Szikszai László

Gyökvonás 1.0

Négyzetgyök, N-edik gyök, Törtkitevőjű hatványok

Segédanyag, otthoni tanuláshoz középiskolások számára.

Utolsó frissítés: 2008. október 5.

Bevezetés

Ez a jegyzet, segédanyag az önálló tanuláshoz készült.

A jegyzet a matematika hatványozás-gyökvonás témakörét tárgyalja.

A cél egy érthető formátum megalkotása volt, ami többé-kevésbé sikerült.

A jegyzetben nem úgy követik egymást a témakörök, nem ugyanolyan a tematika, mint amit a középiskolában megszokott. A jegyzetben inkább az összefüggésekre próbálok rávilágítani, ezzel érthetőbbé tenni a feladatok megoldási algoritmusait, módszereit.

Mivel a jegyzet nem követi a megszokott tematikát, nem szolgálhat hivatkozási alapként.

Kívánom, hogy vedd hasznát a jegyzetnek!

Ha bármilyen kiegészítési, javítási, illetve egyéb észrevételed lenne a jegyzettel kapcsolatba, akkor a sziklaszlo@gmail.com e-mail címen lehet felvenni velem a kapcsolatot.

Szikszai László

Gyökvonás

Ismétlés

Mint később látni fogjuk az egész gyökvonás a hatványozáson alapul. Ezért most nézzük át a hatványozás fontosabb definíciói, műveleteit, azonosságait.

*Egy **a** szám **n**-edik hatványán az **a**^{n} számot értjük, ahol*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

*Mennyiséget érjük. Ekkor **a**-t **hatványalapnak**, **n**-et **hatványkitevőnek** (vagy röviden kitevőnek), **a**^{n}-et pedig **hatványnak** (vagy pontosabban hatványértéknek) nevezzük.*

Tehát a hatványozás lényegében egy szám önmagával való megszorzása n-szer. Itt megjegyzendő, hogy ez csak egész kitevőjű hatványokra igaz.

(A1):	$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	*(A2):*	$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$
(A3):	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	*(A4):*	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
(A5):	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	*(A6):*	$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbf{R}, a \neq 0$
(A7):	$a^1 = a$	*(A8):*	$a^{2k} \geq 0 \ \forall a \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}$
(A9):	$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$		

A fent felsorolt azonosságok természetesen visszafele is igazak. A (A8)-as azonosság azt fejezi ki, hogy páros hatványkitevőjű hatvány MINDIG pozitív (nagyobb vagy egyenlő, mint 0). Ugyanis, ha vesszük egy negatív szám páros hatványát, azaz páros-szor szorozzuk össze önmagával, akkor amiatt, hogy két negatív szám szorzata pozitív, már csak pozitív számokat szorzunk össze. Pl:

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{+}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{+} = 3^4 = 81$$

A fenti azonosságok alkalmazásával megoldjuk a következő feladatot:

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{x^4 y^{-3}}{x^2} \cdot \frac{x^{-2} y}{y^{-3}} = ?$$

Megoldás (a megoldás menete a feladat után olvasható):

$$\frac{x^4 y^{-3}}{x^2} \cdot \frac{x^{-2} y}{y^{-3}} = x^{4-2} y^{-3} \cdot x^{-2} y^{1-(-3)} = x^2 y^{-3} \cdot x^{-2} y^4 = x^{2+(-2)} y^{-3+4} = x^0 y^1 = y$$

Tehát először a (A2) azonosság segítségével felírtuk tört nélküli alakban, utána kaptunk egy egyszerű szorzatot. Összevontuk a kitevőket, aztán az (A1)-es azonosság alkalmaztuk, ezzel máris csak 2 tagra csökkent a szorzatunk. Összevontunk a kitevőkben. Ismerjük fel az eredményben a (A6) és (A7) azonosságokat.

Nevezetes azonosságok:

$$(N1)\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(N2)\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(N3)\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(N4)\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(N5)\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(N6)\quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(N7)\quad a^3 - b^3 = (q-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} = 1$$

Megoldás (leírás lentebb):

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} = 1 \quad /közös\, nevező : (a+1)(a-1)$$
$$\frac{(a-1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{(a+1)(a+1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a-1)} \quad /besz.kn.$$
$$(a-1)^2 - (a+1)^2 = a^2 - 1$$
$$a^2 - 2a + 1 - (a^2 + 2a + 1) = a^2 - 1$$
$$a^2 - 2a + 1 - a^2 - 2a - 1 = a^2 - 1$$
$$-4a = a^2 - 1$$
$$0 = a^2 + 4a - 1$$
$$a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Először meghatároztuk a közös nevezőt. A közös nevező a bal oldali két nevező szorzata, mivel mind a két nevező egyszerű tag.

Kitérő: **Egyszerű, összetett tagok (**ez nem biztos, hogy így létezik ez az elképzelés, de így egyszerűbb)

Az algebrai kifejezéseket csoportosíthatjuk aszerint, hogy egyszerűek, vagy összetettek. Egyszerű (tovább nem bontható) egy kifejezés, ha az

- *ismeretlen (pl: a,b,c,…)*
- *szám (pl: 1, 3.45)*
- *illetve ezek összeadással és kivonással előállított kombinációi. (pl: 1+b, a-b+2)*

Összetett egy kifejezés, ha egyszerű kifejezések szorzással, osztással vagy hatványozással (mert ugye ez is szorzás) keletkezett kombinációja.

Például a $(a+b)^2$ kifejezés összetett és részkifejezései az (a+b) és az (a+b), amelyek már egyszerű kifejezések. Az $a^2+2ab+b^2$ viszont már egyszerű kifejezés. Ugyanakkor átalakítható nevezetes azonosság használatával, amely mint már láttuk összetett kifejezés.

Ez azéért fontos, mert a közös nevezőt mindig úgy állítjuk elő, hogy a nevezőket a lehető legegyszerűbb kifejezésekre bontjuk és azokat szorozzuk össze, úgy hogy azok legkisebb közös többszörösét vesszük.

Visszatérve a feladathoz, közös nevezőre hozzuk a tagokat, azaz minden tag nevezője a közös nevező lesz és a tag számlálóját beszorozzuk az eredeti nevezőből hiányzó tagokkal (a közöv nevezőhöz képest).

Beszorzunk a közös nevezővel. Ezután ismerjük fel a megmaradó nevezetes azonosságokat, majd írjuk fel azokat egyszerű kifejezésként (tehát úgy, hogy ne legyen benne szorzás, osztás, illetve hatványozás). Figyeljünk az előjelekre!

Bár az a^2 és a 2a összetett tagok, azért hagytuk meg őket, mert majd ezekkel össze tudunk vonni.

Ezután vonjuk össze a tagokat és rendezzük a megmaradt tagokat egy oldalra, ezzel egy másodfokú egyenletet kapunk, ami megoldó képlettel megoldunk. (Ezt még nem tanultátok, de fogjátok ;))

Remélem ezzel az egyszerű/összetett kifejezés dologgal nem zavartam össze senkit. Ha nem tetszik valakinek, vagy nem érti, szívesen elmagyarázom, de nyugodtan maradhattok az eredeti módszernél.

Ennyi volt az alapozás, most kezdjük el megtárgyalni azt, amiről igazából szól ez a jegyzet.

Gyökvonás – Alapozás

Előre szeretném leszögezni, hogy ami ezután olvasható az nem teljesen ugyanaz, ami a tankönyvben van. Nem ugyanazzal a tematikával és magyarázatokkal készült el a jegyzet. Ezért mindenki saját felelősségére használja. **Ha úgy érzed, hogy így nem tudod megtanulni, vagy 2-3 elolvasás után sem érted, akkor inkább hagyd a jegyzetet.** Mivel vannak „érdekes” tanárok, akiknél csak az a jó, amit ők elmondanak, senki ne hivatkozzon rám, hogy mert én így írtam. Köszi.

Szóval akkor azért is néztük át az első részben a hatványozást, mert akárhogy nézzük a gyökvonás az hatványozás.

A tankönyvben a négyzetgyökvonás és az n-edik gyökvonás külön fejezetben kerül tárgyalásra, de itt picit össze fog folyni a 2 anyag.

Nézzük először a hivatalos definíciót:

***Négyzetgyök**: Egy a szám négyzetgyöke alatt azt az $\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ számot értjük, melynek négyzete (2. hatványa) az a Ekkor a-t a gyök alapjának nevezzük és a gyökkitevő pedig 2.*

***N-edik gyök**: Egy a szám n-edik gyöke alatt azt az $\sqrt[n]{a}$ -val jelölt számot értjük, melynek n-edik hatványa az a szám. Ekkor a-t a gyök alapjának nevezzük és n-et pediggyökitevőnek.*

Magyarán szólva például a $\sqrt{9}$ jelöli azt a számot, aminek négyzete a 9, tehát $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} \left(= \sqrt[2]{3^2}\right) = 3$. Ugyanilyen analógiával a $\sqrt[10]{1024}$ jelöli azt a számot, aminek 10. hatványa az 1024. Mivel az $1024 = 2^{10}$, ezért $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$.

Fontos megemlíteni, n-edik gyökvonásnál a kifejezés értelmezési tartománya az n-től függ. Tehát ha az n páros, akkor a gyökjel alatt csak nem-negatív szám állhat, pl:

$\sqrt{x-2}$, $\quad x-2 \geq 0, x \geq 2$, emiatt a négyzetgyököt is csak akkor értelmezzük (a valós számok körében), ha a gyökjel alatt nem-negatív szám áll.

Ezzel ellentétben, ha az n páratlan, akkor bármilyen szám állhat a gyökjel alatt.

Ezek alapján adódik a következő összefüggés:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{ha n páros} \\ a & \text{ha n páratlan} \end{cases} \qquad pl: \quad \begin{matrix} \sqrt{a^2} = |a| \\ \sqrt[3]{a^3} = a \end{matrix}$$

Most következnének az azonosságot, de előbb nézzük, miért hatványozás lényegében a gyökvonás. Ezután remélhetőleg könnyebb lesz megérteni az azonosságokat.

***Tört kitevőjű hatványok**:*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Tehát ha van egy hatványunk, aminek tört szám a kitevője (pontosabban nem egész, ugyanis ezzel az analógiával bármilyen hatványkitevőjű számot fel lehet írni n-edik gyökes alakban és vissza), akkor azt felírhatjuk n-edik gyökös alakban, ahol az eredeti kitevő nevezője (p) lesz a szám kitevője és az eredeti kitevő nevezője (q) pedig a gyökkitevő lesz.

Ugyanez visszafele is felírható. Nézzünk 1-1 példát:

$$100^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^1} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$16^{1.5} = 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{16^3} = \sqrt{\left(2^4\right)^3} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$$

$$vagy:$$

$$16^{1.5} = 16^{\frac{3}{2}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{4 \cdot \frac{3}{2}} = 2^6 = 64$$

Azonosságok:

(G1):	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	*(G1N):*	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
(G2):	$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$	*(G2N):*	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
(G3):	$\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k$	*(G3N):*	$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$
(G4):	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	*(G5):*	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$

A felsorolt azonosságok oda-vissza igazak. A (G5) azonosság nem fontos része az anyagnak, csak a teljesség kedvéért lett feltüntetve.

Fontos megemlíteni, hogy páros gyökkitevőjű gyökfüggvényekre igaz, hogy értékkészletük nagyobb, egyenlő, mint 0, azaz $\sqrt[2k]{a} \geq 0$.

Most térjünk át a gyakorlati dolgokra. Először pár egyszerű feladat.

1) Határozzunk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát:

a) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x-1}}$ $\qquad$ *b)* $\sqrt{(x-1)^2}$

Megoldás:

a)

$$\frac{2x-3}{3x-1} \geq 0 \quad \left(3x-1 \neq 0, 3x \neq 1, x \neq \tfrac{1}{3}\right)$$

Egy tört értéke, akkor pozitív, ha azonos előlőjelű a számláló és a nevezőeazaz :

$$1) \quad \tfrac{+}{+} \quad 2x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad 3x-1 > 0$$

$$2x \geq 3 \quad \wedge \quad 3x > 1$$

$$\underbrace{x \geq \tfrac{3}{2} \quad \wedge \quad x > \tfrac{1}{3}} \Rightarrow x \geq \tfrac{3}{2}$$

$$2) \quad \tfrac{-}{-} \quad 2x-3 \leq 0 \quad \wedge \quad 3x-1 < 0$$

$$2x \leq 3 \quad \wedge \quad 3x < 1$$

$$\underbrace{x \leq \tfrac{3}{2} \quad \wedge \quad x < \tfrac{1}{3}} \Rightarrow x < \tfrac{1}{3}$$

$$\textit{Tehát} : x \geq \tfrac{3}{2}\, \textit{vagy}\; x < \tfrac{1}{3}$$

b)

$$(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{Bármely}\,\mathrm{x} \in \mathrm{R}-\text{re igaz (a páros kitevőit hatványok nem}-\text{negativiítása miatt)}$$

Tehát a lényeg az, hogy ha a gyökkitevő páros, akkor meg kell nézni, hogy a gyökjel alatt levő szám nem-negatív (≥ 0) legyen. Illetve, mint láttuk az a) feladatban, ha bármilyen más olyan kifejezés van a gyökjel alatt, amit nem mindig értelmezünk (tört, gyök), akkor azt is meg kell vizsgálni.

2) Vonjunk gyököt a következő kifejezésekből:

a) $\sqrt{4y^2-4y+1}$

$$\sqrt{4y^2-4y+1} \xrightarrow{\text{(N2) azonosság}} \sqrt{(2y-1)^2} = |2y-1|$$

b) $\sqrt{\dfrac{a^6b^4}{9}} \quad a < 0\, \textit{és}\, b < 0$

$$\sqrt{\frac{a^6b^4}{9}} = \sqrt{\frac{a^6b^4}{3^2}} = \frac{|a^3|b^2}{3}$$

Itt mindenhol külön ki kellene raknunk az abszolút-érték jelet, de mivel a 3>0 és mivel a b^2 is nagyobb-egyenlő mint 0, minden b-re, ezért ezekre nem kell kirakni.

c) $\sqrt[8]{a^8} \quad a < 0$

$$\sqrt[8]{a^8} = |a|$$

Fontos, hogy itt ki kell rakni, egyszer azért, mert ugye páros a gyökkitevő, másodszor, pedig kikötötték, hogy a<0.

Kiemelés

A kiemelés lényege az, hogy a gyökvonást nem tudjunk teljesen elvégezni. Például a $\sqrt{8}$ nem ad egész eredmény, ugyanis a 8 nem négyzetszám. Ilyenkor csináljuk azt, hogy kiemelünk. Először nézzük, miért is lehetséges ez.

Végezzük el a következő gyökvonást: $\sqrt{x^3} \quad x \geq 0$

$$\sqrt{x^3} \xrightarrow[\text{felhasználva}]{\text{hatványozás azonosságait}} \sqrt{x^2 \cdot x} \xrightarrow[\text{felhasználva}]{\text{gyökvonás azonosságati}} \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x \cdot \sqrt{x}$$

Tehát a lényeg az, hogy a gyökjel alatti kifejezést fel tudjuk bontani 2 vagy több olyan kifejezésre, amelyekből valamelyikkel el tudjuk végezni a gyökvonást, akkor azokkal elvégezzük és kihozzuk őket a gyökjel elé, a többi pedig ott marad. Itt mindig úgy alakítjuk a gyökjel alatti kifejezést, hogy az szorzat, hányados, vagy hatványozás legyen, ugyanis, ezekre tudjuk csak alkalmazni a gyökvonás azonosságait. Tehát úgy kell felbontanunk a kifejezést, hogyha pl négyzetgyök van, akkor legyen benne négyzetes ismeretlen (pontosabban páros hatványkitevőjű ismeretlen), illetve legyen benne olyan konstans (szám), ami négyzetszám (ha egész értéket kell kiemelni, ugyanis, ha nem csak egészet lehet, akkor simán el tudjuk végezni bármilyen konstans gyökvonását). Itt is figyelni kell arra, hogy ha páros a gyökkitevő, akkor a kihozott kifejezést abszolút-értékbe kell rakni.

Tehát ami tényleg a lényeg, hogy a kihozandó kifejezés hatványkitevőjét osztjuk a gyökkitevővel és az így kapott hatványkitevőjű kifejezés kerül a gyökjel elé.

Ugyanígy működik a kiemelés n-edik gyöknél is, csak ott úgy kell alakítani, hogy az ismeretlen hatványkitevője n-el osztható legyen.

Néhány feladat példaként:

1) Emeljük ki a lehető legnagyobb természetes számot:

a) $\sqrt{27}$

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{0.0018}$

$$\sqrt{0.0018} = \sqrt{\frac{18}{10000}} = \sqrt{\frac{3^2 \cdot 2}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10^4} \cdot 3^2} = 3\sqrt{\frac{2}{10^4}} = 3\sqrt{0.0002}$$

c) $\sqrt[5]{1215}$

$$\sqrt[5]{1215} = \sqrt[5]{3\ \ \cdot 5} = 3\sqrt[5]{5}$$

2) Emeljük ki a gyökjel elé, amit lehet:

a) $\sqrt{75a^3b^6} \quad a > 0\, és\, b < 0$

$$\sqrt{75a^3b^6} = \sqrt{3 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^6} = 5a\left|b^3\right|\sqrt{3a}$$

Mivel páros a gyökkitevő (2), ezért a kihozandó kifejezést abszolút értékbe kellene rakni, de mivel az 5>0 és a>0, ezért őket nem kell.

b) $\sqrt{72a^3}$

$$\sqrt{72a^3} = \sqrt{3^2 2^3 a^3} = \sqrt{3^2 2^2 2a^2 a} = 6|a|\sqrt{2a}$$

Itt nem volt kikötve az a-ról, hogy pozitív, ezért ki kell rakni, de az lett volna a valóban jó megoldás, ha még az elején kikötjük ezt a feltételt, ugyanis az a<0-ra nem értelmezhető a kifejezés.

c) $\sqrt[n-1]{a^{2n+3}} \quad a \geq 0$

$$\sqrt[n-1]{a^{2n+3}} = \sqrt[n-1]{a^{2(n-1)+5}} = \sqrt[n-1]{a^{2(n-1)}a^5} = a^2\sqrt[n-1]{a^5}$$

d) $\sqrt{2a^2 + 12ab + 18b^2}$

$$\sqrt{2a^2 + 12ab + 18b^2} = \sqrt{2\left(a^2 + 6ab + 9b^2\right)} = \sqrt{2(a+3b)^2} = |a+3b|\sqrt{2}$$

Bevitel a gyökjel alá

Ennek a módszernek a lényege, hogy a gyökjel előtt levő kifejezést (ha az szorzással kapcsolódik a gyökös kifejezéshez) egyszerűen annyiadik hatványra emeljük, amennyi a gyökkitevő és bevisszük szorzótényezőként a gyökjel alá.

$$a^k\sqrt{a} = \sqrt{a^{2k}a} = \sqrt{a^{2k+1}}$$

1) Gyökjel alá vitellel írjuk fel egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:

a) $1{,}2\sqrt{2}$

$$1{,}2\sqrt{2} = \sqrt{(1{,}2)^2 \cdot 2} = \sqrt{1{,}44 \cdot 2} = \sqrt{2{,}88}$$

b) $9\sqrt{\frac{4}{3}}$

$$9\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{81 \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{27 \cdot 4} = \sqrt{108}$$

c) $3a^2\sqrt{2ab}$

$$3a^2\sqrt{2ab} = \sqrt{3^2 a^4 2ab} = \sqrt{18a^5b}$$

d) $(x-y)\sqrt{\frac{2}{x^2-y^2}}$

$$(x-y)\sqrt{\frac{2}{x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{2(x-y)^2}{x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{2(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}} = \sqrt{2 \cdot \frac{x-y}{x+y}}$$

e) $\frac{a^3b}{c^2}\sqrt[3]{\frac{1}{ab}}$

$$\frac{a^3b}{c^2}\sqrt[3]{\frac{1}{ab}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3b}{c^2}\right)^3\frac{1}{ab}} = \sqrt[3]{\frac{a^9b^3}{abc^6}} = \sqrt[3]{\frac{a^8b^2}{c^6}}$$

f) $x^k\sqrt[n]{x}$

$$x^k\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x^{nk}x} = \sqrt[n]{x^{nk+1}}$$

Melyik a nagyobb?

Vannak olyan feladatok, amikor el kell döntenünk két gyökös kifejezés közül, hogy melyik a nagyobb. Erre alapvetően kétféle megoldási mód létezik. Az egyik az, amikor olyan kifejezéssé alakítjuk, amiben megegyezik a gyökös kifejezés, például $3\sqrt{2}$ és $4\sqrt{2}$.

Most ezt a módszert fogjuk kitárgyalni, a másikat pedig ez után (az a könnyebb, de előbb ezt nézzük).

Tehát a lényeg ezeknél a feladatoknál, hogy kiemelünk a kifejezésből a lehető legtöbbet, illetve addig emelgetjük ki, alakítgatjuk, amíg azonos nem lesz a két gyökös rész.

1) A gyökvonás elvégzése nélkül határozzuk meg, hogy az alábbi két kifejezés közül melyik a nagyobb:

a) $3\sqrt{5}$ vagy $\sqrt{20}$

Az első kifejezést már nem tudjuk tovább alakítani, mivel a 3 és az 5 is prímszám. De a második kifejezést még alakíthatjuk:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Tehát kaptunk két kifejezést, aminek közös a gyökös része, így azt figyelmen kívül hagyhatjuk, és a maradék tagok döntenek arról, melyik a nagyobb. Jelen esetben az első.

Pontosabban nem figyelmen kívül hagyjuk a gyökös részt, hanem a gyökfüggvény azon tulajdonságát használjuk ki, hogy szigorúan monoton növekvő függvény, tehát nagyobb helyeken nagyobb értékeket vesz fel. Lefordítva még egyszerűbbre ha nagyobb az alap, akkor nagyobb lesz a gyök.

b) $3\sqrt{2}$ vagy $5\sqrt{0{,}5}$

Az első kifejezést már nem tudjuk tovább alakítani. Nézzük a másodikat.

$$5\sqrt{0{,}5} = 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2^{-1}} = 5\sqrt{2 \cdot 2^{-2}} = 5 \cdot 2^{-1}\sqrt{2} = \tfrac{5}{2}\sqrt{2} = 2{,}5\sqrt{2}$$

Itt mivel már nem tudtunk kiemelni a gyökjel alól egy kis cselt alkalmaztunk. Méghozzá a 2^{-1}-et kellett felírnunk úgy, hogy legyen benne 2-es. Ez egyszerűen úgy csináltunk meg, hogy a 2^{-1}-et elosztottuk 2-vel, így egy olyan számot kaptunk, amivel ha megszorozzuk a 2-t, akkor az eredetit kapjuk. Ezután már csak ki kellett emelnünk a 2^{-2}-t, és kész.

Ne tévesszen meg senkit, hogy negatív a hatványkitevő, ekkor ugyanúgy alkalmazzuk a kiemelést, mint eddig elosztjuk a hatványkitevőt a gyökkitevővel.

Most pedig nézzük a második módszert. Ebben csak annyit kell csinálnunk, hogy minden beviszünk a gyökjel alá és a gyökök alapjait hasonlítjuk össze.

Ez a módszer is azért fog működni, mert a gyökfüggvény szigorúan monoton növekvő.

Most az előző feladatokat oldjuk meg ezzel a módszerrel:

1)

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45} \quad > \quad \sqrt{20}$

b) $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18} \quad > \quad 5\sqrt{0{,}5} = \sqrt{25 \cdot 0{,}5} = \sqrt{12{,}5}$

Műveletek gyökös kifejezésekkel

Most megtárgyaljuk, hogy miként végezhetjük el például két gyökös kifejezés összeadását, illetve kivonását. A Műveletek fogalomhoz hozzátartozik még a szorzás, osztás, és a hatványozás is, de eddig ezekről beszéltünk. Illetve annyit kell tudni, hogy ilyenkor általában az azonosságokat kell alkalmazni.

Az egész lényege az, hogy itt is, mint az összehasonlítás első módszerénél valamilyen közös gyökös kifejezést kell majd találnunk. Ezután kiemeljük ezt a kifejezést és így már össze fogunk tudni vonni.

Itt is leggyakrabban a kiemelést kell majd használnunk. Ezért a legegyszerűbb, ha az elején a gyök alatt levő kifejezést a lehető legegyszerűbb alakban felírjuk. Célszerű, ha a gyökjel alatt levő konstansokat prímtényezős felbontásban felírjuk. Majd ezek után a legnagyobb közös osztó, illetve ennek valamely osztója lesz gyökjel alatt maradó tag. De természetesen nem fogjuk meghatározni állandóan a LNKO-t, hanem legtöbbször látszani fog a feladaton, hogy mit kell majd használnunk.

1) Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$

$$\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}=\sqrt{3\cdot 2^2}-\sqrt{3^3}+\sqrt{\frac{2^4\cdot 3}{2^2}}=$$
$$=\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^2\cdot 3}\xrightarrow{3\,\text{marad, többit kiemeljük}}$$
$$=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(2-3+2)\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

Itt most azt csináltuk, hogy elsőnek bevittünk mindent a gyökjel alá, majd az ott levő konstansokat prímtényezőkre bontottuk. Ekkor a LNKO a 3 volt. Ezt meghagytuk a gyökjel alatt, és a többit pedig kiemeltük. Ezután a legegyszerűbb, hogyha a megmaradt gyökös kifejezést úgy kezeljük, mint egy ismeretlent és algebrai ismeretinkre hagyatkozva könnyen megoldható a 2a-3a+2a kifejezés. Ebben a feladatban most kiemeltük a megmaradt gyökös kifejezést, és így vontunk össze.

b) $5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{5}$

Először próbáljunk meg kiemelni:

$$5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+\sqrt{5}=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}\sqrt{2^2 5}-\frac{5}{4}\sqrt{2^2\cdot\frac{1}{5}}+\sqrt{5}=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{5}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5}$$

Vonjuk össze, amit már összetudunk. Az 1.-et a 3.-al, majd a 2.-at a 4.-el, amelyek ki is ejtik egymást.

$$5\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{5}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{5}=5\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\underbrace{\left(=\left(5-\frac{5}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{5}}\right)}_{\text{megjegyzés}}=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\underbrace{\left(=\sqrt{\frac{5}{4}}\right)}_{\text{megjegyzés}}$$

A megjegyzések nem tartoznak szorosan a levezetéshez, csak a jobb érthetőség kedvéért szerepelnek benne.

c) $5\sqrt{4a}+4\sqrt{a}-8\sqrt{2a}-6\sqrt{9a}$

Először vizsgáljuk meg az értelmezési tartományát a feladatnak, ugyanis mivel ismeretlen vagy benne, meg kell határoznunk, hogy mely értékekre lesz egyáltalán értelmezve:

$$\left.\begin{array}{l} 4a \geq 0 \\ a \geq 0 \\ 2a \geq 0 \\ 9a \geq 0 \end{array}\right\} a \geq 0$$

Először emeljünk ki az első és a negyedik tagból. A másodikból és a harmadikból már nem tudunk.

$$\underbrace{5\sqrt{4a}}_{1}\underbrace{+4\sqrt{a}}_{2}\underbrace{-8\sqrt{2a}}_{3}\underbrace{-6\sqrt{9a}}_{4}=\underbrace{10\sqrt{a}}_{1}\underbrace{+4\sqrt{a}}_{2}\underbrace{-18\sqrt{a}}_{4}\underbrace{-8\sqrt{2a}}_{3}=-4\sqrt{a}-8\sqrt{2a}$$

És innen tovább nem tudunk menni, ugyanis kiemelni már nem tudunk, és ha bevisszük a 4-et, még akkor sem lesz közös gyökös kifejezés. Szóval itt a vége.

Most nézzünk egy picit nehezebb feladatot!

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\frac{4x}{a+x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}-2a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}+3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}=\ldots$$

Minden gyökjel alól emeljük ki, ami ki tudunk.

$$\ldots=\frac{2x}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2a}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}+3a\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x(a-x)\sqrt{\frac{1}{a^2-x^2}}=\ldots$$

Az első gyökjel alól kiemelt tag az $\frac{1}{4}\left(\rightarrow\frac{1}{2}\right)$*, a második tagból kiemelt tag az* $\frac{1}{(a+x)^2}\left(\rightarrow\frac{1}{a+x}\right)$*, a harmadik tagból nem tudtunk kiemelni, a negyedik tagból kiemelt tag pedig az* $(a-x)^2\,(\rightarrow a-x)$*. Mivel a 4-ből 2 tagban a* $\sqrt{a^2-x^2}$*, ezért törekedjünk arra, hogy minden tagból ez „állítsuk elő". Ezt úgy tehetjük meg, hogy a 3. tagot megszorozzuk* $\sqrt{\frac{a+x}{a+x}}$*-el, ami 1 értékű, így ekvivalens átalakítás. Így a gyökjel alatt ugyanazt a kifejezést fogjuk kapni, mint az eredeti 2. tagban, amiből kiemelhetjük a* $\frac{1}{(a+x)^2}\left(\rightarrow\frac{1}{a+x}\right)$ *tagot. A 4. tagot szorozzuk megszorozzuk* $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-x^2}}$*-tel, így a gyökös tagnak a következőt kapjuk:* $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{\left(a^2-x^2\right)^2}}$*. Ebből kiemelhetjük a* $\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^2}\left(\rightarrow\frac{1}{a^2-x^2}\right)$ *tagot, így a teljes kifejezésre a következőt kapjuk:*

$$\ldots=\frac{2x}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{2a}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{3x}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}=$$

$$=(2x-2a+3a-3x)\frac{1}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a-x}{a+x}\sqrt{a^2-x^2}=\ldots$$

Ezután vigyük be a gyökjel alá az $\frac{1}{a+x}$ *-et.*

$$\ldots = (a-x)\sqrt{\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)^2}} = \underline{\underline{(a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}}$$

Gyöktelenítés

Gyöktelenítésnél azt szeretnénk, ha például a nevezőben nem lenne gyök. Ezt úgy fogjuk elérni, hogy beszorozzuk 1-el. Igazából nem pontosan így igaz, mert ha 1-el beszorozzuk, akkor nem történik semmi. Hanem itt valamilyen $\frac{x}{x}=1$ számmal fogjuk beszorozni, azaz mind a számlálóban, mind a nevezőben ugyanaz a szám van, illetve kifejezés, így értéke 1. Ezzel nem fog változni a kifejezésünk értéke, csak a felírásának módja.

Most alapvetően két esetet fogunk megkülönböztetni. Most csak a nevező gyöktelenítésére térünk ki.

Az első, amikor csak egyetlen gyökös kifejezés van a nevezőben. Ekkor csak annyi a dolgunk, hogy beszorzunk egy komplementer taggal. Azaz egy olyan taggal, amivel beszorozva a gyökös kifejezést egész kifejezést kapunk. Például négyzetgyökös kifejezés esetén egy lehet akár maga a kifejezés, mert ugye ilyenkor önmagával megszorozzuk, tehát eltűnik a gyökjel.

1) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Itt ugye a nevezőben levő gyökös kifejezés a $\sqrt{2}$ *volt, ezért* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *-vel szoroztuk be, aminek ugye 1 az értéke, így beszorozhatunk vele. Ezután a nevezőben eltűnt a gyökjel és maradt 2, amivel pedig leosztottunk.*

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Itt mind a számlálóban, mind a nevezőben gyökös kifejezés szerepel, de nekünk most az a feladatunk, hogy a nevezőt gyöktelenítsük, szóval a számlálóban levő kifejezéssel most ne foglalkozzunk.

c) $\frac{35}{4\sqrt{7}}$

$$\frac{35}{4\sqrt{7}}=\frac{35}{4\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{35\sqrt{7}}{4\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35\sqrt{7}}{28}$$

Ugye itt a nevezőben egy olyan kifejezés van, ahol van konstans is. De ilyenkor csak a gyökös résszel kell szorozgatni. Ha a teljes nevezővel szorozgatnánk, akkor egy felesleges lépést csinálnánk, ugyanis, a végén majd lekellene osztanunk jelen esetben 4-el. Fontos, hogy amit az előzőekben elmondtam ez csak akkor igaz, hogyha 1 gyökös kifejezés szerepel a nevezőben.

Most térjünk át arra az esetre, ha két gyökös kifejezés szerepel a nevezőben és ezek között összeadás vagy kivonás. Emlékezzünk vissza az (N5) azonosságra. Ugye ott van két tag és ennek a két tagnak vagy az összege és a különbsége összeszorozva és eredményül kapunk két négyzetes kifejezést. Ez nekünk nagyon jó, mert most is két tagról beszélünk a nevezőben. És mivel ez a két tag gyökös és a gyökjel eltüntetésére a legalapvetőbb eljárás a négyzetre-emelés, az eredményül kapott kifejezésben el fog tünni a gyök.

Tehát ilyenkor is be fogunk szorozni egy 1 értékű kifejezéssel, viszont itt x helyén nem csak egy gyökös kifejezés fog állni. Ilyenkor, ha a nevezőben összeadás van, akkor egy olyan taggal fogunk beszorozni, ahol mind a nevezőben, mind a számlálóban ugyan annak a két tagnak a különbsége van.

Nézzük inkább példákon keresztül.

2) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét a változók lehetséges értékeinél:

a) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$$

Tehát itt ugyanúgy megszoroztuk egy 1 értékű törttel, aminek most a nevezőjében és a számlálójában is az eredeti nevező ellentétes műveletű párja van. Itt most mivel az eredeti nevezőben összeadás volt, ezért itt ezen két tag különbségét kell használnunk.

b) $\frac{9}{\sqrt{19}-4}$

$$\frac{9}{\sqrt{19}-4}=\frac{9}{\sqrt{19}-4}\cdot\frac{\sqrt{19}+4}{\sqrt{19}+4}=\frac{9\left(\sqrt{19}+4\right)}{\left(\sqrt{19}-4\right)\left(\sqrt{19}+4\right)}=\frac{9\left(\sqrt{19}+4\right)}{\left(\sqrt{19}\right)^2-4^2}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{9\left(\sqrt{19}+4\right)}{19-16}=\frac{9\left(\sqrt{19}+4\right)}{3}=3\left(\sqrt{19}+4\right)=3\sqrt{19}+12$$

Itt is a nevező ellentétel műveletű tagját tartalmazó törttel szoroztuk meg.

c) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\ldots$$

$$\ldots = \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2} = 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

d) $\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

$$\frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}} = \frac{\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2}{\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{5}\right)^2+2\left(3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{45+12\sqrt{5}\sqrt{2}+8}{45-8} = \frac{53+12\sqrt{10}}{38}$$

*Itt is a nevező ellentétes előjelű párját tartalmazó törttel szoroztunk be. Fontos, hogy nem zavarjon meg minket, hogy olyan kifejezés van a nevezőben, ahol nem csak gyök van, ilyenkor a feladatnak megfelelően a teljes tagot vesszük. Itt **NEM** csak a gyökös tagokat vesszük, mint abban az esetben, amikor csak 1 tagú volt a nevező.*

Most nézzünk olyan feladatot, amikor a számlálót kell gyökteleníteni. Itt is úgy járunk el, mint az előző két esetben. Itt emelném ki, hogy ez és az előző esetek csak négyzetgyökös kifejezésekre érvényesek, az n-edik gyökös kifejezésekkel a következőkben foglalkozunk.

3) Gyöktelenítsük a következő törtek számlálóját a változók lehetséges értékeinél:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{3} = \frac{\sqrt{3}+2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}{3\left(\sqrt{3}-2\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2}{3\left(\sqrt{3}-2\right)} =$$

$$= \frac{3-4}{3\sqrt{3}-6} = -\frac{1}{3\sqrt{3}-6}$$

Itt hasonló dolgot csináltunk, mint az előző esetben, csak itt a számlálóban tűnt el a gyökös kifejezés.

b) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \frac{x-y}{(x-y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Ezt a feladatot egyszerűbben is meg lehetett volna oldani úgy, hogy felismerjük az (N5) azonosságot a nevezőben és egyszerűesítünk.

c) $\dfrac{a-b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}$

$$\frac{a-b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}=\frac{a-b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}\cdot\frac{a+b\sqrt{x}}{a+b\sqrt{x}}=\frac{\left(a-b\sqrt{x}\right)\left(a+b\sqrt{x}\right)}{\left(a+b\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{a^2-\left(b\sqrt{x}\right)^2}{a^2+2ab\sqrt{x}+\left(b\sqrt{x}\right)^2}=\frac{a^2-b^2x}{a^2+2ab\sqrt{x}+b^2x}$$

Most nézzük azt az esetet, amikor n-edik gyökös kifejezést, törtet, kell gyökteleníteni.

Abban az esetben, amikor csak egyetlen gyökös tagja van a nevezőnek, könnyűnek mondható a dolgunk, ugyanis majdnem teljesen ugyanúgy kell eljárnunk, mint négyzetgyökös esetben. Annyi különbséggel, hogy itt nem önmagát kell használnunk, hanem itt is egy komplementer tagot kell keresnünk, egy olyan tagot, amivel ha összeszorozzuk, akkor a gyök eltűnik.

Most leírom „hivatalosabban" hogy nézne ez ki, és utána magyarázok.

Legyen $a\in R, n\in N, k\in Z$ *, ekkor az* $\sqrt[n]{a^k}$ *komplementerén az* $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ *-t értjük.*

$$\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}}=\sqrt[n]{a^k\cdot a^{n-k}}=\sqrt[n]{a^{k+n-k}}=\sqrt[n]{a^n}=a$$

Tehát alaphelyzetben van egy gyökös kifejezésünk, aminek van egy alapja (a), vagy egy hatványkitevője (k) és van egy gyökkitevője (n). Ahhoz, hogy szorzáskor eltűnjön a gyökjel nekünk egy olyan kifejezést kell használnunk, aminek az alapja *a*, gyökkitevője *n* és hatványkitevője *n-k*, így ha összeszorozzuk, akkor közös gyökjel alatt, a hatványozás egyik azonosságát felhasználva összeadjuk a hatványkitevőket, így $n-k+k=n$, tehát ugyanaz lesz a hatványkitevő és a gyökkitevő is, így eltűnik a gyökjel.

Összefoglalva, nekünk minden esetben először ezt a komplementer kifejezést kell felírnunk.

4) Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$

$$\frac{5}{\sqrt[3]{25}}=\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{5\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{5\sqrt[3]{5}}{5}=\sqrt[3]{5}$$

Tehát először felírtuk hatvány alakban a gyökös tagot. Mivel a gyökkitevő 3, a hatványkitevő 2, ezért a komplementer tag gyökkitevője szintén 3, a hatványkitevője pedig 1 lesz. Ezzel beszorzunk és egyszerűsítünk.

Azonban a legtöbb ilyen feladatnál van egy másik megoldás:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{25}}=\frac{5}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{5^3}{5^2}}=\sqrt[3]{5}$$

Itt magát az 5-öt írtuk fel 3-dik gyökként, majd egyszerűsítettünk.

A következő feladatoknál, ahol lehetséges, így is meg lesz oldva a feladat.

b) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

Megoldás 1:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{a\sqrt[3]{a}}{a}=\sqrt[3]{a}$$

Megoldás 2:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2}}=\sqrt[3]{a}$$

c) $\frac{x}{\sqrt[n]{x}}$

Megoldás 1:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{x}}=\frac{x}{\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{\sqrt[n]{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{x\sqrt[n]{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{x^{n-1}}}=\frac{x\sqrt[n]{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{x^n}}=\frac{x\sqrt[n]{x^{n-1}}}{x}=\sqrt[n]{x^{n-1}}$$

Megoldás 2:

$$\frac{x}{\sqrt[n]{x}}=\frac{\sqrt[n]{x^n}}{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[n]{\frac{x^n}{x}}=\sqrt[n]{x^{n-1}}$$

d) $\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}$

Megoldás 1:

$$\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}=\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}\cdot\frac{\sqrt[4]{(a-1)^3}}{\sqrt[4]{(a-1)^3}}=\frac{(a^2-1)\sqrt[4]{(a-1)^3}}{\sqrt[4]{(a-1)^4}}=\frac{(a^2-1)\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a-1}=$$

$$=\frac{(a-1)(a+1)\sqrt[4]{(a-1)^3}}{a-1}=(a+1)\sqrt[4]{(a-1)^3}$$

Megoldás 2:

$$\frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}=\frac{(a+1)(a-1)}{\sqrt[4]{a-1}}=(a+1)\frac{(a-1)}{\sqrt[4]{a-1}}=(a+1)\frac{\sqrt[4]{(a-1)^4}}{\sqrt[4]{a-1}}=$$

$$=(a+1)\sqrt[4]{\frac{(a-1)^4}{(a-1)}}=(a+1)\sqrt[4]{(a-1)^3}$$

Néhány esetben a második megoldás rövidebb, mint az első és néha érthetőbb is. Ezért mindenki döntse el, hogy ő melyiket értette meg igazán (!) és hogy melyiket tanulja meg.

Az n-edik gyökös törtek gyöktelenítésére abban az esetben, amikor egy tagból áll a nevező, most nem térünk ki, ugyanis komplikált és nem közép szintű anyag (szerintem).

Egyéb összefüggések

Átírás más gyökkitevőre

Ha át szeretnénk írni valamilyen gyökös kifejezést, aminek n a gyökkitevője, olyan gyökös kifejezéssé, aminek m a gyökkitevője, akkor a következő összefüggést célszerű alkalmazni:

$$a \in R; n, m \in N; k, l \in Z$$

$$\sqrt[n]{a^k} \xrightarrow{l=k\cdot\frac{m}{n}} \sqrt[m]{a^l}$$

Például:

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3}$$

$$\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[16]{a^{28}}$$

Írjuk fel egy gyökjel segítségével

Ezeknél a feladatoknál a legtöbbször a gyökjel alá bevitelt és a (G4) azonosságot kell alkalmaznunk.

Például:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$$

Itt ugye a külső gyökkitevő 3, a belső 2 volt, így közös gyökkitevő $3 \cdot 2 = 6$ *lesz. Ugyanakkor a hatványkitevő nem változik.*

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2 b}} = \sqrt[12]{a^2 b}$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{25}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5 5^2}} = \sqrt[15]{2^5 5^2} = \sqrt[15]{800}$$

Itt először bevittük a 2-t a belső gyökjel alá, méghozzá, mivel a belső gyökkitevő 5 volt, ezért 2^5 *kerül be. Ezután pedig összevontuk a gyökjeleket.*

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{\sqrt{a^3}}} = \sqrt{\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^7}}} = \sqrt[8]{a^7}$$

Ennél a feladatnál először a 2. a-t vittük be a legbelső gyökjel alá, majd az 1. a-t a 2. gyökjel alá, majd ami most bevittünk, azt vittük be a legbelső gyökjel alá. Végül összevontuk a gyökjeleket és kész.

$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\sqrt{\frac{b^2 a}{a^2 b}}}} = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\sqrt{\frac{b}{a}}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b}{a}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{a^4 b}{b^4 a}}}} = \sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$$

Ennek a feladatnak van egy másik típusa is. Ekkor különböző gyökkitevős gyökök vannak összeszorozva (általában) és ezeket kell egyetlen gyökjellel felírni.

Itt az lesz a megoldás menete, hogy először megkeressük a gyökkitevők Legkisebb közös többszörösét (LKKT), majd mindegyik gyököt átírjuk ilyen gyökkitevőre és közös gyökjel alá vonjuk őket.

Például:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3}$$

Itt volt egyszer egy 2-es és egy 4-es gyökkitevő. A 2 és a 4 LKKT-ja a 4, így a négyzetgyököt átírtuk 4. gyökre, majd közös gyökjel alá vontuk őket.

$$\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[10]{b} = \sqrt[10]{a^2} \cdot \sqrt[10]{b} = \sqrt[10]{a^2 b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^4}{x^4}} \cdot \sqrt[12]{\frac{x^3}{a^3}} = \sqrt[12]{\frac{a^4 x^3}{a^3 x^4}} = \sqrt[12]{\frac{a}{x}}$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^4} \cdot \sqrt[12]{3^2} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{3^9} = \sqrt[4]{3^3}$$

Itt már 3 gyökös tag volt, így mind a 3 gyökkitevőjét kellett figyelni, és ez alapján megoldani a feladatot. Az utolsó lépést a következő pontban tárgyaljuk.

Írjuk fel kisebb gyökjel segítségével

Ennek a feladattípusnak a megoldását a legegyszerűbben úgy lehetne leírni, hogy egyszerűsítés a gyökkitevő és a hatványkitevő között. Ugyanis valójában erről van szó!

Például:

Írjuk fel a következő kifejezéseket alacsonyabb gyök segítségével:

$$\sqrt[6]{25^3} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25}(=5)$$

Itt valóban egyszerűsítettünk, méghozzá mivel a gyökkitevő 6, a hatványkitevő pedig 3, ezért 3-mal, így az új hatványkitevő 1, az új gyökkitevő pedig 2 lett. Mivel most az volt a feladat, hogy csak írjuk fel kisebb gyökjel segítségével, ezért nem kell kiszámolni a pontos értéket (tehát mindenképp legyen benne gyök).

$$\sqrt[20]{625^5} = \sqrt[4]{625}\left(= \sqrt[4]{5^4} = 5\right)$$

Itt is ugyanazt csináltuk, mint az előző feladatban.

$$\sqrt[25]{a^{15}} = \sqrt[5]{a^3}$$

Ebben a feladatban 5-el egyszerűsítettünk.

$$\sqrt[10]{32x^5y^{15}z^{10}} = \sqrt[10]{2^5x^5y^{15}z^{10}} = \sqrt{2xy^3z^2}$$

Itt fontos megfigyelnünk, hogy nem azt tettük, hogy néztük sorban és mindegyik taggal külön egyszerűsítettünk, hanem megnéztük, mi az, amivel MIND egyszerűsíthető, és azzal egyszerűsítettünk.

Feladatok

A következőkben nézzünk vegyesek 1-2 feladatot.

Végezzük el a következő feladatokat:

1) $\left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}\right)\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right) = \ldots$

$$\ldots = \sqrt[3]{4\cdot 2} - \sqrt[3]{10\cdot 2} + \sqrt[3]{25\cdot 2} + \sqrt[3]{4\cdot 5} - \sqrt[3]{5\cdot 10} + \sqrt[3]{25\cdot 5} =$$
$$= \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{50} + \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{125} = 2 + 5 = 7$$

2) $\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) = \ldots$

$$\ldots = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{b^3} = a - b$$

3) $\sqrt[3]{100000} : \sqrt[3]{100} = \ldots$

$$\ldots = \frac{\sqrt[3]{10^5}}{\sqrt[3]{10^2}} = \sqrt[3]{\frac{10^5}{10^2}} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

4) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} = \ldots$

$$\ldots = \sqrt[4]{\left(10 - \sqrt{19}\right)\cdot\left(10 + \sqrt{19}\right)} = \sqrt[4]{100 - 19} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

5) $\sqrt[3]{a^2-b^2}\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a+b}}=\dots$

$\dots=\sqrt[3]{\left(a^2-b^2\right)\frac{(a-b)^2}{a+b}}=\sqrt[3]{\frac{(a-b)(a+b)(a-b)^2}{a+b}}=\sqrt[3]{(a-b)^3}=a-b$

6) $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{16}}\cdot\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{16}}=\dots$

$\dots=\sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{16}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{16}\right)}=\sqrt{15-16}=\sqrt{-1}$

Nincs megoldás! $-1<0$!