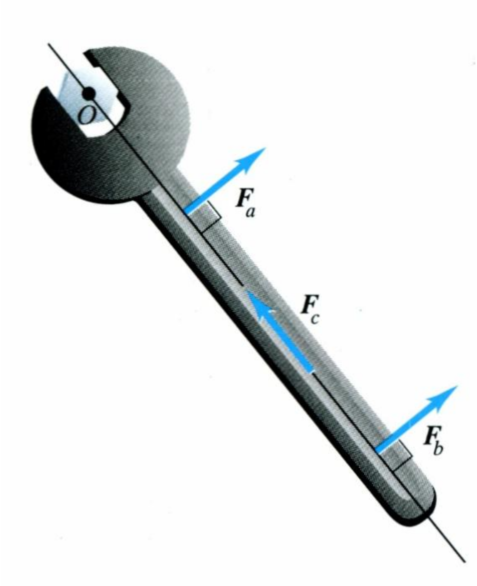
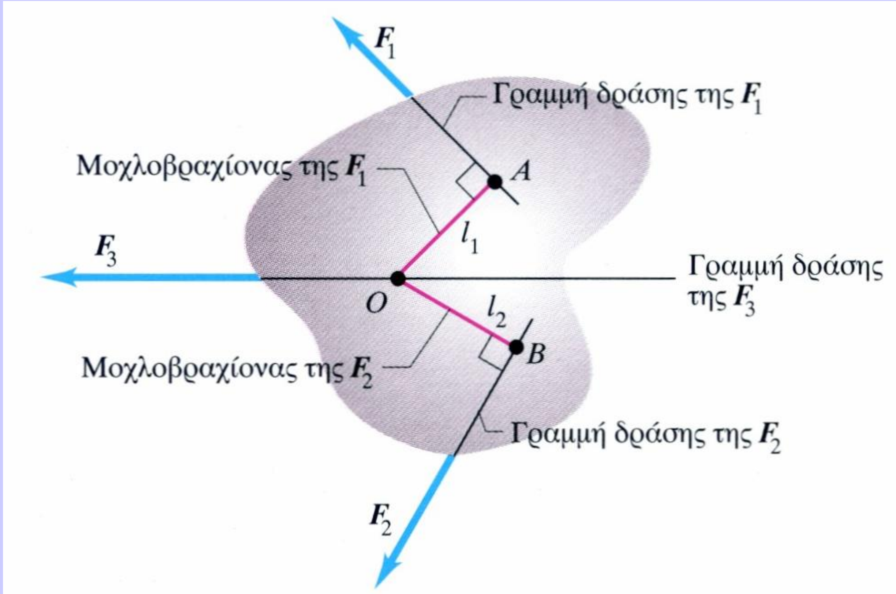
ΡΟΠΗ

Οι τρεις διαφορετικές δυνάμεις δεν έχουν όλες την ίδια ικανότητα να περιστρέψουν το κλειδί (γύρω από το *O*) παρά το ότι έχουν το ίδιο μέτρο.

Το ποσοτικό μέτρο της ικανότητας μιας δύναμης για πρόκληση ή μετατροπή της στροφικής κίνησης ενός σώματος ονομάζεται *Ροπή*.



$$\tau = Fl.$$



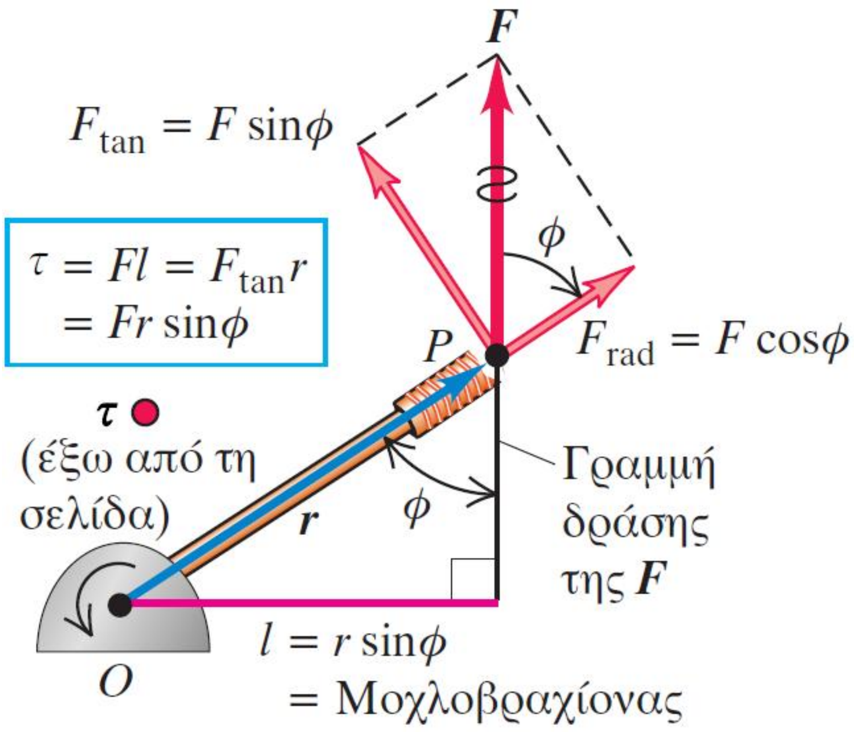
Η ροπή ορίζεται πάντα ως προς ένα σημείο (συχνά αυτό είναι η αρχή των αξόνων).

Μοχλοβραχίονας ονομάζεται η κάθετη απόσταση από το σημείο *O*.

$$\tau_1 = +F_1 l_1,$$

$$\tau_2 = -F_2 l_2.$$

Η δύναμη $\boldsymbol{F}_1$ τείνει να προκαλέσει στροφή *αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού* γύρω από το *O*, και η $\boldsymbol{F}_2$ τείνει να προκαλέσει στροφή *κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού*. Για να διακρίνουμε ανάμεσα στις δύο αυτές δυνατότητες θα χρησιμοποιούμε συνήθως την εξής σύμβαση: *οι ροπές που τείνουν να προκαλέσουν στροφή αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού θα θεωρούνται θετικές, ενώ οι ροπές που τείνουν να προκαλέσουν στροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού θα θεωρούνται αρνητικές.*



$$\tau = F_{tan} r = r(F \sin\phi) = Fl.$$

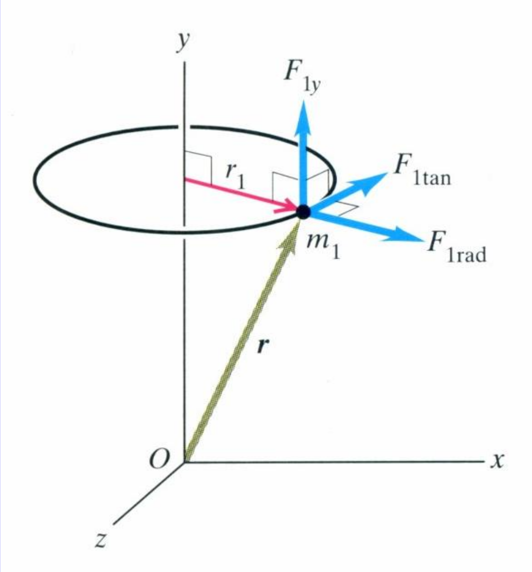
Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει το μέτρο της ροπής. Το διάνυσμα της ροπής δίνεται από την παρακάτω εξίσωση.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}.$$

Ποια είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της ροπής; Η διεύθυνση είναι παράλληλη με τον άξονα περιστροφής. Η φορά καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Γενικά, συνήθως μας ενδιαφέρει η συνιστώσα της ροπής που είναι παράλληλη με δεδομένο άξονα περιστροφής.

Η μονάδα ροπής στο σύστημα SI είναι το newton–μέτρο (νιούτον–μέτρο). Στη μελέτη του έργου και της ενέργειας που προηγήθηκε στον τόμο αυτό ο συνδυασμός αυτός αποκλήθηκε *joule* (τζουλ). Η ροπή όμως *δεν* είναι έργο, *ούτε* ενέργεια, γι' αυτό το λόγο πρέπει να εκφράζεται σε newton-μέτρα και όχι σε joules.

Για τον υπολογισμό της ροπής της δύναμης της βαρύτητας σε στερεό σώμα, στην επιφάνεια της γης, θεωρούμε ότι όλο το βάρος του σώματος ασκείται στο κέντρο μάζας του.



Θεωρούμε περιστροφή σώματος γύρω από σταθερό άξονα y. Η δύναμη σε ένα τυχαίο σημείο του σώματος με στοιχειώδη μάζα m_1 αναλύεται σε τρεις συνιστώσες. Μόνο η $F_{1\tan}$ έχει μη μηδενική ροπή για περιστροφή γύρω από τον άξονα y.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$F_{1\tan} = m_1 a_{1\tan}. \Rightarrow F_{1\tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha. \Rightarrow \tau_1 = I_1 \alpha.$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \ldots,$$

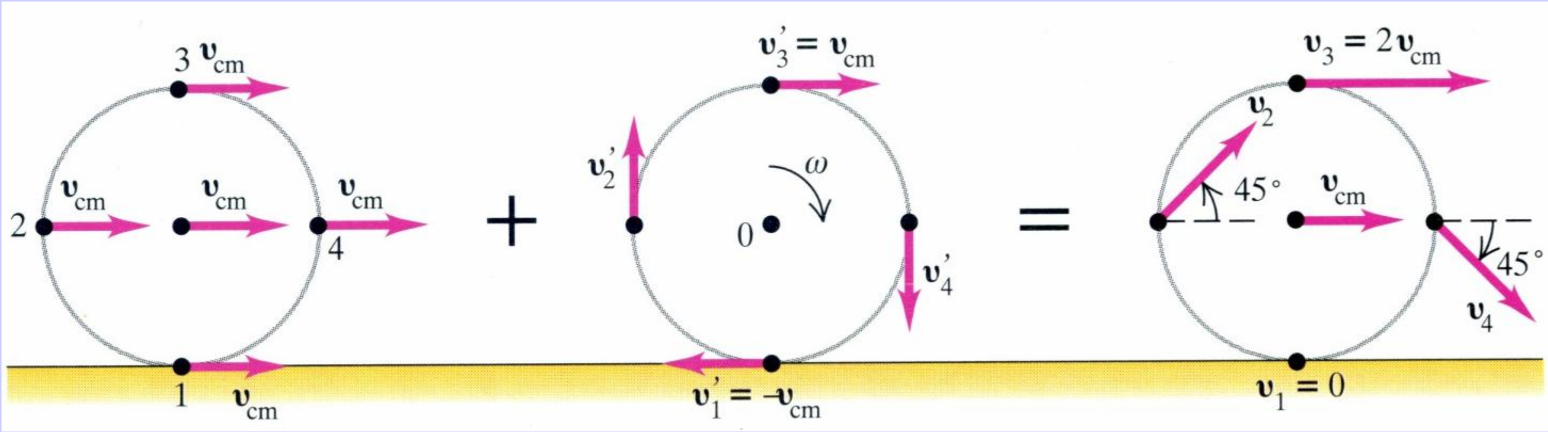
$$\Sigma\tau_i = (\Sigma m_i r_i^2)\alpha.$$

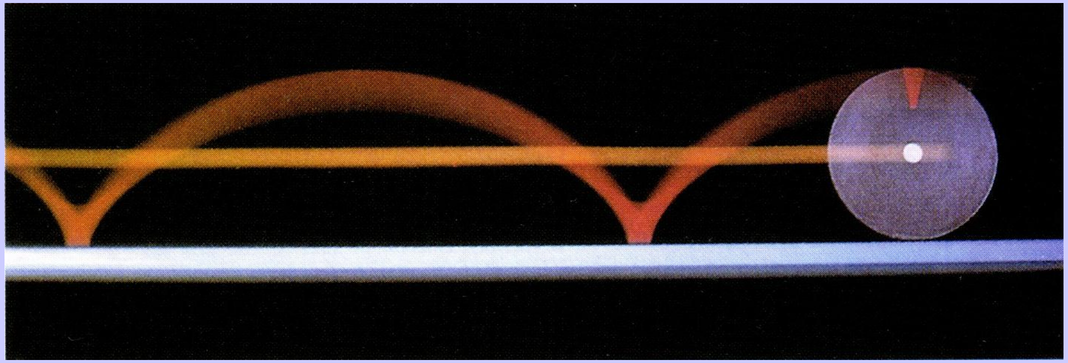
$$\Sigma\tau = I\alpha.$$

- **Η παραπάνω εξίσωση είναι το στροφικό ανάλογο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Στην εξίσωση υπεισέρχονται μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις. Η συνολική ροπή όλων των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα.**

- **Η εξίσωση ισχύει για περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα. Ισχύει επίσης για περιστροφή γύρω από κινούμενο άξονα, με σταθερή διεύθυνση, που περνά από το κέντρο μάζας του σώματος.**

Κάθε κίνηση ενός στερεού σώματος μπορεί να περιγραφεί σαν ένας συνδυασμός της γραμμικής κίνησης του κέντρου μάζας και της περιστροφής περί άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας. Παράδειγμα: τροχός που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει.



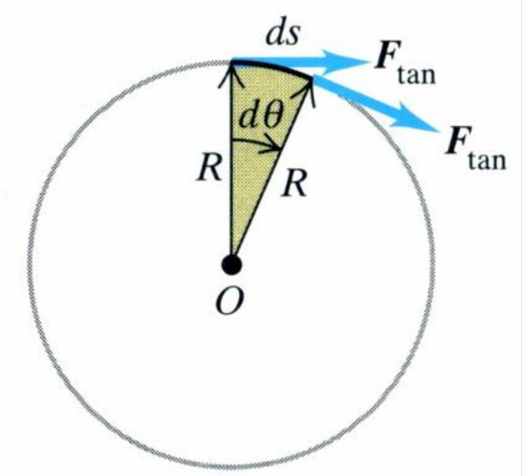


$$K = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^{\;2} + \tfrac{1}{2} I_{cm} \omega^2.$$

Η ολική κινητική ενέργεια ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας και της κινητικής ενέργειας της περιστροφής γύρω απ’ το κέντρο μάζας.
Η σχέση αυτή ισχύει γενικά για οποιοδήποτε στερεό σώμα και οποιαδήποτε είδους κίνηση.

ΕΡΓΟ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

$$dW = F_{tan} R\, d\theta. \Rightarrow dW = \tau\, d\theta. \Rightarrow W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta.$$



Αν η ροπή είναι σταθερή:

$$W = \tau\,(\theta_2 - \theta_1) = \tau\,\Delta\theta.$$

Όταν η ροπή παράγει έργο επί σώματος η κινητική ενέργεια του σώματος μεταβάλλεται.

$$\tau\, d\theta = (I\alpha)\, d\theta = I\,\frac{d\omega}{dt}\, d\theta = I\,\frac{d\theta}{dt}\, d\omega = I\omega\, d\omega.$$

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2} I\omega_2^{\,2} - \tfrac{1}{2} I\omega_1^{\,2}.$$

Θεώρημα έργου-ενέργειας στην περιστροφική κίνηση

Ισχύς (ρυθμός παραγωγής έργου)

$$\frac{dW}{dt} = \tau\,\frac{d\theta}{dt}. \Rightarrow P = \tau\omega.$$

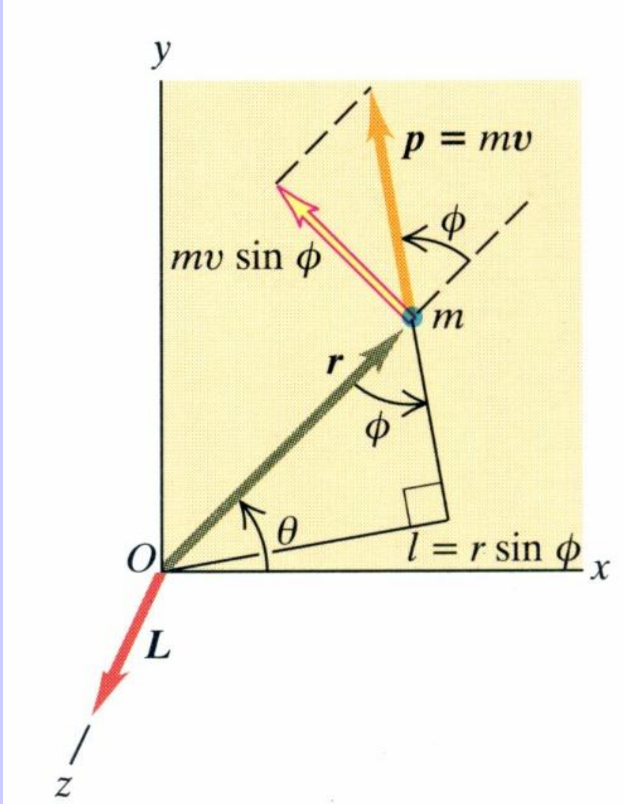
ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Για ένα σωμάτιο με μάζα m, ταχύτητα υ, ορμή p, και διάνυσμα θέσης r ως προς την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς η στροφορμή του είναι:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}.$$

Η διεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο των διανυσμάτων r και υ.

Η μονάδα μέτρησης της στροφορμής στο σύστημα SI είναι το 1 kg m^2/s



Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.$$

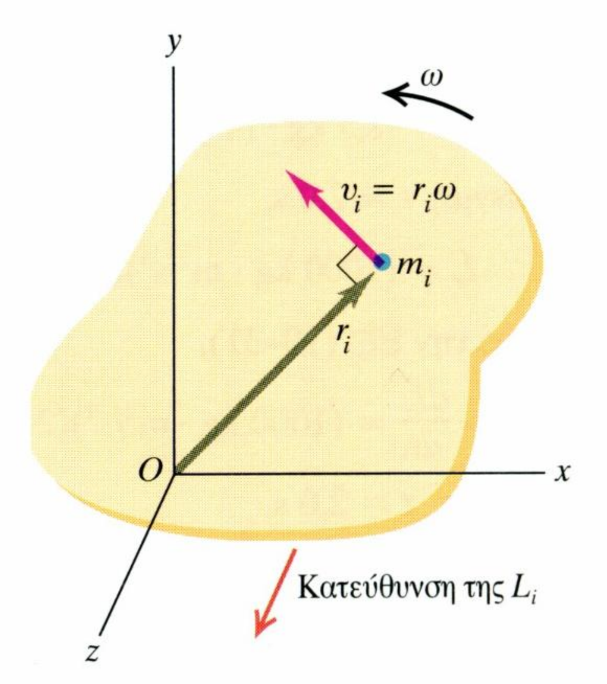
μέτρο στροφορμής

$$L = mvr \sin\phi = mvl.$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}.$$

Ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σωματίου ισούται με τη ροπή της συνολικής δύναμης που δρα πάνω του.

Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *z* που είναι άξονας συμμετρίας.



Στροφορμή σημειακής μάζας m_i στερεού σώματος:

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2\omega.$$

Άθροισμα σε όλη τη μάζα του σώματος:

$$L = \Sigma L_i = (\Sigma m_i r_i^2)\omega = I\omega.$$

Όταν ένα ομογενές στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας τότε η στροφορμή του έχει διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας και το μέτρο της είναι:

$$L = I\omega.$$

(Ισχύει μόνο για περιστροφή γύρω από άξονα συμμετρίας)

$$\Sigma \boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}. \quad \Rightarrow \quad \Sigma \tau = I\alpha,$$

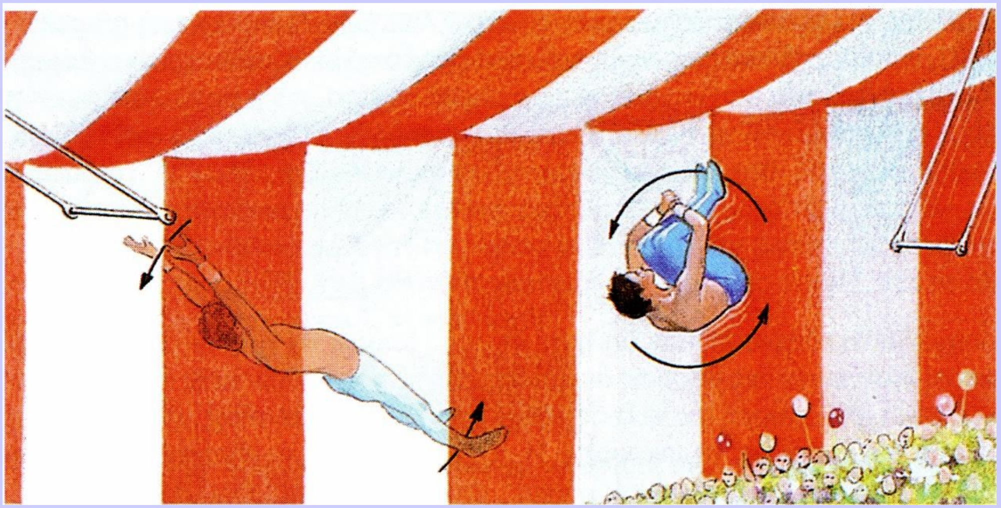
ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Όταν το άθροισμα των ροπών όλων των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν σε ένα σύστημα είναι μηδενικό, τότε η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Η ολική στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι σταθερή.

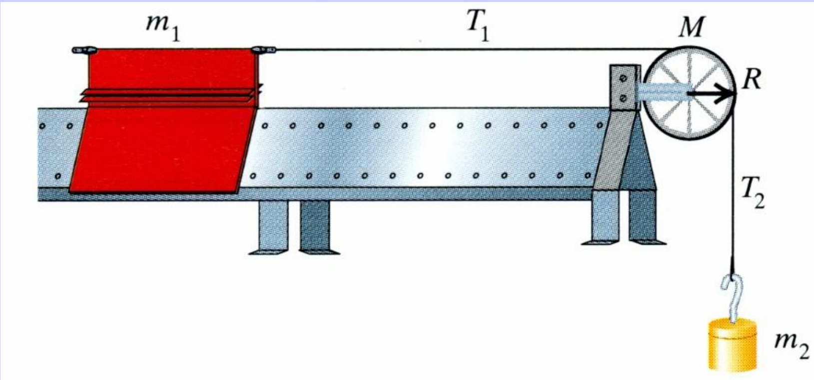
Παράδειγμα: ακροβάτης



$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Δρομέας κινείται χωρίς τριβή.
Νήμα τεντωμένο, χωρίς μάζα.

α) ποια είναι η επιτάχυνση κάθε σώματος;
β) ποια είναι η τάση του νήματος στο οριζόντιο και κάθετο τμήμα του;



$$\Sigma F_x = T_1 = m_1 a_1.$$
$$\Sigma F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2.$$

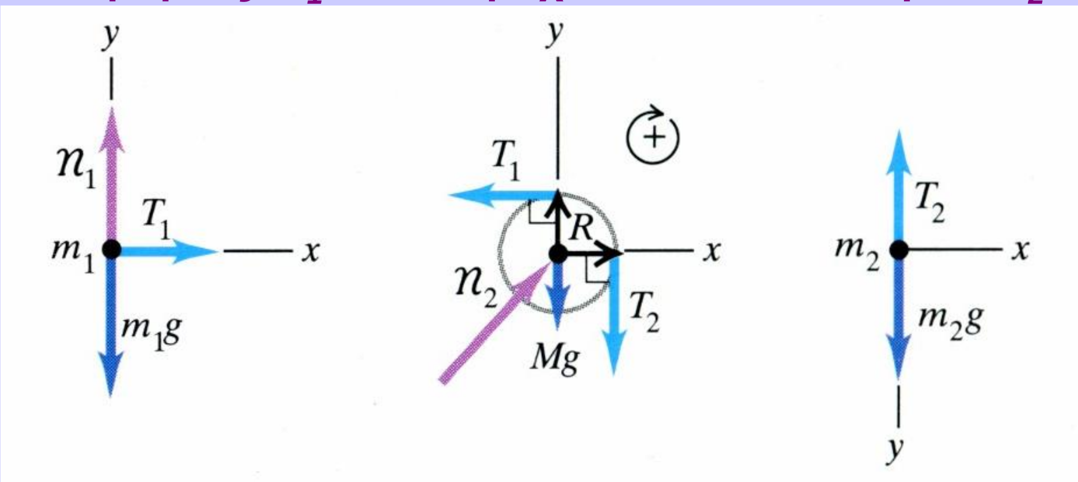
$$\Sigma \tau = T_2 R - T_1 R = I\alpha = (MR^2)\alpha.$$

$$a_1 = a_2 = R\alpha.$$

$$T_1 = m_1 a_1,$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a_1,$$
$$T_2 - T_1 = M a_1.$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ:

Δρομέας m_1 | **Τροχαλία** | **Βαρίδι m_2**



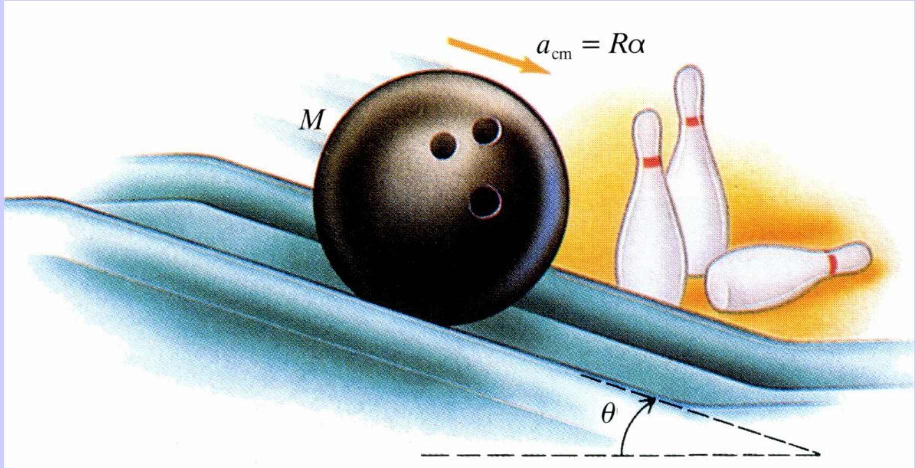
$$a_1 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M}.$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M},$$

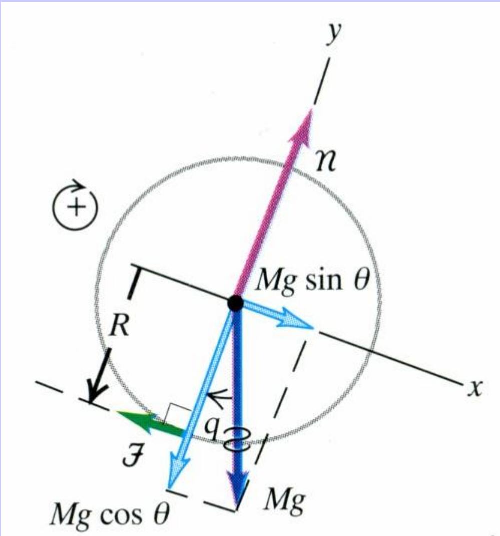
$$T_2 = \frac{(m_1 + M) m_2 g}{m_1 + m_2 + M}.$$

Μπάλα του μπόουλινγκ κυλάει, χωρίς να ολισθαίνει (ομογενής σφαίρα).

Ποια είναι η επιτάχυνσή της;



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ



Κίνηση κέντρου μάζας και περιστροφή γύρω απ' το κέντρο μάζας:

$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - \mathcal{F} = Ma_{cm},$$
$$\Sigma\tau = \mathcal{F}R = I\alpha = (\tfrac{2}{5}MR^2)\alpha.$$

κύλιση: $a_{cm} = R\alpha.$

Λύση συστήματος τριών εξισώσεων:

$$a_{cm} = \tfrac{5}{7}g\sin\theta.$$

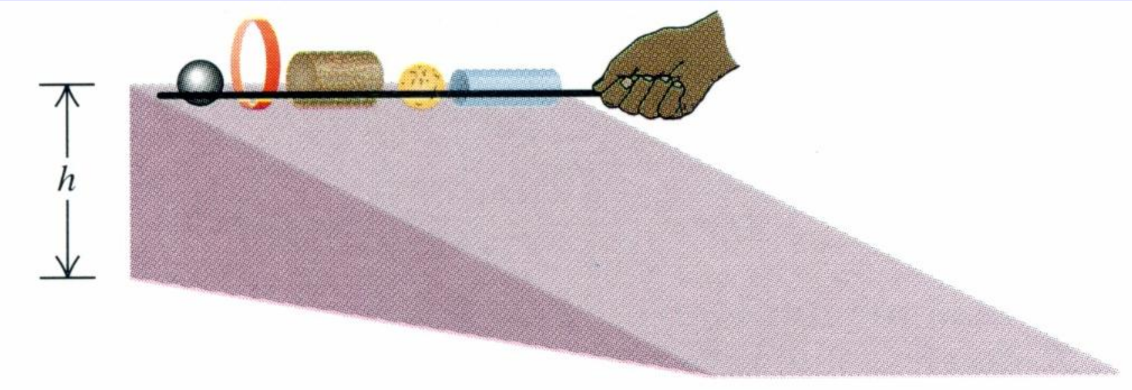
$$\mathcal{F} = \tfrac{2}{7}Mg\sin\theta.$$

Ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής έτσι ώστε να έχουμε κύλιση και όχι ολίσθηση:

$$\mu_s = \frac{\mathcal{F}}{n} = \frac{\tfrac{2}{7}Mg\sin\theta}{Mg\cos\theta} = \tfrac{2}{7}\tan\theta$$

Ερώτημα: ποιο είναι το έργο της τριβής;
(Απάντηση: μηδενικό)

Διάφορα ομογενή σώματα ξεκινάν από ηρεμία πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Ποιο φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με μεγαλύτερη ταχύτητα;



$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2,$$

$$K_1 = 0, \quad U_1 = Mgh$$

$$U_2 = 0.$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2.$$

$$\omega = v_{cm}/R.$$

$$I_{cm} = fMR^2$$

$$0 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}fMR^2(v_{cm}/R)^2 = \tfrac{1}{2}(1+f)Mv_{cm}^2, \quad \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1+f}}.$$

Όσο πιο μικρή η τιμή του συντελεστή *f*, τόσο πιο μεγάλη η ταχύτητα του σώματος.

Ο στρόβιλος μιας τουρμπίνας αεριωθουμένου αεροπλάνου (Σχ. 10–19) έχει ροπή αδρανείας 2,5 kg · m^2 γύρω από τον άξονα περιστροφής του. Η γωνιακή του ταχύτητα, ως συνάρτηση του χρόνου, είναι

$$\omega = (400 \text{ rad/s}^3)t^2.$$

a) Να βρεθεί η στροφορμή του στροβίλου ως συνάρτηση του χρόνου, και η αριθμητική της τιμή τη στιγμή $t = 2{,}0$ s.
b) Να βρεθεί η συνολική ροπή που δρα στο στρόβιλο ως συνάρτηση του χρόνου, καθώς και η αριθμητική της τιμή τη στιγμή $t = 2{,}0$ s.

ΛΥΣΗ a) Από την Εξ. (10–30),

$$L = I\omega = (2{,}5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(400 \text{ rad/s}^3)t^2 = (1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t^2.$$

Τη στιγμή $t = 2{,}0$ s,

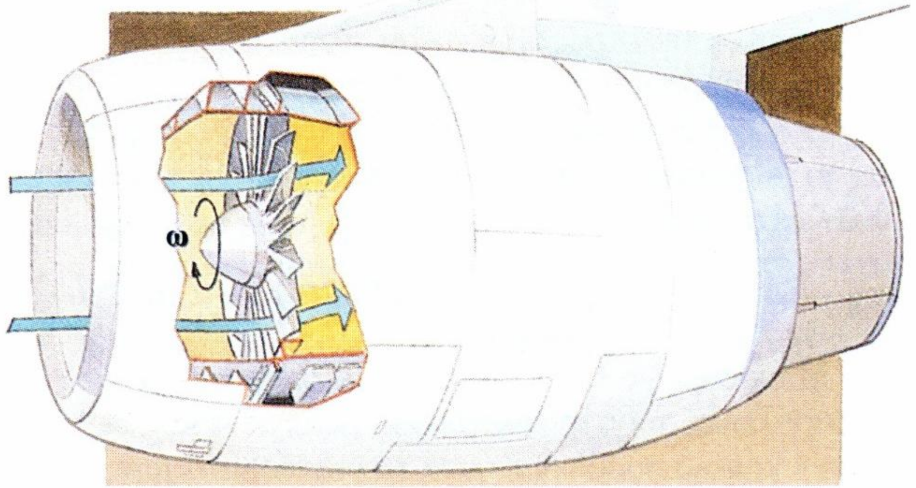
$$L = (1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(2{,}0 \text{ s})^2 = 4000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

b) Από την Εξ. (10–31),

$$\tau = \frac{dL}{dt} = (1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (2000\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t.$$

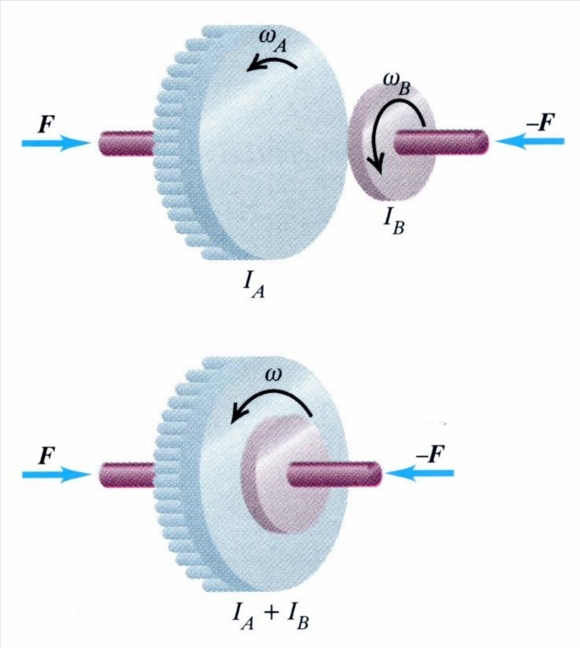
Τη στιγμή $t = 2{,}0$ s,

$$\tau = (2000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(2{,}0 \text{ s}) = 4000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 4000 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



10–19 Στο εσωτερικό κάθε μηχανής αεριωθουμένου λειτουργεί ένας ελικοφόρος στρόβιλος που εξαναγκάζει τον αέρα να διέλθει μέσα από τη μηχανή με πολύ μεγάλη ταχύτητα.

Συμπλέκτης αυτοκινήτου



Αρχικά οι δύο δίσκοι περιστρέφονται με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες (συμπλέκτης πατημένος).

Με το που αφήνεται ο συμπλέκτης οι δύο δίσκοι συμπιέζονται και κινούνται τελικά με κοινή γωνιακή ταχύτητα.

Οι δύο δίσκοι αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα. Επομένως η ολική στροφορμή διατηρείται.

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega,$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

Στροφορμή σε μια αστυνομική έφοδο Μια πόρτα πλάτους 1,0 m, και μάζας 15 kg, έχει πλευρική ανάρτηση και μπορεί να περιστρέφεται κατακόρυφα χωρίς τριβή. Η πόρτα είναι κλειστή αλλά ξεκλείδωτη. Ένας αστυνομικός ντέτεκτιβ σημαδεύει οριζόντια το κέντρο ακριβώς της πόρτας και πυροβολεί με μια σφαίρα μάζας 10 g και ταχύτητας 400 m/s (Σχ. 10–23). Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της πόρτας αμέσως μετά το σφήνωμα της σφαίρας στο κέντρο της. Διατηρείται η κινητική ενέργεια;

ΛΥΣΗ Θεωρούμε την πόρτα και τη σφαίρα σαν ενιαίο σύστημα. Δεν υπάρχει εξωτερική ροπή ως προς τον κατακόρυφο άξονα περιστροφής, επομένως η στροφορμή γύρω από αυτό τον άξονα διατηρείται. Η αρχική στροφορμή της σφαίρας προκύπτει από την Εξ. (10–28):

$$L = mvl = (0{,}010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})(0{,}50\ \text{m}) = 2{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

Η τιμή αυτή ισούται με την τελική στροφορμή $I\omega$, όπου $I = I_{\pi o\rho\tau} + I_{\sigma\varphi}$. Από τον Πίνακα 9–2,

$$I_{\pi o\rho\tau} = \frac{ML^2}{3} = \frac{(15\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m})^2}{3} = 5{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Η ροπή αδρανείας της σφαίρας (ως προς τον άξονα περιστροφής της πόρτας) είναι

$$I_{\sigma\varphi} = ml^2 = (0{,}010\ \text{kg})(0{,}50\ \text{m})^2 = 0{,}0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

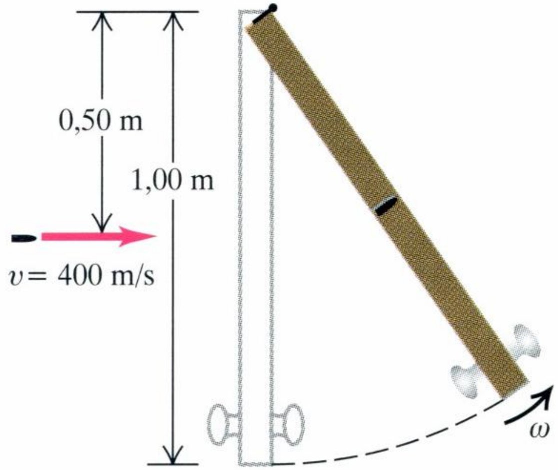
Η διατήρηση της στροφορμής απαιτεί: $mvl = I\omega$, ή

$$2{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = (5{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0{,}0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega,$$
$$\omega = 0{,}40\ \text{rad/s}.$$

Η σύγκρουση της σφαίρας με την πόρτα είναι ανελαστική γιατί κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης δρουν στο σύστημα εσωτερικές μη διατηρητικές δυνάμεις τριβής. Δεν περιμένουμε λοιπόν να διατηρείται η κινητική ενέργεια. Για να ελέγξουμε αυτή την πρόβλεψη, υπολογίζουμε την αρχική και την τελική κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}010\ \text{kg})(400\ \text{m/s})^2 = 800\ \text{J},$$
$$K_2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(5{,}0025\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(0{,}40\ \text{rad/s})^2 = 0{,}40\ \text{J}.$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι μόνο το $\frac{1}{2000}$ της αρχικής τιμής!



10–23 Άνοιγμα πόρτας με πυροβολισμό (κάτοψη). Η σφαίρα σφηνώνεται κάθετα στο κέντρο της πόρτας.