Διαγώνισμα : Φυσική Γ Λυκείου

ΕΝΟΤΗΤΑ: Στερεό - Στροφορμή

Θέμα Α

Α1) Σε ένα τροχό που κυλίεται τα σημεία που έχουν, λόγω της στροφικής κίνησης, ταχύτητα μέτρου ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας είναι:

i. όλα τα σημεία.
ii. τα σημεία της κατακόρυφης διαμέτρου.
iii. τα σημεία της οριζόντιας διαμέτρου.
iv. τα σημεία της περιφέρειας.

Α2) Για να διατηρεί ένα σώμα την περιστροφική του κατάσταση σταθερή πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να:

i. είναι σταθερό και διάφορο του μηδενός.
ii. είναι μηδέν.
iii. αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.
iv. μειώνεται με σταθερό ρυθμό.

Α3) Να επιλέξετε ποιά/ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή/ές.

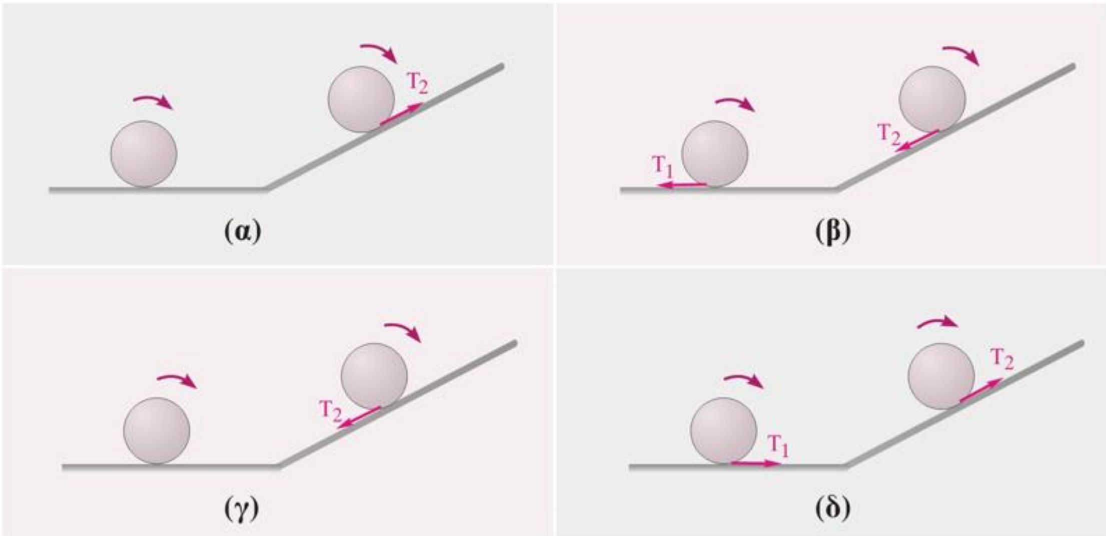
i. Ένας τροχός που κυλίεται εκτελεί σύνθετη κίνηση.
ii. Σε ένα ρολόι με δείκτες, η στροφορμή του ωροδείκτη είναι ομόρροπη με τη στροφορμή του λεπτοδείκτη.
iii. Ένα ελεύθερο στερεό μπορεί να περιστραφεί υπό την επίδραση του βάρους του.
iv. Η ισχύς μιας δύναμης σε μια στροφική κίνηση είναι ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα.
v. Ένα ελεύθερο στερεό στο οποίο ασκείται ζεύγος δυνάμεων εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Α4) Μια ακίνητη ομογενής σφαίρα και ένας ακίνητος ομογενής σφαιρικός φλοιός, ίσης μάζας και ακτίνας, μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερούς παράλληλους μεταξύ τους άξονες. Τη χρονική στιγμή , αρχίζουν να περιστρέφονται με την ίδια φορά και η στροφορμή μεταβάλλεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό. Κάθε χρονική στιγμή τα σώματα έχουν ίσες:

i. γωνιακές επιταχύνσεις.

ii. **στροφορμές.**
iii. γωνιακές ταχύτητες.
iv. ροπές αδράνειας.

Α5) Ένας κύλινδρος κυλιόμενος σε οριζόντιο επίπεδο, συναντάει πλάγιο επίπεδο στο οποίο ανέρχεται επιβραδυνόμενος μέχρι να σταματήσει. Τα διανύσματα της στατικής τριβής στο οριζόντιο και στο πλάγιο επίπεδο είναι σωστά σχεδιασμένα στο σχήμα:



(σωστό το α)

Θέμα Β

Β1) Μια ρόδα αυτοκινήτου ακτίνας R κυλίεται με το κέντρο μάζας της να έχει σταθερή ταχύτητα u. Ένα μικρό καρφί μάζας m είναι καρφωμένο στην εξωτερική επιφάνεια της ρόδας. Αν θεωρήσουμε τις διαστάσεις του καρφιού αμελητέες, τότε η μεταβολή της ορμής του καρφιού, μεταξύ κατώτερης και ανώτερης θέσης.

i. είναι mu.
ii. είναι μηδέν.
iii. έχει μέτρο ίσο με 2mu.

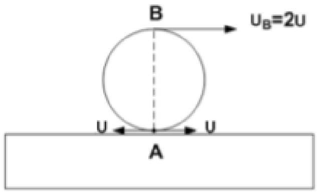
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

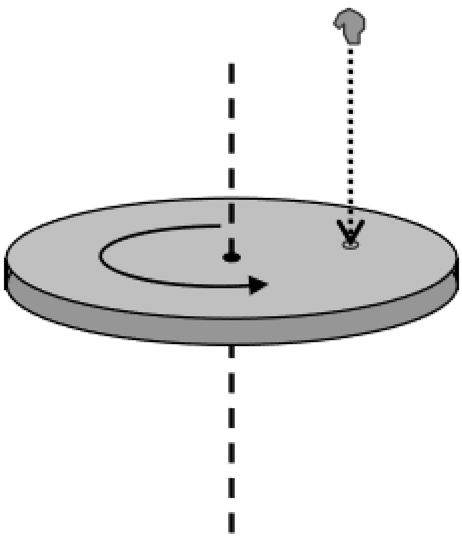
Σωστή απάντηση είναι η γ.

Επειδή η ρόδα κυλίεται η ταχύτητα του καρφιού όταν περνά από την κατώτερη θέση (όταν είναι σε επαφή με το έδαφος) είναι μηδέν, ενώ όταν το καρφί διέρχεται από το ψηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ταχύτητα 2υ. Έτσι, το καρφί στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του έχει ορμή μέτρου 0 και στο ψηλότερο σημείο έχει ορμή μέτρου $p = 2m\upsilon$.

Συνεπώς, η μεταβολή της ορμής του μεταξύ των δύο παραπάνω θέσεων θα έχει μέτρο $|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi}| = |2m\upsilon - 0| \Rightarrow |\Delta\vec{p}| = 2m\upsilon$ και οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή θα έχει ίδια κατεύθυνση με αυτήν της ταχύτητας που έχει στο ψηλότερο σημείο.



Β2) Ο δίσκος του σχήματος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που περνά από το κέντρο του. Από μικρό ύψος αφήνουμε ένα κομμάτι πλαστελίνης να πέσει και να κολλήσει πάνω στο δίσκο. Το συσσωμάτωμα δίσκου – πλαστελίνης που προκύπτει περιστρέφεται σε σχέση με το δίσκο



i. πιο αργά.
ii. με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.
iii. πιο γρήγορα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

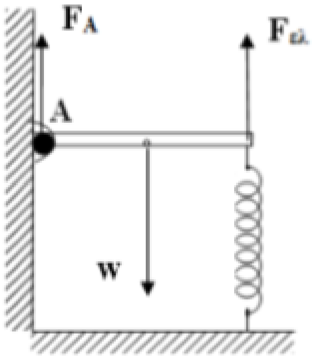
Η συνολική εξωτερική ροπή στο σύστημα δίσκος - πλαστελίνη είναι μηδέν, επομένως η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow I_{αρχ} \cdot ω_{αρχ} = I_{τελ} \cdot ω_{τελ} \Rightarrow ω_{τελ} = \frac{I_{αρχ} \cdot ω_{αρχ}}{I_{τελ}}$$

Επειδή η επικόλληση της πλαστελίνης αυξάνει τη ροπή αδράνειας, θα ισχύει

$I_{τελ} > I_{αρχ}$, **επομένως** $ω_{τελ} < ω_{αρχ}$.

Β3) Μία ομογενής ράβδος μήκους και βάρους w, είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ελατήριο είναι κατακόρυφο. Το σύστημα ισορροπεί με τη ράβδο σε οριζόντια θέση. Η δύναμη που ασκείται στη ράβδο από την άρθρωση και η δύναμη του ελατηρίου συνδέονται με τη σχέση



i. $F_{ελ}=F_A$
ii. $F_{ελ}=3F_A$
iii. $F_{ελ}=2F_A$

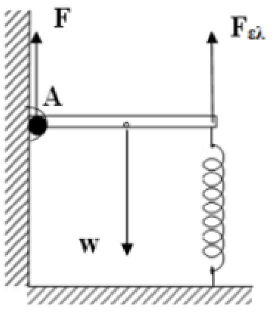
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α) .

Το σύστημα ισορροπεί, άρα θα ισχύει $\Sigma F = 0$ και $\Sigma\tau_{(A)} = 0$.

Η πρώτη σχέση δίνει

$F_A + F_{\varepsilon\lambda} = w$ (1)



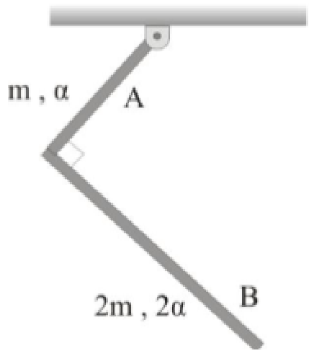
και η δεύτερη σχέση ισορροπίας δίνει

$$\tau_{F_{\varepsilon\lambda}(A)} + \tau_{B(A)} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} \cdot \ell - w \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = \frac{w}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) έχουμε

$$F_A + \frac{w}{2} = w \Rightarrow F_A = \frac{w}{2}$$, δηλαδή $F_{\varepsilon\lambda} = F_A$.

Β4) Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μάζας m και μήκους α ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{m\alpha^2}{12}$. Δύο ομογενείς ράβδοι είναι φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό και είναι ενωμένες ακλόνητα στην μια τους άκρη ώστε να σχηματίζουν ορθή γωνία. Η ράβδος Α έχει μάζα m και μήκος α. Η ράβδος Β έχει μάζα 2m και μήκος 2α. Το σύστημα των ράβδων κρέμεται από μια άρθρωση που βρίσκεται σε οροφή. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση είναι

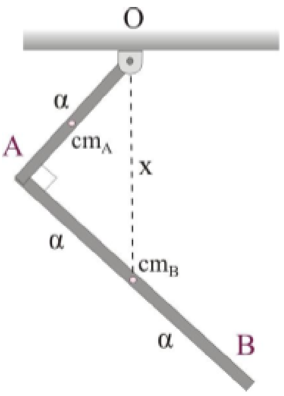


i. $4m\alpha^2$
ii. $5m\alpha^2$
iii. $6m\alpha^2$

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Η ροπή αδράνειας του συστήματος των ράβδων ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από την άρθρωση O δίνεται από τη σχέση



$$I_O = I_O^A + I_O^B \quad , \quad (1)$$

Μας δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μάζας m και μήκους α ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στο επίπεδό της δίνεται από τη σχέση $I=m\alpha^2/12$. Επομένως θα εφαρμόσουμε το θεώρημα παραλλήλων αξόνων για να βρούμε τη ροπή αδράνειας κάθε ράβδου ως προς το O.

Εύρεση της ροπής αδράνειας της ράβδου A ως προς το O.

$$I_O^A = I_{cm} + m\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{m\alpha^2}{12} + \frac{m\alpha^2}{4} \quad ή \quad I_O^A = \frac{m\alpha^2}{3}$$

Εύρεση της ροπής αδράνειας της ράβδου B ως προς το O

$$I_O^B = I_{cm} + 2m x^2 \quad \text{όπου} \quad x^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$$

Επομένως

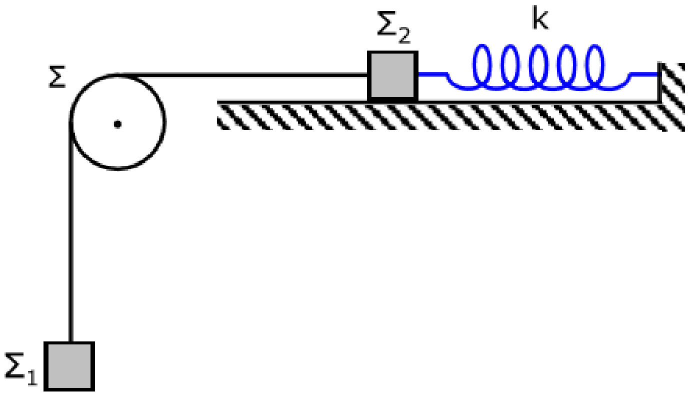
$$I_O^B = I_{cm} + 2m\,2\alpha^2 = \frac{2m(2\alpha)^2}{12} + 4m\alpha^2 \quad ή \quad I_O^B = \frac{56m\alpha^2}{12}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε

$$I_O = I_O^A + I_O^B = \frac{m\alpha^2}{3} + \frac{56m\alpha^2}{12} = \frac{60m\alpha^2}{12} \quad ή \quad I_O = 5m\alpha^2$$

Θέμα Γ

Η τροχαλία Σ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της, είναι $I=0.01kgm^2$ και η ακτίνα της είναι R= 0.1m. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Στη μία άκρη του νήματος έχει αναρτηθεί το σώμα Σ1. Στην άλλη άκρη του νήματος έχει προσδεθεί το σώμα Σ2, το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m , στο οποίο έχει προσδεθεί στο ένα άκρο του το σώμα Σ2, ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο στήριγμα. Τα σώματα Σ1 και Σ2 έχουν μάζα m= 1kg το καθένα.



1. Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $F_{ελ}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ2 , όταν το σύστημα ισορροπεί.
2. Τη χρονική στιγμή t_0=0 κόβουμε το νήμα στο σημείο που συνδέει το σώμα Σ2 με την τροχαλία, με αποτέλεσμα η τροχαλία να ξεκινήσει να περιστρέφεται και το σύστημα ελατήριο – Σ2 να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:
    a. Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_γ$ της τροχαλίας.
    b. Πόσο έχει κατέβει το σώμα Σ1 από τη χρονική στιγμή t_0=0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο – Σ2.
    c. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας dK/dt τη χρονική στιγμή t_1 όπως αυτή καθορίζεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίνεται g=10 m/s^2

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και στην τροχαλία:

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο $Σ_1$:

η δύναμη $\vec{w}$ είναι το βάρος του σώματος,

η δύναμη $\vec{T}_1$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα.

Επίσης φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο $Σ_2$:

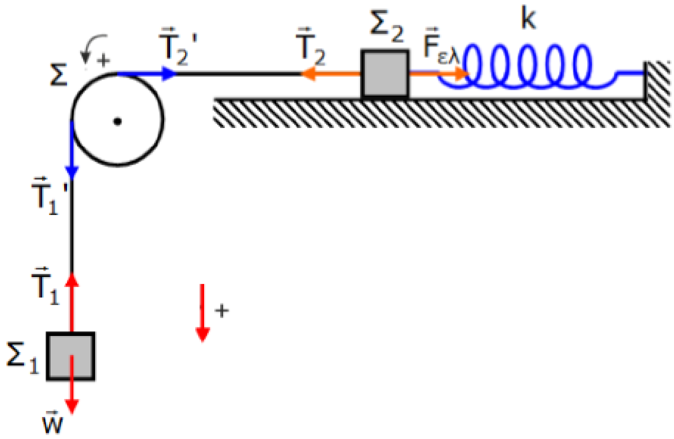
η δύναμη $\vec{F}_{ελ}$ ασκείται από το ελατήριο,

η δύναμη $\vec{T}_2$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.

Στην τροχαλία Σ έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούν ροπή:

η δύναμη $\vec{T}_1{}'$ ασκείται από το κατακόρυφο νήμα,

η δύναμη $\vec{T}_2{}'$ ασκείται από το οριζόντιο νήμα.



Για την ισορροπία του $Σ_1$ έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_1=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_1=w \quad \Rightarrow \quad T_1=mg \quad \Rightarrow \quad T_1=10\,N$$

Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_1{}'=T_1=10\,N$$

Για την ισορροπία της τροχαλίας Σ έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad T_2{}'R=T_1{}'R \quad \Rightarrow \quad T_2{}'=T_1{}'=10\,N$$

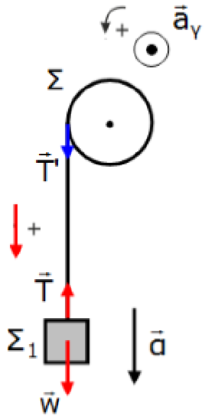
Επειδή το νήμα είναι αβαρές ισχύει:

$$T_2{}'=T_2=10\,N$$

Για την ισορροπία του Σ_2 έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}_2=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad F_{\varepsilon\lambda}=T_2 \quad \Rightarrow \quad F_{\varepsilon\lambda}=10\,N$$

Β1) Μόλις κόψουμε το νήμα, η τροχαλία θα ξεκινήσει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ και το Σ_1 να κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_1 και η δύναμη που ασκεί ροπή στην τροχαλία.



Για τη μεταφορική κίνηση του Σ_1 ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma F_1=m\alpha \quad \Rightarrow \quad w-T=m\alpha \quad \Rightarrow \quad T=mg-m\alpha \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας Σ ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$\Sigma\tau=Ia_\gamma \quad \Rightarrow \quad T'R=Ia_\gamma \quad \Rightarrow \quad TR=Ia_\gamma$$

και με αντικατάσταση της T από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$(mg - m\alpha)R = Ia_{\gamma} \quad \Rightarrow mgR - mR\alpha = Ia_{\gamma} \quad (2)$$

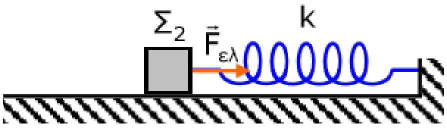
Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, η επιτρόχια επιτάχυνση $a_{\gamma}R$ των σημείων της περιφέρειάς της είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση α του Σ_1: $\alpha = a_{\gamma}R$.

Με αντικατάσταση στην (2) έχουμε:

$$mgR - mR\alpha = Ia_{\gamma} \quad \Rightarrow \quad mgR - mR^2 a_{\gamma} = Ia_{\gamma} \quad \Rightarrow \quad a_{\gamma} = \frac{mgR}{I + mR^2} \quad \Rightarrow$$

$$a_{\gamma} = \frac{1kg \cdot 10m/s^2 \cdot 0{,}1m}{0{,}01kgm^2 + 1kg(0{,}1m)^2} \quad \Rightarrow \quad a_{\gamma} = 50\,\frac{rad}{s^2}$$

Β2) Μόλις κόψουμε το νήμα, το Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100N/m}{1kg}} \Rightarrow \quad \omega = 10\,\frac{rad}{s}$.



$$T \cdot 0{,}1m = 0{,}01kgm^2 \cdot 50\frac{rad}{s^2} \quad \Rightarrow \quad T = T' = 5\,N.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) παίρνουμε

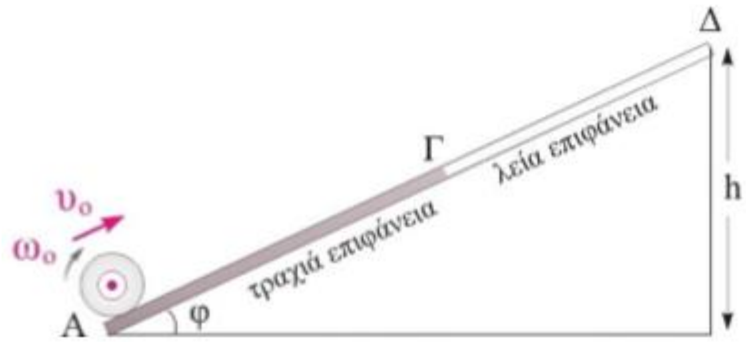
$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}01kgm^2 \cdot (10\frac{rad}{s})^2 = 5N \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = 0{,}1\,m$$

Β3) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 δίνεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega$. Με αντικατάσταση, έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = T' \cdot R \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = 5N \cdot 0{,}1m \cdot 10\frac{rad}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = 5\,\frac{J}{s}$$

Θέμα Δ

Το πλάγιο επίπεδο του σχήματος έχει ύψος h και γωνία κλίσης φ, με συνφ=0,8 και ημφ=0,6. Το πλάγιο επίπεδο από τη βάση του, σημείο Α , μέχρι το σημείο Γ παρουσιάζει τριβή, ενώ το υπόλοιπο τμήμα, από το σημείο Γ μέχρι την κορυφή του, Δ, είναι λείο. Ένας δίσκος ακτίνας r και μάζας m, που κυλίεται φθάνει τη χρονική στιγμή t=0, στη βάση του πλάγιου επιπέδου, σημείο Α, με ταχύτητα κέντρου μάζας u_0=5m/s και συνεχίζει κυλιόμενος να ανέρχεται στο πλάγιο επίπεδο. Ο δίσκος διέρχεται από το σημείο Γ τη χρονική στιγμή t_1=0,5s και φθάνει στο σημείο Δ με μηδενική ταχύτητα.



Να υπολογίσετε:

1. την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου στην τραχιά επιφάνεια καθώς και τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ δίσκου και επιπέδου, ώστε ο δίσκος να ανέρχεται κυλιόμενος χωρίς να ολισθήσει.
2. το ύψος h του πλάγιου επιπέδου.
3. τη χρονική στιγμή t_3 που η μεταφορική κινητική ενέργεια του δίσκου γίνεται μισή από τη στροφική του κατά την άνοδο.
4. Να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες το λόγο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου προς την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στην κορυφή του επιπέδου.

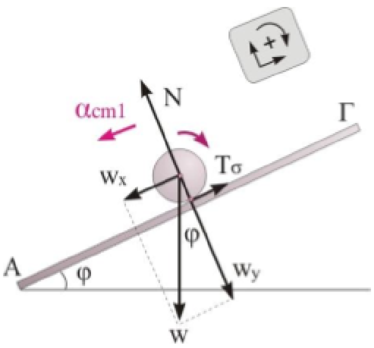
Δίνονται: g=10 m/s^2 και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}\, m\, r^2$.

Λύση

Α) Ο δίσκος κάνει σύνθετη κίνηση, με την επίδραση του βάρους και της στατικής τριβής T_σ. Για την μεταφορική του κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_X = m\alpha_{cm,1} \Rightarrow T_\sigma - w_x = m\alpha_{cm,1} \Rightarrow$$
$$T_\sigma - mg\cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{cm,1} \qquad (1)$$

Στη στροφική κίνηση η μόνη δύναμη που έχει ροπή είναι η στατική τριβή, οπότε ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει



$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow -T_\sigma R = I\alpha_\gamma \Rightarrow T_\sigma R = -\frac{1}{2}mR^2\alpha_\gamma \Rightarrow T_\sigma = -\frac{1}{2}mR\alpha_\gamma \qquad (2)$$

Επειδή ο δίσκος ανέρχεται κυλιόμενος η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συνδέεται με τη γωνιακή του επιτάχυνση με τη σχέση

$$\alpha_{cm,1} = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της (3) γίνεται $T_\sigma = -\frac{1}{2}m\alpha_{cm,1}$ (4)

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) υπολογίζουμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου

$$-\frac{1}{2}m\alpha_{cm,1} - mg\cdot\eta\mu\varphi = m\alpha_{cm,1} \Rightarrow \alpha_{cm,1} = -\frac{2}{3}g\cdot\eta\mu\varphi \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm,1} = -\frac{2}{3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0,6 \Rightarrow \alpha_{cm,1} = -4\frac{m}{s^2}.$$

Για να ανέρχεται ο δίσκος κυλιόμενος, πρέπει η εμφανιζόμενη στατική τριβή να είναι μικρότερη από την οριακή τριβή, δηλαδή $T_\sigma \le T_{o\rho}$ (6)

Θα υπολογίσουμε τα μέτρα των T_σ και $T_{o\rho}$.

Η στατική τριβή που δέχεται ο δίσκος από το πλάγιο επίπεδο προκύπτει από τις σχέσεις (4) και (5)

$$T_\sigma = \frac{1}{3}mg\eta\mu\varphi.$$

Στον άξονα y ο δίσκος ισορροπεί, άρα

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_y = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi.$

Η οριακή τριβή δίνεται από τη σχέση:

$$T_{o\rho} = \mu_\sigma N \Rightarrow T_{o\rho} = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (6) παίρνουμε:

$$T_\sigma \le T_{o\rho} \Rightarrow \frac{1}{3}mg\eta\mu\varphi \le \mu_\sigma N \Rightarrow \frac{1}{3}mg\eta\mu\varphi \le \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\mu_\sigma \ge \frac{1}{3}\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{1}{3}\cdot\frac{0,6}{0,8} \Rightarrow \mu_\sigma \ge \frac{1}{4}.$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ δίσκου και επιπέδου, ώστε ο δίσκος να ανέρχεται κυλιόμενος (χωρίς να ολισθήσει) είναι $\mu_{\sigma,min} = \frac{1}{4}$.

Β) Η μεταφορική κίνηση του δίσκου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και οι εξισώσεις κίνησής του με σημείο αναφοράς το σημείο Α είναι:

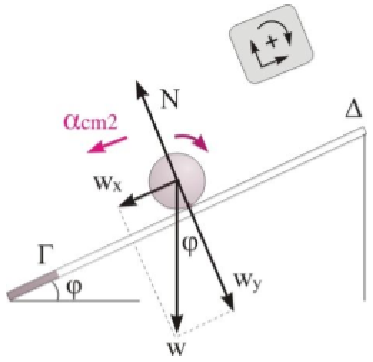
$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha_{cm,1} t \Rightarrow \upsilon_\Gamma = 5 - 4t \text{ (SI)}$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{cm,1} t^2 \Rightarrow \ x = 5t - \frac{1}{2}\cdot 4t^2 \text{ (SI)}.$$

Για τη χρονική στιγμή t_1=0,5s, που ο δίσκος διέρχεται από το σημείο Γ, οι εξισώσεις δίνουν:

$$\upsilon_\Gamma = 5\frac{m}{s} - 4\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}5s \Rightarrow \ \upsilon_\Gamma = 3\frac{m}{s}.$$

$$x_1 = 5\frac{m}{s}\cdot 0{,}5s - \frac{1}{2}\cdot 4\frac{m}{s^2}\cdot (0{,}5s)^2 \Rightarrow x_1 = 2m.$$



Ο δίσκος μετά το σημείο Γ κινείται σε λείο επίπεδο. Για την μεταφορική του κίνηση, ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής δίνει

$$\Sigma F_X = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow -w_x = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow$$
$$-mg\cdot \eta\mu\varphi = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow \alpha_{cm,2} = -g\cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$$
$$\alpha_{cm,2} = -10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}6 \Rightarrow \alpha_{cm,2} = -6\frac{m}{s^2}.$$

Η μεταφορική κίνηση του δίσκου συνεχίζει να είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και οι εξισώσεις κίνησης για την κίνησή του στο λείο επίπεδο με σημείο αναφοράς το Α είναι:

$$\upsilon = \upsilon_\Gamma + \alpha_{cm,2}(t - t_1) \Rightarrow \upsilon = 3 - 6(t - 0{,}5) \text{ (SI)}$$

(6)

$$x = x_1 + \upsilon_\Gamma (t - t_1) + \frac{1}{2}\alpha_{cm,2}(t - t_1)^2 \Rightarrow x = 2 + 3\cdot (t - 0{,}5) - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot (t - 0{,}5)^2 \text{ (SI)} \qquad (7)$$

Για τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στο σημείο Δ, με μηδενική ταχύτητα, η σχέση (6) δίνει:

$$\upsilon_\Delta = 3 - 6(t_2 - 0{,}5)\text{(SI)} \Rightarrow \ 0 = 3 - 6t_2 + 3 \ \text{(SI)} \quad \Rightarrow t_2 = 1s.$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (7) βρίσκουμε το συνολικό μήκος, d, του πλάγιου επιπέδου

$$x = 2 + 3\cdot (t - 0{,}5) - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot (t - 0{,}5)^2 \text{(SI)} \Rightarrow d = 2 + 3(1 - 0{,}5) - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot (1 - 0{,}5)^2 \text{(SI)} \Rightarrow$$

$$d = 2{,}75m$$

Το ύψος h του πλάγιου επιπέδου προκύπτει από το μήκος του

$$\eta\mu\varphi=\frac{h}{d}\Rightarrow h=d\eta\mu\varphi\Rightarrow h=2,75m\cdot 0,6\Rightarrow h=1,65m.$$

Γ) Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Α μέχρι το Γ, που είναι κύλιση, η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι συνεχώς διπλάσια από τη στροφική του, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\frac{K_{\mu}}{K_{\sigma\tau\rho}}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}{}^{2}}{\frac{1}{2}I\omega^{2}}=\frac{m\upsilon_{cm}{}^{2}}{\frac{1}{2}mr^{2}\omega^{2}}=\frac{2\upsilon_{cm}{}^{2}}{(r\omega)^{2}}\Rightarrow\frac{K_{\mu}}{K_{\sigma\tau\rho}}=2$$

.

Τη χρονική στιγμή t_1 η μεταφορική κινητική ενέργεια είναι

$K_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma}{}^{2}$ και η στροφική $K_{\sigma\tau\rho}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma}{}^{2}$ (8)

Ψάχνουμε τη χρονική στιγμή t_3 κατά την οποία η μεταφορική κινητική ενέργεια του δίσκου $K_{\mu,3}$ γίνεται η μισή από τη στροφική του, $K_{\mu,3}=\frac{K_{\sigma\tau\rho}}{2}$

Η τελευταία σχέση με τη βοήθεια της (8) δίνει:

$$K_{\mu,3}=\frac{K_{\sigma\tau\rho}}{2}\Rightarrow K_{\mu,3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma}{}^{2}}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}m\upsilon_{3}{}^{2}=\frac{1}{8}m\upsilon_{\Gamma}{}^{2}\Rightarrow\upsilon_{3}{}^{2}=\frac{1}{4}\upsilon_{\Gamma}{}^{2}\Rightarrow\upsilon_{3}=\pm\frac{\upsilon_{\Gamma}}{2}$$

Άρα, ψάχνουμε τη χρονική στιγμή t_3 κατά την οποία το σώμα έχει ταχύτητα $\upsilon_3=\frac{\upsilon_{\Gamma}}{2}=1,5\frac{m}{s}$

Με αντικατάσταση στην σχέση (6) βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_3 .

$$1,5=3-6(t_3-0,5)\ (SI)\Rightarrow 6t_3=4,5(SI)\Rightarrow t_3=0,75s.$$

Δ) Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Α μέχρι το Γ, που είναι κύλιση, το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου και το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας, είναι ίσες, άρα ο λόγος τους ισούται με τη μονάδα. Κατά την κίνηση του δίσκου από το σημείο Γ μέχρι το Δ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου μειώνεται ομαλά, ενώ η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας παραμένει σταθερή, επειδή στο λείο επίπεδο δεν υπάρχει ροπή. Η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, ίση με αυτή που είχε ο δίσκος στο σημείο Γ. Άρα

$$\frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_{\gamma\rho,\Gamma}}=\frac{\upsilon_{\Gamma}+\alpha_{cm,2}(t-t_1)}{\upsilon_{\Gamma}}=\frac{3-6(t-0,5)}{3}\ (SI)\Rightarrow\frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_{\gamma\rho,\Gamma}}=2-2t\ (SI).$$

Ο λόγος της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δίσκου προς την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας, σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 που ο δίσκος φτάνει στην κορυφή του επιπέδου είναι

$$\frac{\upsilon_{cm}}{\upsilon_{\gamma\rho,\Gamma}} = \begin{cases} 1 & \gamma\iota\alpha\ 0 \le t \le 0,5s \\ 2-2t\ (SI) & \gamma\iota\alpha\ 0,5s \le t \le 1s \end{cases}$$

Στο διπλανό διάγραμμα δείχνεται ο λόγος των ταχυτήτων σε συνάρτηση με το χρόνο.