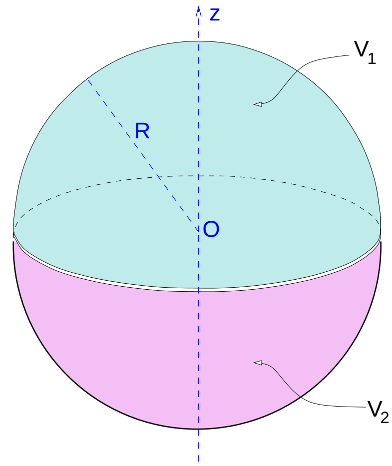
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φυσικής
Επί πτυχίω εξετάσεις Ηλεκτρομαγνητισμού I, 4 Μαΐου 2011
Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες, Καλή επιτυχία

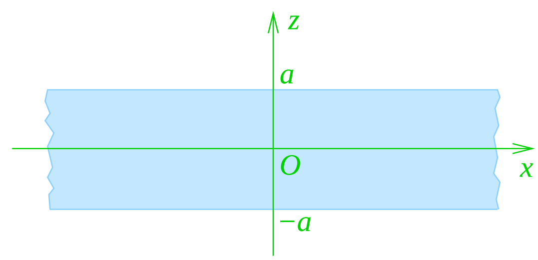
Θέμα 1$^{\text{ο}}$:



Δύο μεταλλικά ημισφαιρικά κελύφη ακτίνας R προσκολλώνται με λεπτή μόνωση, δημιουργώντας έτσι ένα σφαιρικό κέλυφος. Το δυναμικό του ενός ημισφαιρίου είναι V_1 και του άλλου V_2, με $\lim_{r\to\infty} V = 0$.
Να βρεθεί το δυναμικό μέσα και έξω από το κέλυφος.
Υπόδειξη: Ένας τρόπος επίλυσης βασίζεται στην αρχή της υπέρθεσης, αφού γραφούν τα δυναμικά των ημισφαιρίων σαν $V_1 = \dfrac{V_1+V_2}{2} + \dfrac{V_1-V_2}{2}$ και $V_2 = \dfrac{V_1+V_2}{2} - \dfrac{V_1-V_2}{2}$.
Για τα πολυώνυμα Legendre δίνονται $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$,
$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_n(x)dx = \dfrac{2}{2n+1}\delta_{\ell n}$,

$$\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } n=0 \\ 0\,, & \text{αν } n \text{ άρτιο διάφορο του μηδενός} \\ \dfrac{1}{n\,(n+1)}P_n'(0)\,, & \text{αν } n \text{ περιττό (τα } P_n'(0) \text{ θεωρούνται γνωστά)} \end{cases}$$

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

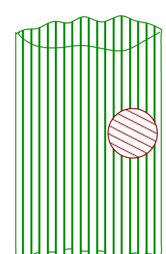


Μια πλάκα απείρων διαστάσεων και πάχους $2a$ έχει επιφάνειες τα επίπεδα $z=-a$ και $z=a$. Η πλάκα αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό και έχει αποκτήσει μόνιμη πόλωση $\vec{P} = P_0 \dfrac{z^2}{a^2}\hat{z}$.
(α) Ποια τα χωρικά και επιφανειακά δέσμια φορτία;
(β) Αφού δείξετε ότι το πεδίο $\vec{D}$ είναι μηδέν παντού, βρείτε το πεδίο $\vec{E}$ που δημιουργεί η πλάκα.
(γ) Ποια η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο επιφανειών της πλάκας $z=a$ και $z=-a$;

Θέμα 3$^{\text{ο}}$:

Σφαίρα ακτίνας R φέρει μόνιμη, ομοιόμορφη ηλεκτρική πόλωση $\vec{P} = P_0\hat{z}$ και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z (που περνά από το κέντρο της) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega_0\hat{z}$.
(α) Δείξτε ότι το επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα λόγω των φορτίων πόλωσης είναι $\vec{K} = P_0\omega_0 R\sin\theta\cos\theta\ \hat{\phi}$.
(β) Αν το διανυσματικό δυναμικό έχει μορφή $\vec{A} = A_\phi\hat{\phi}$ με $A_\phi = \begin{cases} a_2 r^2 \sin\theta\cos\theta\,, r<R \\ \dfrac{b_2}{r^3}\sin\theta\cos\theta\,, r>R \end{cases}$ εφαρμόστε συνοριακές συνθήκες για να βρείτε τους συντελεστές a_2 και b_2.
Δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{\nabla}\times\left(A_\phi\hat{\phi}\right) = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(A_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}\ \hat{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\ \hat{\theta}$.

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:



Κύλινδρος απείρου μήκους είναι ομογενώς μαγνητισμένος με μαγνήτιση $\vec{M}_\kappa$ παράλληλη στον άξονά του. Μέσα στον κύλινδρο σμιλεύουμε μια σφαιρική κοιλότητα και στη θέση της τοποθετούμε ομογενώς μαγνητισμένη σφαίρα, με μαγνήτιση $\vec{M}$. Ποια πρέπει να είναι η $\vec{M}$ (για δεδομένη $\vec{M}_\kappa$) ώστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας να είναι μηδενικό;
Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστές τις σχέσεις $\vec{B}_{\sigma\phi} = (2/3)\mu_0\vec{M}_{\sigma\phi}$, $\vec{B}_\kappa = \mu_0\vec{M}_\kappa$ που ισχύουν στο εσωτερικό ομογενώς μαγνητισμένης σφαίρας και κυλίνδρου απείρου μήκους, αντίστοιχα.