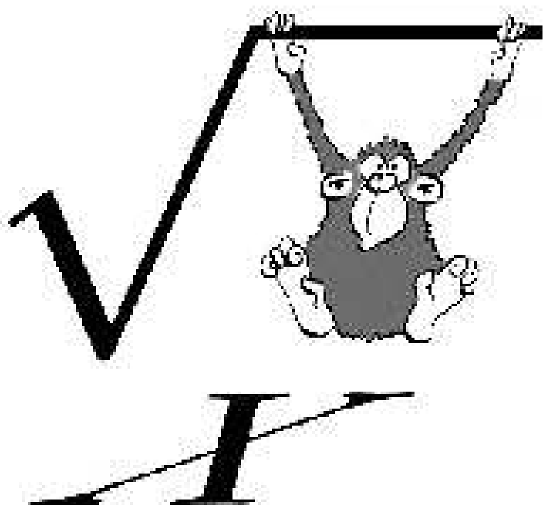
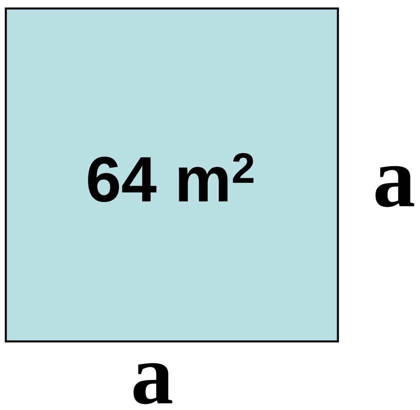
A négyzetgyökvonás



Mekkora a 64 m^2 területű, négyzet alakú tanterem oldalának a hossza?



Keressük azt a nemnegatív számot, melynek a négyzete 64.

Ezt a számot a 64 négyzetgyökének nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt{64}$

$T = a^2$

a $\sqrt{64} = 8,\quad \text{mert} \quad 8^2 = 64$

Tehát a tanterem oldalának hossza 8 m.

Egy *a* nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek négyzete *a*.

Jelölése: $\sqrt{a}$ *Olvasd: négyzetgyök a*

Megjegyzés:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad a \in R \text{ és } a \geq 0$$

Példa

$\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{1} = 1$

$\sqrt{2} = 1,41$

$\sqrt{3} = 1,73$

$\sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{36} = 6$

$\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{100} = 10$

A négyzetgyökvonás azonosságai

A szorzat négyzetgyöke

Bármely két nemnegatív szám szorzatának a négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének a szorzatával,

azaz

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$ ahol $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

Példa

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=8$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot 20}=\sqrt{100}=10$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 6}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{140}=\sqrt{5\cdot 7\cdot 140}=\sqrt{4900}=70$$

A hányados négyzetgyöke

Bármely két nemnegatív szám hányadosának a négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének a hányadosával,

azaz

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \text{ahol} \quad a \geq 0 \ \text{és} \ b > 0.$$

Példa

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{112}{7}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{99}{11}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$$

A négyzetgyök alkalmazásai

Négyzetgyökös mennyiségek összeadása, kivonása

Csak az egynemű négyzetgyökös kifelezések vonhatók össze!

$$13\sqrt{2}+4\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}-5\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

$$9\sqrt{3}+5\sqrt{3}+6\sqrt{3}-7\sqrt{3}-\sqrt{3}=12\sqrt{3}$$

$$7\sqrt{11}-3\sqrt{11}+2\sqrt{11}+4\sqrt{11}+5\sqrt{11}=15\sqrt{11}$$

$$8\sqrt{5}+7\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}-4\sqrt{5}=8\sqrt{5}$$

Kihozatal a gyökjel alól

$$\sqrt{216} =$$

Bontsuk fel a 216-ot prímtényezők szorzatára!

$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3} =$$

Keressük a négyzetgyök alatti kifejezésben négyzetes tagokat

$$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} =$$

A gyökök szorzatánál tanult azonosság segítségével írjuk fel külön – külön gyökjel alá a négyzetes tagokat, majd vegyük a négyzetgyökét.

$$2 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

Az így kapott számot írjuk a négyzetgyökjel elé.

Megjegyzés:

Ha a négyzetgyökjel alatt olyan szorzat áll, aminek az egyik tényezője négyzetszám, akkor ennek a tényezőnek a négyzetgyöke kiemelhető a négyzetgyökjel elé.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \qquad \mathrm{a} \geq 0,\ \mathrm{b} \geq 0$$

Példa

$$\sqrt{360} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt{168} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7} = 2 \cdot \sqrt{42} = 6\sqrt{42}$$

$$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3150} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{14} = 15\sqrt{14}$$

Bevitel a gyökjel alá

$$6\sqrt{2} =$$

A négyzetgyökös azonosság felhasználásával írjuk fel a négyzetgyök előtti szám négyzetének a gyökét.

$$\sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2} =$$

A szorzat négyzetgyökére vonatkozó szabály segítségével írjuk egy gyökjel alá a két mennyiséget, majd szorozzuk össze.

$$\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

Megjegyzés:

Négyzetgyökjel előtt álló nemnegatív szorzó a négyzetét a gyökjel alá vihetjük.

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \qquad \mathrm{a} \geq 0,\ \mathrm{b} \geq 0$$

Példa

$$6\sqrt{2} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72}$$

$$8\sqrt{2} = \sqrt{8^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{64 \cdot 3} = \sqrt{192}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{25 \cdot 7} = \sqrt{175}$$

$$9\sqrt{2} = \sqrt{9^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{81 \cdot 5} = \sqrt{405}$$

$$11\sqrt{2} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{121 \cdot 6} = \sqrt{726}$$

A nevező gyöktelenítése

Gyakran kell olyan törtekkel számolni, ahol a nevezőben négyzetgyökös kifejezés áll.

$$\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=$$

Ilyen esetben a közös nevező megállapítása igen körülményes bővítéshez vezet.

Célszerű úgy átalakítani a törteket, hogy a nevezőjük racionális alakúak legyenek.

Ezt a gyakorlatban a nevező gyöktelenítésével érjük el.

A **Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét!**

$$\frac{3}{\sqrt{7}}; \quad \frac{5}{3\sqrt{5}}; \quad \frac{a}{b\sqrt{c}};$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1}; \quad \frac{6}{4-\sqrt{5}}; \quad \frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}};$$

Törtet úgy gyöktelenítjük, hogy egy alkalmasan

választott egységgel szorozzuk a törtet.

Szorzás olyan törttel, melynek a számlálója és a nevezője is megegyezik a gyöktelenítendő tört gyökös kifejezésével.

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}_{1} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot \left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Nevezetes azonosság alkalmazásával.

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1}=$$

A nevezőben egy különbség található, ezért olyan azonosságot kell találni, amely tagonként emeli négyzetre a nevezőt.
Ez az **(a + b) · (a – b) = a² – b²**

$$\frac{8}{\sqrt{3}-1}=\frac{8}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=$$

$$=\frac{8\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}-\left(1\right)^{2}}=\frac{8\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}=\frac{8\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=4\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\frac{6}{4-\sqrt{5}}=\frac{6}{4-\sqrt{5}}\cdot\frac{4+\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot\left(4+\sqrt{5}\right)}{(4)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{24+6\sqrt{5}}{16-5}=\frac{24+6\sqrt{5}}{11}$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}=\frac{2\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)}{8-5}=\frac{2\sqrt{8}+2\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{7}+\sqrt{2}}\cdot\frac{5\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(5\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{7}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{25\cdot7-2}=\frac{15\sqrt{14}-6}{173}$$