DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. A differenciálhányados fogalma

Példa:

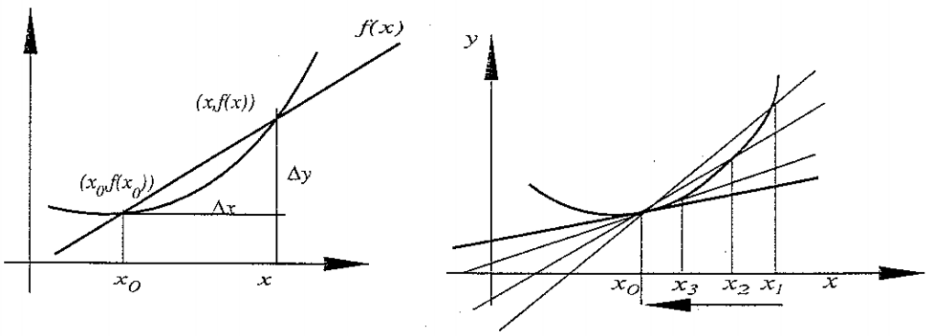
Legyen adva a koordinátarendszerben egy függvény grafikonja (görbéje) és vizsgáljuk, hogy adott pontjához hogyan lehetne érintőt húzni. Mivel adott $(x_0; f(x_0))$ ponton át ismert meredekségű egyenest középiskolás ismereteink alapján meg tudunk rajzolni (az $y = m(x - x_0) + y_0$ összefüggés szerint), ezért a feladat az érintő meredekségének meghatározása.

A függvény grafikonjának egy másik, $(x; f(x))$ pontján is áthaladó szelő meredeksége

$$m(x_0; x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Az érintő meredekségét (amennyiben egyáltalán létezik érintő) úgy kaphatjuk meg, hogy az *x* pontot közelítjük az x_0 ponthoz, azaz

$$m(x_0) := \lim_{x \to x_0} m(x_0; x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$



Speciálisan:

Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola $x_0 = 2$ pontjába húzott érintő egyenletét!

A függvény $P(2; 4)$ pontjához tartozó érintő meredekégét (iránytangensét) az

$$m(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4.$$

Így az érintő egyenlete: $y = 4(x - 4) + 4 = 4x - 4$.

Definíció: Az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányadost, mivel differenciák hányadosa, az *f* függvény x_0 pontjában vett *differenciahányadosának* nevezzük.

Definíció: Az f függvény *differenciálható* (vagy röviden *deriválható*) az értelmezési tartományának egy x_0 pontjában, ha a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ véges határérték létezik. A határértéket a függvény x_0 pontbeli *differenciálhányadosának* (vagy röviden *deriváltjának*) nevezzük.

Jelölések: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ vagy $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$.

Megjegyzés: Az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányados az $(x_0; f(x_0))$ és $(x; f(x))$ pontokra illeszkedő szelő, a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ az $(x_0; f(x_0))$ pontba húzott érintő meredekségét adja.

Megjegyzés:

a) Ha a fenti (véges) határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban nem differenciálható.

b) A $\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, illetve $\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határértékekkel értelmezhető az x_0 pontbeli *jobb*, illetve *bal oldali differenciálhányados* is, melyek adott pontbeli differenciálhányados létezésénél szükségképpen egyenlők.

Példa:

Számítsuk ki az $f(x) = 3x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ és a $k(x) = x^3$ függvények differenciálhányadosát az $x_0 = 2$ pontban!

Megoldás:

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2-12}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} 3(x+2) = 12.$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

c) $$\lim_{x \to 2} \frac{k(x)-k(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x^2+2x+4) = 12.$$

Definíció: Az f *deriváltjának* vagy *differenciálhányados-függvényének* nevezzük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya mindazon x_0 helyek, ahol a függvény differenciálható és értéke itt $f'(x_0)$. Jele: f'.

Példa: Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^2 - x + 3$ függvények differenciálhányadosát tetszőleges x_0 helyen!

Megoldás:

a) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x+x_0) = 2x_0;$$

b) $$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x+3-(x_0^2-x_0+3)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x-x_0^2+x_0}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)-(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0-1)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0}(x+x_0-1) = 2x_0-1.$$

Mivel x_0 mindkét esetben tetszőleges volt, ezért $(x^2)' = 2x$ és $(x^2-x+3)' = 2x-1$.

Definíció: Az $f'(x_0)$ differenciálhányados az *f* függvény görbéjének $P(x_0;\ f(x_0))$ pontbeli érintőjének iránytangense (meredeksége), azaz az érintő egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Példa: Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény $x_0 = 1$ pontjába húzott érintő egyenletét!

Megoldás:

Az érintő meredekségét az adott pontbeli differenciálhányados értéke adja, azaz

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

Így az érintő egyenlete: $y = \frac{1}{3}(x-1) + 1 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Példa: Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény $x_0 = -1$ pontjába húzott érintő egyenletét!

Megoldás:

Az érintő meredekségét az adott pontbeli differenciálhányados értéke adja, azaz

$$m = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x} - (-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{x+1}{x}}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x} = -1.$$

Így az érintő egyenlete: $y = -1(x+1) - 1 = -x - 2$.

2. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel: Ha az f függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás:

Minden $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ pontban igaz a következő egyenlőség:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Innen a függvények határértékére vonatkozó tétel szerint:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right] = f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x - x_0).$$

Mivel a függvény differenciálható az x_0 pontban, ezért a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ véges határérték létezik, jelöljük ezt $f'(x_0)$-lal, így $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot 0=f(x_0)$. Ez éppen azt jelenti, hogy f folytonos az x_0 pontban.

Megjegyzés:

A tétel megfordítása nem igaz, azaz a folytonosságból nem következik a differenciálhatóság.

Ellenpélda:

Az $f(x)=|x|$ függvény minden pontban folytonos, de az $x_0=0$ pontban mégsem differenciálható, ugyanis

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & \text{ha } x>0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$$

Azaz $f'(0-0)=-1$ és $f'(0+0)=1$. (A függvény görbéjének nem létezik érintője ebben a pontban.)

3. Differenciálási szabályok

Tétel: Néhány elemi függvény differenciálhányadosa:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c (konstans)	0	$\cos x$	$-\sin x$
x^n (n tetszőleges)	$n\cdot x^{n-1}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{\ln a}\cdot\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Bizonyítás:

Az $f(x)=x^n$ függvény differenciálhányadosa $f'(x)=nx^{n-1}$, ahol $n\in\mathbf{N}^+$.

I. módszer

A differenciálhányados fogalma szerint:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x^n{}_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)}{x-x_0}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\right)=x_0^{n-1}+x_0^{n-2}x_0+\ldots+x_0x_0^{n-2}+x_0^{n-1}=nx_0^{n-1}.$$

Mivel x_0 tetszőleges, ezért $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, ami a bizonyítandó állítás.

II. módszer

A teljes indukció módszerével:

a) $n=1$-re a definíció szerint:

$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$, azaz $x'=1$, tehát teljesül.

$n=2$-re a definíció szerint:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=x_0+x_0=2x_0,$$

azaz $\left(x^2\right)'=2x$, tehát teljesül.

b) Tegyük fel, hogy $n=k$-ra teljesül az állítás, azaz $\left(x^k\right)'=kx^{k-1}$, ahol $k\in\mathbf{N}^+$.

c) Vizsgáljuk $n=k+1$-re is. Be kell látni, hogy $\left(x^{k+1}\right)'=(k+1)x^k$, ahol $k\in\mathbf{N}^+$.

Felhasználva az előző indukciós feltevést, továbbá a szorzat differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left(x^{k+1}\right)'=\left(x^kx\right)'=\left(x^k\right)'x+x^kx'=kx^{k-1}x+x^k=kx^k+x^k=x^k(k+1),$$

azaz a tulajdonság teljesül $n=k+1$-ra is.

Mivel a tulajdonság $n=k$-ról $n=k+1$-re öröklődött, ezért tetszőleges $n\in\mathbf{N}^+$ esetén is igaz, azaz $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, ahol $n\in\mathbf{N}^+$.

Tétel: Ha az f és g függvények az x_0 pontban differenciálhatók, akkor

a) $(cf)'(x_0)=cf'(x_0)$, bármely $c\in\mathbf{R}$ esetén;

b) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$;

c) $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, $g(x_0)\neq 0$ esetén.

Tétel: Ha a g függvény differenciálható az x_0 pontban és f függvény differenciálható az $g(x_0)$ pontban, akkor az $f(g(x_0))$ összetett függvény is differenciálható az x_0 pontban és

$$f(g(x_0))' = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Megjegyzés:

Az összetett függvény differenciálszámításra megismert tétel érvényes akkor is, amikor az összetett függvényt több (véges számú) függvényből képezzük.

<u>*Példák*</u>: Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát!

a) $\left(3x^2-8x+4\right)'=?$

Alkalmazzuk az összeg differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left(3x^2-8x+4\right)'=\left(3x^2\right)'-\left(8x\right)'+\left(4\right)'=3\left(x^2\right)'-8\left(x\right)'+\left(4\right)'=6x-8.$$

b) $\left(\sqrt{x}\sin x\right)'=?$

Alkalmazzuk a szorzat differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left(\sqrt{x}\sin x\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\sin x\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\sin x+x^{\frac{1}{2}}\left(\sin x\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin x+x^{\frac{1}{2}}\cos x=\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos x.$$

c) $\left(\dfrac{x^2-3}{x-1}\right)'=?$

Alkalmazzuk a hányados differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-3\right)'(x-1)-\left(x^2-3\right)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-\left(x^2-3\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

d) $\left((2x+1)^3\right)'=?$

Alkalmazzuk az összetett függvény differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left((2x+1)^3\right)'=3(2x+1)^2\cdot 2=6(2x+1)^2.$$

e) $\left(e^{\sin 2x}\right)'=?$

Ez többszörösen összetett függvény:

$$\left(e^{\sin 2x}\right)'=e^{\sin 2x}\left(\sin 2x\right)'=e^{\sin 2x}\cos 2x(2x)'=2e^{\sin 2x}\cos 2x.$$

f) $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=?$

Alkalmazzuk az összetett függvény differenciálására vonatkozó szabályt:

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

g) $\left(x^{3x}\right)' = ?$

I. módszer:

Ez összetett exponenciális függvény. Mivel az alapban is szerepel a független változó, ezért írjuk át *e* alapú exponenciális függvényre:

$x = e^{\ln x}$ és $x^{3x} = \left(e^{\ln x}\right)^{3x} = e^{3x\ln x}$, így

$$\left(x^{3x}\right)' = \left(e^{3x\ln x}\right)' = e^{3x\ln x}\left(3x\ln x\right)' = e^{3x\ln x}\left(3\ln x + 3x\frac{1}{x}\right) = x^{3x}\left(3\ln x + 3\right).$$

II. módszer:

Az úgynevezett logaritmikus deriválást is használhatjuk azokban az esetekben, amikor az alapban is szerepel a független változó:

Legyen $y = x^{3x}$.

Mindkét oldal logaritmusát véve: $\ln y = 3x\ln x$,

majd mindkét oldalt deriválva: $\dfrac{y'}{y} = 3\ln x + 3x\dfrac{1}{x}$.

Rendezve y'-ra: $y' = y(3\ln x + 3)$,

majd $y = x^{3x}$-t visszahelyettesítve: $y' = \left(x^{3x}\right)' = x^{3x}\left(3\ln x + 3\right)$.

(*Megjegyzés*: $\ln y$-t összetett függvényként deriváltuk.)

4. Magasabb rendű differenciálhányadosok

Definíció: Ha az f függvény f' deriváltfüggvénye differenciálható az x_0 pontban, akkor differenciálhányadosát az f függvény x_0-beli *második differenciálhányados*ának nevezzük és $f''(x_0)$-val jelöljük.

Megjegyzés:

Hasonlóképpen értelmezhető egy függvény *harmadik*, *negyedik* stb. *differenciálhányados*a is. A *k-adik differenciálhányados* jelölésére az $f^{(k)}$ szimbólum használható. f' létezése és értéke az f függvény lokális viselkedésére jellemző.

Példa: Határozza meg az $f(x) = 5x^4 - 4x^2 + 2$ függvény második, harmadik, negyedik és ötödik differenciálhányadosát!

Megoldás: $f'(x) = 20x^3 - 8x$;

$f''(x) = 60x^2 - 8$;

$f'''(x) = 120x$;

$f^{(4)}(x)=120;$

$f^{(5)}(x)=0.$

5. L'Hospital szabály alkalmazása

Tétel: Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (vagy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$) és az f és g függvények az x_0 környezetében differenciálhatók, továbbá $g'(x_0)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>*Példák*</u>: L'Hospital szabály alkalmazásával határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=?$

A tört helyettesítési értékére $\frac{0}{0}$ adódik. Alkalmazva a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=?$

A tört helyettesítési értékére $\frac{0}{0}$ adódik. Alkalmazva a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0+0} 2x\ln x=?$

A szorzat helyettesítési értékére $0\cdot(-\infty)$ adódik. Alakítsuk át törtté az eredeti kifejezést a következő módon:

$$\lim_{x\to 0+0} 2x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}=?$$

A tört helyettesítési értékére $\frac{-\infty}{\infty}$ adódik. Alkalmazva a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 0+0} 2x\ln x = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0}\frac{(2\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+0}\frac{2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-2x) = 0\,.$$

6. A differenciálszámítás alkalmazásai

<u>*Példa*</u>: Írjuk fel az $f(x)=x^3-2x-1$ függvény $x_0=-2$ pontjába húzott érintő egyenletét!

Megoldás:

Az érintőegyenes meredekségét az $f'(x_0)=f'(-2)$ érték adja. $f'(x)=3x^2-2$, melyből $f'(-2)=10$. Az érintő egyenlete az $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ összefüggés alapján felírva: $y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=10(x+2)-5$, azaz $y=10x+15$.

<u>*Példa*</u>: Milyen szög alatt metszi az $y=\frac{1}{x}$ hiperbola az $y=x^2$ parabolát?

Megoldás:

Két görbe szögén az érintőik által bezárt szöget értjük a két görbe közös pontjában. A két görbe metszéspontja: *M*(1; 1). Az érintők egyenletéhez kiszámoljuk az iránytangensüket:

$m_1=f'(1)$. Mivel $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, ezért $m_1=-1$.

$m_2=g'(1)$. Mivel $\left(x^2\right)'=2x$, ezért $m_2=2$.

A két érintő egyenlete az *M*(1; 1) pontban: $y=-x+2$ és $y=2x-1$.

Szögük irány- vagy normálvektoraik skaláris szorzatából számolható ki: $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\varphi$.

Normálvektoraik: $\mathbf{n}_1(1;\,1)$ és $\mathbf{n}_2(2;\,-1)$, így $1\cdot 2+1\cdot(-1)=\sqrt{2}\sqrt{5}\cos\gamma$, melyből $\gamma=71{,}57°$.

<u>***Definíció***</u>: Ha az *f* függvénynek létezik deriváltfüggvénye, akkor az *f* értelmezési tartományának azokat az x_0 pontjait, ahol $f'(x_0)=0$, az *f stacionárius pontjainak* nevezzük.

<u>***Tétel***</u>: Az f függvény értelmezési tartományának egy x_0 pontjában lokális szélsőértéke van, ha $f'(x_0)=0$ és a deriváltfüggvény x_0-ban előjelet vált. Mégpedig, ha negatívból pozitívba megy át, akkor lokális minimuma, ha pozitívból negatívba, akkor lokális maximuma van.

Megjegyzés:

A derivált zérusértéke és előjelváltása a szélsőérték létezésének elégséges, de nem szükséges feltétele, azaz az előjelváltás hiánya mellet is adódhat szélsőérték.

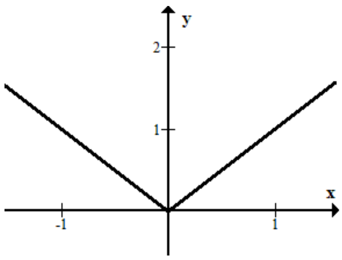
<u>*Példa*:</u> Vizsgáljuk az $f(x)=x^3$ és az $f(x)=x^4$ függvényeket az $x_0=0$ pontban.

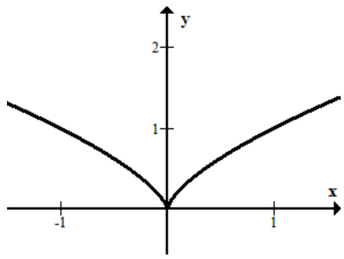
Megoldás:

Mindkét függvénynél $f'(x_0) = 0$. Ebben a pontban f' csak a második függvény vált előjelet, így $x_0 = 0$-ban csak a másodiknak van szélsőértéke.

Megjegyzés:

Az f függvénynek lehet szélsőértéke olyan pontban is, ahol nem differenciálható. Így pl. az $f(x)=|x|$ függvénynek a 0 pontban minimuma van, de f a 0 helyen nem differenciálható. Hasonlóképpen a $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ függvénynek a 0 pontban minimuma van, de g a 0 helyen nem differenciálható.





<u>*Példa*</u>: Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m^2 területű lemezt használnak fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a legnagyobb legyen?

Megoldás:

Legyen az alapél x, a magasság y, ekkor a keresett térfogat $V = x^2 y$.

A feladat feltétele szerint: $x^2 + 4xy = 2$, melyből $y = \dfrac{2-x^2}{4x}$.

A két egyenletből tehát $V = x^2\dfrac{2-x^2}{4x} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^3$.

A térfogatnak azon x_0 értékre lehet szélsőértéke, amelyre $f'(x_0)=0$.

$\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^3\right)' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x^2$, azaz $\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x^2 = 0$, innen $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (A feladat feltételei miatt csak a pozitív gyök jöhet szóba.)

A szélsőérték típusára a második deriváltfüggvény előjelváltásából következtethetünk: mivel az adott pontban $(+) \rightarrow (-)$ előjelváltás van, ezért maximumhely.

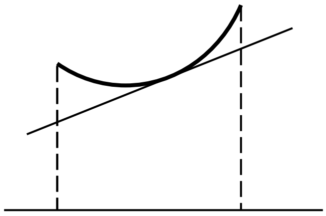
$V\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3 = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}27$ (m^3).

Az adott lemezből készíthető maximális térfogatú négyzet alapú doboz alapéle $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}82$ m, magassága $\sqrt{\dfrac{1}{6}} \approx 0{,}41$ m, a maximális térfogat pedig $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}27$ m^3.

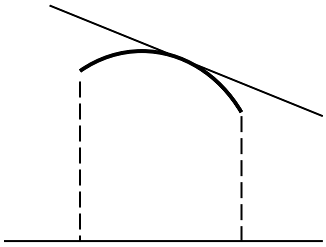
Tétel: Ha az f függvény az $(a;\, b)$ intervallum minden x pontjában differenciálható és $f'(x) \geq 0$, akkor a függvény az $(a;\, b)$ intervallumon növekvő, ha $f'(x) \leq 0$, akkor csökkenő.

Megjegyzés: A tétel érvényes zárt intervallum, sőt végtelen intervallum esetén is.

Definíció: Az f függvény grafikonjának az $(a;\, b)$ intervallumhoz tartozó ívét *konvex*nek (illetve *konkáv*nak) nevezzük, ha az ív bármely pontjához húzott érintője fölött (illetve alatt) helyezkedik el.



konvex görbe



konkáv görbe

Tétel: Ha az f függvény második differenciálhányadosa az $(a;\, b)$ intervallumon nem negatív, akkor f grafikonjának az $(a;\, b)$ intervallumhoz tartozó íve konvex, ha nem pozitív, akkor konkáv.

Megjegyzés:

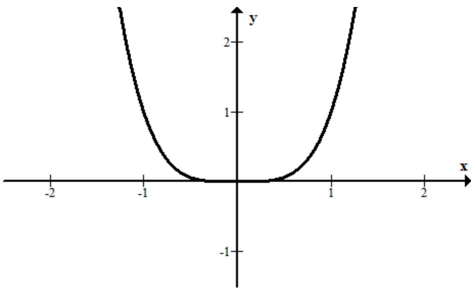
A konvex és konkáv ívek találkozási pontját *inflexiós pont*nak nevezzük. A tételből következik, hogy inflexiós pont csak olyan x_0 pontban lehet, amelyben $f''(x_0) = 0$. Ez csak szükséges, de nem elégséges feltétel. Elégséges feltétel fogalmaz meg a következő tétel:

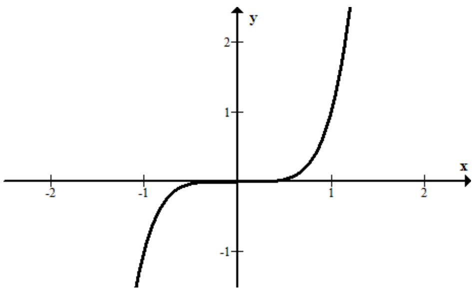
Tétel: Az f függvénynek az x_0 pontban inflexiós pontja van, ha $f''(x_0) = 0$, és a második deriváltfüggvény x_0-ban előjelet vált.

Példa: Vizsgáljuk az $f(x) = x^4$ és az $f(x) = x^5$ függvényt az $x_0 = 0$ pontban.

Megoldás:

Mindkét függvénynél $f''(x_0) = 0$. Ebben a pontban f'' csak a második függvény vált előjelet, így $x_0 = 0$-ban csak a másodiknak van inflexiós pontja.





7. Kétváltozós függvények differenciálszámítása (kiegészítő anyag)

Megjegyzés: Az f kétváltozós függvény x szerinti *parciális differenciálhányadosának* kiszámításánál a differenciálást az x változó szerint hajtjuk végre, az y változót konstansnak tekintve. Teljesen hasonló módon értelmezhető az y szerinti parciális differenciálhányados kiszámítása. Jele: f'_x, illetve f'_y.

Megjegyzés: A parciális differenciálhányadosok kiszámításánál mindazon differenciálási szabályok alkalmazhatók, amelyeket az egyváltozós függvényeknél megismertünk.

<u>*Példa*</u>: Számítsuk ki az $f(x;\ y)=3xy-x^3-y^3$ függvény parciális differenciálhányadosait!

Megoldás:

Az x szerinti differenciálhányadosnál y-t konstansnak tekintve:

$f'_x(x;\ y)=3y-3x^2$;

Az y szerinti differenciálhányadosnál x-et tekintjük konstansnak:

$f'_y(x;\ y)=3x-3y^2$.

Megjegyzés: Az f''_{xy} és f''_{yx} differenciálhányadosokat *vegyes másodrendű differenciálhányadosoknak*, míg az f''_{xx} és f''_{yy} differenciálhányadosokat *tiszta másodrendű differenciálhányadosoknak* nevezzük.

A vegyes másodrendű differenciálhányadosok megegyeznek, így az eredmény nem függ attól, hogy az egyes változók szerinti parciális differenciálásokat milyen sorrendben végeztük.

<u>*Példa*</u>: Számítsuk ki az $f(x;\ y)=3x^2y-2x^3-y^2$ függvény első és második parciális differenciálhányadosait!

Megoldás:

Az első parciális differenciálhányadosok:

$f'_x(x;\ y)=6xy-6x^2$ és $f'_y(x;\ y)=3x^2-2y$.

A második x szerinti parciális differenciálhányadosok:

$f''_{xx}(x;\ y)=6y-12x$ és $f''_{yx}(x;\ y)=6x$;

a második y szerinti parciális differenciálhányadosok:

$f''_{xy}(x;\ y)=6x$ és $f''_{yy}(x;\ y)=-2$.

Tétel: Ha az P_0 pontban az f kétváltozós függvény első parciális differenciálhányadosai nullával egyenlők, a második parciális differenciálhányadosai folytonosak, akkor

$$D(P_0)=f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-f''^{\,2}_{xy}(P_0)>0$$

esetén f -nek P_0-ban van helyi szélsőértéke - mégpedig $f''_{xx}(P_0)<0$ esetén helyi maximuma, $f''_{xx}(P_0)>0$ esetén helyi minimuma - , míg ha

$$D(P_0)=f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-f''^{2}_{xy}(P_0)<0,$$

akkor f -nek P_0-ban nincs helyi szélsőértéke.

Megjegyzés: Ha $D(P_0)=f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-f''^{2}_{xy}(P_0)=0$, akkor a szélsőérték kérdés nem eldönthető.

Példa: Keressük meg az $f(x;\ y)=x^3+2xy-4y^2+8$ függvény helyi szélsőértékeit!

Megoldás:

Az első parciális differenciálhányadosok:
$f'_x(x;\ y)=3x^2+2y$ és $f'_y(x;\ y)=2x-8y$.

A lehetséges szélsőértékek az első parciális differenciálhányadosok zérushelyei:

$$\begin{cases} 3x^2+2y=0; \\ 2x-8y=0. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldásai: $P_1(0;\ 0)$ és $P_2\left(-\frac{1}{6};\ -\frac{1}{24}\right)$.

A második parciális differenciálhányadosok:
$f''_{xx}(x;\ y)=6x$; $f''_{yy}(x;\ y)=-8$ és $f''_{xy}(x;\ y)=2$.

Ezekből

$$D(P_1)=f''_{xx}(P_1)f''_{yy}(P_1)-f''^{2}_{xy}(P_1)=6\cdot 0\cdot(-8)-2^2=-4<0, \text{ és}$$

$$D(P_2)=f''_{xx}(P_2)f''_{yy}(P_2)-f''^{2}_{xy}(P_2)=6\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(-8)-2^2=4>0,$$

azaz a P_2 pontban van helyi szélsőértéke, mégpedig $f''_{xx}(P_2)=6\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-1<0$ miatt helyi maximum. A P_1 pontban nincs helyi szélsőérték.

8. Feladatok

1. FELADAT

Írja fel az alábbi függvények differenciálhányadosát általánosan, majd az adott helyen!

1.1. $f(x)=3x^4$, $x_0=-2$;

1.2. $f(x)=2x^3$, $x_0=1$;

1.3. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$; 1.4. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1$;

1.5. $f(x)=x+2x^2$, $x_0=1{,}2$; 1.6. $f(x)=5x^2-3$, $x_0=-2$.

2. FELADAT

Differenciálható-e az

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+6, & x\le 3; \\ x-3, & x>3, \end{cases}$ függvény az $x_0=3$ helyen?

b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+8x-14, & x\le 5; \\ -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}, & x>5, \end{cases}$ függvény az $x_0=5$ helyen?

3. FELADAT

Határozza meg az alábbi függvények differenciálhányadosát!

3.1. $5x^2-3x+2$; 3.2. $7x^5-2x^4+3x^2-5x+1$; 3.3. $5\cos x-\frac{e^x}{3}-2^x+\frac{4}{x\sqrt{x}}$;

3.4. $3x\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt[6]{x}}+2$; 3.5. $\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^5}+\sqrt[4]{3}$; 3.6. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-2x}{x\sqrt{x}}$;

3.7 $x^5\cos x$; 3.8 $x^3\ln x$; 3.9 $x^3e^x\cos x$;

3.10. $x^2e^x\sin x$; 3.11. $\frac{x}{x^2+1}$; 3.12. $\frac{6x+5}{4x-3}$;

3.13. $\frac{x^2+3}{x^2-1}$; 3.14. $\frac{x^2+3x+5}{x^2-3x+5}$; 3.15. $\frac{x^3+\cos x}{x}$;

3.16. $\frac{e^x+\sin x}{xe^x}$; 3.17 $\frac{e^x\sin x}{\ln x}$; 3.18 $\frac{2x^3\sin x}{e^x}$;

3.19. $\sqrt[3]{1-x^2}$; 3.20. $\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$; 3.21 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

3.22. $\sqrt[3]{\frac{x^2+2x-3}{x+2}}$; 3.23. $\sqrt{1+\sqrt[3]{1+x}}$; 3.24. $e^{\cos x}$;

3.25. $e^{\sin\frac{1}{x}}$; 3.26. $\ln(1+e^x)$; 3.27. $\ln\frac{1+e^x}{1-e^x}$;

3.28. $\sqrt{\ln x}$; 3.29. $\sin(\sin x)$; 3.30. $\sin^3\frac{1}{3}x$;

3.31. $\operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$; 3.32. $x^3\lg\frac{1}{x}$; 3.33. $(x-1)^5(x+1)^6$;

3.34. x^x; 3.35. $(3x)^{x^2}$; 3.36. $(\sin x)^{\cos x}$;

3.37. $(\ln x)^{e^x}$; 3.38. $x^{\ln x}$; 3.39. $(x^2+1)^{\sin 5x}$;

3.40. $\sqrt[3]{x^4}\operatorname{arctg}(3x+3)$; 3.41. $\arcsin x^2+\frac{\sqrt[4]{2x^2}}{5}$; 3.42. $\operatorname{arctg}^2(\sin^2x-2x)$.

4. FELADAT

Határozza meg az alábbi függvények esetén a második, esetenként a harmadik differenciálhányadosokat!

4.1. $3x^2 - 2x$; 4.2. $3x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 14$; 4.3. $x^4 - \cos x$;
4.4. $\sin 5x$; 4.5. $x^2 e^x$; 4.6. $e^x \sin x$;
4.7. $e^x \ln x$; 4.8. $x^3 \cos x$; 4.9. $\sin 2x \ln x$.

Megoldás:

4.7. $f'(x) = e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$, $f''(x) = e^x\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$, $f'''(x) = e^x\left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$.

4.8. $f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$, $f''(x) = x(6 - x^2)\cos x - 6x^2 \sin x$,
$f'''(x) = 3(2 - 3x^2)\cos x + x(x^2 - 18)\sin x$, $f^{(4)}(x) = x(x^2 - 36)\cos x + 12(x^2 - 2)\sin x$.

4.9. $f'(x) = 2\ln x \cos 2x + \frac{\sin 2x}{x}$, $f''(x) = -4\ln x \sin 2x + \frac{4\cos 2x}{x} - \frac{\sin 2x}{x^2}$.

5. FELADAT

L'Hospital szabály alkalmazásával határozza meg a következő határértékeket!

5.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{x-1}$; 5.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2}$; 5.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 7x}{x}$;

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3 - 4x + 5}{7x^3 + 5x - 3}$; 5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{\ln 4x}$; 5.6. $\lim\limits_{x\to 0} 2x\operatorname{ctg} 3x$;

5.7. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$; 5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$; 5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x}{x^2 + \sin x}$$

Megoldás:

5.6. A szorzatot törtté alakítjuk és a L'Hospital szabályt alkalmazzuk, így

$$\lim_{x\to 0} 2x\operatorname{ctg} 3x = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cos^2 3x = \frac{2}{3}.$$

5.8. A L'Hospital szabályt kétszer alkalmazzuk, így $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x \ln 2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2}$. A számláló véges, a nevező határértéke végtelen, ezért a tört határértéke 0.

5.9. Törtté alakítva $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x}{x\sin^2 x}$, amire alkalmazzuk a L'Hospital szabályt, így a keresett határérték $-\infty$.

6. FELADAT

Határozza meg az alábbi függvények esetén a megfelelő görbék adott pontjához tartozó érintő meredekségét, és írja fel az érintőegyenes egyenletét!

6.1 $f(x)=\frac{1}{x}$, az $x_0=2$ helyen (*Megoldás*: $y=-\frac{1}{4}x+1$.);

6.2 $f(x)=4x^2+5$, az $x_0=3$ helyen (*Megoldás*: $y=24x-31$.);

6.3 $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$, az $x_0=-2$ helyen (*Megoldás*: $y=5$.);

6.4 $f(x)=x^3-2x^2+x-5$, az $x_0=-1$ helyen (*Megoldás*: $y=8x-1$.);

6.5 $f(x)=\frac{2}{1-x}$, az $x_0=0$ helyen (*Megoldás*: $y=2x+2$.);

6.6 $f(x)=\sin x$, az $x_0=0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ helyen (*Megoldás*: $y=x$; $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$; $y=1$.);

6.7 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, az $x_0=2$ helyen (*Megoldás*: $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}$.);

6.8 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, az $x_0=3$ helyen (*Megoldás*: $y=-\frac{1}{16}x+\frac{11}{16}$.);

6.9 $f(x)=\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$, az $x_0=2$ helyen (*Megoldás*: $y=2x-5$, az $x=-1$ kivételével.);

6.10 $f(x)=x\sin 3x+1$, az $x_0=\pi$ helyen;

6.11 $f(x)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, az $x_0=\frac{\pi}{6}$ helyen.

7. FELADAT

Mekkora szög alatt metszik egymást az alábbi görbék?

7.1 $y=-2x+5$ és $y=3\sqrt{x}$ (*Megoldás*: 60,3°.);

7.2 $y=\frac{1}{x+1}$ és $y=\frac{1}{1-x}$ (*Megoldás*: 90°.);

7.3 $y=\frac{x}{x-1}$ és $y=\frac{x^2}{2}$ (*Megoldás*: 71,6°.);

7.4 $y=x^2+4$ és $y=x^2+4x$ (*Megoldás*: 17,1°.).

8. FELADAT

Görbék érintőivel kapcsolatos feladatok.

8.1 Határozza meg az $y=x^2-7x+3$ egyenletű görbének az $5x+y=3$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintőjét! Írja fel az érintő egyenletét! (*Megoldás*: $y=-5x+2$.)

8.2 Hol lesz az $y=2\sin^2 x+3\cos 2x$ görbe érintőjének meredeksége 0? (*Megoldás*: az $x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$ pontokban.)

8.3 Mely *x* helyen lesz párhuzamos az $y=2+x-x^2$ egyenletű görbe érintője az első síknegyed szögfelezőjével? (*Megoldás*: az $x=0$ helyen.)

8.4 Határozza meg az $y=\dfrac{5x^2+4}{x}$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y=x$ egyenletű egyenessel! Írja fel az érintők egyenletét is! (*Megoldás*: az érintési pontok: $A(1;\,9)$ és $B(-1;\,-9)$.)

8.5 Határozza meg az $y=x^2$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintők párhuzamosak az $y=2x+4$ egyenletű egyenessel! Írja fel az érintők egyenletét! (*Megoldás*: a keresett pont: $P(1;\,1)$.)

8.6 Határozza meg az $y=2x-x^2$ egyenletű parabolának azt a pontját, amelyhez tartozó érintő párhuzamos az $A(1;\,1)$ és a $B(3;\,-3)$ pontokra illeszkedő szelővel! (*Megoldás*: a keresett pont koordinátái: $P(2;\,0)$.)

8.7 Írja fel az $y=x^2+1$ egyenletű parabolához az $A(-2;\,5)$ és a $B(3;\,3)$ ponton át húzható érintők egyenletét! (*Megoldás*: az A ponton át húzható: $y=-4x-3$, illetve a B ponton át húzható: $y=\left(6+2\sqrt{7}\right)x-15-6\sqrt{7}$ és $y=\left(6-2\sqrt{7}\right)x-15+6\sqrt{7}$.)

8.8 Határozza meg az $xy=8$ görbének azokat a pontjait, amelyekhez húzott érintők merőlegesek az $y=3x+2$ egyenletű egyenesre! Írja fel az érintők egyenletét! (*Megoldás*: az érintési pontok: $P_1\left(2\sqrt{6};\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ és $P_2\left(-2\sqrt{6};\ -\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, az egyenesek egyenlete: $y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(x+2\sqrt{6}\right)$ és $y-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=-\dfrac{1}{3}\left(x-2\sqrt{6}\right)$.)

9. Feladat

Szélsőértékes feladatok.

9.1 Határozza meg annak a 60 egységnyi kerületű téglalapnak a területét, amelynek az átlói a lehető legrövidebbek! (*Megoldás*: A téglalap oldali 15-15 egység, azaz négyzetről van szó. A keresett terület 225.)

9.2 Felbontható-e a 12 két részre úgy, hogy a részek köbének az összege maximális, vagy minimális legyen? (Megoldás: Minimuma van, ha a két rész 6-6; maximuma nincs.)

9.3 Egy egyenlő szárú háromszög kerülete 15 cm. Mekkorára válasszuk a háromszög szögeit, hogy az oldalakra írt félkörök területének az összege a lehető legkisebb legyen? (*Megoldás*: A körök sugara 2,5-2,5 cm, azaz a háromszög egyenlő oldalú.)

9.4 Egy forgáshenger magasságának és sugarának az összege 24 cm. Válasszuk meg az adatokat úgy, hogy a henger térfogata maximális legyen! (*Megoldás*: $r=16$ cm; $m=8$ cm.)

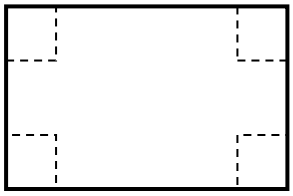
9.5 Határozza meg a 10 cm sugarú körbe írt legnagyobb területű téglalapot! (*Megoldás*: A keresett téglalap oldalai egyenlők, azaz négyzet.)

9.6 Határozza meg a 10 cm sugarú gömbbe írható maximális térfogatú körhenger magasságát és alapkörének sugarát! (*Megoldás*: $r=10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $m=\dfrac{20}{\sqrt{3}}$.)

9.7 Milyen méretezésű legyen az az 1 liter űrtartalmú, henger alakú konzervdoboz, amelyet minimális anyagfelhasználással akarunk elkészíteni? (*Megoldás*: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$; $m = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$.)

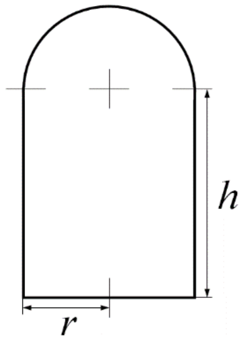
9.8 Három egyenlő szélességű deszkalapból felül nyitott csatornát kell készíteni. Mekkora legyen a két oldaldeszka elhajlása a függőleges iránytól, hogy a csatorna áteresztőképessége a legnagyobb legyen? (*Megoldás*: 30°.)

9.9 Egy téglalap oldalai 16 cm és 30 cm. A téglalap sarkaiból mekkora oldalú négyzeteket kell levágni, hogy a fennmaradó részt fölül nyitott dobozzá hajtogatva, a keletkezett doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen? (*Megoldás*: $\frac{10}{3}$.)



9.10 Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 2 m^2 területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy maximális térfogatot kapjunk, és mekkora ez a legnagyobb térfogat? (*Megoldás*: az alapél $\sqrt{\frac{2}{3}}$ m, a legnagyobb térfogat 0,272 m^2.)

9.11 Egy csatorna keresztmetszete 2 m^2 kell, hogy legyen. Hogyan válasszuk meg a csatorna r és h méretét, hogy minimális kerület adódjék? Mekkora lesz ez a minimális kerület? (*Megoldás*: $r = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}} \approx 0{,}75$ m, a minimális kerület $2\sqrt{4+\pi} \approx 5{,}34$ m.)



9.12 Osszuk fel a 4-et két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege minimális legyen! (*Megoldás*: $\frac{8}{3}$ és $\frac{4}{3}$.)

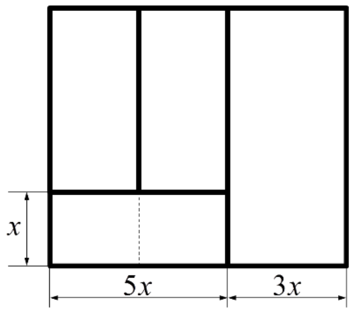
9.13 Adott egy körlap itatóspapírból. Mekkora középponti szögű körcikket vágjunk ki belőle, hogy az abból készítendő tölcsér alakú szűrő maximális térfogatú legyen? (*Megoldás*: a körcikk középponti szöge közelítően 294°.)

9.14 A 3 egységnyi alkotójú egyenes körkúpok közül határozza meg a maximális térfogatút! (*Megoldás*: $m = \sqrt{3}$ és $r = \sqrt{6}$.)

9.15 Íjunk az x tengely és az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola által határolt síkrészbe maximális területű téglalapot! Mik lesznek a téglalap csúcspontjai? (*Megoldás*: $A\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; 0\right)$, $B\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; 0\right)$, $C\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right)$ és $D\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right)$.

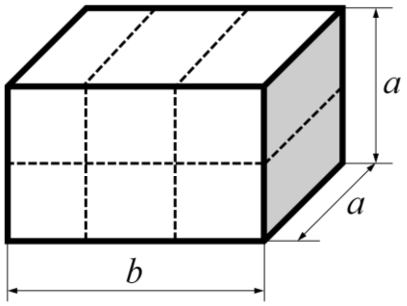
9.16 A mellékelt tervrajzon a falak összhosszúsága 90 m, a folyosó szélessége x m. Hány méter legyen x, ha azt akarjuk, hogy a 3 szoba együttes területe a lehető legnagyobb legyen? (*Megoldás*: 2 m.)

9.17 Válasszuk ki az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyben minimális az oldalakra rajzolható négyzetek területösszege! (*Megoldás*: egyenlő oldalú háromszög.)

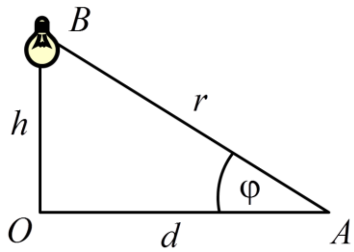


9.18 Egy folyótól 33 km távol lévő *A* városból a folyópart menti *B* városba rendszeresen szállítmányok mennek. *A* és *B* távolsága 183 km. Az egységnyi szállítmány szállítási költsége viziúton kilométerenként fele akkora, mint szárazföldi úton. Milyen irányban kell az utat megépíteni a folyóparthoz, hogy a szállítmányok a legkisebb költséggel érjenek *B*-be, feltételezve, hogy a folyó a vizsgálati szakaszon nem kanyarog? (*Megoldás*: Az utat a folyóra merőleges iránytól 30°-os szögben kell vezetni a folyóig a *B* város felé.)

9.19 28 dm^3 térfogatú négyzetes oszlop alakú csomagot az ábrán látható módon kötöttünk át. Hogyan válasszuk meg a csomag méreteit, hogy az átkötő zsineg hossza a lehető legrövidebb legyen? (*Megoldás*: $a = b = 2{,}237$ dm.)



9.20 Milyen magasan kell a lámpát az oszlopra felerősíteni, hogy az úttestnek az oszlop talppontjától „*d*" távolságra lévő pontjában a megvilágítás erőssége maximális legyen? A megvilágítás erőssége (*I*) a következő összefüggésből kapható meg: $I = c \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2}$, ahol *c* a fényforrás fényerejétől függő állandó. (*Megoldás*: $I(h) = c \cdot \frac{h}{\sqrt{\left(h^2 + d^2\right)^3}}$ függvény maximumát a $h = \frac{d\sqrt{2}}{2} = 0{,}7d$ értékénél veszi fel.)



9.21 Egy 30 cm átmérőjű forgáshenger alakú fatörzsből téglalap keresztmetszetű gerendát faragnak. Mekkorák a téglalap oldalai, ha

a) a keresztmetszet területe maximális
b) a téglalap oldalhosszúságainak négyzetösszege maximális;
c) a téglalap kerülete maximális;
d) a téglalap átlóhosszúsága maximális?

(*Megoldás*: $15\sqrt{2}$; állandó érték; $15\sqrt{2}$; állandó érték.)

10. Feladat

Határozza meg a következő kétváltozós függvények első és a második parciális differenciálhányadosait!

10.1. $f(x;\ y) = x^2 + 4y^2$;

10.2. $f(x;\ y) = 2x - xy^2 + y^2$;

10.1. $f(x;\ y) = 4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$;

10.2. $f(x;\ y) = 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 8y^2 + 7xy + 6x$;

10.3. $f(x;\ y) = \frac{x^2}{y}$;

10.4. $f(x;\ y) = y\cos x + x\cos y$;

10.5. $f(x;\ y) = xe^y + ye^x$;

10.6. $f(x;\ y) = \sin\left(x^2 + y^2\right)$;

10.7. $f(x;\ y)=\ln x^{y}$.

Megoldás:

10.5. $f'_x(x;\ y)=ye^{x}+e^{y}$, $f'_y(x;\ y)=e^{x}+e^{y}$, $f''_{xx}(x;\ y)=ye^{x}$; $f''_{yy}(x;\ y)=xe^{y}$ és $f''_{xy}(x;\ y)=e^{x}+e^{y}$.

10.6. $f'_x(x;\ y)=2x\cos(x^2+y^2)$, $f'_y(x;\ y)=2y\cos(x^2+y^2)$,
$f''_{xx}(x;\ y)=2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$;
$f''_{yy}(x;\ y)=2\cos(x^2+y^2)-4y^2\sin(x^2+y^2)$ és $f''_{xy}(x;\ y)=-4xy\sin(x^2+y^2)$.

10.7. $f'_x(x;\ y)=\frac{y}{x}$, $f'_y(x;\ y)=\ln x$, $f''_{xx}(x;\ y)=-\frac{y}{x^2}$, $f''_{yy}(x;\ y)=0$ és $f''_{xy}(x;\ y)=\frac{1}{x}$.

11. Feladat

Keresse meg az alábbi függvények helyi szélsőértékeit!

11.1. $f(x;\ y)=2+2x+4y-x^3-y^3$;

(*Megoldás*: $P_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$-ban helyi maximum, $P_2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$-ban helyi minimum.)

11.2. $f(x;\ y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$;

(*Megoldás*: $P(5;\ 2)$-ban helyi minimum.)

11.3. $f(x;\ y)=x^2y^3(6-x-y)$;

(*Megoldás*: $P(2;\ 3)$-ban helyi maximum.)

11.4. $f(x;\ y)=x^2-2xy+2y^2$;

11.5. $f(x;\ y)=x^3-3x^2+2xy+y^2-4$;

11.6. $f(x;\ y)=e^{xy}$;

11.7. $f(x;\ y)=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Függvénydiszkusszió (kidolgozott feladatok)

<u>*Példa:*</u> Ábrázolja az $f(x) = x^2 - x^4$ függvényt!

a) ***Értelmezési tartomány***: $x \in \mathbf{R}$.

b) ***Zérushely***: $x^2 - x^4 = 0$, melyből $x = \pm 1$; 0.

c) ***Folytonosság***: mivel a függvény mindenütt folytonos függvények különbsége, ezért a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

d) ***Paritás***:
$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4$, azaz a függvény páros.

e) ***Szélsőérték (menete):***
Szélsőérték olyan x_0 pontban lehet, ahol $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ az x_0-ban előjelet vált.

$f'(x) = 2x - 4x^3$.

$f'(x) = 0$, ha $x = 0$, vagy $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (lehetséges lokális szélsőérték helyek).

$f''(x) = 2 - 12x^2$.
$f''(0) = 2 > 0$, azaz $x = 0$-ben helyi minimuma van; értéke: $f(0) = 0$.
$f''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 < 0$, azaz $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$-ben helyi maximuma van; értéke: $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}25$.

(*Megjegyzés*: A táblázatot a (lehetséges) szélsőérték helyek és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f' a függvény menetét mutatja.)

	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$x = 0$	$\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f'	+	0	-	0	+	0	-
f	↗	*max.*	↘	*min.*	↗	*max.*	↘

f) ***Inflexiós pont (görbülete)***:
(*Megjegyzés*: Inflexiós pont olyan x_0 pontban lehet, ahol $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$. Ha a harmadik derivált kiszámítása bonyolult, akkor meg kell vizsgálni, hogy a kapott pont két oldalán $f''(x)$ előjelet vált-e. Ha igen, az adott pont inflexiós pont.)

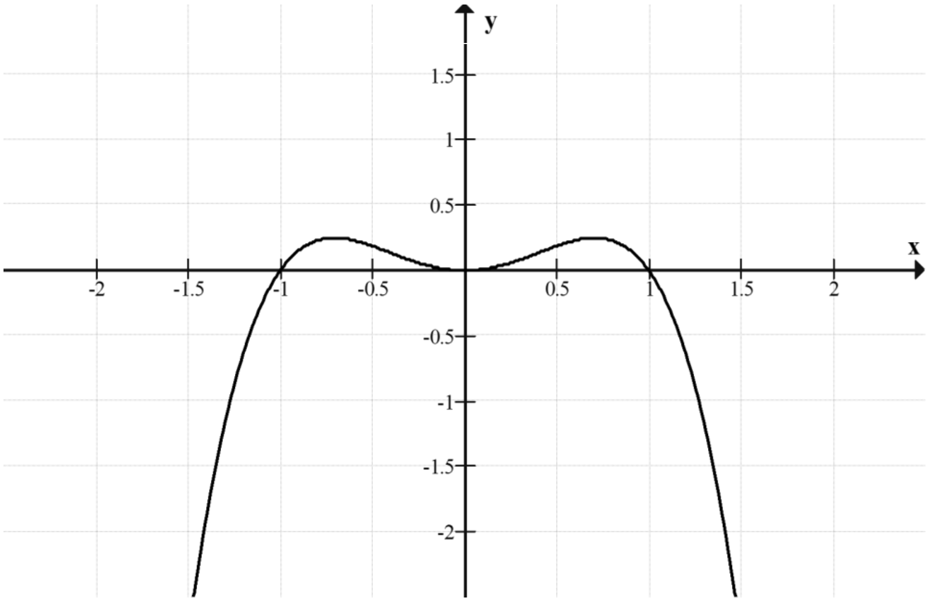
$f''(x) = 0$, ha $2 - 12x^2 = 0$, melyből $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ (lehetséges inflexiós pont).
$f'''(x) = -24x$.
$f'''\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 9{,}8 \neq 0$, $f'''\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -9{,}8 \neq 0$, azaz $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ inflexiós pontok, és $f\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 0{,}14$.

(*Megjegyzés*: A táblázatot az inflexiós pontok és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f'' a függvény görbületét mutatja.)

	$x<-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$x=-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$x=\frac{\sqrt{6}}{6}$	$x>\frac{\sqrt{6}}{6}$
f''	-	0	+	0	-
f	*kv*	*infl.*	*kx*	*infl.*	*kv*

g) ***Határértékek***:
(*Megjegyzés*: A határértékeket vizsgálni kell a $\pm\infty$-ben és az értelmezési tartomány határain.)
$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x^4\right)=-\infty$.

h) ***A függvény grafikonja***:
(*Megjegyzés*: Célszerű a tengelymetszeteket megadni és néhány helyen kiszámítani a függvény értékét. *Pl.* $f(\pm 2)=-12$, $f(\pm 0{,}5)=0{,}19$, az *x* és az *y* tengelyt is az origóban metszi.)



i) ***Értékkészlet***: $f(x)\le 0{,}25$.

Példa: Ábrázolja az $f(x)=\frac{10x}{4-x^2}$ függvényt!

a) ***Értelmezési tartomány***: $x\in\mathbf{R}\setminus\{-2;\ 2\}$

b) ***Zérushely***: $\frac{10x}{4-x^2}=0$, melyből $x=0$.

c) ***Folytonosság***: mivel a függvény mindenütt folytonos függvények hányadosa, ezért a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

d) ***Paritás***:

$$f(-x)=\frac{10(-x)}{4-(-x)^2}=-\frac{10x}{4-x^2}=-f(x)$$, azaz a függvény páratlan.

e) ***Szélsőérték (menete):***

Szélsőérték olyan x_0 pontban lehet, ahol $f'(x_0)=0$ és $f'(x)$ az x_0-ban előjelet vált.

$$f'(x)=\frac{10\left(4-x^2\right)-10x(-2x)}{\left(4-x^2\right)^2}=\frac{10x^2+40}{\left(4-x^2\right)^2}.$$

$f'(x)=0$, sehol nem teljesül, ezért a függvénynek nincs szélsőértéke.

(*Megjegyzés*: A táblázatot a lehetséges szélsőérték helyek és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f' a függvény menetét mutatja.)

	$x<-2$	(-2; 2)	$x>2$
f'	+	+	+
f	↗	↗	↗

f) ***Inflexiós pont (görbülete)***:

(*Megjegyzés*: Inflexiós pont olyan x_0 pontban lehet, ahol $f''(x_0)=0$ és $f'''(x_0)\neq 0$. Ha a harmadik derivált kiszámítása bonyolult, akkor meg kell vizsgálni, hogy a kapott pont két oldalán $f''(x)$ előjelet vált-e. Ha igen, az adott pont inflexiós pont.)

$$f''(x)=\frac{20x\left(4-x^2\right)^2-\left(10x^2+40\right)2\left(4-x^2\right)(-2x)}{\left(4-x^2\right)^4}=\frac{20x^3+240x}{\left(4-x^2\right)^3}.$$

$f''(x)=0$, ha $20x^3+240x=0$, melyből $x=0$ (lehetséges inflexiós pont).

$f'''(x)$ kiszámítása helyett vizsgáljuk $f''(x)$ előjelváltását:

Pl. helyettesítsünk $x=-1$-et és $x=1$-et $f''(x)$-be, azaz $f''(-1)=-\frac{260}{27}$ és $f''(1)=\frac{260}{27}$, így $f''(x)$ előjelet vált, $x=0$ inflexiós pont lesz. A pont értéke: $f(0)=0$

(*Megjegyzés*: A táblázatot az inflexiós pontok és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f'' a függvény görbületét mutatja.)

	$x<-2$	(-2; 0)	$x=0$	(0; 2)	$x>2$
f''	+	-	0	+	-
f	*kx*	*kv*	*infl.*	*kx*	*kv*

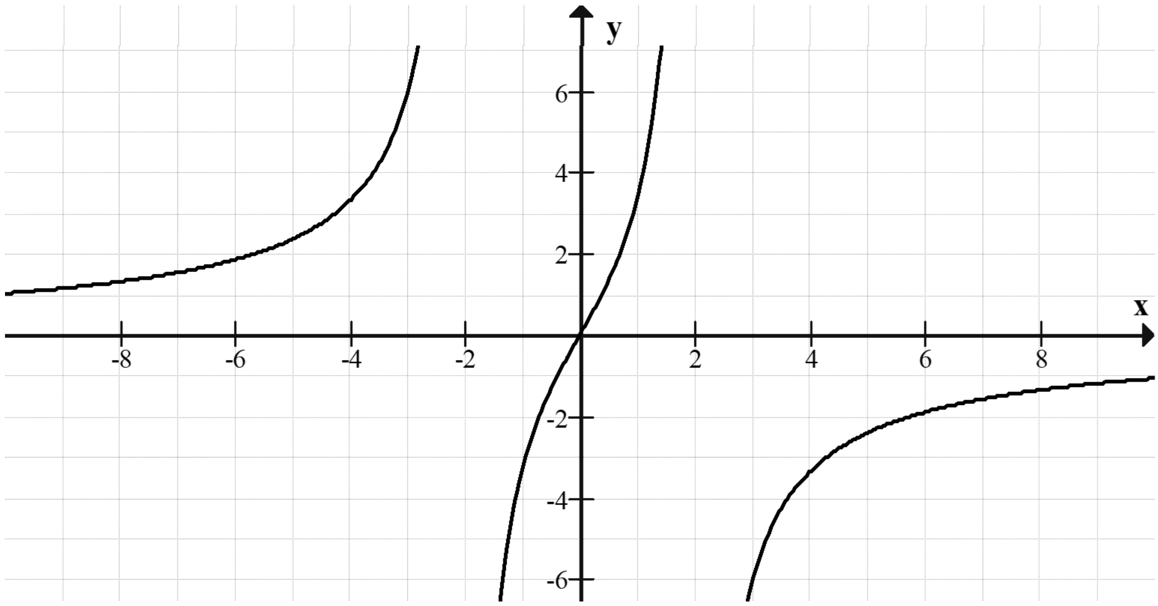
g) ***Határértékek***:

(*Megjegyzés*: A határértékeket vizsgálni kell a $\pm\infty$-ben és az értelmezési tartomány határain.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x}{4-x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{10x}{4-x^2}=\infty \text{ és } \lim_{x\to -2+0}\frac{10x}{4-x^2}=-\infty \text{, illetve } \lim_{x\to 2-0}\frac{10x}{4-x^2}=\infty \text{ és } \lim_{x\to 2+0}\frac{10x}{4-x^2}=-\infty .$$

h) ***A függvény grafikonja***:
(*Megjegyzés*: Célszerű a tengelymetszeteket megadni és néhány helyen kiszámítani a függvény értékét. *Pl.* $f(8)=-f(-8)=-1{,}33$, $f(4)=-f(-4)=-3{,}33$, az x és az y tengelyt is az origóban metszi.)



i) ***Értékkészlet***: $f(x)\in\mathbf{R}$.

<u>*Példa:*</u> Ábrázolja az $f(x)=\dfrac{10x}{1+x^2}$ függvényt!

a) ***Értelmezési tartomány***: $x\in\mathbf{R}$.

b) ***Zérushely***: $\dfrac{10x}{1+x^2}=0$, melyből $x=0$.

c) ***Folytonosság***: mivel a függvény mindenütt folytonos függvények hányadosa, ezért a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

d) ***Paritás***:
$f(-x)=\dfrac{10(-x)}{1+(-x)^2}=-\dfrac{10x}{1+x^2}=-f(x)$, tehát a függvény páratlan.

e) ***Szélsőérték (menete)***:
Szélsőérték olyan x_0 pontban lehet, ahol $f'(x_0)=0$ és $f'(x)$ az x_0-ban előjelet vált.

$$f'(x)=\frac{10(x^2+1)-10x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{10(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$f'(x)=0$, ha $1-x^2=0$, azaz $x=\pm 1$ (lehetséges lokális szélsőérték helyek).

$$f''(x)=10\frac{-2(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{20x(x^2-3)}{(1+x^2)^3},$$

$f''(1)=-5<0$, azaz $x=1$-ben helyi maximuma van; értéke: $f(1)=5$.
$f''(-1)=5>0$, azaz $x=-1$-ben helyi minimuma van; értéke: $f(-1)=-5$.

(*Megjegyzés*: A táblázatot a lehetséges szélsőérték helyek és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f' a függvény menetét mutatja.)

	$x<-1$	$x=-1$	(-1; 1)	$x=1$	$x>1$
f'	-	0	+	0	-
f	↘	*min.*	↗	*max.*	↘

f) ***Inflexiós pont (görbülete)***:
(*Megjegyzés*: Inflexiós pont olyan x_0 pontban lehet, ahol $f''(x_0)=0$ és $f'''(x_0)\neq 0$. Ha a harmadik derivált kiszámítása bonyolult, akkor meg kell vizsgálni, hogy a kapott pontok két oldalán $f''(x_0)$ előjelet vált-e. Ha igen, az adott pont inflexiós pont.)

$f''(x)=0$, ha $20x(x^2-3)=0$, azaz $x=0$ vagy $x=\pm\sqrt{3}$ (lehetséges inflexiós pontok).

$f'''(x)$ kiszámítása helyett vizsgáljuk $f''(x)$ előjelváltását:

Pl. $x=0$ vizsgálatánál helyettesítsünk $x=-1$-et és $x=1$-et $f''(x)$-be, azaz $f''(-1)=-5$ és $f''(1)=5$, így $f''(x)$ előjelet vált, $x=0$ inflexiós pont lesz. Hasonlóan mutatható meg, hogy a többi pont is inflexiós pont. A pontok értékei: $f(-\sqrt{3})=-4{,}33$; $f(0)=0$ és $f(\sqrt{3})=4{,}33$.

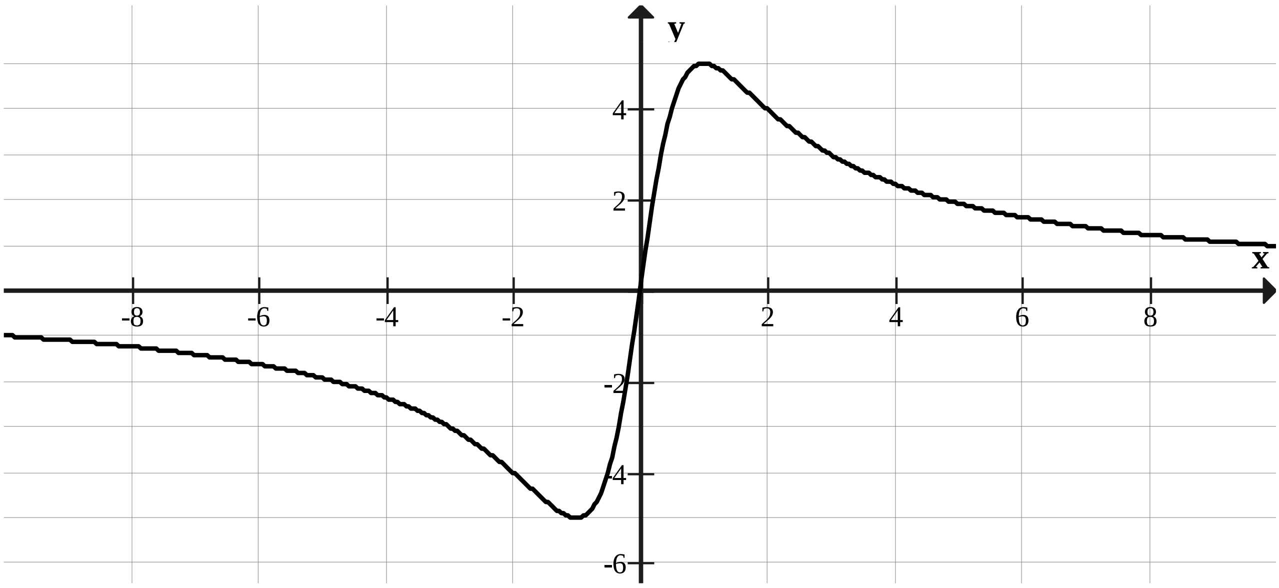
(*Megjegyzés*: A táblázatot az inflexiós pontok és az értelmezési tartományok határai szerint osztjuk fel intervallumokra. f'' a függvény görbületét.)

	$x<-\sqrt{3}$	$x=-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	$x=0$	$(0;\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
f''	-	0	+	0	-	0	+
f	*kv*	*infl.*	*kx*	*infl.*	*kv*	*infl.*	*kx*

g) ***Határértékek***:
(*Megjegyzés*: A határértékeket vizsgálni kell a $\pm\infty$-ben és az értelmezési tartomány határain.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10x}{1+x^2}=0.$$

h) ***A függvény grafikonja***:
(*Megjegyzés*: Célszerű a tengelymetszeteket megadni és néhány helyen kiszámítani a függvény értékét. Pl. $f(3)=-f(-3)=3$; $f(5)=-f(-5)=1{,}92$; $f(10)=-f(-10)=0{,}99$; az *x* és az *y* tengelyt is az origóban metszi.)



i) ***Értékkészlet***: $-5 \leq f(x) \leq 5$.

<u>*Feladatok:*</u>

Ábrázolja az alábbi függvényeket!

a) $f(x)=x^3+x^2-x-1$,

b) $f(x)=x^3-3x^2+2x$,

c) $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$,

d) $f(x)=x^3-5x^2$,

e) $f(x)=2x^2-x^4$,

f) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x$,

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$,

h) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,

i) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$,

j) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$,

k) $f(x)=\dfrac{6x}{x^3+1}$,

l) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$,

m) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$,

n) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-x$,

o) $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$,

p) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

q) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$,

r) $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$,

s) $f(x)=xe^x$,

t) $f(x)=x^2e^x$,

u) $f(x)=x^2\ln x$,

v) $f(x)=e^x\sin x, \quad x\in[0;\ 2\pi]$,

w) $f(x)=e^{-x^2}$,

x) $f(x)=x+\sin x, \quad x\in[-2\pi;\ 2\pi]$.

Megjegyzés:

A határérték ismeretében meghatározhatjuk a függvény (esetlegesen létező) asszimptotáinak egyenletét is:

a) A vízszintes asszimptota egyenlete a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ véges határérték létezésekor az $y = A$.

b) A függőleges asszimptota egyenlete az x_0 szakadási pont létezésekor az $x = x_0$.

c) A ferde asszimptota egyenlete $y = ax + b$ alakú, ahol $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ és $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - ax]$.

Példa: A teljesség igénye nélkül vázoljuk fel az $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$ függvény görbéjét!

Megoldás:

Határozzuk meg a függvény asszimptotáit:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 1} = \infty$, azaz nincs vízszintes asszimptotája.

A függvénynek az $x = 1$-ben szakadási helye van, így létezik a függőleges asszimptota, és egyenlete $x = 1$.

Mivel $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - 3}{x - 1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - x} = 1$, és

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 - 3}{x - 1} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3 - x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3}{x - 1} = 1$$ véges értékek léteznek, ezért a ferde asszimptota egyenlete $y = x + 1$.

A fentiek alapján egy-egy érték kiszámítása után felvázolhatjuk a függvény görbéjét: