfázisok** oka az, hogy a Holdat a Nap mindig más irányból világítja meg, és azt mi innen, "belülről" figyeljük. Légköre nincs, csak valami kis gáz, 10^{-18} atmoszféra "nyomással". (Ezt hogy sikerült megmérni?) A felszín hőmérséklete napfényben +140°C, sötétben -180°C. A nehézségi gyorsulás 0,165 g.

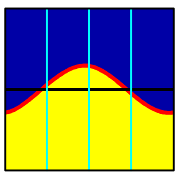
A Mars pályáján túl van a kisbolygóöv. A **kisbolygók** (aszteroidák) néhány kilométeres és annál is kisebb sziklák, kb. 200 ezer van belőlük katalogizálva, a többit még nem sikerült észrevennünk. Ütközések vagy más égitestek vonzása miatt sok kisbolygó lassul le, és kerül a Naphoz közelebbi, néha ún. "földsúroló" pályára.

Egy szétrombolandó kisbolygó felszínén történő robbantással, akár atombomba bevetésével az a gond, hogy *minden* robbanóanyagunk arra alapul, hogy a hirtelen kitáguló levegő gigantikus lökéshulláma mindent szétvet. Az űrben a levegő az egyetlen, ami ehhez hiányzik. Az atombomba hősugárzása talán megolvasztja a kisbolygót, de akkor majd egy izzó kisbolygó fog becsapódni a Földbe, szóval sajnos nem úgy megy az, ahogy a filmekben.

A Nap körül keringenek az **üstökösök**, amelyek többnyire a távoli **Kuiper-öv**ből és a még távolibb **Oort-felhő**ből (ez is egy gyűrű a Nap körül) kerülnek elő, elnyúlt ellipszispályán érkezve a belső Naprendszerbe. Az üstökösbe fagyott gázok, amikor közeledik a Naphoz, elkezdenek elpárologni (a hőmérséklete még mindig -150 fok körül van), és ezt a nagyon ritka gázt a Nap részecskesugárzása, a *napszél* kifelé fújja, ebből lesz a csóva. Azért látjuk, mert szétszóródik rajta a Nap fénye. Egy fényesebb üstökös hetekig is látható szabad szemmel vagy kis távcsővel.

Hol van a kisbolygóöv? Mi a hold és a törpebolygó közötti különbség?

A **meteorid**ok kisebb kődarabok, amik mindenféle ütközések során töredeztek le holdakról, kisbolygókról, sokszor meteorrajba rendeződve keringenek a Nap körül. (Ezek a Leonida, Quadrantida, Perseida stb. rajok.) Amikor a légkörbe érnek, **meteor** lesz belőlük, és általában a leérés előtt elégnek. Ami esetleg földet ér belőlük, azok a **meteorit**ok.



A Föld tengelyferdesége miatt a Nap az év folyamán egyre alacsonyabban jár, aztán elkezd emelkedni, hosszabb ívet jár be napkeltétől napnyugtáig, a nappalok hosszabbodnak, végül eljut a nyári tetőpontra, utána csökkenni kezd a nappalok hossza, végül télen kezdődik az egész elölről. A téli **napforduló**, az emelkedés kezdete december 21., a tavaszi **napéjegyenlőség** (a nappal és az éjszaka hossza azonos) március 20., a nyári napforduló június 21., az őszi napéjegyenlőség szeptember 22. körül van, egy-napos ingadozással. A diagram a nappal hosszának éves változását mutatja a mi szélességünkön. Tőlünk északabbra a hullámvonal függőlegesen megnyúlik, az Egyenlítő felé haladva pedig egyre laposodik.

A **napfogyatkozás**kor a Hold eltakarja a távoli Napot. Szerencsés véletlen, hogy a kettő a Földről szinte teljesen azonos nagyságúnak látszik, ezért jöhet létre például a teljes és a gyűrűs fogyatkozás is, vagy a "gyémántgyűrű". A **holdfogyatkozás**kor a Hold átmegy a Föld által az űrbe vetett árnyékon. Mivel a Hold pályája kicsit ferde, ez nem történik meg minden keringéskor.

Melyik napon a leghosszabb a nappal? Miből van az üstökös csóvája?

És tovább!

A **csillagképek** a csillagos égbolt alatt fantáziáló emberek által kitalált mesék szereplői. Más népek más csillagokat vontak össze, más mesealakokat látva bennük. A csillagászat ma az ókori görög mitológiához kapcsolódó alakzatokat használja, pusztán a tájékozódás megkönnyítésére. A régi magyarok a Nagy medve csillagkép *részét* alkotó hét csillagban Göncöl táltos, másik mese szerint Illés próféta törött rúdú szekerét látták, az Orion csillagkép "övét" alkotó három egymás melletti csillagot aratóknak látták, akik mögött az Orion-köd Sánta Kata, aki az ebédet viszi nekik. A Bika "szarvának" végén levő látványos nyílt halmazban a Fiastyúkot és csibéit látták, a görögök viszont Pléióné és Atlasz hét lányát, a pleiádokat. Az egyiptomiaknak volt Krokodil csillagképük is, a Göncölszekér pedig igazából Széth isten combja, de van Oroszlán is az égen, csak éppen máshol, mint a görögök szerint. A mezopotámiaiak szerint a mai Halak valójában a Skorpió ollója, a mai Kos a Béresgazda volt, és így tovább, a kultúrtörténészek gazdag égi mondavilágokat ismernek, a csillagos égbolt tényleg megindítja a fantáziát. Nincs "igazi" csillagkép-rendszer, hiszen nincs okunk bármelyiket is annak tekinteni. (Az asztrológiai jelentésmagyarázatok is tulajdonképpen elég önkényes és kevert választásra alapulnak.)

Akárhogyan is alkotunk csillagképeket az égen, az ahhoz tartozó csillagok tőlünk mért távolsága nagyon változatos, és csak felőlünk nézve rendeződnek az általunk ismert alakzatokba. Egy csillaghoz gyakran közelebb van a szomszédos csillagkép egyik csillaga, mint ami az égbolton *látszólag* mellette áll.

A **fényév** a távolság mértékegysége, 9,5 billió kilométer, 9,5 petaméter. A fény ekkora utat tesz meg egy év alatt. A **parsec** (parszek) egy másik mértékegység, kb. 3,6 fényév. (A név a parallaxis és secundum szavakból származik.)

A legközelebbi csillag (Alfa Centauri) távolsága 4 fényév, pontosabban 276 ezer CsE. A mi **galaxis**unk (a **Tejútrendszer**) átmérője kb. 100 ezer fényév. Az égen látható összes csillag *a mi galaxisunkban van*. Ez egy teljesen szokványos spirálgalaxis, kb. 200 milliárd csillagból állhat. Sajnos nem láthatunk rá kívülről, hiszen benne vagyunk, az egyik spirálkar külső harmada környékén. Az alakja a belülről végzett felméréseink alapján valószínűleg hasonlít a szomszédságunkban levő Androméda-galaxisra (lásd a képen), amelynek a távolsága csak kb. 2,5 millió fényév, és az égbolton egy körömnyi méretű, nagyon halvány folt, az Androméda-köd.

A **Tejút** az égbolton végighúzódó halvány csillag sáv, csodálatos látvány, de igazi sötétség kell a megpillantásához. A galaxisunkat látjuk ilyen alakban *belülről*, mivel mi is a síkjában vagyunk. Kár, hogy a galaxis központi részét pont nem láthatjuk, mert kitakarja előlünk egy gigantikus csillagközi porfelhő. De infravörös fényt és más sugárzásokat észlelő távcsövekkel át lehet látni ezen a felhőn.

A más csillagok körül keringő bolygókat **exobolygó**knak hívjuk, eddig mintegy ezer darabról tudunk, a távcsövek erős ütemben fejlődnek. A többségüket közvetlenül nem látjuk, csak a csillag megfigyelésével lehet tudni róluk. Amelyiket pedig látjuk, azt is csak egy nagyon halvány pontként. Eddig nem találtunk lakhatót, olyat sem, amelyiken el tudunk képzelni bármilyen életformát.

A Világegyetemben több száz milliárd *galaxis* van*, az általunk észlelt legtávolabbi távolsága 13,3 milliárd fényév. A Nap kb. 4,6 milliárd éve született. A minden ismert dolgot magába foglaló Világegyetem kora a jelenlegi tudásunk szerint **13,8 milliárd év**.

A **nóva** a sejtéseink szerint olyan csillag, amely az ikercsillagától elszívja az anyaga egy részét, ami végül burokként lerobban róla, a fénye messziről is jól látható. A **szupernóva** olyan csillag, amely az élete végén a saját súlya alatt összeomlik, majd szétrobban.

Mi az a Tejútrendszer? Körülbelül mennyi a Naprendszer és a Tejútrendszer közötti méretarány?

* Keress rá az Abell 1689-re vagy az Abell 2218-ra. Azok az oválisok mind egy-egy galaxis, az égbolt egy picike területén.

A **fekete lyuk** olyan összeomlott, kis méretű, de fantasztikus tömegű, szupersűrű óriáscsillag, amelytől bizonyos távolságra már a fénysebesség sem elég a gravitációja leküzdésére. Emiatt közvetlenül belőle nem érkezik sugárzás, fény sem, ezért *nem is látható*. A fekete lyukon átrepülni nem lehet, mert a lyuk csak egy hasonlat, amit eredetileg csak viccnek szántak.

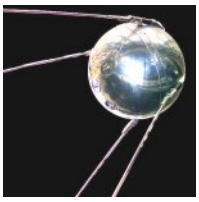
A legközelebbi fekete lyuk 1600 fényévre van. Az óriástávcsövekkel észlelhetjük a körülöttük összesűrűsödő, éppen beléjük zuhanó, felbomló atomi szerkezetű anyag sugárzását.* A galaxisunk közepében van valami nagyon erős gravitációjú dolog, amely körül sikerült megfigyelni néhány csillag keringését, ám mivel ez a dolog nem látszik, feltételezzük, hogy az egy különlegesen nagy tömegű fekete lyuk.

Az **asztronómia** az "igazi" csillagászat, az **asztrológia** a csillagjóslás. Az asztrológusok szerint döntő hatással van az életünkre, hogy a bolygók egymáshoz képest hogyan helyezkednek el az égbolton. A négy létező fizikai kölcsönhatás közül kiemelkedően a gravitáció a legerősebb. A Vénusz gravitációs ereje a hozzánk legközelebbi helyzetében 0,000000225 N. Nagyjából akkora, mint egy kisebb panelházé 30 méter távolságból. A többi bolygó hatása még gyengébb. Erről talán ennyit.

A Világegyetem összes anyaga ma az általános tudományos vélekedés szerint egy apró, felfoghatatlan állagú magból keletkezett egy szintén felfoghatatlan robbanásban. A kozmológusok állítólag az első három másodperc utáni dolgokat már mind meg tudják magyarázni. Az Ősrobbanás témájával az a baj, hogy bárki kockázat nélkül fantáziálhat bármiről, ugyanis ki van zárva, hogy valaki visszamenjen oda, és ellenőrizze a feltevést.

Űreszközök

Jöjjenek röviden az űrtörténelem fő pontjai, hogy a leghíresebb nevek legalább ismerősek lehessenek, az időpontokról pedig körülbelüli fogalmaid lehessenek.



A Föld (vagy egy másik bolygó) körül keringő mesterséges eszközök a **műholdak** (és űrállomások), műbolygónak csak a Nap körüli pályára került bolygóközi űrszondákat hívhatjuk. Az első műholdat a szovjetek lőtték fel, **Szputnyik-1** néven, **1957**. október 4-én, 60 centis, 84 kilogrammos gömb volt, a fő feladata az, hogy rádión pittyegjen, mindenkinek igazolva, hogy a Föld körül kering. A légkör foszlányai pár száz kilométer magasságig elérnek, ez, és a Hold és a Nap gravitációs zavarása együtt azt eredményezi, hogy minden Föld körül keringő eszköz lelassul egy idő után, és ahogy a légkör egyre kevésbé jelentéktelen részeibe ér, tovább lassul, majd végül elég. Ezért a távközlési műholdaknak is kell egy kevés hajtóanyagot vinniük, mert időnként kis pályakorrekciókra van szükség.

Megegyezés dolga, hogy milyen magasságnál húzzuk meg a világűr alsó határát. Néha a 100 kilométeres magasságot veszik ennek. Csak azért érdekes, mert kísérleti járművekkel régen és mostanában is sikerült magasra jutni, és véleményes, hogy mit vehetünk már "az űrben járt" eszköznek.

Az **űrhajó** olyan űreszköz, amely embereket szállít, vagy rakományt egy űrhajó, űrállomás számára. Az **űrállomás** olyan eszköz, amely tartósan Föld körüli (más szóval *orbitális*) pályán kering, és űrhajók visznek oda és hoznak vissza űrhajósokat. Ezeknek az utaknak a pályamagassága 300 km körül mozog, több mint ezerszer kisebb a Hold távolságánál.

Az első űrhajós a szovjet **Jurij Gagarin** volt, 1 kört tett meg a Föld körül Vosztok-1 nevű űrhajójával, **1961**. április 12-én, igazolva, hogy az ember túlélheti ezt, mert ekkor még ez is kérdéses volt. Azóta ez az <u>űrhajózás napja</u>. Az első amerikai űrhajós **Alan Shepard** volt, aki **1961**. május 5-én "űrugrást" hajtott végre az első Mercury űrhajóval, aztán Gus Grissom ugyanígy, végül **John Glenn** volt az, aki már a Földet is meg tudta kerülni, a tervezett 7 kör helyett műszaki probléma miatt 3-szor, **1962**. február 20-án. A lemaradást az űrprogramban az amerikaiak sokáig nem bocsátották meg a NASA-nak.

Az első, nagyon kísérleti űrsétát **Alekszej Leonov** mutatta be a Voszhod-2 űrhajóból kikászálódva, **1965**. március 8-án, "köldökzsinóron" a hajóhoz kapcsolva. Alig tudott visszajutni a helyére, sok átgondolnivalót adva a mérnököknek. Az első kábel nélküli űrsétát, "rakétahátizsákkal", az amerikai **Bruce McCandless** mutatta be, **1984**. február 7-én, a Challenger űrsiklóról.

Az első igazi űrállomás a szovjet **Szaljut-1** volt, **1971**. április 19-én lőtték fel, fél évnyi szolgálat után távirányítással lehozták és a légkörben megsemmisült. Jelenleg a kezdetben orosz-amerikai gyártmányú **Nemzetközi űrállomás** (ISS) van még pályán, az első modulját **1998**. november 20-án lőtték fel, azóta sok új egységgel és berendezéssel bővítették. Sok ország, köztük Magyarország is ott van a résztvevők

* A magyartanárodat lenyűgözheted azzal, hogy látjuk a fekete lyukba zuhanó anyag halálsikolyát. :-)

között. Ma is működik, de a pénzhiány miatt elég alacsony kihasználtsággal; mondhatjuk úgy is, hogy inkább csak őrzik, mint használják.

Melyik évben repült a világ első űrhajósa?

Az első, idáig egyetlen magyar űrhajós **Farkas Bertalan** (született 1949. augusztus 2-án), korábbi vadászpilóta, a Magyar Népköztársaság Hőse és a Magyar Népköztársaság Űrhajósa kitüntetések birtokosa, 1997 óta nyugalmazott dandártábornok. A szovjet Valerij Kubaszov (1935-2014) társaként **1980. május 26**-án szállt fel a **Szojuz-36** űrhajóval, két nap múlva kapcsolódott össze a Szaljut-6 űrállomással. Hat nappal később, június 3-án az előző legénységgel már korábban bedokkolt Szojuz-35 fedélzetén tértek vissza, sima landolással a végtelen kazah sztyeppe közepére.

A tartalékszemélyzet magyar tagja **Magyari Béla** volt (1949. augusztus 8. – 2018. április 23.), korábbi vadászpilóta, a Magyar Népköztársaság Hőse kitüntetés birtokosa, aki szintén teljes kiképzésben részesült. A szovjet Interkozmosz program megszűnése miatt végül sajnos nem repülhetett. Már nyugalmazott mérnök-ezredesként egy ideig a Magyar Asztronautikai Tanács elnöki posztját töltötte be.

Először idegen égitestre az Apollo-11 két űrhajósa, **Neil Armstrong** és **Edwin „Buzz” Aldrin** lépett, **1969**. július 20-án, Eagle (Sas) nevű holdkompjukkal, a Hold körüli pályán az űrhajóval **Michael Collins** várta őket. 1969 és 1972 között hat leszállással összesen 12 űrhajós járt a Hold felszínén. Az utóbbi három alkalommal egy-egy holdautót is használva, amelyeknek a főkonstruktőre a magyar származású **Pavlics Ferenc** (1928–) volt. A Hold felszínére lépett űrhajósok további névsora: Pete Conrad és Alan Bean, Alan Shepard és Ed Mitchell, Dave Scott és Jim Irwin, John Young és Charles Duke Jr., Eugene Cernan és Harrison Schmitt.

Az első többszöri felhasználású űrhajó, az első amerikai űrsikló, a **Columbia 1981**. április 12-én szállt fel (pont az űrhajózás napján) **John Young** és **Robert Crippen** irányítása alatt. Két nap múlva, számtalan tesztmanőver után az élesben még sosem használt géppel tankönyvbe illő leszállást mutattak be az amerikai Edwards légibázison. Ezzel kapcsolatban megjegyezhető, hogy az űrsiklók mindig hajtómű nélkül szálltak le, vagyis az első leszállási kísérlet egyben az utolsó is volt. A programot összesen 135 repülés után a gazdaságtalan üzemeltetés miatt 2011-ben lezárták. Az USA-nak jelenleg nincs üzemképes űrjárműve, az ISS-re az oroszok fuvarozzák őket.

A szovjeteknek is volt egy 1988-ban hibátlan, *automata vezérlésű* próbarepülést bemutató űrsiklójuk, a Buran, de a programot pénzhiány miatt törölték, a siklót beállították valami hangárba, és ennyi. Azóta már tönkrement, ráomlott a hangártető. Két befejezetlen példány múzeumban áll.

Az első kínai űrhajós **Jang Li-vej** volt, aki **Sencsou-5** nevű űrhajójával **2003**. október 15-én indulva 14-szer kerülte meg a Földet. Azóta további hat Sencsou-űrhajó szállt felt, közülük az egyik pilóta nélkül, kísérleti összekapcsolódást végezve a 2011. szeptember 29-én pályára állított **Tienkung-1** űrállomással. Kína a harmadik ország, amelynek saját űrprogramja van.

Adózzunk tisztelettel a hivatásuk közben halálos balesetet szenvedett űrhajósoknak:

Apollo-1 – 1967. január 27.: Virgil "Gus" Grissom, Edward White, Roger Chaffee. Egy földi indítási gyakorlat közben a lezárt kabinban rövidzárlat miatt heves tűz ütött ki, az űrhajósok bennégtek.

Szojuz-1 – 1967. április 23.: Vlagyimir Komarov. A már repülés közben kormányozhatatlanná vált kabin forgása miatt a leszállás során az ejtőernyő összecsavarodott, és a kabin a földbe csapódott. Az űrhajós előtte tudta, hogy a leszállása valószínűleg nem fog sikerülni.

Szojuz-19 – 1971. június 29.: Georgij Dobrovolszkij, Vlagyiszlav Volkov és Viktor Pacajev. A leszállás során oxigénhiány miatt eszméletüket vesztették és meghaltak, mert a leszállókabin légszigetelése még nagy magasságban megsérült. Mivel a leszálláskor nincs rádiókapcsolat, a tragédia a kabin felnyitásakor derült ki.

Challenger STS-51L – 1986. január 28.: Francis Scobee, Judith Resnik, Ellison Onizuka, Ronald McNair, Michael J. Smith, Gregory Jarvis, Christa McAuliffe. Az űrsikló üzemanyagtartálya a felszállás közben egy tömítés szétfagyása következtében felrobbant.

Columbia STS-107 – 2003. február 1.: Willie McCool, Dave Brown, Michael Anderson, Rick Husband, Kalpana Chawla, Laurel Clark, Ilan Ramon. Az űrsikló bal szárnyán a felszálláskor lyukat ütött egy levált burkolóelem. Egy héttel később a visszatérés során az ezer fokra hevülő levegő a nyíláson behatolt, szerkezeti károkat okozott, a gépet kormányozhatatlanná tette, ami végül a levegőben szétszakadt.

Furcsa módon az űrben még nem történt halálos baleset, pedig volt már ütközés, tűz, beragadt segédhajtómű és a sisakba ömlő hűtőfolyadék is.

Melyik három ország bocsátott már fel saját űrhajókat?

A geoszinkron vagy **geostacionárius műhold** olyan pályán kering, ahol pont annyi idő alatt kerüli meg a Földet, mint amennyi idő alatt a Föld körbefordul (azaz 1 nap). Ezért innen nézve állandóan az ég egy-egy adott pontján állónak látszik. A műsorszóró műholdak között sok ilyen van, hogy az antennát ne kelljen állandóan mozgatni. A hátránya a műhold nagy távolsága. (Házi feladat lesz. Tényleg.)

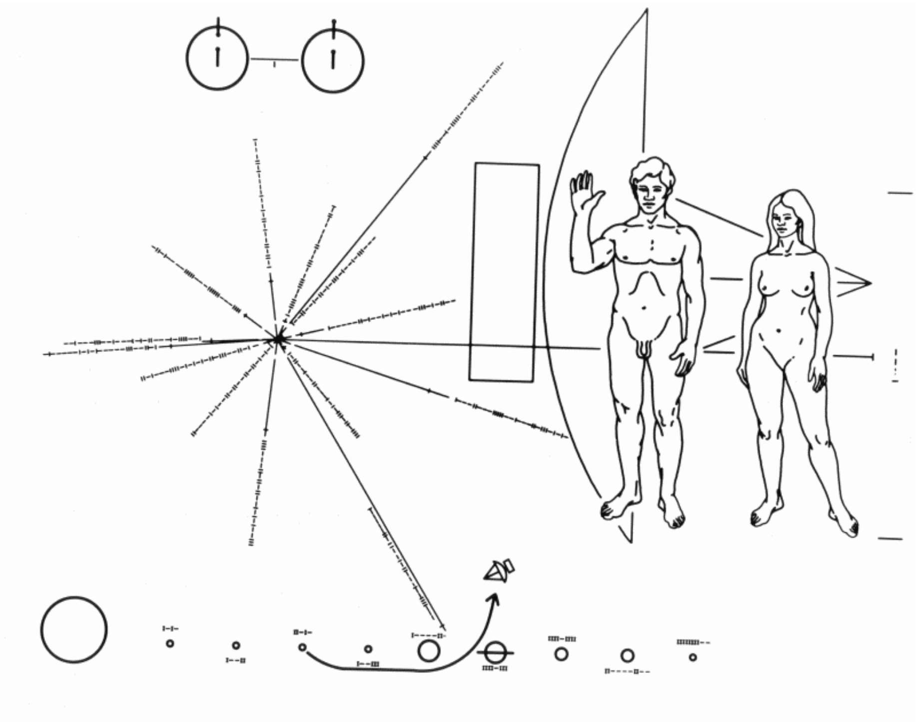
Pilóta nélküli eszközökkel már minden bolygót sikerült megközelíteni. A Holdon főleg a szovjeteknek (oroszoknak) voltak sikereik, 1966 és 1976 között 11 leszállás történt, elsőként a **Luna-9** szondával, **1966**. február 3-án. Két ilyen alkalommal a földről irányítható Lunahod-1 és -2 járműveket vitték oda, három másik szonda anyagmintát is visszahozott a földre. Aztán hosszú szünet. 1976 után elsőként **2013**. december 14-én szállt le a kínai Jütu (Jáde Nyúl), egy automata vezérlésű holdjáró robot. Csak másfél hónapot bírt, de ez akkor is egy nagy visszatérés volt, 37 év elteltével.

A Vénuszon először leszállt űrszonda a szovjet **Venyera-7**, **1970**. december 15. A Merkúrra még nem sikerült leszállni. A Marson az első a szovjet **Marsz-3** volt, **1971**. december 2., de az antennája szinte azonnal tönkrement, így az első hasznos leszállás az amerikai Viking-1 szondáé, 1976. július 20-án. A Szaturnusz Titán nevű holdját az európai ESA szervezet **Cassini** űrszondájának Huygens leszállóegysége érte el **2005**. január 14-én. A 67P/Csurjumov–Geraszimenko üstököst az ESA **Rosetta** űrszondájának Philae leszállóegysége **2014**. november 12-én érintette meg, ötödik idegen égitestként.

A Marson távirányítású, illetve félautomata mozgó kutatóegységek is dolgoztak már, a felszíni anyagot elemezve és sok fényképet készítve. Hírneves lett ezek közül a két kis marsjáró, a 2004-ben leszállt *Spirit* és *Opportunity*. A NASA ezek élettartamát kb. 3 hónapra becsülte, arra számítva, hogy a homokviharok lassan befedik az energiaellátást biztosító napelemtáblákat. Ehhez képest a Spirit 2010-ig működött. Az Opportunity 2018. júniusáig dolgozott, kapirgált, elemezgetett, fényképezett, és küldte az adatokat. Bármelyik ősrobbanás-elméletnél hihetőbb, hogy egy-egy marslakó időnként a szerkentyű mögé lopózott, és kis seprűvel letakarította róla a homokot, mert annyira megkedvelték már, ahogy ide-oda gurul. Sajnos ekkor egy óriási homokvihar takarása miatt a napelemes akkumulátorok legyengültek, de a NASA még nem adta fel a reményt a kapcsolat helyreállítására. Talán a marslakók sem.

Mikor repült a magyar űrhajós és hogy hívják? Ki volt a tartalékpilóta?

Eddig négy űrszonda jutott a Neptunusz pályáján kívülre: a **Pioneer**-10 és -11, és a **Voyager**-1 és -2. A Pioneer szondákra az alábbi ábrával gravírozott aranyozott alumíniumtáblát szereltek, az esetlegesen rájuk bukkanó idegen lényeknek üzenve az emberről és a Naprendszer helyéről, univerzálisan megfejthetőnek remélt kódok kreálásával. A Voyager szondákra pedig egy-egy aranyozott réz hanglemezt helyeztek el, ötven nyelven elhangzó üdvözlő szavakkal, mindenféle emberi és természeti hangokkal, és 115 analóg kódolású fényképpel. A lemez burkolatára képes útmutatót véstek a lemez felhasználásához.



Matek (és egyéb hasznosságok)

Ahhoz, hogy a fizikában a fogalmakat, rajzokat, képleteket megértsd, nélkülözhetetlen, hogy az ehhez szükséges matematikai alapfogalmak világosak legyenek számodra, és rutinszerűen tudj velük bánni. Most lehet, hogy azt gondolod, hogy na, itt kezdődik az egész baj, mert a matekot is utálod, de legalábbis hülye vagy hozzá. Nos, az az igazság, hogy ha azokhoz, amiket itt összeszedtem, *tényleg* hülye vagy, és még megjegyezni sem tudod, akkor valóban baj van, ez nem neked való, béke poraidra. De nem tartom valószínűnek, hogy ha te egy ilyen segédanyagot elkezdtél olvasni, akkor baj van. Szóval légy szíves, tedd félre a megszokásból is érzett utálatodat, és olvasd el tiszta fejjel az alábbiakat, szánj rá erre a szájbarágós összefoglalásnak a megismerésére összesen két órát. Csak olyasmiről lesz szó, amit már ismersz. Ha pedig mégsem, akkor itt a legjobb alkalom arra, hogy megismerd. Nem kell egyszerre lenyelned, de később kénytelen leszel ide visszatérni, és alaposan elolvasni, megtanulni, ez *elkerülhetetlen*. A négy év fizikaanyagához támogatásul nagyjából ennyi matekra van szükséged.

Mire jó a képlet?

A különféle fizikai mennyiségek kiszámításának módját képletek rögzítik. A képlet egy egyenlőség, vagyis két algebrai kifejezés egy egyenlőségjel két oldalán. Az algebrai kifejezés azt jelenti, hogy számok és változó értékeket jelölő betűk vannak mindenféle matematikai műveletekkel összekapcsolva. Például egy képlet ez is:

$$y = 2x + 1$$

A bal oldalon a "kifejezés" most egyetlen változót tartalmaz, a jobb oldalon már egy összeget. Ha most azt mondod, hogy ez nem képlet, hanem függvény, akkor igazad van, mert a képlet mindig függvény is.

A képletet mindig úgy kell használni, hogy a benne levő betűk – ezeket ismeretlennek vagy változónak hívják – helyére az egyenlőségbe behelyettesítjük az éppen érvényes, ismert számértékeket. Ha egy betűből több példány is van, akkor mindegyik helyére ugyanazt az értéket helyettesítjük. Ha ezek után egyetlen változó marad ismeretlen, akkor egyismeretlenes egyenletként ki tudjuk számolni.

Az "éppen érvényes" azt jelenti, hogy van egy feladat, amit meg kell oldanunk, és ahhoz megadnak pár adatot. Ezeket a megfelelő képletbe a megfelelő betűk helyére beírjuk, és megkapjuk annak a változónak az értékét, amely remélhetőleg választ ad a feladatban feltett kérdésre.

Legyen ez a feladat: összesen hány lába van a csapatnak, ha 8 emberből és 2 kutyából áll? Kell ehhez egy képlet:

$$L = e \cdot 2 + k \cdot 4$$

ahol **L** jelöli a lábak számát, **e** az emberek számát és **k** a kutyák számát.

> A képletet nem neked kell kitalálni, hanem kitalálják azt mások, neked csak meg kell tanulnod, és használnod, amikor kell. Persze az az igazi, amikor a képlet értelmes is számodra. Most ez feltehetőleg így is van, de ez lenne a cél akkor is, amikor az impulzus vagy a szögsebesség képletét tanulod.

Használjuk a megadott képletet a lábak kiszámítására a kapott adatokkal. Behelyettesítettük az ismert értékeket a megfelelő változónevek helyére: **L**=8·2+2·4. Kaptunk egy egyismeretlenes egyenletet, amelynek a megoldása **L**=24. Tehát a példa esetében a lábak száma összesen 24.

Ahogy látod, itt egyenletekről meg ismeretlenekről beszélek, és közben csak csináltunk egy tök nyilvánvaló számítást. Túlmisztifikálják a fizikához szükséges matematikát, mert a megfelelő képlet felhasználásával a problémák felét meg is tudjuk oldani.

Használjuk ugyanezt a képletet: hány kutya van a csapatban a 6 ember mellett, ha a lábak száma 28? L=28, e=6, a képlet L=e·2+k·4. Behelyettesítünk: 28=6·2+k·4 ⟶ 16=k·4 ⟶ k=4, azaz 4 kutya. *Ellenőrzésül* visszahelyettesítünk: 28=6·2+4·4, egyezik, rendben.

A problémák másik felét az okozza, hogy fel kell ismerni, mikor melyik képletre van szükség. Hát ezért van a tankönyvekben az a sok-sok szöveg, és nem csak az a néhány képlet. A fizikatanulásnak alapfokon pont az a célja, hogy megtanuld, egy leírt helyzetben a kérdéses adat megtalálásához milyen képletre, képletekre van szükséged, és az eredményt már számítással megtudhatjuk. A gyakorlatban is szükséged lehet még egyszer arra, hogy milyen hosszú legyen az a kötél, milyen gyorsan kell lefékezni a ládát, mekkora lesz a kerék fordulatszáma, mennyi a motor fogyasztása. Ha pedig mégsem, akkor is bővítetted a tudásodat, fejlesztetted az agyadat.

Törtek és hatványok

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel összeszorozzuk.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Tört nevezője nem lehet 0, az olyan tört nem értelmezhető. Bármilyen szám tekinthető törtnek is, ha az könnyebbé teszi neked a továbblépést, az ismerős képlet megtalálását:

$$m=\frac{m}{1}$$

ez bármilyen egész vagy tört m-re igaz. Ha valami 1-gyel van osztva vagy szorozva, akkor végül ezeket áthúzhatod, mert nincs jelentőségük. De a számlálóban mindenképpen maradjon valami, hiszen

$$\frac{1}{m}\neq m\ .$$

Minden szám **reciprok**a az, ha közönséges tört alakra átalakítva a számlálót és a nevezőt felcseréljük.

$$\frac{a}{b}\ \text{reciproka}=\frac{b}{a}\qquad d\left(=\frac{d}{1}\right)\text{reciproka}=\frac{1}{d}$$

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{q}{p}=\frac{s}{r}$$

(feltéve, hogy egyik szám sem nulla)

Bármit törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk.

$$\boxed{\frac{n}{\frac{a}{b}}=n\cdot\frac{b}{a}\qquad\frac{\frac{n}{m}}{\frac{a}{b}}=\frac{n}{m}\cdot\frac{b}{a}\left(=\frac{n\cdot b}{m\cdot a}\right)}$$

Vegyes törtből közönséges törtet csinálni egyszerűen lehet, összeadásként (közös nevezővel). Leírom a végletekig részletezve:

$$D\frac{e}{f}\quad\left(=D+\frac{e}{f}=\frac{D}{1}+\frac{e}{f}=\frac{D\cdot f+e}{1\cdot f}\right)\quad=\frac{D\cdot f+e}{f}$$

Például

$$4\frac{5}{9}=\frac{4\cdot 9+5}{9}=\frac{41}{9}$$

Csak gondold végig: négy egész torta, 9-9 szeletre vágva, plusz még egy ötödik 9 részre vágott tortából 5 szelet, az összesen 41 egyforma szelet. Te is szeretsz tortát számolni? ;-)

Lássuk a hatványozást.

$$a\cdot a\cdot a\cdot a=a^4$$

Lehet, hogy eddig ezt nem tudtad:

$$\frac{1}{a^4}=a^{-4}$$

Persze nem csak 4-re, hanem bármire. Erre az összefüggésre *szükséged lesz* a normál alakok használata során. De például a folyó szövegben is előfordul, hogy az alábbi mértékegység bal oldali változatát a jobb oldalival helyettesítik:

$$\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

Ne rohanj, nézd meg és értsd meg, ne ennyicskén múljon valamilyen képletnek a megértése. És próbáld ki, hogy a számológépeden ki tudod-e számolni az 5^{-3} értékét, ami 0,008. Mindegy, hogy `5` **`xʸ`** `3` **`+/-`** **`=`** vagy `5` **`xʸ`** `3` **`=`** **`1/x`**, csak valahogy menjen.

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

Számold ki ezt is a=6561 esetre, az eredmény 9. Talán így kell beírnod: `6561` **`xʸ`** `4` **`1/x`** **`=`**. Ez csak találgatás, a számológépek nem egyformák. **Gyakorold külön a saját számológéped használatát is**, ne egy dolgozat írásakor kelljen a fejedet törni azon, hogy hogyan kell reciprokot venni. Szerintem tanuld meg a memória használatát is, hogy ha egy tört nevezőjét számoltad ki előbb, akkor ne kelljen papírra leírnod és később visszapötyögnöd. Ha megvan a nevező, az **`M in`** vagy **`MS`** vagy valami hasonló gombbal tárolod (csak egy dolog lehet egyszerre a memóriában), aztán amikor sorra kerül, az **`MR`** gombbal lehívod. Az **`M+`** csak hozzáadja az aktuális számot a memóriában már ott levő számhoz, figyelj erre. Drága perceket veszíthetsz a bénázással.

Négy ide tartozó alapösszefüggés:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \qquad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(a^b\right)^c = \left(a^c\right)^b = a^{b\cdot c} \qquad a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Ezt tanuld meg úgy, mint a nevedet, mert ha elrontod, akkor a számításaid egy részét garantáltan el fogod szúrni. A függvénytáblázatodban is benne vannak „A hatványozás azonosságai” cím alatt. Figyelj oda arra, hogy az első kettő szorzásra vonatkozik, két hatvány *összeadására* nincs külön képlet. És természetesen ha valamelyik kitevő negatív vagy tört, a művelet akkor is elvégezhető vele.

Bármilyen x-re, törtre, negatívra is alaptétel a következő:

$$\boxed{x^0 = 1}$$

Fizikai képletekben néha találkozhatsz ezzel a jellel:

$$\sum$$

Ez a görög nagy szigma betű, a képletekben úgy kell olvasni, hogy „szumma”, és a mögé tett kifejezés többtagú **összeadását** jelöljük vele. Figyeld meg a használatát és a jelentését ezen a példán:

$$\sum_{i=1}^{5}(m_i\cdot v^2) = m_1\cdot v^2 + m_2\cdot v^2 + m_3\cdot v^2 + m_4\cdot v^2 + m_5\cdot v^2$$

Ahogy látod, a „szumma í egyenlő 1-től 5-ig em í-szer vé négyzet” jelölés azt az összeadás-sorozatot rövidíti, amikor az "i" helyére behelyettesítjük a természetes számokat 1-től 5-ig, és az ezzel indexelt mennyiségeket adjuk össze. Ez esetben öt különböző tömegű testre számítjuk ki az $m\cdot v^2$ szorzatát, és ezeket összeadjuk. Miért? Azt a képlet kitalálója tudja, neked csak értened kell, hogy a képlet milyen számítást ír elő.

Van olyan, hogy a szumma jel fölé záróértéknek "n"-et írnak, ami azt jelentené, hogy bármennyi is a testek száma, addig kell az összeadást végigcsinálni. Az is lehet, hogy felül nincs szám, vagy a végtelen jele (∞) látható, akkor az összeadandó elemek száma végtelen nagy lehet. A szumma jel tehát csak egy hosszú műveletsorozat rövidített jelölése, összeadásoké, így könnyebb leírni. A számológépeden nincs ilyen művelet, de például az Excelben van SZUM függvény.

Egyismeretlenes egyenlet megoldása nem nagy ügy, gyakorold. Mindig az egyenlet mindkét oldalával pontosan ugyanazt a műveletet kell végrehajtani, úgy kavarva, hogy végül az az egy ismeretlen egy példányban önmagában megmaradjon valamelyik oldalon. Ha kivonást akarsz eltüntetni, akkor összeadsz, ha osztást, akkor szorzol, tényleg nevetséges lenne, ha ezt itt kellene megbeszélnünk.

Kétismeretlenes egyenletrendszerben ugyanezt csinálod az egyik egyenlettel, mindaddig, amíg az egyik ismeretlen önmagában az egyik oldalra kerül. Ekkor a másik egyenletet leírod úgy, hogy ott ennek az ismeretlennek minden előfordulása helyén a kapott helyettesítő képletet írod le, így végül lesz egy másik egyismeretlenes egyenleted, ami nem nagy ügy, lásd fent.

Az egyenletekben nem mindig hasznos az ismert számértékek azonnali behelyettesítése, sokat kell irkálni. Bátran hagyd ott a számításokban a jeleiket, és ráérsz behelyettesíteni, amikor már úgy lesz kényelmes. Egy általános képletben nincsenek is számértékek, és azokat is tudnod kell átrendezni, azért, hogy ne kelljen minden képletnek mindenféle alakját megjegyezned.

Másodfokú egyenlet

Nem tudom, hogy ezt tanultad-e már, de a gyorsuló mozgások képleteinek feladatban történő felhasználása esetén beleszaladhatsz. Meg kell tanulni hozzá egy formulát, a többi magától megy.

A másodfokú egyenlet attól másodfokú, hogy a keresett ismeretlen a második hatványon van, $\mathbf{x}^2$, mondjuk. Ha ugyanaz az ismeretlen nincs ott az egyenletben első fokon is (tehát csak x-ként), akkor a megoldás egyszerű. Nézzünk egy példát. Csak hogy szokd, most nem x-et, hanem **t**-t keressük:

$$3 \cdot t = \frac{2}{t} \quad | \cdot t$$

$$3 \cdot t^2 = 2 \quad | : 3$$

$$t^2 = \frac{2}{3} \quad | \sqrt{}$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ha viszont ugyanaz az ismeretlen első fokon is benne van az egyenletben, akkor a megoldás jóval bonyolultabb. Legyen a megoldandó egyenletünk például ez:

$$2x - (x+1) = \frac{1-\sqrt{3}}{x} - 4{,}5$$ Egyszerűsítsünk, vonjunk össze stb.

$$x - 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{x} - 4{,}5$$

$$x^2 - x = 1 - \sqrt{3} - 4{,}5x$$

Itt már láthatod, hogy az x-ből van elsőfokú (x, ami x^1) és másodfokú (x^2) példány is. Ennek a megoldásához az ilyen egyenletet először is egy

$$ax^2 + bx + c = 0$$

általános alakra kell rendezni. Az a, b, c bármi lehet, itt a *szerkezet* a fontos. Tehát egy szorzóval (a) a másodfokú tag, egy példányban, másik szorzóval (b) az elsőfokú tag, szintén egy példányban, és esetleg van még egy ismeretlen nélküli tag is (c). A másik oldalon pedig nulla álljon. Folytatom:

$$x^2 + 3{,}5x - (1 - \sqrt{3}) = 0$$ Ez az ún. *nullára rendezett* alak, eljutottunk a kívánt alaphelyzetig.

Hasonlítsd össze a kapott egyenletet az előbb mutatott általános képlettel!

a=$+1$ (hiszen x^2=**1**x^2)

b=$+3{,}5$ és

c=$-(1-\sqrt{3})$. Ellenőrizd! Mindig figyelj oda az előjelek pontos egyeztetésére is.

Bármi van is az a, b és c betűkkel jelölt helyeken, azokat be kell helyettesíteni **a másodfokú egyenlet megoldóképletébe**, amit tanulj meg kívülről:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ebből megkapod az ismeretlen *két* lehetséges értékét. A másodfokú egyenletnek két helyes megoldása is lehet. Az $x_{1,2}$ is arra figyelmeztet, hogy kapunk egy x_1 és egy x_2 eredményt. (Matekórán fogjátok ezt úgy is hívni, hogy az egyenlet *gyökei*. Ez és a gyökvonás művelete két teljesen különböző dolog.)

A négyzetgyökjel előtt "plusz vagy mínusz" van, ez azt jelenti, hogy el kell végezned a számítást plusszal és mínusszal is, ez két eredményt ad. Behelyettesítem az egyenletünk szerinti értékeket:

$$x_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{3{,}5^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-(1-\sqrt{3})\right)}}{2 \cdot 1}$$

Egy-két egyszerűsítő lépést kihagyok, ezt kaptam:

$$x_1 = \frac{-3{,}5 + \sqrt{12{,}25 + 4 - 4\sqrt{3}}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3{,}5 - \sqrt{12{,}25 + 4 - 4\sqrt{3}}}{2}$$

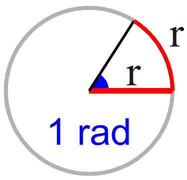
Azt az összeget, ami a gyökjel alatt van, *diszkrimináns*nak hívják, ebben az esetben D=9,322. Ha a diszkrimináns egy példában negatívra jön ki, az kínos, mert negatív számra a négyzetgyök művelete nem értelmezhető, vagyis ilyenkor nincs eredményed.

Az eredmények: x_1=–0,223 és x_2=–3,277. Még nem végeztünk. Most mindkét eredményt gondosan meg kell vizsgálni, mert bármelyik lehet *hamis gyök*. Vagyis hiába jön ki ennek a megoldóképletes számításnak az eredményéül, még lehet, hogy nem igazi megoldás. Például ha az egyenlet ismeretlene egy test tömege, és negatív szám jön ki rá, arról kapásból tudhatjuk, hogy hamis gyök, mert negatív tömeg nincs, nem is kell vele tovább foglalkozni.

Ilyen esetben, vagy ha mindkét kapott gyököd rossz, akkor nézd meg alaposan, hogy az ide vezető egyenletben nem rontottál-e el valamit, mert ritkán adnak fel megoldhatatlan feladatokat.

Mindkét eredményt vissza kell helyettesíteni az eredeti egyenletbe. Ezzel a rossz levezetésünk okozta tévedést is is észrevehetjük. Most az egyik gyök nem is felel meg az eredeti egyenletnek, ez egy rossz gyök, a második viszont rendben van, tehát x=–3,277.

A radián



Elérkezett az idő, hogy a szögek mértékegységeként a fok helyett megismerd a **radián**t, ha még nem került erre sor. Az SI mértékegységrendszerben ez az előírt mértékegység, és akkor bizony a számításokban is ezt kell használni. Azért, mert ha a mértékegységekkel pontosan ugyanazokat a matematikai műveleteket végezzük el, amiket a számokkal, akkor végül a mértékegység helyes lesz, erről külön fejezetben olvashatsz kicsit később. Szóval annak érdekében, hogy a számítások eredménye számértékben és mértékegységben is rendben legyen, fokot csak akkor használhatsz, ha szögfüggvényt számítasz ki belőle (erről a következő fejezet szól), egyéb esetekben kénytelen leszel a radiánra rászokni. Egyébként nem nehéz.

Akkor tehát mi az a radián? Veszünk egy tetszőleges kört, és a sugarát felmérjük a kör vonalára. *Ívben*, nem egyenesen.

1 radián az a szög, amelyet *a sugárral azonos hosszúságú* körív két végpontjától induló két sugár egymással bezár.

Másik megközelítés:

A radián egy körív és a hozzá tartozó sugár aránya.

Ha az ív hossza **h**, a sugár **r**, akkor az ívhez tartozó középponti szög nagysága **h**/**r** radián.

A radián értéke 57.2957795…°, sajnos végtelen és nem ismétlődő tizedes tört, emiatt fölösleges is a fokra váltásával próbálkozni, nem is nagyon van rá szükség. A radiánban kifejezett szögnek tulajdonképpen nincs mértékegysége, mert ahogy láttad, az csak egy *arányszám*, a számításokban egyszerű számként vesz részt, de ha kell, ki lehet írni mögé, hogy rad.

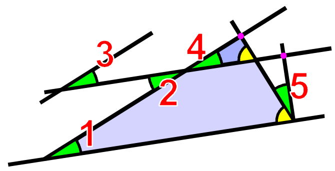
Ellenben jól tudjuk, hogy a kör kerülete $2r\cdot\pi$. Az ívhossz r, a kör ennek 2π-szerese, vagyis kijön, hogy

a teljes kör = $360° = 2\pi$ rad

Ha tehát egy szöget fokban kapunk meg, akkor osztjuk 360-nal, visszaszorozzuk 2π-vel, és kész. A számológépeken általában van olyan funkció, ami a π értékét adja meg, ezért nem kell kézzel beírni a 3,14-et, az úgysem elég pontos.

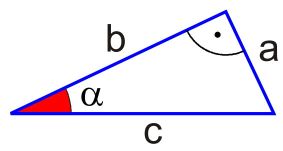
Azonos szögek

Egymást metsző vonalak között azonos szögek is létrejönnek, néha hasznos ezeket felismerni.



1-3, 3-4: **Ha két szög szárai páronként párhuzamosak, akkor a szögek egyenlők.** (Párhuzamos szárú szögek.)
2-4: **Az X alakú vonalak sarkaiban levő szögek egyenlők.** (Csúcsszögek.)
1-2, 2-3: **A Z alakú vonalak sarkaiban levő szögek egyenlők.** (Váltószögek.)
1-4: **Két hasonló háromszög szögei páronként egyenlők.**
4-5: **Ha van két szögünk, amelyeknek a szárai páronként merőlegesek egymásra, akkor az a két szög egyenlő.** (Merőleges szárú szögek.)

Szögfüggvények



Légy szíves, és tanuld meg kívülről a **szögfüggvények** alábbi képleteit, mert sokszor kell. Kizárólag derékszögű háromszögekben használhatók. Az a céljuk, hogy ha a háromszög egyik oldalát és az egyik hegyesszögét ismerjük, akkor ezekkel a függvényekkel kiszámíthassuk a többi oldalát. (Megjegyzem, ha az egyik hegyesszöget ismered, akkor ismered a másikat is: 90°–α.)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \left(\text{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}\right)$$

Vigyázz, nehogy a betűket a rajz nélkül tanuld meg! Ha egy példában más betűk állnak a háromszög mellett, esetleg el van forgatva, ne legyél megzavarodva. Ezért is tanítják "mondókával" ezeket: *a szinusz a szöggel szembeni befogó per átfogó, a koszinusz a szög melletti befogó per átfogó, a tangens a szöggel szembeni befogó per szög melletti befogó, a kotangens pedig a tangens reciproka.* Tanuld meg kívülről, halálbiztosan.

A szögfüggvények tehát a szög alapján adják meg a derékszögű háromszög két oldalának arányát. Például: ha ismered a **c** oldalt és az **α** szöget, akkor a **b** oldalt úgy tudod kiszámítani, hogy

$$b = c\cdot\cos\alpha$$

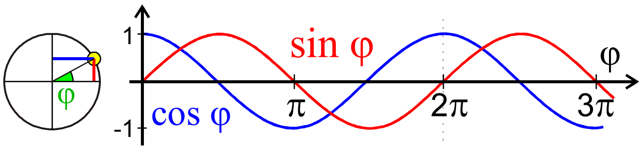
A cos α (és a többi is) egy szám, amit a számológép a szög beírása után kiszámol. ***Ellenőrizd***, hogy ha a szöget fokban adod meg, akkor a **DEG** jelzés legyen a kijelzőn, ha pedig radiánban, akkor **RAD**. Lehet, hogy a te számológéped nem tud ilyet, esetleg másképp jelzi, ezt neked kell kiderítened.

A szinusz és koszinusz értéke mindig +1 és -1 közötti érték lesz. A tangens értéke a végtelenig terjedhet (de 90°-nál nem értelmezhető).

Visszafelé: két ismert oldal hosszának arányából a szög is megtudható, ehhez a szögfüggvények ellentett műveletét kell elvégezni, ahogy például a négyzetre emelés ellentettje a gyökvonás. A koszinusz ellentettje az "arkusz koszinusz" (az arcus jelentése ív), a jelzése ’arc’, így:

$$\text{arc}\cos\frac{b}{c} = \alpha$$

A számológépeden ehelyett valószínűleg a gombok fölötti műveletekhez szükséges gombot kell használnod, például `12 ÷ 43 = INV cos`, az eredmény 73,8° vagy 1,29 radián.



Nem különösebben fontos, de azért megemlíthetem, hogy a szögfüggvények valójában egy körből vannak származtatva. Ha egy pontot körbejáratunk, akkor a távolsága a két központi tengelytől jellegzetes hullámvonalakkal ábrázolható, amelyek *periódushossza* 2π.

Pitagorasz-tétel

Jól ismert tétel, amit szintén csakis derékszögű háromszögeknél használhatunk, akkor, amikor két oldalból a harmadikat akarjuk megtudni. Lehetne szögfüggvényekkel is, csak ez sokkal egyszerűbb. Az előbb látott háromszög jelöléseit használva

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Ha ismerjük például **b** és **c** értékét, **a**-t keressük, akkor az egyenlet átrendezésével ez lesz a megoldás:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}\ .$$

Vektorműveletek

A **szakasz** egy egyenes vonalnak egy fix hosszú darabja. A szakasz hossza másképpen a két végpont távolsága.

A **vektor** egy olyan *irányított* szakasz, amelynek a rajzolásakor az egyik végére nyílfejet rajzolunk. Ismernünk kell a vektor kezdőpontját, a nagyságát és az irányát is, ennyivel több az egyszerű szakasznál. Akkor használjuk, ha valamilyen megjelölendő dolognak ezek a lényeges tulajdonságai, például az *erő* ábrázolására, aminek van kezdőpontja (támadáspontja), nagysága és iránya. A vektor egyenese, vonala, a fizikában a vektor **hatásvonal**a az a végtelen hosszú egyenes vonal, amelyre a vektor vonala illeszkedik.

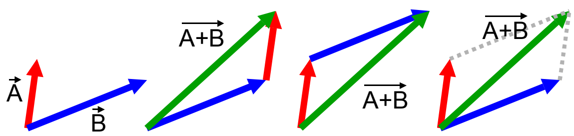
Ha egy bizonyos mennyiségnek nem csak a nagysága, hanem az iránya is fontos, akkor azt mondjuk, hogy az egy vektormennyiség. Ha ezt írásban hangsúlyozni akarjuk, akkor kis nyilat teszünk fölé, így:

$$\boxed{\vec{a}}$$

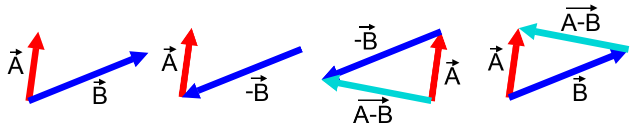
A matematika megmutatja, hogyan kell a vektorokkal dolgozni, a fizika pedig okot ad rá. Tipikusan vektormennyiség például az erő, a sebesség, a gyorsulás és az impulzus.

Összeadás: *Adott egy A és egy B vektor, szerkesszük meg a két vektor összegvektorát!* Három módszert láthatsz, az első kettőn szó szerint össze vannak adva a vektorok, egymás mögé illesztve, csak a sorrend kétféle. A harmadik módszer a **parallelogramma-szabály**, tulajdonképpen az első két módszer együttes használata. Matematikában a három módszer bármelyike bármikor használható, a kedved szerint. Fizikában erővektorok összegének (lásd az EREDŐ ERŐ fejezetet) kiszámításához a harmadik módszert használd, más vektorszámításokhoz az összeillesztős módszerek is jók.

Ha a zöld vektor a piros és a kék vektorok összege, akkor a piros és a kék vektorok a zöld vektor **összetevői**, más szóval **komponensei**.



Kivonás: *Adott egy A és egy B vektor, szerkesszük meg az A–B különbségvektort!* Az első lépés azt mutatja, hogy az A–B művelet hogyan lesz összeadássá tehető, a B helyére a –B vektort téve. Ezután az A-hoz hozzáadva a –B-t megkapjuk az eredményt. Az utolsó rajzon ennek egy gyorsított változata van; arra kell mindig emlékezned, hogy a különbségvektor "a másodikból az elsőbe" mutat.



Számok normál alakja

Fizikapéldákban mindig akadnak számok, amelyekben sok nulla van. Ezeket a nullákat számolgatni kicsit kényelmetlen, és benne van a tévesztés lehetősége is. Ezért szokás használni a **normál alak**ot, ami két részből áll: elöl van a *mantissza*, ami mindig egy 1 és 9.999… közötti szám, utána jön az *exponens*, ami a tíz valamilyen hatványa, a szám pedig a kettő szorzata. (A két szót nem fontos megtanulnod, nem fogja kérdezni tőled senki.) Lássunk egy példát:

$$2{,}39 \cdot 10^{5} = 239000$$

Gyakorlatilag 5 helyiértékkel jobbra vitted a tizedesvesszőt, erre nyilván emlékszel. Negatív hatványkitevővel is működik:

$$1{,}007 \cdot 10^{-4} = 0{,}0001007$$

itt meg balra vitted a tizedesvesszőt, ennyi az egész. A dolog egyébként egyenesen következik abból, amit a hatványozásról korábban egyeztettünk. A nagyon nagy és nagyon kicsi számokat okosabb normál alakban ábrázolni, mint a nullákat számolgatni.

$$0{,}00000000067 = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$$

Főleg akkor jön jól ez a módszer, ha nagyságrendek (vagyis a tíz hatványai szerinti lépcsők) közötti átváltásokra van szükség, a következő fejezetben szükség lesz rá.

Lássunk egy feladatot, amilyennel találkozhatsz is: Mekkora tömegvonzási erő hat egy 200 tonnás testre, ha annak a Föld középpontjától való távolsága 6380 km? (Ez a felszín felett 7 km magasságot jelent.) A képlet:

$$f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol f az előbb látott szám (a gravitációs állandó), m_1 a Föld tömege *kilogrammban*, egy adat szerint $5{,}9736 \cdot 10^{21}$ tonna, m_2 a test tömege szintén *kilogrammban* (itt 200 tonna), r pedig a távolság *méterben*. A képlet megvan, csak ki kell számolni. Azt tudjuk, hogy a tonna 1000 kg, a kilométer 1000 m. Egy lehetőség:

$$0{,}00000000067 \cdot \frac{5973600000000000000000 \cdot 1000\ \mathrm{kg} \cdot 200 \cdot 1000\ \mathrm{kg}}{(6380 \cdot 1000)^2\ \mathrm{m}}$$

Elég eszelős dolog. Ha elkezdesz egyszerűsíteni nullákkal, ezrekkel, az persze segít valamit. Lehet, hogy véletlenül el is számoltam a nullákat, veled is megtörténhet. Örülnék, ha nem ilyesmivel vesztegetnéd a drága idődet, *a számológéped nem is tud ennyi nullát kezelni*, ezért vegyük a másik lehetőséget, vegyük a számokat a kapott alakokban, belevéve az átváltásokat is:

$$6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}9736 \cdot 10^{21} \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 1000}{(6380 \cdot 1000)^2} \qquad *$$

Ha nem okoz gondot, akkor ehelyett egyből csinálhatod úgy is, hogy minden számot a normál alakjában írsz le:

$$6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}9736 \cdot 10^{21} \cdot 1 \cdot 10^{3} \cdot 2 \cdot 10^{2} \cdot 1 \cdot 10^{3}}{\left(6{,}380 \cdot 10^{3} \cdot 1 \cdot 10^{3}\right)^2}$$

Mivel már nem vagyunk ovisok, az "1·"-eket a továbbiakban lenyeljük. Nagyon lassan haladok, leírom ugyanezt úgy, hogy csak praktikusabbra átrendezem a törtet, aztán a nevezőt is felbontom:

$$=\frac{6{,}7\cdot 5{,}9736\cdot 2\cdot 10^{-11}\cdot 10^{21}\cdot 10^{3}\cdot 10^{2}\cdot 10^{3}}{\left(6{,}380\cdot 10^{3}\cdot 10^{3}\right)^{2}}=\frac{6{,}7\cdot 5{,}9736\cdot 2\cdot 10^{-11}\cdot 10^{21}\cdot 10^{3}\cdot 10^{2}\cdot 10^{3}}{6{,}380^{2}\cdot 10^{6}\cdot 10^{6}}$$

A nem tízes hatványokat számoljuk ki külön, és utána végre tegyük rendbe a többit:

$$\frac{6{,}7\cdot 5{,}9736\cdot 2}{6380^{2}}\cdot\frac{10^{-11+21+3+2+3}}{10^{6+6}}=1{,}967\cdot 10^{-11+21+3+2+3-(6+6)}=1{,}967\cdot 10^{6}$$

Tehát az erő majdnem két millió akármi, kivételesen a mértékegységgel most nem foglalkozunk.

Lehet, hogy most azt mondod, hogy akkor inkább már írogatod a nullákat. Nincs igazad, először is mert ahogy mondtam, a számológépbe nem írható be ennyi nulla, leírva el is tévesztheted a számukat, és az egyszerűsítésük is számolgatást kíván, vagyis azzal is babrálni kell. De van még egy érvem.

A számológépeden kell lennie egy EXP jelű gombnak (exponens, hatványkitevő). Ha nincs, és más néven sincs ilyen, akkor azt javaslom, hogy vegyél egy komolyabb ("tudományos") számológépet, nem kerül sokba, szögfüggvényeket, hatványokat is tud kezelni, megtérül az ára.

> Figyelj arra, hogy normál vagy D.A.L. rendszerűt veszel. A sin 30-at a szokásos gépeken így kell kiszámolni: `3 0 sin`, a másikon `sin 3 0 =`. Mindkettőnek megvan a maga előnye.

Szóval ez a gomb kimondottan a normál alakok használatára van. Az EXP gomb a "$\cdot 10^{x}$" lépést helyettesíti, tehát a bal oldali számot a jobb oldali módszerrel pötyögd be:

$6{,}7\cdot 10^{-11}$ **`6 . 7 EXP 1 1 +/-`**

Az a gépedtől függ, hogy ez hogyan jelenik meg a kijelzőn, lehet, hogy így: **`6.7`** $^{-11}$. Nézz utána. Jegyezd meg, hogy ez a **$6{,}7\cdot 10^{-11}$**-et jelenti, és használd bátran a lehetőséget. A gép egyébként még segít is, mert ha beírod azt, hogy `43821 EXP 7`, akkor magától átalakítja valódi normál alakra: $4{,}3821\cdot 10^{11}$.

Ennek a funkciónak a használata azért különösen javasolható, mert akkor neked nem is kell a nagyságrendekkel foglalkozni, azt elintézi a gép. Vagyis a fent alaposan részletezett számítás helyett ha közvetlenül a *csillaggal jelölt számítást írod be az EXP használatával, akkor az eredményt azonnal megkapod. Egy gondos tanulmányozást a fenti téma tehát nagyon megér, súlyos perceket fogsz spórolni vele a dolgozatokon, házi feladatokban.

Prefixumok

A prefixum a mértékegységek elé tett olyan szavacska, amely a nagyságrendet jelöli. 1 kilogramm egyenlő ezer grammal, a "kilo" a **prefixum**, előtétszó, előtag, nevezd kedved szerint.

Az SI mértékegységrendszerben nemzetközi szabvánnyal rögzítették a használható prefixumokat, ezekből a számunkra érdekes nagyságrendekhez tartozókat összeszedem, jó lenne ezt is megtanulnod mielőbb. Ha az itt fel nem soroltakat is látni akarod, szerintem a függvénytáblázatodban is ott vannak.

peta	**P**	billiárd	10^{15}				
tera	**T**	billió	10^{12}	milli	**m**	ezred	10^{-3}
giga	**G**	milliárd	10^{9}	mikro	**μ**	milliomod	10^{-6}
mega	**M**	millió	10^{6}	nano	**n**	milliárdod	10^{-9}
kilo	**k**	ezer	10^{3}	piko	**p**	billiomod	10^{-12}

Amint látod, nagyon nem mindegy, hogy kis- vagy nagybetűvel írod a prefixum jelét. Figyeld meg, hogy a 10 hatványai hármasával lépegetnek, így elég könnyű megjegyezni őket. Még négy olyan prefixum van használatban, amelyek igazából nem tartoznak a szabványok közé, de szabad a használatuk:

hekto	**h**	száz	10^{2}	deci	**d**	tized	10^{-1}
deka	**dk***	tíz	10^{1}	centi	**c**	század	10^{-2}

*A deka hivatalos jele a "da", de nálunk már régóta a "dk" van használatban, ezért ezt használd, ha a tanár mást nem mondott.

Az Egyenlítő hossza 40 Mm, vagy 0,04 Gm. 0,00000347 mg=3,47 ng. 2 ps=$2\cdot 10^{-27}$ Ps.

Két prefixumot egymás mellé tenni nem szabad, vagyis nincs megakilo vagy hasonló.

Nem egészen ide tartozik, de nem biztos, hogy hallottál arról, hogy az informatikában a tárolóterületek méréséhez ezeknek a prefixumoknak a használata már szabálytalan, úgyszólván tilos. Helyettük az ún. bináris prefixumok használata kötelező, tehát kibibyte vagy kibyte (KiB), mebibyte vagy mibyte (MiB), gibibyte vagy gibyte (GiB), tebibyte vagy tibyte (TiB), pebibyte vagy pibyte (PiB). Abban térnek el a decimális prefixumoktól, hogy nem 1000^1, 1000^2, 1000^3 stb., hanem 1024^1, 1024^2, 1024^3 stb. a váltószámuk, ennek a kettes számrendszerhez van köze.

Mértékegységek

Az SI rendszer (*Système international d'unités*), a jelenleg világszerte hatályos nemzetközi mértékegységrendszer az elődeihez hasonlóan megállapított olyan alapmértékegységeket, amelyekre minden más mértékegységet visszavezet. A 7 alapegység a következő:

hossz	**méter**	**m**
tömeg	**kilogramm**	**kg**
idő	**másodperc** (szekundum)	**s**
áramerősség	**amper**	**A**
hőmérséklet	**kelvin**	**K**
anyagmennyiség	**mol**	**mol**
fényerősség	**kandela**	**cd**

Bármilyen számítást végzel fizikai mennyiségekkel, mindig végezd el következetesen és pontosan ugyanazt a számítást a mértékegységekkel is.

Ha jól csinálod, akkor az eredmény mellé így kapott mértékegység is jó lesz, akkor is, ha a kiszámolt mennyiség mértékegységére esetleg nem emlékszel. Ha pedig mégis emlékszel rá, akkor az eredménnyel összehasonlítva észreveheted, ha rossz számítást végeztél. Nézzünk egy kitalált képletet:

$$Y = \frac{m^2 \cdot s \cdot M}{T \cdot p}$$

hozzátéve, hogy $M = F \cdot k$ és $p = \frac{F_{ny}}{A_{ny}}$. *Vigyázz, ezek a **képletek**, nem a mértékegységek!!*

Tudod, hogy mi az Y mértékegysége? Nem baj, ha nem – én sem. Majd mindjárt megszüljük. Most megadom a mennyiségekhez tartozó **mértékegységek**et, és nem érdekes, hogy ezek mik.

$$[m] = kg \quad [s] = m \quad [F] \text{és} [F_{ny}] = \frac{kg \cdot m}{s^2} \quad [k] = m \quad [A_{ny}] = m^2 \quad [T] = s\,.$$

A feladatban nyilván meg vannak adva a szükséges számértékek is, de most mi intézzük el a mértékegységet, elvégezve a képletek és mértékegységek behelyettesítésével az előírt műveleteket:

$$[Y] = \frac{kg^2 \cdot m \cdot \left(\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m \right)}{s \cdot \left(\frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{m^2} \right)}$$

Több egyszerűsítő lépés után:

$$= \quad kg^2 \cdot m \cdot \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m \cdot \frac{m^2}{s \cdot \frac{kg \cdot m}{s^2}}$$, amiből végül azt kapjuk, hogy $\frac{kg^2 \cdot m^4}{s}$.

Bármit jelentsen is az az Y, itt áll a mértékegysége, akkor is, ha nem emlékeztél rá, vagy sosem hallottál róla.

A példa kiegészítéseként: Tegyük fel, hogy a $kg \cdot m^2$-nek van valami saját neve is, mondjuk Th. Tehát $1\ Th = 1\ kg \cdot m^2$. Akkor az előbbi mértékegység így irható le:

$$\frac{Th^2}{s}$$

Ha tudod, hogy az Y-nal jelölt mennyiségnek pont ez a helyes mértékegysége, akkor így ellenőrizted azt is, hogy a számítási képleteket jól írtad fel. Emlékeztetlek, hogy *ez csak egy kitalált példa volt*.

Felhasznált képek:

Stabilitás
http://www.strangedangers.com/images/content/108744.jpg

Inerciarendszer
2001: Űrodüsszeia (1968) (http://www.port.hu/2001_-_urodusszeia_2001:_a_space_odyssey/pls/w/films.film_page?i_film_id=38821)

Ütközési alapszabályok
http://s3.thcdn.com/productimg/0/600/600/76/10996876-1412100458-178520.jpg

Centrifugális erő
2001: Űrodüsszeia (1968)

Perdület (impulzusmomentum)
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turbogenerator01.jpg

Lendkerék, motornyomaték
http://olx.hu/hirdetes/polonez-fso-lendkerekes-auto-retro-alvaz-alkatresz-ID18YU9.html
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gyroscope_operation.gif
http://www.tanszertar.hu/eken/2006_01/nadasi_06_01_elemei_2/nadasi_060126.htm
http://optomi.blog.hu/2009/10/25/mozdonyfesztival_es_skanzen

Perdületmegmaradás
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NH-90_NATO_Frigate_Helikopter_%28NFH%29.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cup_of_Russia_2010_-_Yuko_Kawaguti_%282%29.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Breakdance#mediaviewer/File:120843583_e22b153125_o.jpg
http://sport365.hu/egyeni-sportok,hirek,mu--es-toronyugro-eb-sved-es-orosz-gyozelem,24871 (Barta Nóra)

Potenciális energia
http://help.divoke-kmene.sk/wiki/Katapult

Magassági energia
http://www.thatpetplace.com/core/media/media.nl/id.826/c.1043140/.f?h=8c34bcad22329b7854cd
http://laughingsquid.com/the-legendary-duff-beer-the-simpsons-fictional-beer-made-a-reality/

A Naprendszer
http://www.nasa.gov/images/content/746410main_May%203%20Flare%20171-304-131%20blend.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:The_Sun_by_the_Atmospheric_Imaging_Assembly_of_NASA%27s_Solar_Dynamics_Observatory_-_20100819.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helmet_streamers_at_max.gif
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sunspot_vtt.jpg
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_system_scale-2.jpg

És tovább!
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andromeda_Galaxy_%28with_h-alpha%29.jpg

Űreszközök
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sputnik_asm.jpg
http://www.astronautix.com/astros/farkas.htm
http://www.astronautix.com/astros/magyari.htm
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pioneer_plaque.svg