

Περιεχόμενο:

1. Μηχανικά Συστήματα

- Διαφορικές Εξισώσεις Συστημάτων με Μηχανική Lagrange και Hamilton
- Ελατήρια και Εκκρεμή
- Διπλό Εκκρεμές
- Το πρόβλημα των Τριών Σωμάτων

2. Συστήματα με Διακριτές Εξισώσεις

- Ανάκλαση σε ταλαντευόμενο τοίχο – Επιτάχυνση Fermi
- Μπιλιάρδα
- Το βαρυτικό Μπιλιάρδο
- Ισχυρά χαοτικά συστήματα, Αυτομορφισμοί του T^2 (Η απεικόνιση της Γάτας)

3. Συστήματα με Απώλειες

- Αναγωγή συστημάτων με Μερικές Παραγώγους σε κλασικά δυναμικά συστήματα (Το σύστημα του Lorenz)
- Συστήματα Lotka-Volterra και εφαρμογές

4. Εναλλακτικές Μέθοδοι Προσομοίωσης

- Μορφοκλασματικά σύνολα (fractals)
- Δέντρα και επαναληπτικά συστήματα
- Κυβελικά αυτόματα

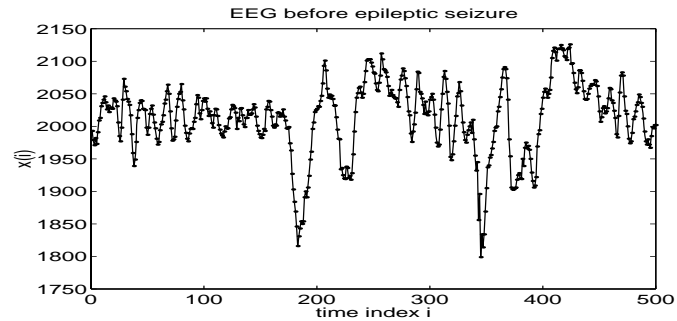
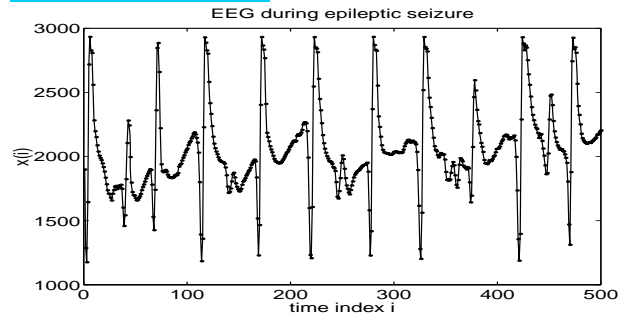
5. Ανάλυση Χαοτικών Χρονοσειρών

3. Υπολογισμός Διαστάσεων χαοτικών ελκτικών συνόλων
4. Υπολογισμός εκθετών Lyapunov
2. Ανακατασκευή χώρου των φάσεων
5. Μέθοδοι πρόβλεψης
1. Πειραματικά δεδομένα και θόρυβος

1. Γενικά για χρονοσειρές (πειραματικά δεδομένα και θόρυβος)
2. Ανακατασκευή χώρου φάσεων
3. Υπολογισμός διάστασης χαοτικών ελκυστών
4. Υπολογισμός εκθετών Lyapunov
5. Μέθοδοι πρόβλεψης

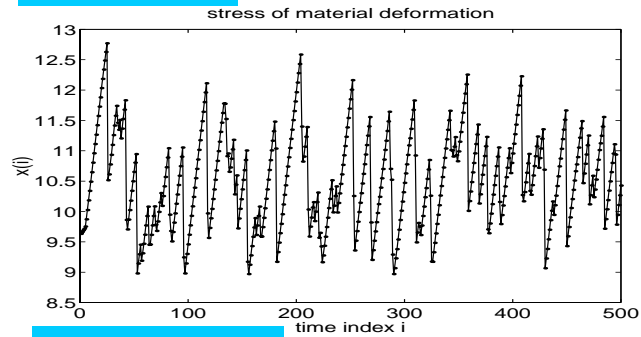
Πραγματικές χρονοσειρές

φυσιολογία

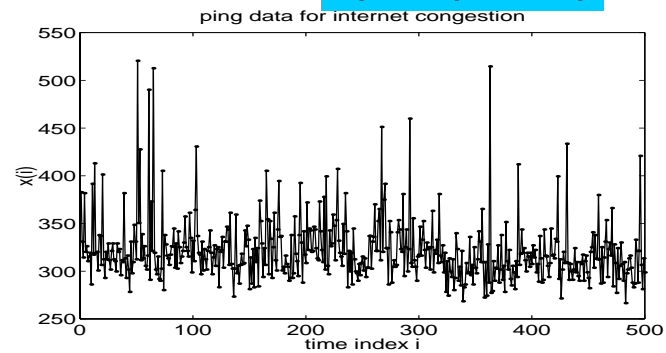


μονοδιάστατη
χρονοσειρά

μηχανική



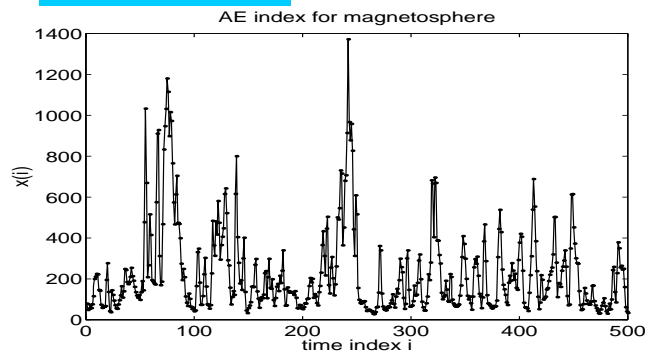
ηλεκτρονική



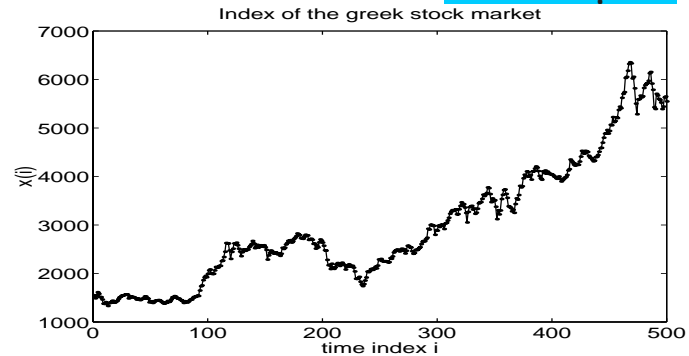
μόνο μια χρονοσειρά

περιορισμένο μήκος

γεωφυσική



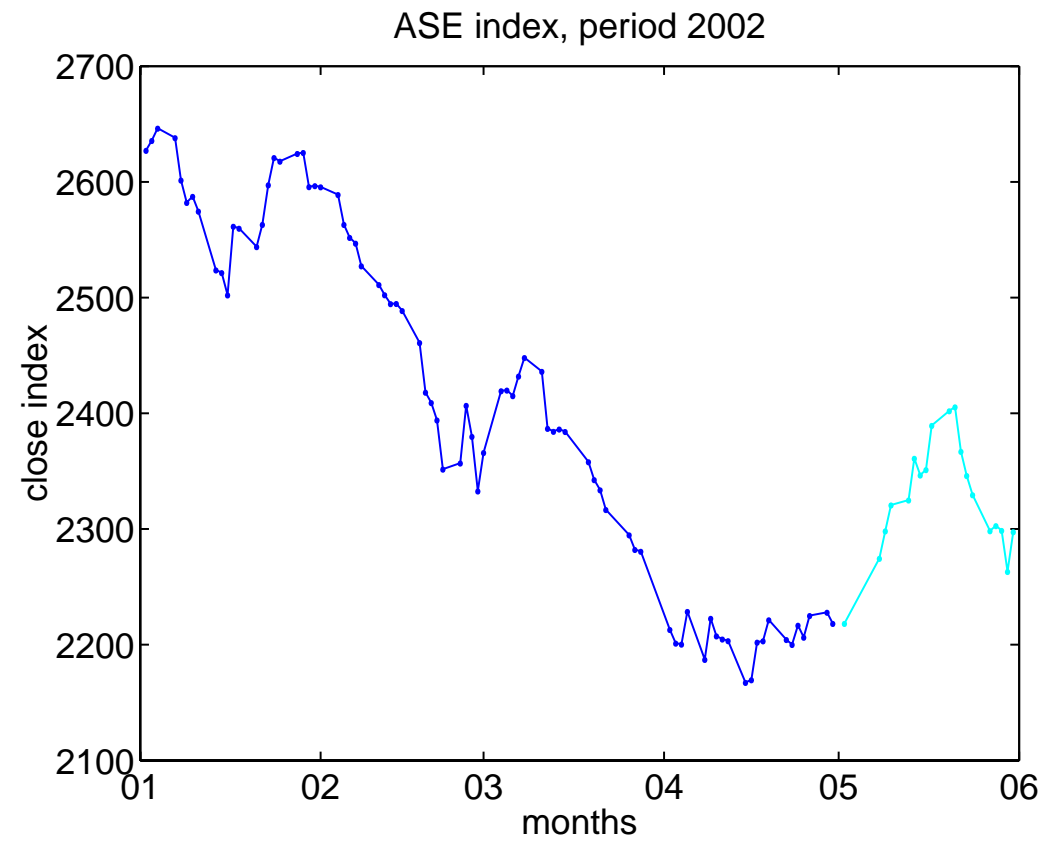
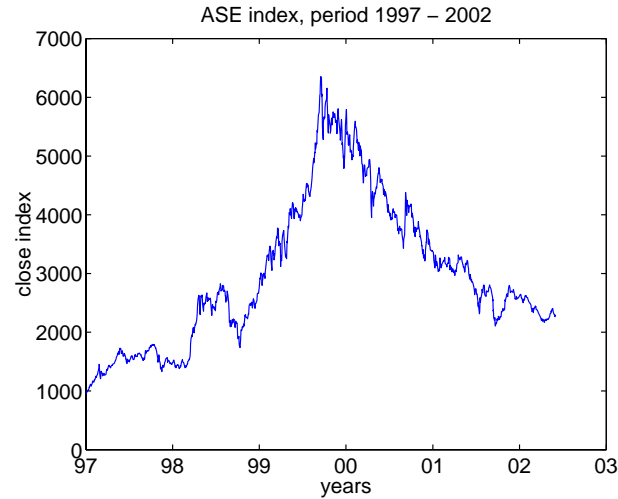
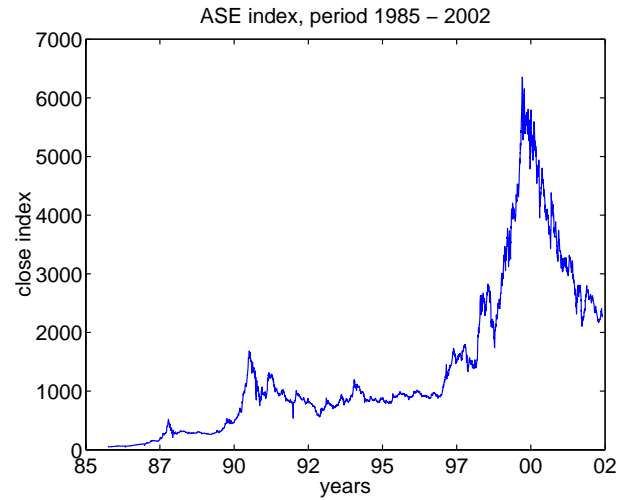
οικονομία

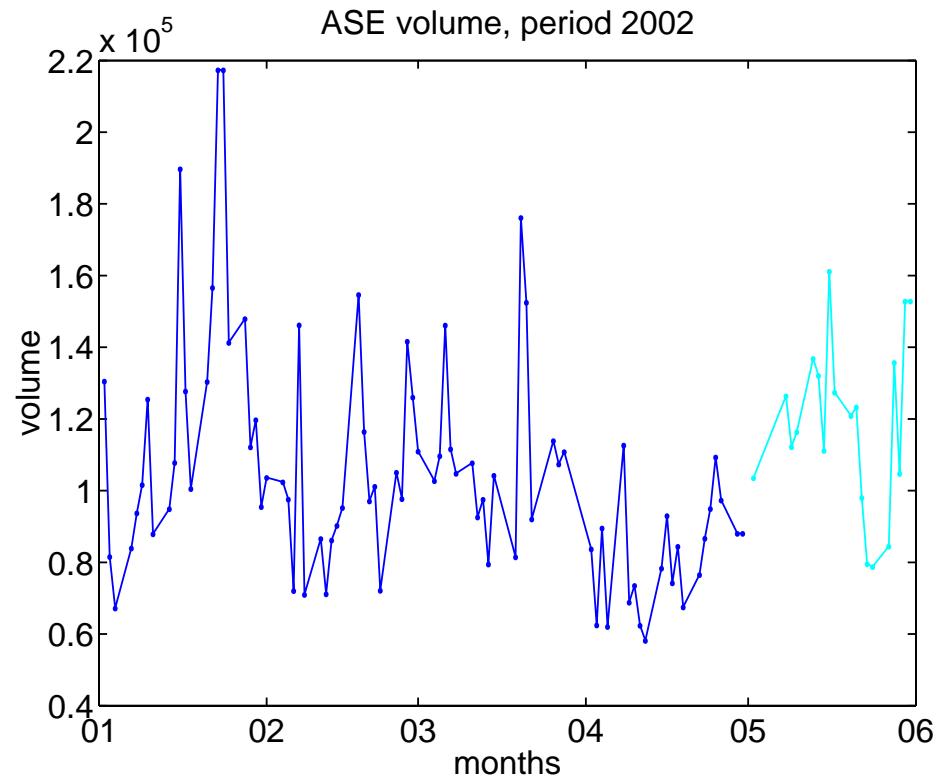
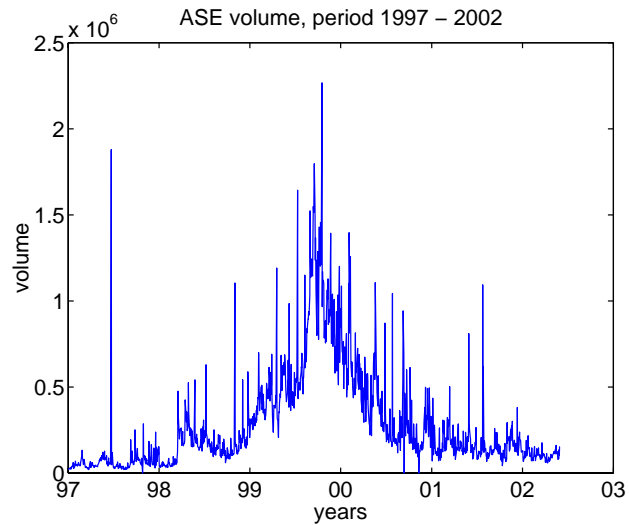
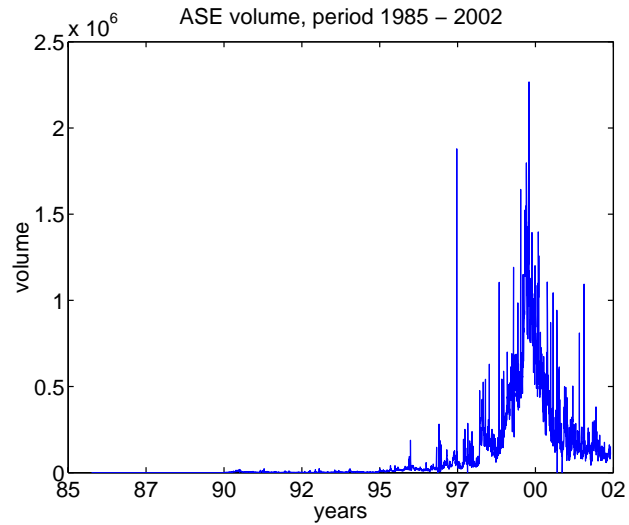


μη-στασιμότητα

θόρυβος

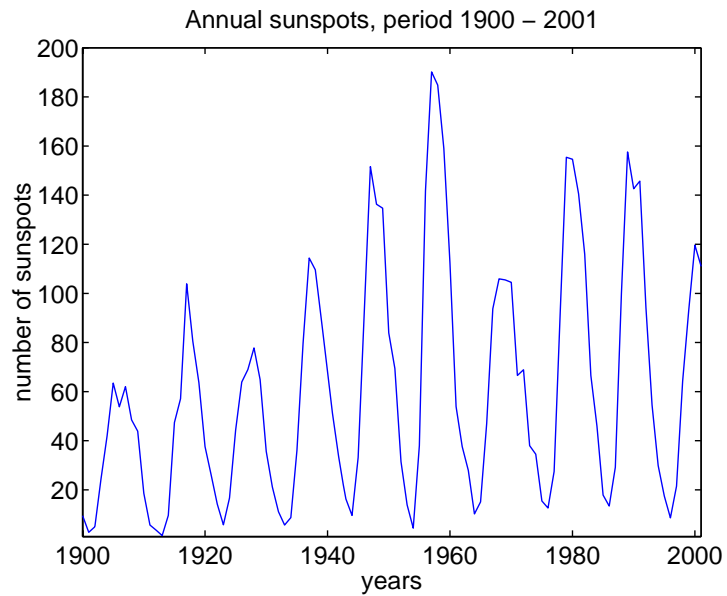
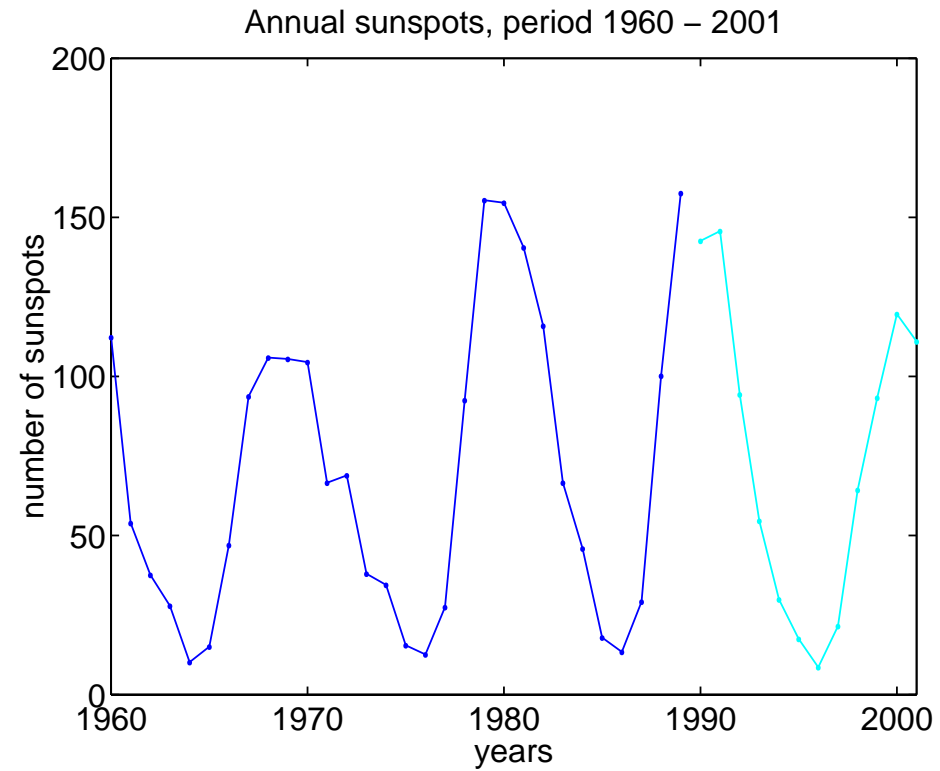
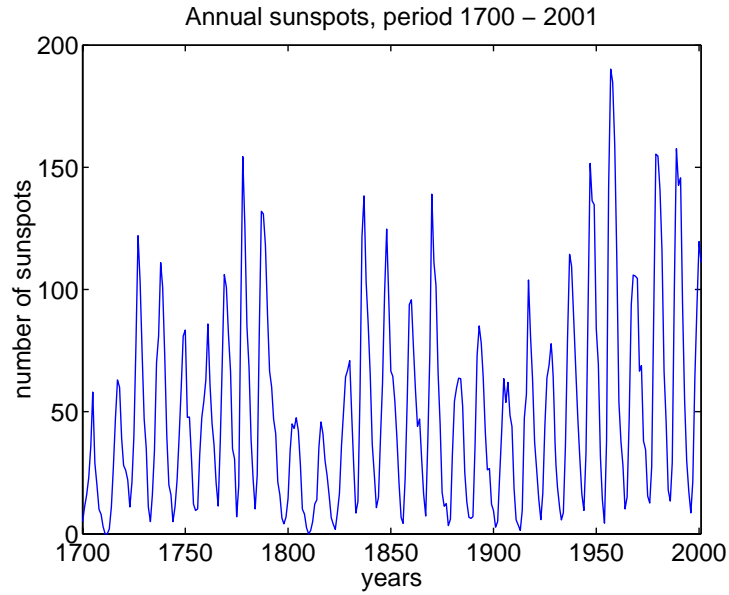
Δείκτης κι όγκος συναλλαγών Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών (ΧΑΑ)





Θα μπορούσαμε να προβλέψουμε τους δύο δείκτες για το Μάιο 2002 (έστω τις πρώτες μέρες του μήνα) γνωρίζοντας τα δεδομένα ως και το τέλος Απριλίου 2002?

Ηλιακές κηλίδες



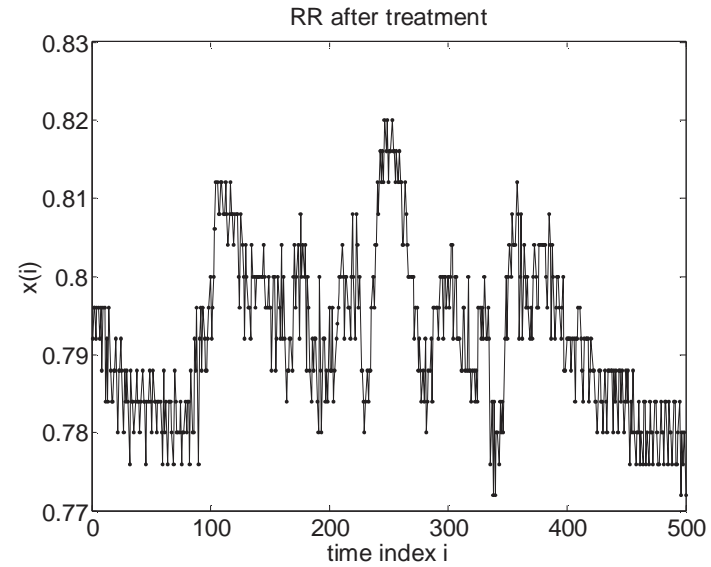
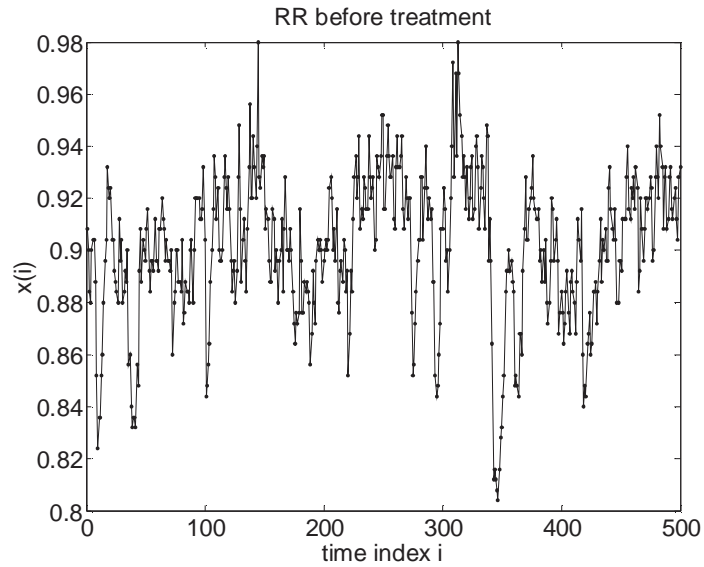
(1989)

Πόσες θα είναι οι ηλιακές κηλίδες τον επόμενο ή τα επόμενα χρόνια?

(2008)

Πόσες θα είναι οι ηλιακές κηλίδες τον επόμενο ή τα επόμενα χρόνια?

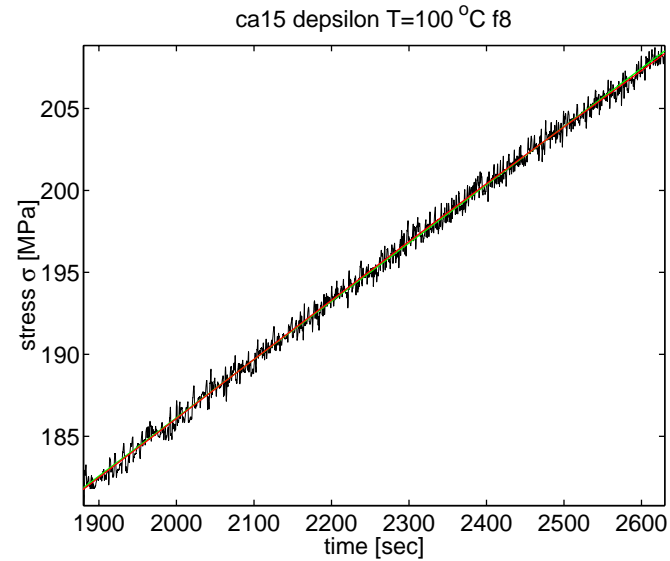
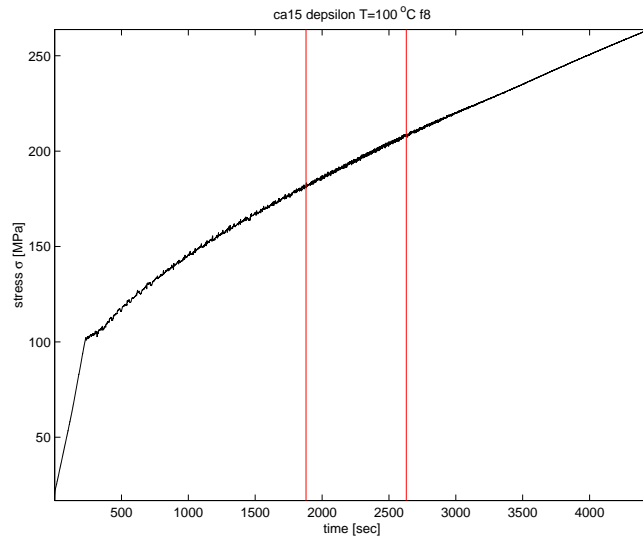
Καρδιακός ρυθμός



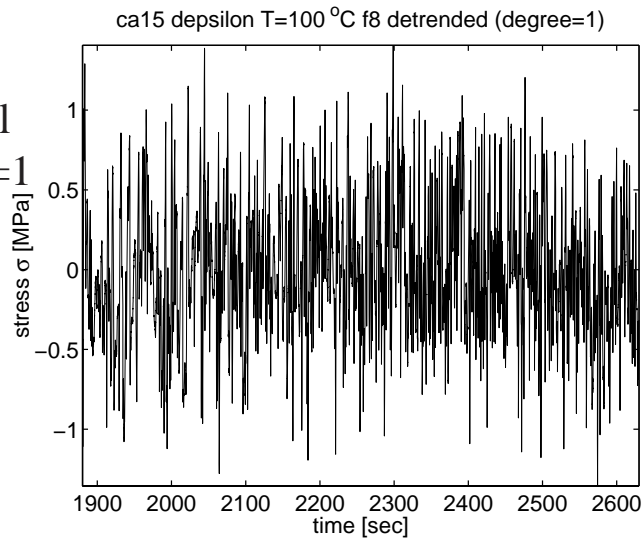
Μπορούμε να εκτιμήσουμε αλλαγές χαρακτηριστικών του καρδιακού ρυθμού για να εντοπίσουμε αλλαγές στη κατάσταση της καρδιάς?

Στασιμότητα

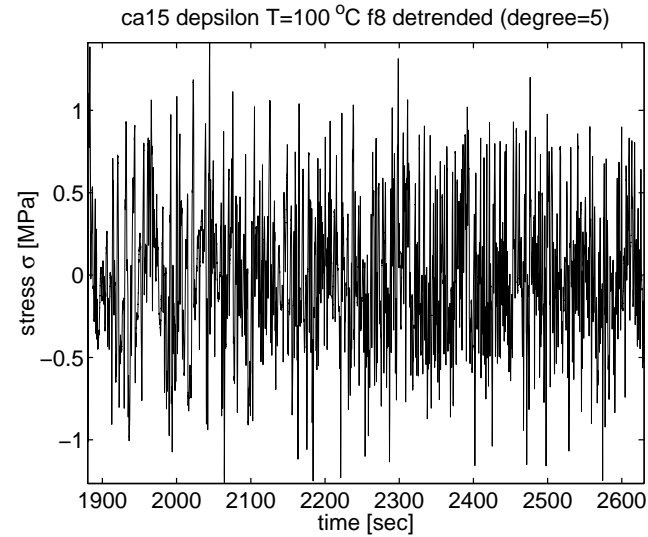
Πλαστική παραμόρφωση



Polynomial
fit, degree=1



Polynomial
fit, degree=5



Γραμμική ανάλυση / Γραμμικά μοντέλα

αυτοσυσχέτιση



AR μοντέλο

$$z_t \sim N(0, \sigma_z^2)$$

ARMA(p, q) μοντέλο $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + z_t + \theta_1 z_{t-1} + \dots + \theta_q z_{t-q}$

Πλεονεκτήματα:

1. Απλά
2. Κανονική διαδικασία, ανεπτυγμένη θεωρία για στοχαστικές διαδικασίες και στατιστική συμπερασματολογία
3. Χρήσιμα στις εφαρμογές

Μειονεκτήματα:

1. Δεν εξηγούν μη-κανονικές μορφές της χρονοσειράς
 - ασυμμετρία δεδομένων (κατανομής)
 - μη-αντιστρεψιμότητα στο χρόνο
 - «ξεσπάσματα»
2. Καθοριστικό μέρος:
 - σταθερό οριακό σημείο
 - ασταθές σύστημα
 - ταλάντωση μεταξύ σημείων

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

εξήγηση / εντοπισμός σύνθετων
καθοριστικών δομών

Μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών και δυναμικά συστήματα

Χρονοσειρά x_1, x_2, \dots, x_n

Υπόθεση:

⇒ Παρατήρηση: $x_t = h(s_t)$ $s_t \in \mathbb{R}^d$: τροχιά δυναμικού συστήματος
 $h: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση παρατήρησης

⇒ Μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα $s_t = f^t(s_0)$

s_0 : το διάνυσμα θέσης για χρόνο 0

$f^t: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ συνάρτηση του συστήματος

t : συνεχής ή διακριτός χρόνος

Για χρονοσειρές → συστήματα απώλειας ενέργειας



Τροχιά στο \mathbb{R}^d → **ελκυστής**

Ελκυστής:

- ευσταθές σημείο ισορροπίας
- πεπερασμένο σύνολο σημείων ισορροπίας
- οριακός κύκλος
- τόρος
- παράξενος ελκυστής

μπορεί να σχηματιστεί
από γραμμικό σύστημα

δε μπορεί να σχηματιστεί
από γραμμικό σύστημα

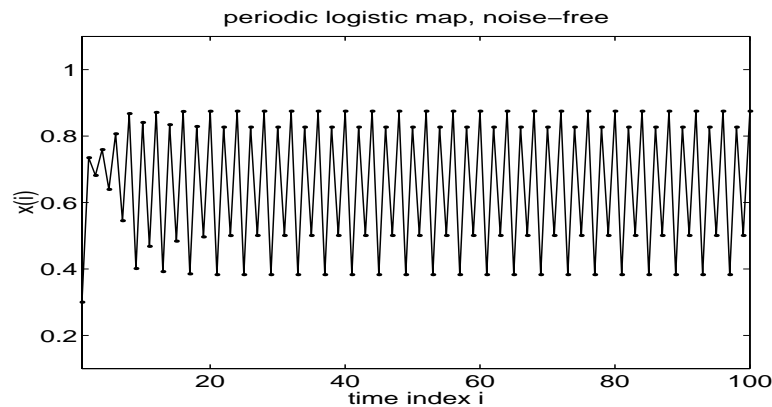
αυτό-ομοιότητα – μορφοκλασματικά

ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες → χάος

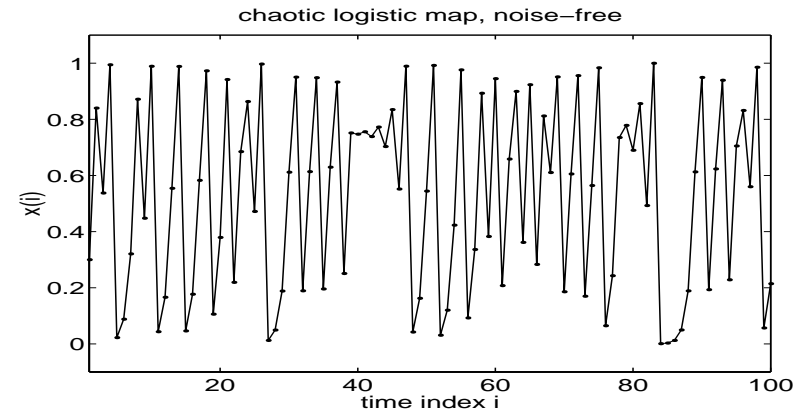
Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα, απεικονίσεις (διακριτός χρόνος)

Λογιστική απεικόνιση $s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1})$

περιοδικό $a=3.52$

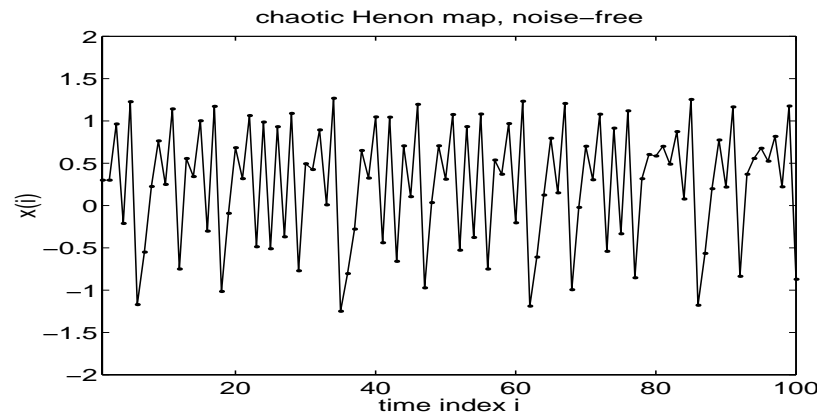


χαοτικό $a=4$



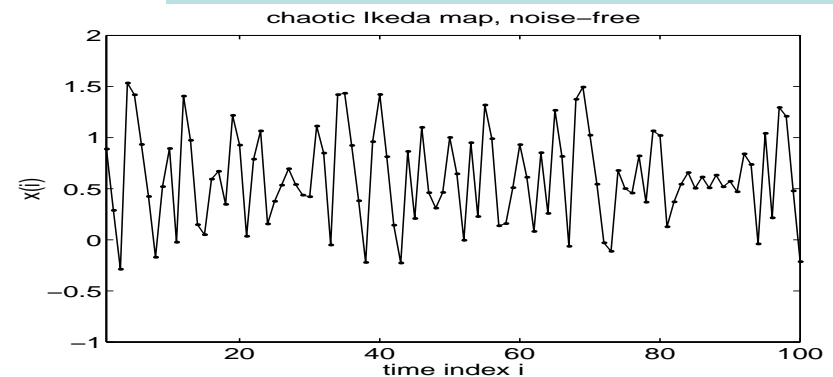
χαοτική απεικόνιση **Henon**

$$s_i = 1 - 1.4 s_{i-1}^2 + 0.3 s_{i-2}$$



χαοτική απεικόνιση **Ikeda**

$$s_k = 1 + 0.9 s_{k-1} \exp\left(0.4i - \frac{6i}{1 + |s_{k-1}|^2}\right)$$

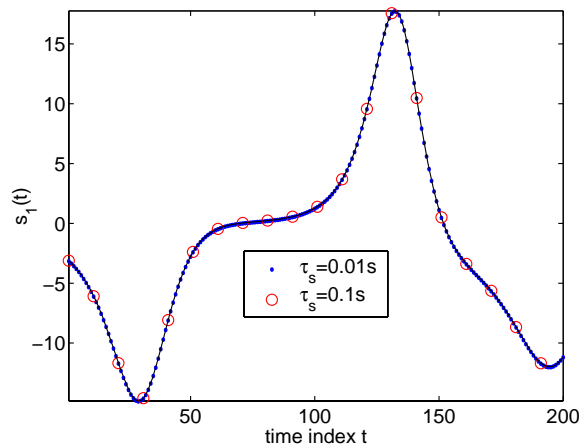


Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα, ροές (συνεχής χρόνος)

Σύστημα Lorenz:

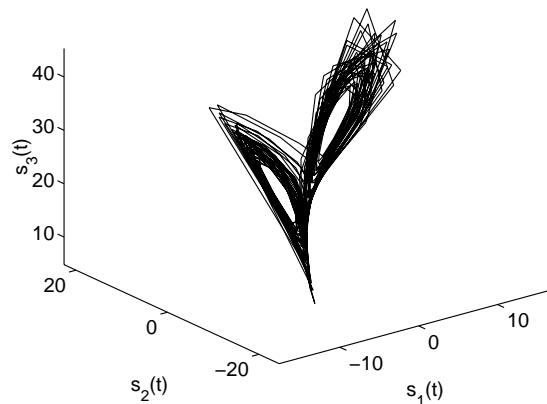
$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= a(s_2 - s_1) \\ \dot{s}_2 &= bs_1 - s_2 - s_1s_3 \\ \dot{s}_3 &= -cs_3 + s_1s_2 \\ a &= 10 \quad b = 28 \quad c = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Χρόνος δειγματοληψίας τ_s



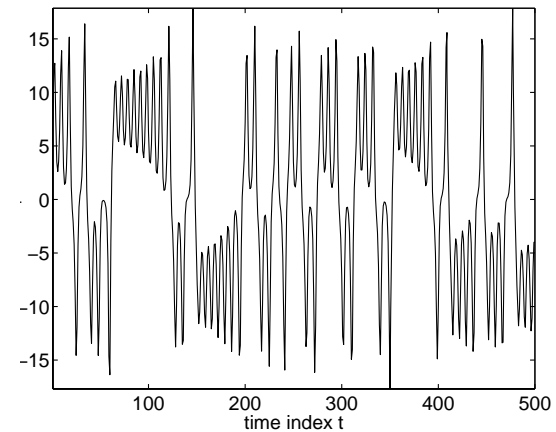
s_1, s_2, s_3

Lorenz system, $\tau_s = 0.1 \text{sec}$



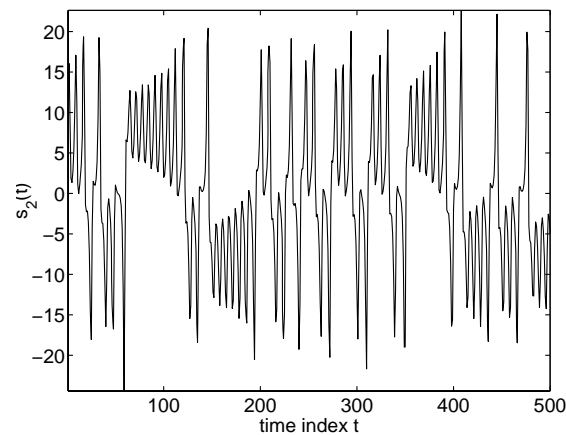
s_1

Lorenz system, s_1 variable



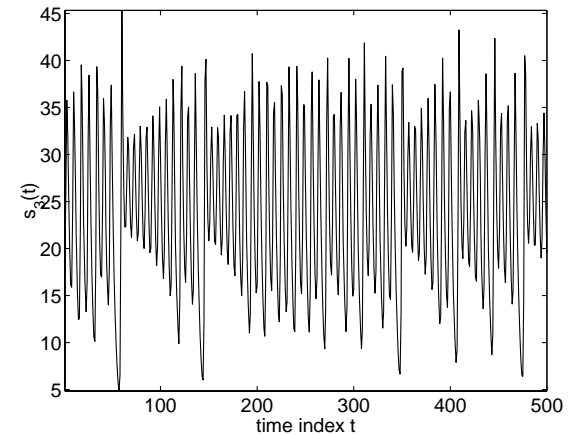
s_2

Lorenz system, s_2 variable



s_3

Lorenz system, s_3 variable



Χρονοσειρές με θόρυβο

Παρατήρηση

$$x_t = h(s_t) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} x_t = h(s_t) + w_t$$

θόρυβος παρατήρησης

w_t : λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με x_t και s_t

Δυναμικό σύστημα

$$s_t = f^t(s_0) \xrightarrow{\text{θόρυβο}} s_t = f^t(s_0) + \varepsilon_t$$

δυναμικός θόρυβος

ε_t : λευκός θόρυβος, ασυσχέτιστος με s_u $u \leq t$

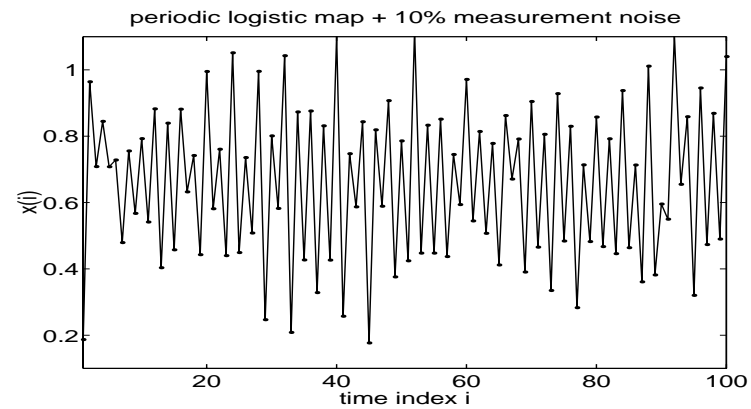
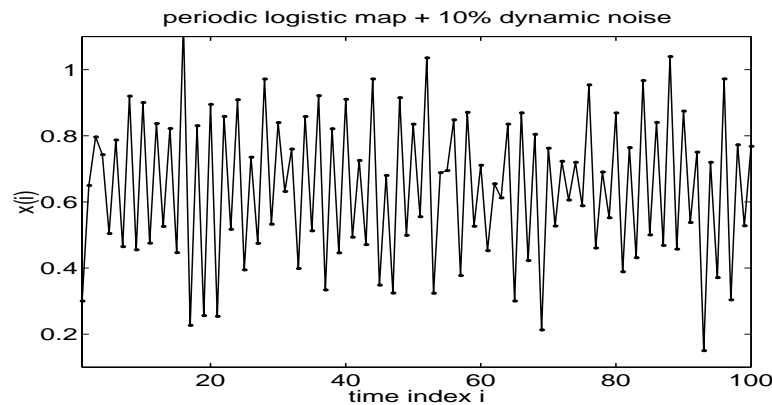
Θόρυβος: δυναμικός (συστήματος) ε παρατήρησης (μέτρησης) w

λογιστική απεικόνιση

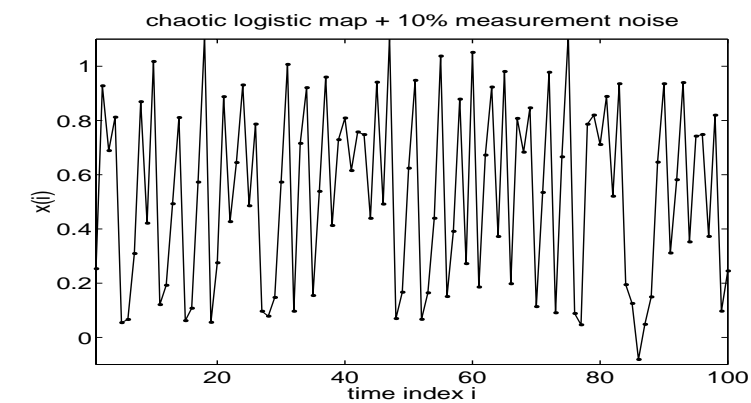
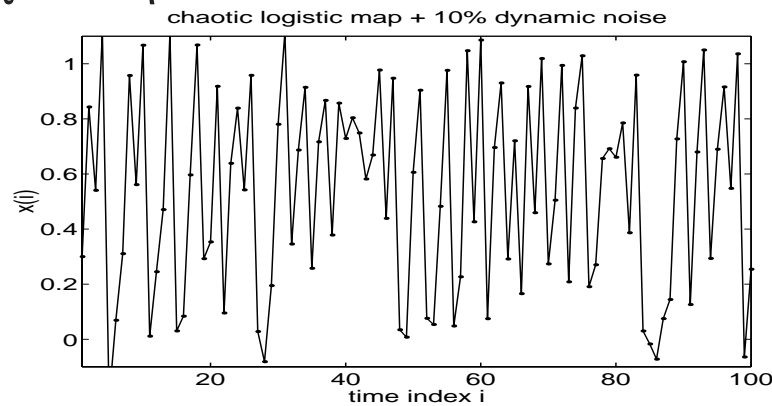
$$s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1}) + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$
$$x_i = s_i$$

$$s_i = a s_{i-1}(1 - s_{i-1})$$
$$x_i = s_i + w_i, w_i \sim N(0, \sigma)$$

περιοδική

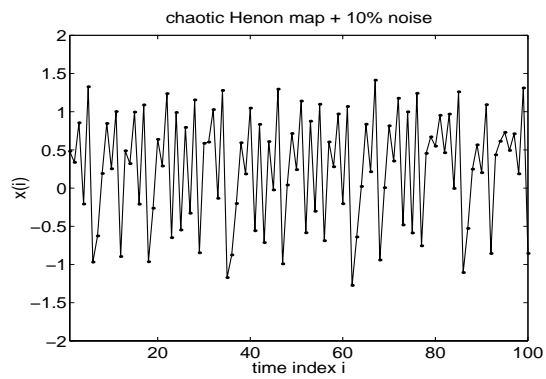
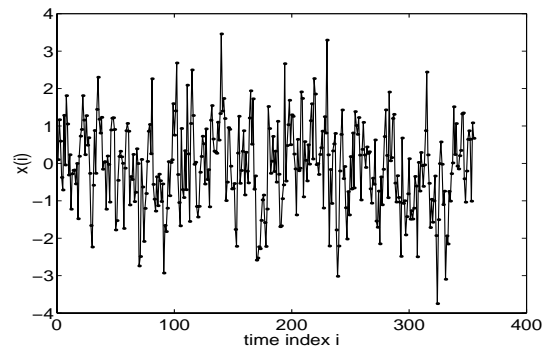
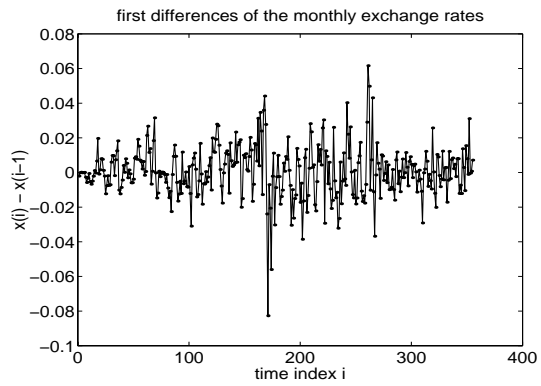


χαοτική

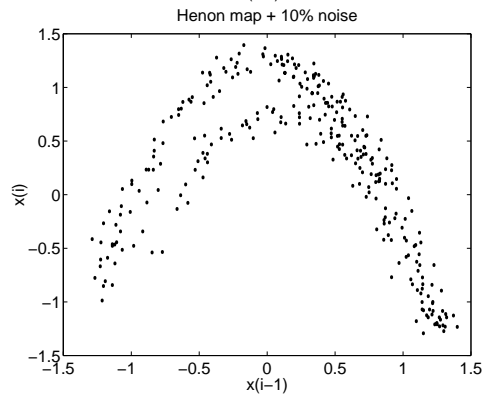
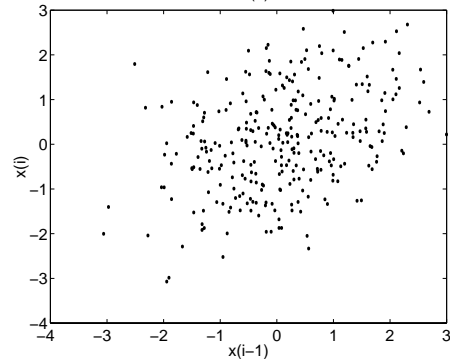
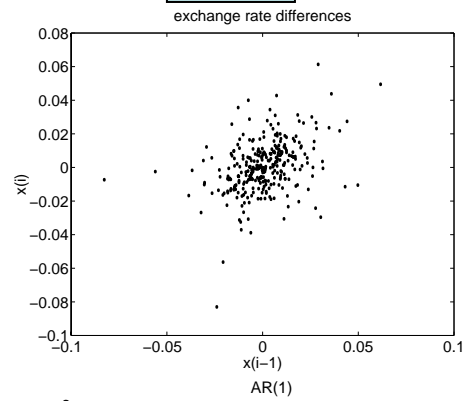


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

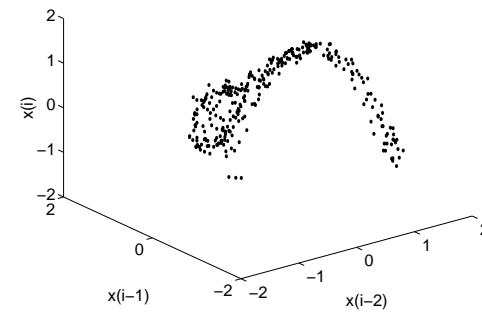
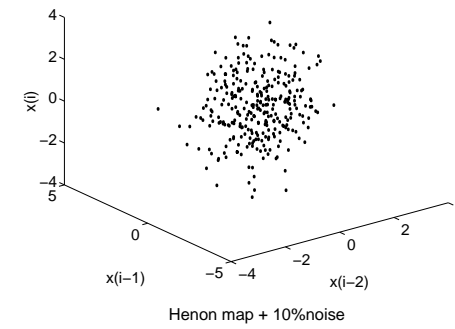
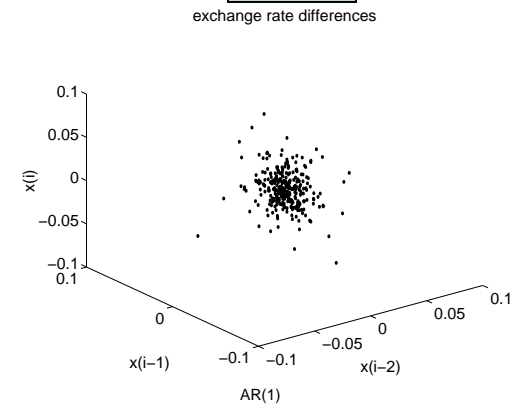
d=1



d=2

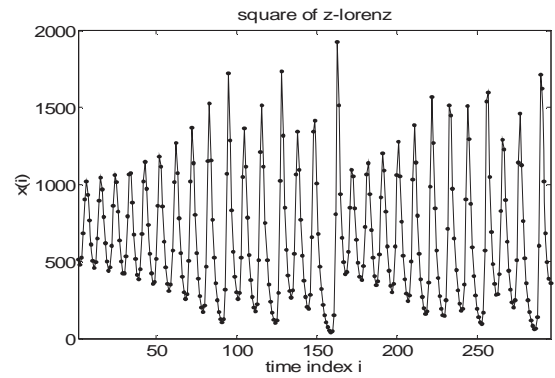
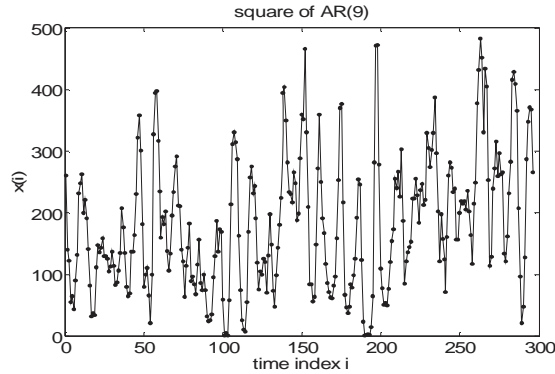
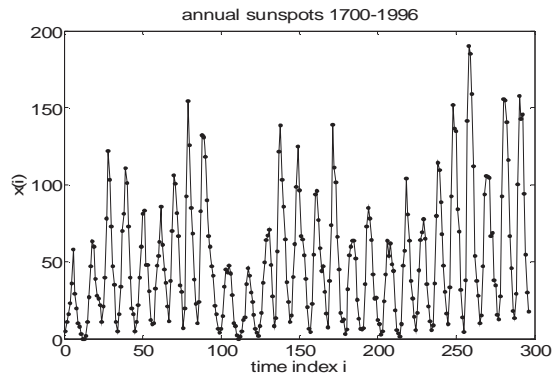


d=3

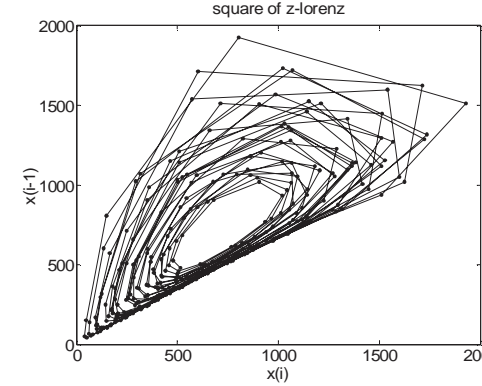
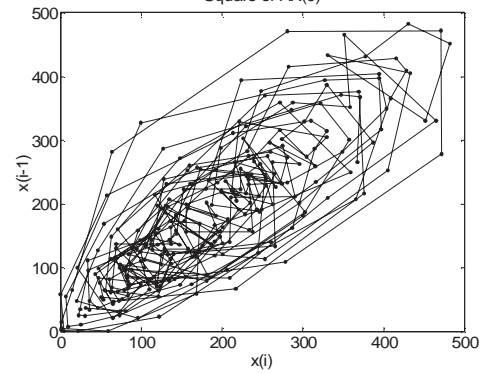
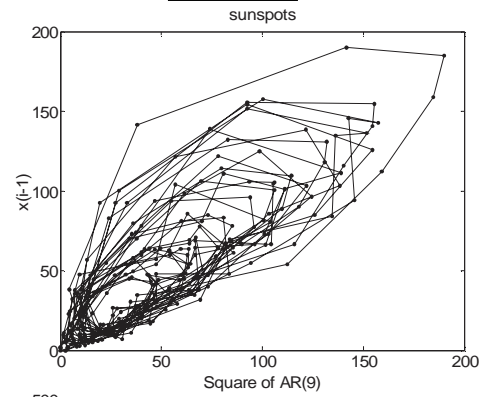


Διαγράμματα διασποράς σε 2 και 3 διαστάσεις

d=1



d=2



d=3

