

ΜΟΥΣΙΚΗ ΕΝΑΡΜΟΝΙΣΙΣ ΜΕΛΩΔΙΑΣ ΔΙΑ ΤΩΝ 7 ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής
& Βυζαντινής Μουσικολογίας,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

hspyridis@music.uoa.gr

Προλεγόμενα

Οιαδήποτε ακουομένη κυματομορφή χαρακτηρίζεται ως ήχος. Ακολούθως, ο ήχος μετατρέπεται εις φθόγγους. Οι φθόγγοι, ομαδοποιούμενοι, δομούν είτε μουσικές γραμμές (μελωδίες), είτε μουσικές επιφάνειες (εναρμονισμένες μελωδίες) ρέουσες εν χρόνω. Εις την πρώτην περίπτωσιν έχομεν μουσικήν εν οριζοντίω εξελίξει και εις την δευτέραν έχομεν μουσικήν εν οριζοντίω και εν κατακορύφω εξελίξει.

Αμφότερες οι περιπτώσεις υπακούν εις μελωδικούς και αντιστικτικούς κανόνες, εξαρτωμένους εκ των διαφόρων χρονικών περιόδων της μουσικής διαδικασίας και ικανοποιούντες την αισθητικήν του μουσικού πολιτισμού συγκεκριμένης ομάδος ανθρώπων εν συγκεκριμένω τόπω.

Πάντα ταύτα σχετίζονται με την τέχνην και την επιστήμην της Μουσικής. Εις την εποχήν της Πληροφορικής, εις την εποχήν του bit, κατά την οποίαν διαβιούμεν, εχρησιμοποιήθη ο ηλεκτρονικός υπολογιστής προκειμένου αφ' ενός να συνθέσει μελωδίες, αφ' ετέρου να τις εναρμονίσει επί τη βάσει ενός συνόλου μουσικομαθηματικών κανόνων –ενός αλγοριθμικού προγράμματος– το οποίον εδόμησεν ο χρήστης (user).

Εις τον Ελλαδικόν χρόνον τυγχάνει να είμαι ο πρώτος ασχοληθείς με το εν λόγω πρόβλημα εκπονήων την δεκαετίαν του 1970 την Διδακτορικήν μου διατριβήν επί των δημοτικών καλαματιανών τραγουδιών, δομήσας δυναμικά Μαρκοβιανά μοντέλλα εις γλώσσαν FORTRAN IV, εις έναν εκ των δύο μοναδικών υπαρχόντων εν Ελλάδι τότε ΗΥ, του UNIVAC 1100 του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Επειδή κατά τον Ηράκλειτον, τον σκοτεινόν Εφέσιον προσωκρατικόν φιλόσοφον, «τὰ πάντα ῥεῖ» έκτοτε εκύλησεν μεγίστη ποσότης ύδατος εις τον ποταμόν της επιστήμης της δια των ΗΥ συνθέσεως μουσικής με αξιοθαύμαστα αισθητικά αποτελέσματα.

Εις την παρούσαν εισήγησίν μου θα σας ομιλήσω περί εναρμονίσεως δοθείσης μουσικής μελωδίας –μακράν και πέραν των ωδειακών αρμονικών κανόνων– επί τη βάσει της Θεωρίας της Συμμετρίας και μόνον, ήτοι της επιστήμης του κάλλους, επηρεασθείς σφόδρα υπό του Ολλανδού ζωγράφου Μ. C. Escher (1898-1972), όστις εφιλοτέχνησεν τους πίνακές του δια δικασιών συμμετρίας, καθιερώσας τοιουτοτρόπως μίαν εντόνως μαθηματικήν τεχνοτροπίαν.

Η Συμμετρία εις την Φύσιν

Η συμμετρία, απαντωμένη και εις την έμβιον και εις την άβιον φύσιν, αποτελεί μίαν λίαν σημαντικήν έννοιαν των Μαθηματικών, της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας και των Καλών Τεχνών, ως η Μουσική, η Ζωγραφική, η Αρχιτεκτονική, η Γλυπτική. Εν άλλοις λόγοις, η συμμετρία αποτελεί το αχανές πεδίον ένθα δραστηριοποιούνται αμιλλώμενες η φύσις (ανόργανος και οργανική) και η τέχνη. Δι' αυτής της φιλοσοφικής¹ και μαθηματικής σπουδαιότητος έννοιας, της Συμμετρίας, και μόνον θα επιχειρήσω για πρώτην φοράν εις τα χρονικά να δημιουργήσω μουσικήν τάξιν, κάλλος και τελειότητα εναρμονίζων μελωδίες.

Σπουδάζων την Επιστήμην της Φυσικής εις το Φυσικόν Τμήμα της Φυσικομαθηματικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, εδιδάχθην την Κρυσταλλογραφίαν ως μέρος της Επιστήμης της Ορυκτολογίας υπό του αιμνήστου καθηγητού Κωνσταντίνου Σολδάτου και την Επιστήμην της Κρυσταλλοδομής υπό του καθηγητού κ. Παναγιώτου Ρεντζεπέρη. Δια των μαθημάτων αυτών κατενόησα πλήρως τις γενεσιουργούς αιτίες της συμμετρίας των κρυστάλλων, δια των οποίων η φύσις αυτοκοσμεΐται.

Σημειωτέον ότι οι ίδιες γενεσιουργές αιτίες εις τα κείμενα δημιουργούν τα αριστουργήματα της λογοτεχνίας, εις την ζωγραφικήν τους θαυμασίους πίνακες του Μ. C. Escher και εις την μουσικήν τα του «ηρμοσμένου» κάλλι.

Ως Πανεπιστημιακός διδάσκαλος μνώ εις τα περί την «Μουσικήν Συμμετρίαν» θέματα τους φοιτητές μου διδάσκων το μάθημα «Συμμετρία & Μουσική», έχων μάλιστα συγγράψει και σχετικόν διδακτικόν σύγγραμμα, συνοδευόμενον υπό επί τούτοις συγγραφέν λογισμικόν, ως διδακτικόν εργαλείον, δια του οποίου οι φοιτητές μου επιτυγχάνουν:

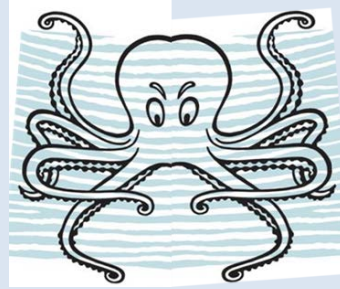
- ✓ την δόμησιν δια της κυκλικής συμμετρίας διατονικών και χρωματικών κλιμάκων μετά των απλών ή/και εξαιρετικώς πολυπλόκων οπλισμών των (key-signatures) και
- ✓ δια των ποικίλων μονοδιαστάτων και δισδιαστάτων διαδικασιών συμμετρίας την ιδιάζουσης εναρμονίσεως σύνθεσιν μουσικής.

Κατά τον μαθηματικόν Hermann Weyl, τον μελετήσαντα εξαντλητικώς την Συμμετρίαν, ένα αντικείμενον είναι συμμετρικόν, εάν υπάρχει μία διαδικασία καταλείπουσα αναλλοίωτον την μορφήν αυτού.

Εις την Γεωμετρίαν δια της συμμετρίας αντιστοιχίζονται σημεία μέσω είτε σημείου/ων, είτε γραμμής/ών, είτε επιπέδου/ων, τα οποία, κατ' αντιστοιχίαν, ονομάζονται κέντρον/α συμμετρίας, άξων/ονες συμμετρίας, επίπεδον/α συμμετρίας.

Δια των συμμετριών ως προς τα προαναφερθέντα στοιχεία συμμετρίας εκτός της αμφιπλεύρου συμμετρίας

¹ «Καὶ τῶν σχημάτων τὸ κάλλιστιν σφαῖραν εἶναι τῶν στερεῶν, τῶν δ' ἐπιπέδων κύκλον» ρήσις της Δαμοῦς διασωθεῖσα υπό του Διογένοϋς του Λαερτίου (*Βίος Φιλοσόφων*, 8, 35, 5-6). Δια τούτο και ο Πλάτων (Επινομίς) και ο Αριστοτέλης αποδίδουν σφαιρικόν σχήμα εις τα ουράνια σώματα, θεωροῦντες ότι οιονδήποτε έτερον σχήμα θα εμείωνε την ουράνιον τελειότητά των.



προκύπτουν και έτερα είδη γεωμετρικής συμμετρίας, ως η Μεταφορά ή ολίσθησις



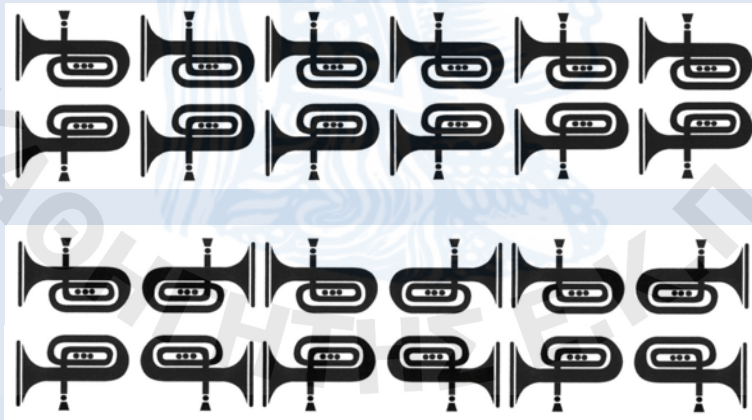
Σχήμα 1: Ένα μοτίβο, η τούμπα, εν μεταφορά ή εν ολίσθησει.

ο Κατοπτρισμός ως προς κατακόρυφον άξονα ή επίπεδον κατοπτρισμού



Σχήμα 2: Ένα μοτίβο, η τούμπα, εν γραμμικώ κατοπτρισμώ.

Η γραμμική μεταφορά εν συνδυασμώ μετά της διαδικασίας του κατοπτρισμού ως προς οριζόντιον επίπεδον κατοπτρισμού



η περιστροφή περίξ σημείου ή περί άξονα και άπαντες οι συνδυασμοί αυτών.

Ένα μονοδιάστατον αντικείμενον σχεδιάζεται δια δύο συμμετρικών διαδικασιών επί γραμμής, ήτοι δια Μεταφοράς ή ολίσθησεως και δια Κατοπτρισμού ως προς κάθετον άξονα ή επίπεδον κατοπτρισμού.

Εις τον μονοδιάστατον χρόνον οι προαναφερθείσες δύο διαδικασίες συμμετρίας δομούν τους μουσικούς ρυθμούς.

Εις τον δισδιάστατον χώρο η συμμετρία υλοποιείται μέσω 17 διαδικασιών, οι οποίες προκύπτουν εκ της συνδυαστικής δράσεως των διαδικασιών συμμετρίας της μεταφοράς, του κατοπτρισμού και της περιστροφής.

7 εκ των 17 αυτών δισδιαστάτων διαδικασιών συμμετρίας, οι ανήκουσες εις το ορθογώνιον σύστημα συμμετρίας, δύνανται να εύρουν εφαρμογήν εις την διαδικασίαν της μουσικής συνθέσεως εις τον δισδιάστατον χώρο, όστις ορίζεται υπό του μουσικού ύψους και του χρόνου.

Το εγχείρημα αυτό εις μίαν μόνον περίπτωσιν εκ των 7 και υπό όρους το τολμά με εξαιρετικήν επιτυχίαν ο J. S. Bach εις το έργον του «*Η Τέχνη της Φούγκας* (Die künst der füge), BWV 1080», γράφων τις τέσσερις κατοπτρικές φούγκες (mirror fugues) του.

Εις τον τρισδιάστατον χώρο, οι κρύσταλλοι², τα πλέον εντυπωσιακά παραδείγματα συμμετρίας, ανήκοντα εις τον ανόργανον κόσμο, δομούνται υπό 230 τρισδιαστάτων διαδικασιών συμμετρίας και κατανέμονται εις 32 δυνατά γεωμετρικά συστήματα κρυσταλλικής συμμετρίας.

Πρέπει να τονισθεί μετ' επιτάσεως ότι η μελέτη της Συμμετρίας πραγματοποιείται δια των «Ομάδων» εκ του μαθηματικού χώρου της Θεωρίας Ομάδων (Group Theory), οι οποίες είναι δύσκολα, αλλά χρησιμότητα μαθηματικά εργαλεία.

Η μαθηματική μελέτη των συμμετριών εις τον χώρο της Μουσικής ανοίγει νέους δρόμους ιδιάιτα όσον αφορά εις την μουσικήν σύνθεσιν, διότι αφ' ενός αναδύεται ένας πολυπληθέστατος κόσμος διατονικών και χρωματικών μουσικών κλιμάκων –πέραν των «πεπαλαιωμένων» πλέον μειζόνων και ελασσόνων-, πρωτογνώρων «ηθών ή ηθικών χαρακτήρων» με τους συνοδούντες αυτές μουσικούς σπλισμούς (key-signatures)

και αφ' ετέρου επεκτείνεται απεριορίστως η μουσική συνθετική διαδικασία δια πλειόνων και πολυπλοκοτέρων διαδικασιών δισδιαστάτων συμμετριών από αυτήν του απλού κατοπτρισμού, την οποίαν, ως προανφέρθη, εφήρμοσεν ο J. S. Bach εις το έργον του «*Η Τέχνη της Φούγκας* (Die künst der füge), BWV 1080», συνθέτων τις τέσσερις κατοπτρικές φούγκες (mirror fugues).

Ζώμεν πλέον εις τον κα' αιώνα. Επαύσαμεν να είμεθα θαμμένοι εντός του πλέον περιπλόκου μουσικού οικοδομήματος, την αντιστικτικήν πολυφωνίαν. Τα αισθητήρια όργανα της ακοής μας έχουν ακούσει το 12φθογον' έχουν ακούσει Ξενάκειες συνθέσεις! Οι σύγχρονες μουσικές συνθέσεις βρίθουν ηυξημένων τεταρτών (diabolus in musica). Δοθείσης μιας μελωδίας, η όποια εναρμόνισις αυτής προκύψει δια των ποικίλων μονοδιαστάτων και δισδιαστάτων διαδικασιών συμμετρίας θα είναι ένα ακουστέον μουσικόν έργον τέχνης της «σήμερον», διαθέτον μίαν σύγχρονον προσωπικότητα και έναν πρωτόφαντον χαρακτήρα.

² Κρύσταλλοι και Συμμετρία

Από αρχαιοτάτων χρόνων το βλέμμα του ανθρώπου προσείλκυσαν τα καλώς ανεπτυγμένα και σχεδόν κανονικά πολύεδρα δια των οποίων εμφανίζονται εις την φύσιν πάμπολλα ορυκτά. Σύνηθες παράδειγμα αποτελεί ο χαλαζίας (SiO_2) με τα ωραία, διαυγή και καλοανεπτυγμένα πολύεδρα αυτού, τα οποία οι αρχαίοι Έλληνες τα εθεώρουν ως κρύσταλλον, δηλαδή ως πάγον, εξ αιτίας της εντόνου ψύξεως εις τα όρη και τον ωνόμαζον «ορείαν κρύσταλλον».

Με την πάροδον των ετών ο όρος κρύσταλλος επεξετάθη επί παντός στερεού εμφανίζοντος κρυσταλλικήν δομήν. Η έννοια της κρυσταλλικής δομής συνδέεται αμέσως μετά του συμμετρικού τρόπου διευθετήσεως των δομικών μονάδων αυτού, η οποία και αντανακλάται εις την μορφήν ή τις μορφές ενός κρυστάλλου. Η μελέτη των κρυσταλλικών μορφών αποκαλύπτει ότι οι ιδιότητες της *εξωτερικής συμμετρίας* δύνανται να εκφραστούν μέσω τριών βασικών στοιχείων συμμετρίας: το επίπεδον συμμετρίας (κατοπτρισμός), το κέντρον συμμετρίας (αναστροφή) και τον άξονα συμμετρίας (περιστροφή).

Δυνατότητες περιοδικών επαναλήψεων

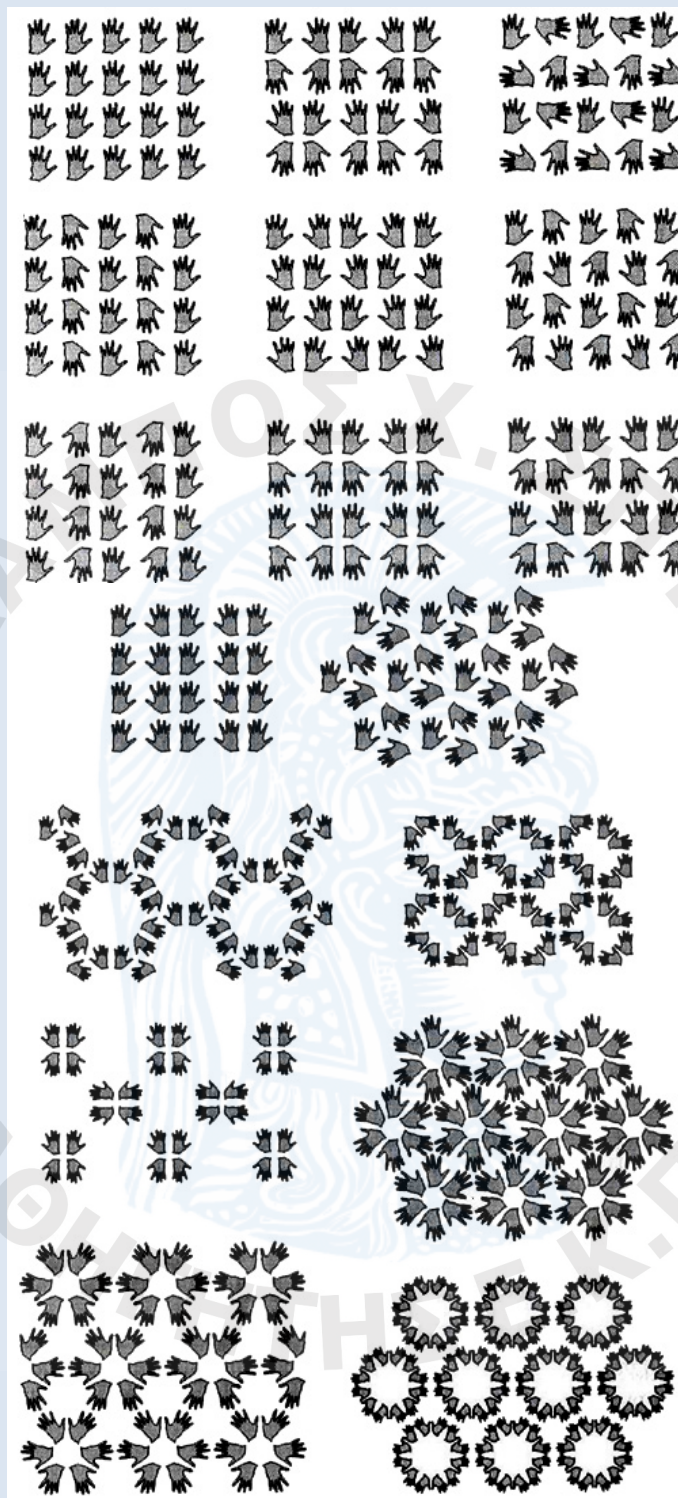
Η επιστήμη της Κρυσταλλοδομής, η οποία ασχολείται με την έρευνα της δομής των κρυστάλλων, αποδίδει την κανονικότητα της δομής των κρυστάλλων εις την κατά τις τρεις διαστάσεις του χώρου περιοδικήν επανάληψιν ενός βασικού συγκροτήματος δομικών στοιχείων της ύλης των.

Η συστηματική διερεύνησις των διαφόρων δυνατοτήτων περιοδικών επαναλήψεων άγει εις το συμπέρασμα ότι υπάρχουν 2 είδη μονοδιαστάτων, 17 είδη δισδιαστάτων και 230 είδη τρισδιαστάτων περιοδικών επαναλήψεων.

Κατωτέρω δίδονται τα 17 είδη των δισδιαστάτων περιοδικών διατάξεων εξ επαναλήψεων ενός ασυμμέτρου αντιπροσωπευτικού σχήματος, ήτοι μιας παλάμης.

Δια των 17 επιπέδων διεργασιών συμμετρίας κατασκευάζονται μοτίβα ταπετσαρίας, υφαντά, διακοσμήσεις κ.α.





Σχήμα 24: Τα 17 είδη των δισδιάστατων περιοδικών διατάξεων εξ επαναλήψεων ενός ασυμμέτρου αντιπροσωπευτικού σχήματος, ήτοι μιας παλάμης.

Λαμβάνοντας τα μοναδιαία διανύσματα μετατοπίσεως εις δύο εκ των απεριόριστων διευθύνσεων εφ' ενός επιπέδου, ορίζομεν ένα παραλληλόγραμμον, ονομαζόμενον στοιχειώδες πλέγμα ή επίπεδος κυψελίς ή βρόχος του πλέγματος ή της ταπετσαρίας ή της επιπέδου συμμετρικής δομής.

Τα μήκη $|\bar{a}|$ και $|\bar{b}|$ των μοναδιαίων διανυσμάτων μετατοπίσεως και το μέγεθος της μεταξύ αυτών γωνίας φ αποτελούν τις παραμέτρους της κυψελίδος. Επί τη βάσει αυτών των παραμέτρων της επιπέδου κυψελίδος ορίζονται τα κάτωθι τέσσερα είδη απλών δισδιαστάτων πλεγμάτων:

1. $|\bar{a}| \neq |\bar{b}|$, $\varphi \neq 90^\circ$. Πλαγιογώνιον σύστημα συντεταγμένων με σχήμα βρόχου τυχαίον παραλληλόγραμμον.
2. $|\bar{a}| \neq |\bar{b}|$, $\varphi = 90^\circ$. Ορθογώνιον σύστημα συντεταγμένων με σχήμα βρόχου ορθογώνιον παραλληλόγραμμον.
3. $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, $\varphi = 90^\circ$. Τετραγωνικόν σύστημα συντεταγμένων με σχήμα βρόχου τετράγωνον.
4. $|\bar{a}| = |\bar{b}|$, $\varphi = 120^\circ$. Εξαγωνικόν σύστημα συντεταγμένων με σχήμα βρόχου ρόμβον γωνίας 120° .

Η μουσική είναι μια εν χρόνω εξελισσομένη αλληλουχία ηχητικών γεγονότων, ήτοι μία αλληλουχία μουσικών υψών (pitches), τα οποία καταγράφομεν επί του άξονος y ενός συστήματος συντεταγμένων (y, t).

Το εν λόγω σύστημα δυνατόν να είναι πλαγιογώνιον, δυνατόν να είναι ορθογώνιον.

Η αναγκαιότης του συγχρονισμού όλων των μουσικών οργάνων κατά την έναρξιν της εκτελέσεως μιας πολυοργανικής μουσικής συνθέσεως επιβάλλει ορθογώνιον σύστημα αξόνων και, συνεπώς, απορρίπτει το πλαγιογώνιον σύστημα αξόνων.

Η απόρριψις του πλαγιογώνιου συστήματος αναφοράς έχει σημαντικότερον κόστος εις τον εν δυνάμει πλούτον της μουσικής δημιουργίας, δεδομένου ότι περιορίζει τον πληθικόν αριθμόν των δισδιαστάτων διαδικασιών συμμετρίας από 17 εις τις αναφερθείσες 7.

Δοθείσης μιας επιπέδου κυψελίδος, ένα σημείον αυτής με συντεταγμένες x, y επαναλαμβανόμενον υπό των στοιχείων συμμετρίας της επιπέδου ομάδος συμμετρίας, παρέχει τελικώς πεπερασμένον σύνολον ισοδυνάμων σημείων λόγω συμμετρίας. Το σύνολον τούτο των σημείων καλείται σύνολον ισοδυνάμων θέσεων ή, απλώς, *ισοδύναμος θέσις*. Ο αριθμός των ομολόγων σημείων, των αποτελούντων την ισοδύναμον θέσιν, καλείται *βαθμός πολλαπλότητος* αυτής.

Οι τέσσερις διαδικασίες συμμετρίας του ορθογωνίου συστήματος (P, R, I, RI)

Έστω δοθείσα δομή. Αυτήν την ονομάζομεν *Ευθείαν* ή *Primus* (P).

Δια κατοπτρισμού της Primus επί κατακορύφου επιπέδου κατοπτρισμού, τιθεμένου εις κατάλληλον θέσιν, λαμβάνεται η *Ανάστροφος* αυτής δομή, η ονομαζομένη *Rectus* (R).

Δια κατοπτρισμού της Primus επί οριζοντίου επιπέδου κατοπτρισμού λαμβάνεται η *Αντίστροφος* αυτής δομή, η ονομαζομένη *Inversus* (I).

Δια κατοπτρισμού της Rectus επί οριζοντίου επιπέδου κατοπτρισμού λαμβάνεται η *Αντίστροφος* αυτής δομή, η ονομαζομένη *Inversus Rectus* (IR).

Εφαρμόζοντες τις ανωτέρω τέσσερις διαδικασίες συμμετρίας εις το κοινόν μουσικόν θέμα των δεκατεσσάρων φουγκών και των τεσσάρων κανόνων εκ του έργου του J. S. Bach «*Η Τέχνη της φούγκας* (Die kunst der füge, BWV 1080)» εις δομήν P, R, I, RI, καταλήγομεν εις την κάτωθι μουσικήν καταγραφήν.



Να μην λανθάνει της προσοχής μας ότι δια κατοπτρισμού μιας μελωδίας ή συνθέσεως επί κατακορύφου άξονος ή επιπέδου κατοπτρισμού τιθεμένου εις το τέλος αυτής, η μελωδία καθίσταται *καρκινική*, ήτοι δύναται να εκτελείται «ομοιοτρόπως» εκ της αρχής προς το τέλος και εκ του τέλους προς την αρχήν.

Συμμετρίες ενυπάρχουσες εις έργα διαφόρων συνθετών

«Νίξεις» συμμετρίας, υπό την έννοιαν ότι η συμμετρία απαντάται σποραδικώς - εντός περιορισμένου αριθμού μουσικών μέτρων - και υπό διάφορους μορφές -περιστροφική, μεταφορική, κατοπτρική κ.α.- συμπεριέλαβον κατά καιρούς αρκετοί συνθέτες εις το έργον των. Το γεγονός καθ' εαυτό αποδεικνύει ότι οι διαδικασίες της Συμμετρίας ήσαν τουλάχιστον «στοιχειωδώς» γνωστές εις τους συνθέτες ως ένα εργαλείον διαντίσεως της μουσικής πλοκής του/των έργου/ων των.

Οι επτά (7) διδιάστατες ορθογώνιες διαδικασίες της μουσικής συμμετρίας

Οι εν συνεχεία αναλυόμενες επτά (7) διδιάστατες ορθογώνιες διαδικασίες της μουσικής συμμετρίας, αποτελούν «θεωρητικώς» πολυσυνδυασμόν όλων ή μέρους των προηγουμένως αναφερθεισών διαδικασιών συμμετρίας. Λέγω «θεωρητικώς», διότι κατ' αυτές συνηχούν αναστροφές ή/και αντίστροφες δομές δοθείσης ευθείας δομής με όλα τα ήδη αναλυθέντα αρμονικά προβλήματα. Το γεγονός τούτο δεν πρέπει να μας πτοεί και να μας αποτρέπει από την χρησιμοποίησίν των.

Ζώμεν εις τον 21^ο αιώνα και τα ότα μας έχουν ακούσει ακούσματα μυρίων όσων αντιφάσεων, όσον αφορά εις την κλασικήν αρμονίαν. Επιπροσθέτως, πειραματιζόμενοι, ας αναζητήσωμεν να εύρωμεν εκείνους τους αντιστικτικούς κανόνες δια των οποίων θα καταστούν αρμονικώς αποδεκτά ένια ή άπαντα τα εκ κατοπτρισμών αναφύόμενα μελωδικά και αρμονικά ηχητικά γεγονότα.

Διαδικασία υπ' αριθμόν 1: pm

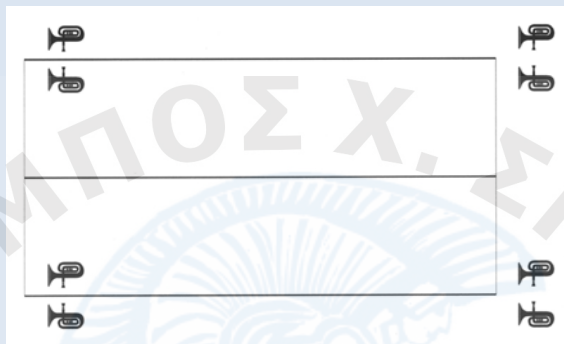
Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ δύο κατοπτρισμών και μιας μεταφοράς κατά διάστημα ίσον προς το μήκος της κυψελίδος.

Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδυνάμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d . Προκειμένου οι μελωδίες εκ διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρουσιάζουν μουσικήν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογωνίου κυψελίδος **pm** εις μονάδες χρόνου να ληφθεί ίσον προς d .

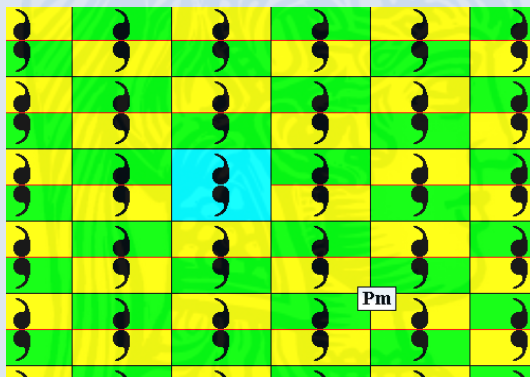
Εις το μέσον του πλάτους της κυψελίδος εμφανίζεται ένα αυτοδημιουργούμενον επίπεδον κατοπτρισμού m , λόγω των υπαρχόντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος, ισαπέχον εκ των υπαρχόντων δύο επιπέδων κατοπτρισμού m .

Εντός της ορθογωνίου κυψελίδος pm δημιουργούνται δύο μελωδίες (δύο τούμπες):-

Η ορθογώνιος κυψελίς pm κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η



Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας pm προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19^η, ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας pm δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.

77.50

71.50

65.50

77 76 77 79 81 82 81 81 79 79 81 79 79 77 79 79 77 76 7 77 76 76 77 76 7 76 74 74 73

F5 E5 F5 G5 A5 A#5 A5 G5 F5 G5 F5 G5 G5 F5 E5 F5 E5 D5 D5 C#5

67 65 64 62 61 62 64 65 64 65 64 65 64 65 64 67 69 67 67 69 6 67 65 69 70

F4 G4 F4 E4 D4 C# D4 E4 F4 E4 D4 E4 F4 G4 F4 E4 F4 G4 A4 A4 G4 F4 A4 A#4

57 57

A3 A3

Τρόπος: pm

Beat: 4/4 , Tempo: 100.0%

Διαδικασία υπ' αριθμόν 2: pg

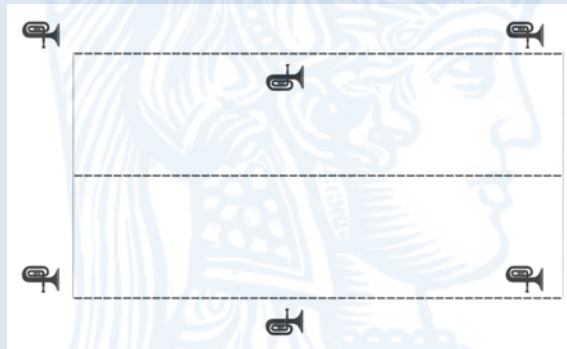
Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ δύο κατοπτρισμών μετ' ολισθήσεως κατά διάστημα $d/2$, ένθα d το χρονικόν διάστημα, κατά το οποίον διαρκεί η δεδομένη μελωδία.

Προκειμένου οι μελωδίες εκ διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρουσιάζουν μουσικήν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογωνίου κυψελίδος **pg** εις μονάδες χρόνου να ληφθεί ίσον προς $d + \frac{1}{2}d$.

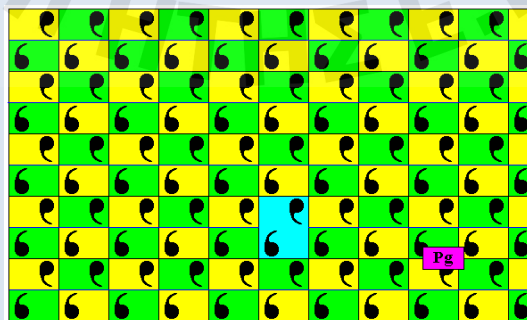
Εις το μέσον του πλάτους της κυψελίδος εμφανίζεται ένα αυτοδημιουργούμενον επίπεδον κατοπτρισμού ολισθήσεως **g**, λόγω των υπάρχοντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος, ισαπέχον εκ των υπάρχοντων δύο επιπέδων κατοπτρισμού **g**.

Εντός της ορθογωνίου κυψελίδος **pg** δημιουργούνται δύο μελωδίες (δύο τούμπες) Η δεύτερη μελωδία, η Inversus, η μετατοπισμένη, αρχίζει μετά χρόνον $\frac{1}{2}d$ από της ενάρξεως της πρώτης μελωδίας, της Primus, συνηχεί μετ' αυτής επί χρόνον $\frac{1}{2}d$ και μετά επί χρόνον $\frac{1}{2}d$ ακούγεται μόνη της.

Η ορθογώνιος κυψελίς **pg** κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η

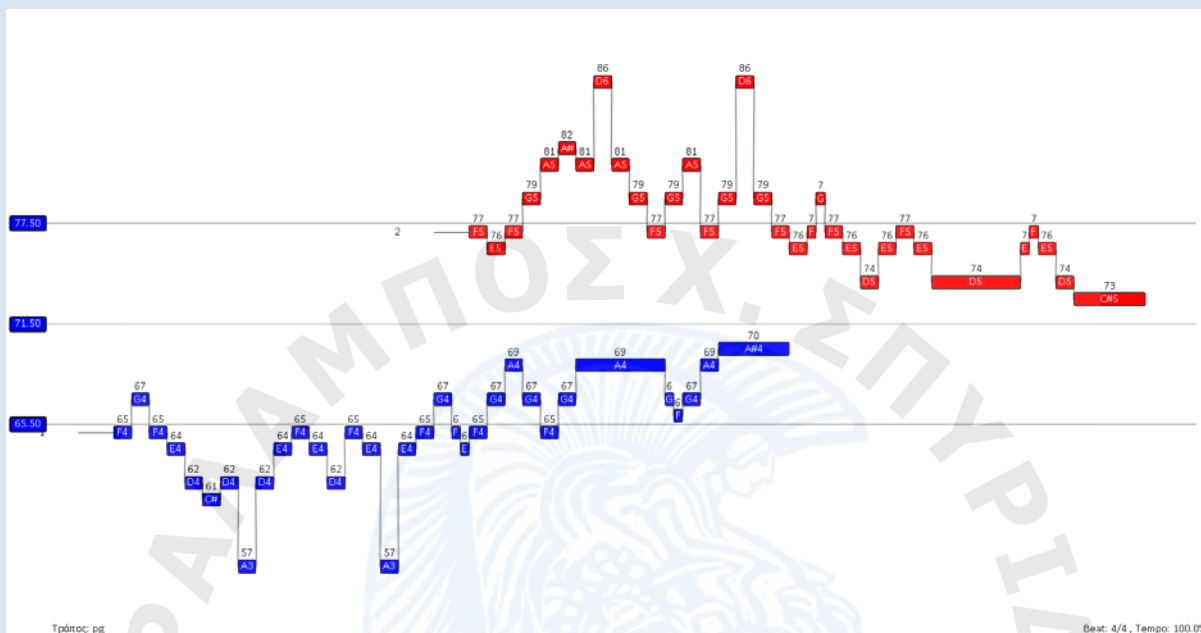


Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας **pg** προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19th, ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την δισδιάστατον ορθο-

γώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας **pg** δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.



Διαδικασία υπ' αριθμόν 3: r2mm ή rmm

Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ κατοπτρισμών επί κατόπτρων **m** ευρισκομένων κατά μήκος των τεσσάρων πλευρών της ορθογωνίου κυψελίδος.

Βαθμός πολλαπλότητας 4, ήτοι το σύνολον των ισοδυνάμων θέσεων λόγω συμμετρίας είναι τέσσερα.

Λόγω των υπάρχοντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος, ήτοι των δύο καθέτων μεταξύ των επιπέδων κατοπτρισμού, αυτοδημιουργούνται νέα στοιχεία συμμετρίας, όπως δύο μεσοκάθετα επίπεδα κατοπτρισμού προς τις πλευρές της κυψελίδος και εννέα άξονες περιστροφής δευτέρας

τάξεως, κάθετοι προς το επίπεδο της κυψελίδος και εις τις ανά δύο τομές των επιπέδων κατοπτρισμού m .

Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδύναμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d (σχήμα 7α).

Εντός της ορθογώνιου κυψελίδος $p2mm$ δημιουργούνται τέσσερις μελωδίες (τέσσερις τούμπες).

Προκειμένου οι μελωδίες εκ της αυτής κυψελίδος και εκ των διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρουσιάζουν μουσικὴν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογώνιου κυψελίδος $p2mm$ εις μονάδες χρόνου να ληφθῆ ἴσον προς $2d$.

Το ζεύγος των δύο επάνω μελωδιών, ακουόμενες εν συνεχεία, λόγω του επιλεγέντος μήκους της κυψελίδος, δημιουργεί μίαν καρκινικήν μελωδίαν διαρκείας $2d$.

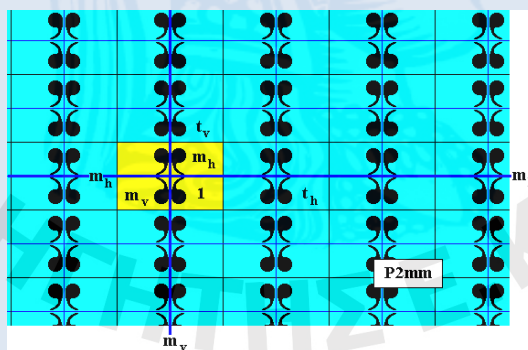
Ομοίως, ἴσης διαρκείας καρκινικήν μελωδίαν δημιουργοῦν και οι δύο κάτω μελωδίες, ακουόμενες εν συνεχεία.

Εν ἄλλοις λόγοις, ἔχομεν συνήχησιν δύο μελωδιών διαρκείας $2d$.

Ἡ ορθογώνιος κυψελίς $p2mm$ κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας εἶναι ἡ



Αντιπροσωπευτικόν ἐπίστρωμα ὑπὸ τοῦ ζωγράφου M. C. Escher κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας $p2mm$ προς κατανόησιν τοῦ τρόπου λειτουργίας αὐτῆς.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19^{IV} , ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικῆς συμμετρίας $p2mm$ δια του Λογισμικοῦ των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθεῖσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.

Διαδικασία υπ' αριθμόν 4: p2mg ή pmg

Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ κατοπτρισμών μετά συγχρόνων ολισθήσεων επί κατόπτρων ολισθήσεως **g**, ευρισκομένων κατά το πλάτος της κυψελίδος και εκ κατοπτρισμών επί δύο επιπέδων κατοπτρισμού **m**, καθέτων προς τα επίπεδα ολισθήσεως **g**.

Εκ της συλλειτουργίας των υπαρχόντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος αυτοδημιουργούνται και νέα στοιχεία συμμετρίας ούτως, ώστε τελικώς να υφίστανται εντός της κυψελίδος τρία επίπεδα κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g**, τρεις τριάδες αξόνων περιστροφής δευτέρας τάξεως και δύο επίπεδα κατοπτρισμού **m**. Συγκεκριμένως:

Το τρίτον επίπεδον κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g** είναι μεσοκάθετον επί το μήκος της κυψελίδος. Επί των τριών επιπέδων κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g** ευρίσκονται οι τριάδες των αξόνων περιστροφής κατ' ίσες αποστάσεις.

Τα δύο επίπεδα κατοπτρισμού **m** είναι παράλληλα προς το μήκος της κυψελίδος και διχοτομούν τις αποστάσεις των διαδοχικών αξόνων περιστροφής.

Ο βαθμός πολλαπλότητας είναι 4.

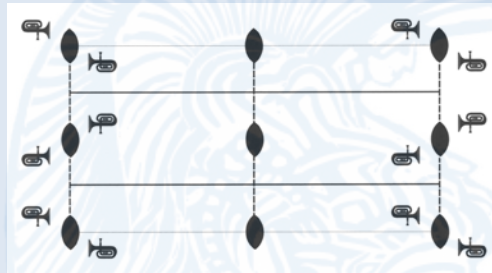
Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδυνάμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d .

Προκειμένου οι μελωδίες εκ της αυτής κυψελίδος και εκ των διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρουσιάζουν μουσικήν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογώνιου κυψελίδος $p2mg$ εις μονάδες χρόνου να ληφθεί ίσον προς $2d$.

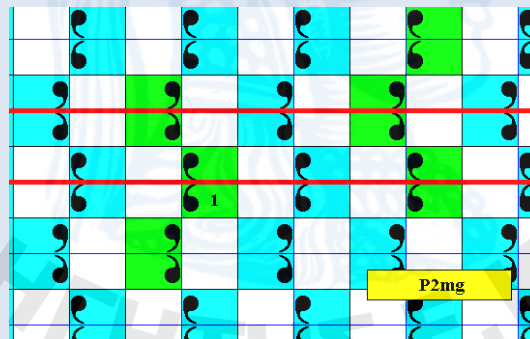
Εντός της ορθογώνιου κυψελίδος $p2mg$ δημιουργούνται τέσσερις μελωδίες (τέσσερις τούμπες). Οι δύο αριστερές μελωδίες συνηχούν, αρχίζουσες και καταλήγουσες συγχρόνως και ευθύς αμέσως αρχίζουν συνηχούσες οι δύο δεξιές μελωδίες.

Επί τη βάσει των παραγομένων μελωδιών δυνάμεθα να συνθέσωμεν μίαν δίφωνον μελωδίαν, την οποίαν διαδέχεται, άμα τη λήξει της, ετέρα δίφωνος μελωδία κατά τις προαναφερθείσες αρμονικές σχέσεις.

Η ορθογώνιος κυψελίς $p2mg$ κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η



Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την διςδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας $p2mg$ προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19^{IV} , ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την διςδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας $p2mg$ δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.

74:50

76 ES

73 CH5

75 CH5

70 A4

69 G4

67 G4

64

65:50

69

70

71

72

73

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93

94

95

96

97

98

99

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

386

387

388

389

390

391

392

393

394

395

396

397

398

399

400

401

402

403

404

405

406

407

408

409

410

411

412

413

414

415

416

417

418

419

420

421

422

423

424

425

426

427

428

429

430

431

432

433

434

435

436

437

438

439

440

441

442

443

444

445

446

447

448

449

450

451

452

453

454

455

456

457

458

459

460

461

462

463

464

465

466

467

468

469

470

471

472

473

474

475

476

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490

491

492

493

494

495

496

497

498

499

500

501

502

503

504

505

506

507

508

509

510

511

512

513

514

515

516

517

518

519

520

521

522

523

524

525

526

527

528

529

530

531

532

533

534

535

536

537

538

539

540

541

542

543

544

545

546

547

548

549

550

551

552

553

554

555

556

557

558

559

560

561

562

563

564

565

566

567

568

569

570

571

572

573

574

575

576

577

578

579

580

581

582

583

584

585

586

587

588

589

590

591

592

593

594

595

596

597

598

599

600

601

602

603

604

605

606

607

608

609

610

611

612

613

614

615

616

617

618

619

620

621

622

623

624

625

626

627

628

629

630

631

632

633

634

635

636

637

638

639

640

641

642

643

644

645

646

647

648

649

650

651

652

653

654

655

656

657

658

659

660

661

662

663

664

665

666

667

668

669

670

671

672

673

674

675

676

677

678

679

680

681

682

683

684

685

686

687

688

689

690

691

692

693

694

695

696

697

698

699

700

701

702

703

704

705

706

707

708

709

710

711

712

713

714

715

716

717

718

719

720

721

722

723

724

725

726

727

728

729

730

731

732

733

734

735

736

737

738

739

740

741

742

743

744

745

746

747

748

749

750

751

752

753

754

755

756

757

758

759

760

761

762

763

764

765

766

767

768

769

770

771

772

773

774

775

776

777

778

779

780

781

782

783

784

785

786

787

788

789

790

791

792

793

794

795

796

797

798

799

800

801

802

803

804

805

806

807

808

809

810

811

812

813

814

815

816

817

818

819

820

821

822

823

824

825

826

827

828

829

830

831

832

833

834

835

836

837

838

839

840

841

842

843

844

845

846

847

848

849

850

851

852

853

854

855

856

857

858

859

860

861

862

863

864

865

866

867

868

869

870

871

872

873

874

875

876

877

878

879

880

881

882

883

884

885

886

887

888

889

890

891

892

893

894

895

896

897

898

899

900

901

902

903

904

905

906

907

908

909

910

911

912

913

914

915

916

917

918

919

920

921

922

923

924

925

926

927

928

929

930

931

932

933

934

935

936

937

938

939

940

941

942

943

944

945

946

947

948

949

950

951

952

953

954

955

956

957

958

959

960

961

962

963

964

965

966

967

968

969

970

971

972

973

974

975

976

977

978

979

980

981

982

983

984

985

986

987

988

989

990

991

992

993

994

995

996

997

998

999

1000

1001

1002

1003

1004

1005

1006

1007

1008

1009

1010

1011

1012

1013

1014

1015

1016

1017

1018

1019

1020

1021

1022

1023

1024

1025

1026

1027

1028

1029

1030

1031

1032

1033

1034

1035

1036

1037

1038

1039

1040

1041

1042

1043

1044

1045

1046

1047

1048

1049

1050

1051

1052

1053

1054

1055

1056

1057

1058

1059

1060

1061

1062

1063

1064

1065

1066

1067

1068

1069

1070

1071

1072

1073

1074

1075

1076

1077

1078

1079

1080

1081

1082

1083

1084

1085

1086

1087

1088

1089

1090

1091

1092

1093

1094

1095

1096

1097

1098

1099

1100

1101

1102

1103

1104

1105

1106

1107

1108

1109

1110

1111

1112

1113

1114

1115

1116

1117

1118

1119

1120

1121

1122

1123

1124

1125

1126

1127

1128

1129

1130

1131

1132

1133

1134

1135

1136

1137

1138

1139

1140

1141

1142

1143

1144

1145

1146

1147

1148

1149

1150

1151

1152

1153

1154

1155

1156

1157

1158

1159

1160

1161

1162

1163

1164

1165

1166

1167

1168

1169

1170

1171

1172

1173

1174

1175

1176

1177

1178

1179

1180

1181

1182

1183

1184

1185

1186

1187

1188

1189

1190

1191

1192

1193

1194

1195

1196

1197

1198

1199

1200

1201

1202

1203

1204

1205

1206

1207

1208

1209

1210

1211

1212

1213

1214

1215

1216

1217

1218

1219

1220

1221

1222

1223

1224

1225

1226

1227

1228

1229

1230

1231

1232

1233

1234

1235

1236

1237

1238

1239

1240

1241

1242

1243

1244

1245

1246

1247

1248

1249

1250

1251

1252

1253

1254

1255

1256

1257

1258

1259

1260

1261

1262

1263

1264

1265

1266

1267

1268

1269

1270

1271

1272

1273

1274

1275

1276

1277

1278

1279

1280

1281

1282

1283

1284

1285

1286

1287

1288

1289

1290

1291

1292

1293

1294

1295

1296

1297

1298

1299

1300

1301

1302

1303

1304

1305

1306

1307

1308

1309

1310

1311

1312

1313

1314

1315

1316

1317

1318

1319

1320

1321

1322

1323

1324

1325

1326

1327

1328

1329

1330

1331

1332

1333

1334

1335

1336

1337

1338

1339

1340

1341

1342

1343

1344

1345

1346

1347

1348

1349

1350

1351

1352

1353

1354

1355

1356

1357

1358

1359

1360

1361

1362

1363

1364

1365

1366

1367

1368

1369

1370

1371

1372

1373

1374

1375

1376

1377

1378

1379

1380

1381

1382

1383

1384

1385

Διαδικασία υπ' αριθμόν 5: p2gg ή pgg

Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ δύο καθέτων κατοπτρισμών μετ' ολισθήσεων g . Τα δύο οριζόντια επίπεδα κατοπτρισμού-ολισθήσεως g απέχουν εκ της γειτονικής των μεγάλης πλευράς της κυψελίδος απόστασιν ίσην προς το $\frac{1}{4}$ του πλάτους της κυψελίδος και τα δύο κατακόρυφα επίπεδα κατοπτρισμού-ολισθήσεως g απέχουν εκ της γειτονικής των μικρής πλευράς της κυψελίδος απόστασιν ίσην προς το $\frac{1}{4}$ του μήκους της κυψελίδος.

Εκ της συλλειτουργίας των υπάρχοντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος αυτοδημιουργούνται ως νέα στοιχεία συμμετρίας εννέα άξονες περιστροφής δευτέρας τάξεως, διατεταγμένοι εις τρεις ισαπέχουσες τριάδες και κατά το μήκος και κατά το πλάτος της κυψελίδος.

Ο βαθμός πολλαπλότητος είναι 4.

Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδυνάμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d . Προκειμένου οι μελωδίες εκ της αυτής κυψελίδος και εκ των διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρου-

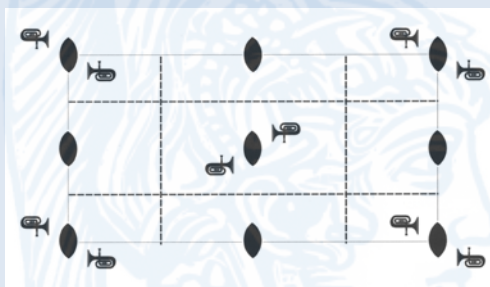
σιάζουν μουσικήν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογωνίου κυψελίδος **p2gg** εις μονάδες χρόνου να ληφθεί ίσον προς $2d$.

Η επάνω αριστερά και η κάτω δεξιά τούμπες εντός της ορθογωνίου κυψελίδος **p2gg** συνιστούν δύο μελωδίες ηχούσες η μία εν συνεχεία της άλλης και επί χρόνον d μονάδων εκάστη.

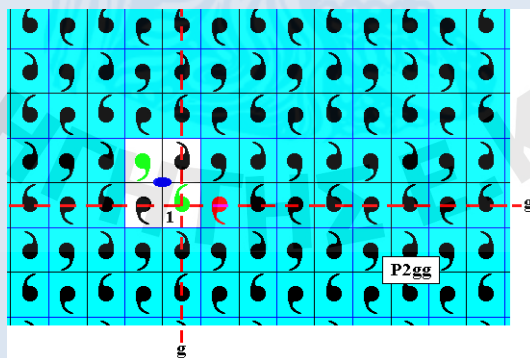
Οι δύο εις το κέντρον της ορθογωνίου κυψελίδος **p2gg** ευρισκόμενες τούμπες συνηχούν επί χρόνον d μονάδων. Η συγκεκριμένη συνηχήσις, λόγω της διαδικασίας ολισθήσεως **g**, αρχίζει να λειτουργεί, όταν η πρώτη μελωδία φθάσει στο $\frac{1}{2}d$ της διάρκειάς της και συνηχεί και μετ' αυτής επί χρόνον $\frac{1}{2}d$. Αμέσως παύει ηχούσα η μελωδία της άνω αριστερής τούμπας και αρχίζει να ηχεί η μελωδία της κάτω δεξιάς τούμπας και, μάλιστα, εν συνηχήσει επί χρόνον $\frac{1}{2}d$ μετά της διφωνίας των δύο μεσαίων τουμπών. Κατά το τελευταίον χρονικόν διάστημα των $\frac{1}{2}d$ μονάδων χρόνου ηχεί μόνη της η μελωδία της κάτω δεξιάς τούμπας.

Εντός της ορθογωνίου κυψελίδος **p2gg** δημιουργούνται τέσσερις μελωδίες (τέσσερις τούμπες).

Η ορθογώνιος κυψελίς **p2gg** κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η



Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας **p2gg** προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φύγκα, την 19^η, ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας **p2gg** δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.

Διαδικασία υπ' αριθμόν 6: cm

Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ κατοπτρισμού **m** και εκ παραλλήλου κατοπτρισμού μετ' ολισθήσεως **g** κατά διάστημα $d/2$, ένθα d το χρονικόν διάστημα d , κατά το οποίον διαρκεί η δεδομένη μελωδία.

Εκ της συλλειτουργίας των υπάρχόντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος αυτοδημιουργείται μεσοκάθετον κατά το πλάτος της κυψελίδος νέον επίπεδον κατοπτρισμού **m**.

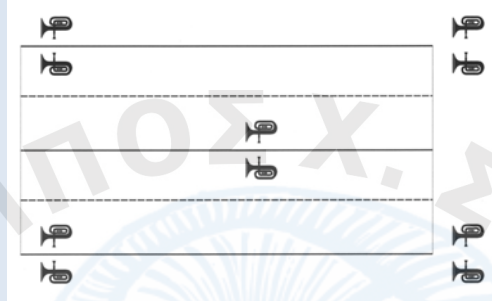
Εκ των πέντε παραλλήλων επιπέδων κατοπτρισμού (τρία απλού κατοπτρισμού **m** και δύο κατοπτρισμού μετ' ολισθήσεως **g**) το πλάτος της κυψελίδος χωρίζεται εις τέσσερα ίσα τμήματα. Συνεπώς, ανά δύο γειτονικά τα πέντε επίπεδα κατοπτρισμού απέχουν κατά το $\frac{1}{4}$ του πλάτους της κυψελίδος.

Ο βαθμός πολλαπλότητος είναι 4.

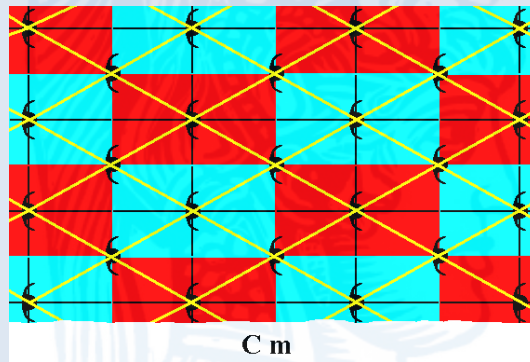
Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδύναμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d .

Προκειμένου οι μελωδίες εκ της αυτής κυψελίδος και εκ των διαδοχικών κυψελίδων κατά την οριζόντιον διεύθυνσιν να παρουσιάζουν μουσικήν συνέχειαν, αποφασίζομεν το μήκος της ορθογώνιου κυψελίδος **cm** εις μονάδες χρόνου να ληφθεί ίσον προς $d + \frac{1}{2}d$.

Εντός της ορθογώνιου κυψελίδος **cm** δημιουργούνται τέσσερις μελωδίες.
 Η ορθογώνιος κυψελίς **cm** κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η



Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την διςδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας **cm** προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19^η, ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την διςδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας **cm** δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.



Διαδικασία υπ' αριθμόν 7: c2mm ή cmm

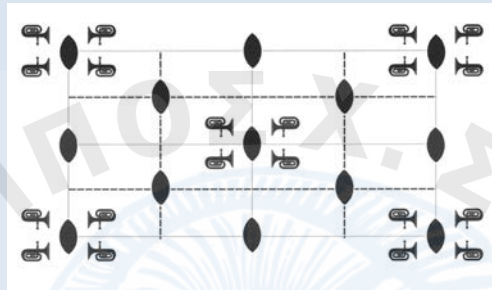
Σύνθετος διαδικασία συμμετρίας εκ περιστροφών περίξ αξόνων δευτέρας τάξεως εις τις κορυφές της ορθογωνίου κυψελίδος και κατοπτρισμών μετά συγχρόνων ολισθήσεων επί κατόπτρων ολισθήσεως **g** καθέτων μεταξύ των. Τα δύο οριζόντια επίπεδα κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g** απέχουν εκ της γειτονικής των μεγάλης πλευράς της κυψελίδος απόστασιν ίσην προς το $\frac{1}{4}$ του πλάτους της κυψελίδος και τα δύο κατακόρυφα επίπεδα κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g** απέχουν εκ της γειτονικής των μικρής πλευράς της κυψελίδος απόστασιν ίσην προς το $\frac{1}{4}$ του μήκους της κυψελίδος.

Εκ της συλλειτουργίας των υπάρχόντων στοιχείων συμμετρίας της κυψελίδος αυτοδημιουργούνται ως νέα στοιχεία συμμετρίας δεκατρείς άξονες περιστροφής δευτέρας τάξεως κάθετοι προς το επίπεδον της κυψελίδος. Οι οκτώ εξ αυτών, ανά τρεις ευρίσκονται εις τις τέσσερις πλευρές της κυψελίδος, ένας ευρίσκεται εις το κέντρον της κυψελίδος και οι τέσσερις απομείναντες ευρίσκονται εις τις τομές των επιπέδων κατοπτρισμού-ολισθήσεως **g**.

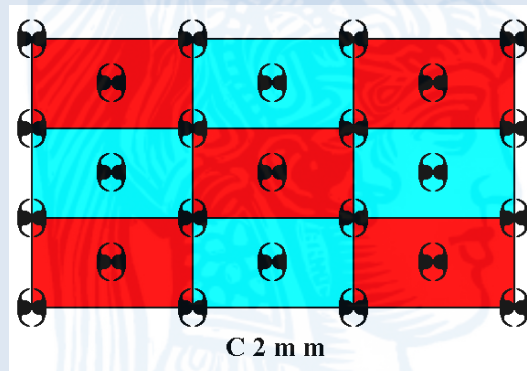
Ο βαθμός πολλαπλότητος είναι 8.

Έστω ότι η τούμπα, το αντιπροσωπευτικόν σημείον μιας ισοδυνάμου θέσεως, παριστά μίαν μελωδίαν, η εκτέλεσις της οποίας διαρκεί χρονικόν διάστημα d . Το μήκος της ορθογωνίου κυψελίδος **c2mm** εκλαμβάνεται –κατά τα προηγούμενα- ίσον προς $2d$ εις μονάδες χρόνου, λόγω της υπάρξεως των επιπέδων ολισθήσεως g .

Εντός της επιπέδου ορθογωνίου κυψελίδος εμπεριέχονται οκτώ μελωδίες (οκτώ τούμπες). Η ορθογώνιος κυψελίς **c2mm** κατά την Θεωρίαν της Συμμετρίας είναι η



Αντιπροσωπευτικόν επίστρωμα υπό του ζωγράφου M. C. Escher κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν συμμετρίας **c2mm** προς κατανόησιν του τρόπου λειτουργίας αυτής.



Το δεύτερον εκ των τεσσάρων θεμάτων, των εμφανιζομένων εις την τελευταίαν σωζομένην ανολοκλήρωτον (;) φούγκα, την 19th, ζωγραφισθέν και εναρμονισθέν κατά την δισδιάστατον ορθογώνιον διαδικασίαν της μουσικής συμμετρίας **c2mm** δια του Λογισμικού των Μ. Γ. Χουρδάκη και Χ. Χ. Σπυρίδη. Κατά τους κατοπτρισμούς ως προς τα οριζόντια επίπεδα οι τονικές καθίστανται δεσπόζουσες και οι εκ του κατοπτρισμών δημιουργηθείσες ηυξημένες τρίτες ηλαττώθησαν.

The image displays a musical score for guitar, featuring a complex arrangement of notes and rests across multiple staves. The notation includes various rhythmic values and accidentals, with some notes highlighted in different colors (yellow, blue, red, green). The score is set in a 4/4 time signature with a tempo of 100.0%. The key signature is indicated as two flats (B-flat and E-flat). The score is divided into sections, with some parts marked with '8' and others with '6' or '7'. The watermark in the background is a circular emblem containing a profile of Athena, with the text 'ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Κ.Π.Α.' (Charalambos, Professor of E.K.P.A.) around it.

Τρόπος: c2mm

Beat: 4/4, Tempo: 100.0%

The image displays a musical score for a piano piece, organized into two systems of staves. The first system consists of eight staves, and the second system also consists of eight staves. The music is written in a minor key (indicated by a flat sign) and common time (indicated by a 'C' time signature). The notation includes various rhythmic values such as eighth and sixteenth notes, as well as rests. A large, semi-transparent watermark reading 'ΧΑΡΜΠΟΣ Χ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ' is overlaid across the center of the page, partially obscuring the musical notation.



Εν κατακλιῖδι, δυνάμεθα εφαρμόζοντες απλῶς τους νόμους της Γεωμετρικῆς Οπτικῆς κατὰ την Κρυσταλλοδομήν, να εναρμονίσωμεν εντυπωσιακῶς και κατὰ την αισθητικῆν αποδεκτῶς οιαδήποτε μελωδίαν, μη μεριμνούντες ρητῶς περί συγχορδιῶν παρά μόνον περί των διαστάσεων της δισδιαστάτου κυψελίδος.

Σας Ευχαριστώ.